arXiv:2603.06949v1 [math.DG] 6 Mar 2026

自由边界曲线缩短流下收缩半圆的稳定性

THEODORA BOURNI、NATHAN BURNS 和 MAT LANGFORD

Abstract. 我们证明，在 $\mathbb{R}^2$ 凸域中，自由边界曲线缩短流以锐利的收敛速率收敛，并在有限时间内趋于一个圆形半点。

1. Introduction

平均曲率型流为理解子流形在曲率驱动演化下的几何与解析性质提供了基础框架。其中，曲线缩短流一直是一个核心模型问题；对曲线缩短流解的长期行为和奇点形成的研究带来了深刻见解，也为后来推广至高维平均曲率流的技术提供了试验平台。本文聚焦于 $\mathbb{R}^2$凸域中的自由边界曲线缩短流，尤其关注其长期行为。

对于没有边界的凸嵌入曲线，Gage 和 Hamilton 证明，曲线在流下收缩至一个圆点，且呈指数收敛 [5]。嵌入性至关重要：Angenent 给出了平面曲线在曲线缩短流下形成尖点的例子 [2]。然而，凸性并非必要条件，因为 Grayson 证明，任意简单闭曲线在流下都会变为凸曲线 [6]。高维情形也有类似结果。对于没有边界的紧致凸超曲面，Huisken 证明，这些超曲面在平均曲率流下会于有限时间内收缩至一个圆点 [7]。

存在边界时，曲率效应与边界条件之间的相互作用使分析变得更加微妙。Huisken 最初在图形情形 [8], 中研究了这一问题，随后 Stahl[10], 在更一般的情形下证明，具有自由边界且边界位于凸域上的凸超曲面会收敛到一点。在维数大于二时，Stahl 还证明了极限轮廓是圆形的。然而，对于平面曲线，极限是否呈圆形直到最近才得到解决。在 [9], 中，这一问题得到了解决：研究表明，在属于 C^2 类的凸平面区域中，任意紧致嵌入的自由边界曲线缩短流，要么在无限时间内收敛到一条临界弦，要么在有限时间内缩至一个圆形半点 [9]。这一结果可视为 Grayson 定理 [6], 的自由边界类比；它也改进了 Stahl 的工作，即便在凸情形下也是如此，因为它证明了流会收敛到一个圆形半点。

然而， [9] 中的爆破分析并未给出在消亡点附近进行重缩放后，解收敛到收缩半圆的速率。本文通过

稳定性分析弥补了这一空缺，得到了收敛到收缩半圆的精确收敛速率。这使得我们获得了与 [5]中研究的经典闭曲线情形相当的定量精度。定量估计和对极限行为的精确几何理解，在唯一性与分类结果中起着关键作用。例如， [11] 利用 Gage–Hamilton 流的向前渐近行为，证明了收缩圆在凸的整体古代解中的唯一性。类似地， [3,4] 建立了精确的向后时间渐近行为，从而推导出这些解具有旋转对称性。

我们的主要结果表明，以消亡点为中心进行适当重标度后，解将以显式且尖锐的速率在所有 C^k 范数下收敛到收缩半圆。

定理 1.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是边界为 C^2 的凸域，且 $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T)}$ 是从位于Ω内部的一条适当嵌入曲线Γ_0 出发的极大自由边界曲线缩短流。如果 $T<\infty$，那么 Γ_t 一致收敛到某个 $p\in\partial\Omega$；记$\mathcal{R}$ 为将 $\mathbb{R}^2$ 的外法向量映射到 p 处Ω 的 ∂的旋转，则重标度曲线

$$\tilde{\Gamma}_t := \frac{\mathcal{R}(\Gamma_t - p)}{\sqrt{2(T-t)}}$$

对每个$k\geq 0$，当 $t\to T$ 时，均以不低于$(T-t)^{1-\delta}$的速率，在 $\mathbb{R}^2_+$ 中关于 C^k 拓扑一致收敛到单位半圆，任意 $\delta>0$ 均成立。

该证明基于对收缩半圆作为重标度流的自相似解所进行的稳定性分析。线性化算子具有分别对应于时间平移和水平平移的不稳定模态，这阻碍了直接建立收敛估计。为克服这一困难，我们引入了流的规范化，通过固定两个几何量来动态调节这些对称性：曲线与支撑曲线之间的围成面积，以及适当定义的质心。采用这种规范化后，可以消除投影到不稳定模态上的分量，从而完成稳定性估计并获得尖锐的收敛速率。

我们的方法受到 Andrews 对闭超曲面仿射法向流的处理 [1, §16.5.2], 的启发，并将其调整至自由边界情形以及曲线缩短流的特定结构。然而，边界的存在带来了更多困难。一个重要问题是，使用高斯映射参数化时，定义域并不随时间保持不变。这使得围绕收缩半圆进行线性化后的稳定性分析远非显然。

我们注意到，在区域 Ω 为超平面的特殊情形下，主定理给出的衰减速率可以改进为 $2-\delta$（而不是 $1-\delta$）。对定理的证明稍作修改即可得到这一结论。当然，这种情形也可以在对解进行反射后，由 Gage–Hamilton 定理 [5], 推导得出。

2. Preliminaries

考虑凸的局部一致凸域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$中的自由边界曲线缩短流的一个紧解 $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T)}$。记该

区域的边界为 $\Sigma := \partial\Omega$，假设 Γ_t 收敛到圆形半点 $p \in \Sigma$，当$t \to T < \infty$；即，

$$\frac{\Gamma_t - p}{\sqrt{2(T-t)}} \overset{t\to T}{\to} \mathcal{C}^+ \tag{1}$$

在光滑拓扑下，其中 $\mathcal{C}^+$ 是H中的单位半圆；H是支撑 $\overline{\Omega} - p$ 且以原点为中心的闭半平面。经过刚体运动、时间平移和抛物重标度后，我们可以使 p 成为原点、H 成为上半平面，并使初始曲线 Γ_0 在光滑拓扑下与H中的单位半圆 ε接近，其中 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。特别地，当 $t \geq 0$ 时， Γ_t 将是凸的，因此我们可以考虑其支撑函数 $\sigma(\cdot,\ t)$的边值问题。采用高斯映射参数化，即以角度 $\theta \in [\underline{\theta}(t)\ \overline{\theta}(t)]$ 为参数，该角度是外单位法向量 $\mathbf{N} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$与正 x轴所成的角，那么 σ 满足以下问题：

$$\begin{cases} \sigma_t(\theta,t) &= -(\sigma_{\theta\theta}+\sigma)^{-1}\,,\ (\theta,t) \in (\underline{\theta},\overline{\theta}) \times [0,T)\,, \\ \sigma_\theta(\underline{\theta},t) &= -\sigma_\Sigma(\overline{\theta}_\Sigma)\,,\ t \in [0,T)\,, \\ \sigma_\theta(\overline{\theta},t) &= \sigma_\Sigma(\underline{\theta}_\Sigma)\,,\ t \in [0,T)\,, \end{cases} \tag{2}$$

其中 σ_Σ 是由高斯映射参数化的 Σ的支撑函数，因此

$$(\underline{\theta}_\Sigma(t), \overline{\theta}_\Sigma(t)) = (\tfrac{\pi}{2} + \overline{\theta}(t), \tfrac{3\pi}{2} + \underline{\theta}(t)). \tag{3}$$

请注意，为方便记号，我们通常省略角区间端点中的参数 t $\theta, \theta, \theta_\Sigma, \theta_\Sigma$，例如在式 (2) 中就是如此。

由 (1) 中的光滑收敛可知，存在一个常数 C，使得演化曲线的曲率κ 满足

$$C^{-1} \leq \sqrt{2(T-t)}\kappa(\theta,t) \leq C\,,\ \forall (\theta,t) \in [\underline{\theta},\overline{\theta}] \times [0,T)\,. \tag{4}$$

由于

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta} = \kappa_\Sigma(\underline{\theta}_\Sigma)\kappa(\overline{\theta},t) \ \text{ and } \ \frac{d}{dt}\underline{\theta} = -\kappa_\Sigma(\overline{\theta}_\Sigma)\kappa(\underline{\theta},t)\,, \tag{5}$$

其中 κ_Σ 是边界 Σ的曲率，我们得到

$$\frac{C^{-1}}{\sqrt{2(T-t)}} \leq \frac{d}{dt}(\overline{\theta} - \underline{\theta}) \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}}. \tag{6}$$

将此估计从时刻 t 积分到 T，得到：

$$C^{-1}\sqrt{2(T-t)} \leq \pi - (\overline{\theta} - \underline{\theta}) \leq C\sqrt{2(T-t)}. \tag{7}$$

2.1. **线性　稳定性**。式 (2) 在收缩半圆处的线性化为

$$\begin{cases} v_t(\theta,t) &= \frac{-1}{2t}(v_{\theta\theta}(\theta,t) + v(\theta,t))\,,\ \theta \in (0,\pi)\,, \\ v_\theta(0,t) &= 0\,, \\ v_\theta(\pi,t) &= 0\,, \end{cases}$$

其中 $t \in (-\infty,0)$。引入重缩放变量

$$\tilde{v}(\theta,\tilde{t}) := e^{\tilde{t}} v(\theta,t)\,,\ \ \tilde{t} = -\frac{1}{2}\log(-2t)$$

将该方程变换为

$$\begin{cases} \tilde{v}_{\tilde{t}}(\theta,\tilde{t}) & = \tilde{v}_{\theta\theta}(\theta,\tilde{t}) + 2\tilde{v}(\theta,\tilde{t})\,,\ \theta \in (0,\pi)\,, \\ \tilde{v}_{\theta}(0,\tilde{t}) & = 0\,, \\ \tilde{v}_{\theta}(\pi,\tilde{t}) & = 0\,, \end{cases}$$

其中此处为 $\tilde{t} \in (-\infty,\ +\infty)$。随后通过分离变量得到如下表示式

$$\tilde{v}(\theta,\tilde{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{(2-j^2)\tilde{t}} \cos(j\theta).$$

注意，不稳定模态 $j=0$ 对应于时间平移，而不稳定模态 $j=1$ 对应于水平平移。事实上，记 $\gamma(\cdot,\ t)$ 为 Γ_t 的高斯映射参数化，若 $\gamma_\varepsilon(\theta,\ t) := \gamma(\theta,\ t-\varepsilon)$，则 $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} \langle \gamma_\varepsilon,\ \mathsf{N}\rangle = 1$；若 $\gamma_\varepsilon(\theta,\ \underline{t}) := \gamma(\theta,\ t) + \varepsilon e_1$，则 $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} \langle \overline{\gamma_\varepsilon},\ \mathsf{N}\rangle = \cos\,\theta$。

2.2. 围面积泛函。 考虑一个固定的凸域 $U \subset \Omega$，其边界由局部一致凸自由边界部分 Γ 和$\partial\Omega$ 的凸障碍边界部分组成；为简化记号，我们仍将其记为 Σ。记 N_Σ 为 Σ 的向外单位法向量，记 X 为位置向量，则由 Γ和 Σ围成的面积 $|U|$ 为

$$\begin{aligned} 2|U| &= 2\int_U 1 dX = \int_U \mathrm{div} X dX = \int_\Gamma X\cdot \mathsf{N} ds + \int_\Sigma X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \frac{\sigma}{\kappa} d\theta + \int_\Sigma X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds_\Sigma = \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \sigma(\sigma_{\theta\theta}+\sigma) d\theta + \int_\Sigma X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds \\ &=: \mu(\sigma) + \mu_\Sigma. \end{aligned}$$

μ 在 $\sigma = 1$ 处沿 v 的$= \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\sigma_\varepsilon$ 一阶变分为 $\quad -$

$$D\mu\big|_1(v) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mu(\sigma_\varepsilon) = v_\theta\big|_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v d\theta\,.$$

因此,

$$\begin{aligned} 2|U| &= \mu_\Sigma + \mu(1) + D\mu\big|_1(\sigma-1) + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2) \\ &= \mu_\Sigma + \overline{\theta} - \underline{\theta} + (\sigma-1)_\theta\big|_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\sigma-1) d\theta + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2) \\ &= \mu_\Sigma + \overline{\theta} - \underline{\theta} + \sum_{X\in\partial\Sigma} X\cdot \mathsf{N}_\Sigma + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\sigma-1) d\theta + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2)\,, \end{aligned}$$

由此可得

$$2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)d\theta = 2|U| - (\overline{\theta}-\underline{\theta}) - \mu_\Sigma - \sum_{X\in\partial\Sigma} X\cdot \mathsf{N}_\Sigma + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2). \tag{8}$$

2.3. 质心泛函。 与第2.2节中的设定相同，我们将质心定义为

$$q(U) = \int_U X\cdot e_1 dX\,,$$

对于由局部一致凸自由边界部分 Γ 和局部一致凸障碍边界部分 Σ 围成的区域 U。质心由下式确定:

$$2q(U) = 2\int_U X\cdot e_1 dX = \int_U (X\cdot e_1)\mathrm{div}X dX = \int_U (\mathrm{div}((X\cdot e_1)X) - X\cdot e_1)dX,$$

由此得到

$$\begin{aligned} 3q(U) &= \int_U \mathrm{div}((X\cdot e_1)X)dX = \int_\Gamma (X\cdot e_1)X\cdot \mathsf{N} ds + \int_\Sigma (X\cdot e_1)X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds \\ &= \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\sigma\cos\theta + \sigma_\theta \sin\theta)\sigma(\sigma_{\theta\theta}+\sigma)d\theta + \int_\Sigma (X\cdot e_1)X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds \\ &=: \nu(\sigma) + \nu_\Sigma\,. \end{aligned}$$

ν 在 $\sigma = 1$ 处沿 $v := \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\sigma_\varepsilon$ 的一阶变分为

$$D\nu\big|_1(v) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\nu(\sigma_\varepsilon) = 2v\sin\theta\big|_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + v_\theta\cos\theta\big|_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} v\cos\theta d\theta\,.$$

因此，与第2.2小节中的面积泛函类似，我们有

$$\begin{aligned} 3q(U) =& \nu_\Sigma + \nu(1) + D\nu\big|_1(\sigma-1) + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2) \\ =& \nu_\Sigma + [\sigma\sin\theta + \sigma_\theta\cos\theta + (\sigma-1)\sin\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)\cos\theta d\theta + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2) \\ =& \int_\Sigma (X\cdot e_1)X\cdot \mathsf{N}_\Sigma ds + [X\cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + \sum_{\partial\Gamma}(1 - X\cdot \mathsf{N})\mathsf{N}_\Sigma\cdot e_1 \\ &+ \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)\cos\theta d\theta + O(\|\sigma-1\|_{C^2}^2)\,. \end{aligned}$$

这里我们用到了恒等式

$$X\cdot e_2 = (\sigma\mathsf{N} + \sigma_\theta \mathsf{T})\cdot e_2 = \sigma\sin\theta + \sigma_\theta\cos\theta\,,$$

其中，T 是曲线的单位切向量（在 N 上将 $\pi/2$ 逆时针旋转所得）。我们还采用以下记号表示函数在边界点处的取值之差:

$[f]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} = f(\overline{\theta}) - f(\underline{\theta})$，这通常由对导数积分得到。因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\sigma - 1)\cos\theta \, d\theta =& 3q(U) - \int_{\Sigma} (X \cdot e_1)\sigma_\Sigma ds - [X \cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \\ &+ \sum_{\partial\Gamma} (1 - \sigma)(\mathsf{N}_\Sigma \cdot e_1) + O(\|\sigma - 1\|_{C^2}^2).\end{aligned} \tag{9}$$

3. Evolution equations

现在考虑与演化曲线 Γ_t相关的围成面积 $|U_{(t)}|$和质心 $q(U_{(t)})$，其定义见第 2.2 节和第 2.3 节。经过适当的平移和重标度后，我们预计这些量满足 $|U_{(t)}| = (\theta - \theta) \sim 0$和 $q(U_{(t)}) \sim 0$。因此，我们推导它们在重标度流下的演化方程，

$$\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}} = \lambda(t)\big(\Gamma_t - p(t)e_1\big), \quad \frac{d\tilde{t}}{dt} = \lambda^2. \tag{10}$$

我们将对演化曲线和 Σ均使用高斯映射参数化，分别记为 γ 和 γ_Σ。回顾一下，Σ的支撑函数记为 σ_Σ，定义在区间 $[\theta_\Sigma, \theta_\Sigma]$上，而支撑函数 $\sigma(\cdot, t)$ ofΓ_t 定义在 $[\theta, \theta]$上，这两个区间之间的关系如式（3）所述。为简化记号，我们省略区域中对 t 的显式依赖，并对全文中的其他量采用相同约定。

至此，引入一种能简化论述的边界记号较为方便。我们用记号 $\{f\}$ 表示函数在 Γ_t的边界点处取值之和；也就是说，

$$\{f\} := \sum_{\partial\Gamma_t} f.$$

注意 $\partial\Gamma_t = \partial\Sigma$。由于我们采用高斯映射参数化，在讨论定义于 Γ_t上的函数时，边界点对应于角θ 与 θ；在讨论定义于 Σ上的函数时，则对应于 θ_Σ 与 θ_Σ。由于所有函数均以角参数表示，该记号的含义将由上下文清楚看出。例如，

$$\{\sigma\} = \sigma(\overline{\theta}) + \sigma(\underline{\theta}), \qquad \{\sigma_\Sigma\} = \sigma_\Sigma(\overline{\theta}_\Sigma) + \sigma_\Sigma(\underline{\theta}_\Sigma),$$

and

$$\{\sigma\kappa_\Sigma\} = \sigma(\overline{\theta})\kappa_\Sigma(\underline{\theta}_\Sigma) + \sigma(\underline{\theta})\kappa_\Sigma(\overline{\theta}_\Sigma).$$

注意，不应把这一记号与我们用来表示函数在边界点处取值之差 的记号相混淆，即 $[f]_{\theta_\Sigma}^{\theta_\Sigma} = f(\theta_\Sigma) - f(\theta_\Sigma)$或$[f]_{\theta}^{\theta} = (\theta) - f(\theta)$，后者通常由对导数积分而产生。

我们还引入平移后的位置向量

$$X_p := X - p\, e_1,$$

并定义相应的支撑函数为

$$\sigma^p := X_p \cdot \mathsf{N}, \qquad \sigma_\Sigma^p := X_p \cdot \mathsf{N}_\Sigma.$$

最后，我们引入边界角差函数

$$\Theta(t) = \overline{\theta} - \underline{\theta}$$

以及尺度函数

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}\,.$$

在渐近分析中，对于定义在流 $\{\Gamma_t\}$ 上的量，我们将使用标准的 $O - o$ 记号。特别地，我们用 $O(\Lambda^k)$、 $k \in \mathbb{Z}$表示某个量除以 Λ^K 后，在$[0,T)$ 中的所有时刻和位置上其绝对值均有界；用 $o(\Lambda)$表示此外，该上界随着 $t \to T$ 趋于零。

3.1. 围成面积泛函的演化。 我们定义以下量，它是重标度流的 $\int_\theta^{\overline{\theta}} (\sigma - 1) d\theta$ 的一个近似，如式 (8) 所示。

$$U(t) := 2\lambda^2(t)|U_{(t)}| - \Theta(t) - \lambda^2(t)\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma} \frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\, d\theta - \Lambda(t)\{\sigma_\Sigma\}\,, \tag{11}$$

其中， $U_{(t)}$ 表示围成面积，即第 2.2 节中定义的重标度流在时刻 t 的围成面积。注意，该量不依赖于平移 $p \cdot e_1$。

引理 3.1。 U 的演化（定义见(11)）如下:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t) =& \frac{\lambda_t}{\lambda}\left(2U(t) + 2\Theta(t) + 2\Lambda(t)\{\sigma_\Sigma\}\right)\\ &- \lambda^2(2(\overline{\theta} - \underline{\theta}) - \{\sigma_\Sigma\kappa\}) + \Lambda(t)\{\sigma\kappa\kappa_\Sigma\} - \{\kappa_\Sigma\kappa\} - \Lambda^3\{\sigma_\Sigma\}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

证明。 我们分别计算定义中各项的演化 U 。首先回顾式（5），它给出

$$\Theta'(t) = \kappa_\Sigma(\underline{\theta}_\Sigma)\kappa(\overline{\theta}, t) + \kappa_\Sigma(\overline{\theta}_\Sigma)\kappa(\underline{\theta}, t) = \{\kappa_\Sigma\kappa\}\,.$$

含有 Σ 的项仅受端点演化的影响，因此

$$\frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma} \frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\, d\theta = -\{\sigma_\Sigma\kappa\}\,,$$

and

$$\frac{d}{dt}\{\sigma_\Sigma\} = -\{\sigma\kappa\kappa_\Sigma\}\,.$$

对于围成面积，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}2|U_{(t)}| =& \frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \frac{\sigma}{\kappa}\, d\theta + \frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma} \frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\, d\theta\\ =& \{\kappa_\Sigma\sigma\} - \{\sigma_\Sigma\kappa\} - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} 1 + \sigma(\kappa_{\theta\theta} + \kappa)\, d\theta\,.\end{aligned}$$

右侧的最后一个积分可以估计为

$$\begin{aligned}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} 1+\sigma(\kappa_{\theta\theta}+\kappa) &= [\sigma\kappa_\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - [\sigma_\theta\kappa]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} 1+(\sigma+\sigma_{\theta\theta})\kappa\, d\theta \\ &= [\sigma\kappa_\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - [\sigma_\theta\kappa]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} 2\, d\theta\,.\end{aligned}$$

回顾（2），注意到边界项相互抵消，因此得到

$$\frac{d}{dt}|U_{(t)}| = -(\overline{\theta}-\underline{\theta}) = -\Theta(t)\,.$$

因此，将各项合并起来可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t) =& 4\lambda\lambda_t|U_{(t)}| - 2\lambda\lambda_t\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}\frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta - \Lambda_t\{\sigma_\Sigma\} \\ &- \lambda^2(2(\overline{\theta}-\underline{\theta}) - \{\sigma_\Sigma\kappa\}) + \Lambda\{\sigma\kappa\kappa_\Sigma\} - \{\kappa_\Sigma\kappa\} \\ =& \frac{\lambda_t}{\lambda}\left(2U(t) + 2\Theta + 2\Lambda\{\sigma_\Sigma\}\right) \\ &- \Lambda^3\{\sigma_\Sigma\} - \lambda^2(2(\overline{\theta}-\underline{\theta}) - \{\sigma_\Sigma\kappa\}) + \Lambda\{\sigma\kappa\kappa_\Sigma\} - \{\kappa_\Sigma\kappa\}\,.\end{aligned}$$

□

3.2. **质心泛函的演化**。根据（9），我们定义以下量，作为重标度流中 $\int_\theta^\theta (\sigma-1)\cos\theta d\theta$ 的近似。

$$q(t) = \lambda^3\left(3q(U^p_{(t)}) - \int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}(X\cdot e_1)\frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta - \frac{1}{\Lambda(t)^2}[\gamma\cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\right), \tag{13}$$

其中 $q(U^p{}_{(t)})$ 是在时间 t 的重标度流的质心，如（2.3）中所定义 .

引理 3.2。 q 的演化定义于 （13），其表达式为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(t) =& \,3\,\frac{\lambda_t}{\lambda}\,q(t) \\ &+ \lambda^3\Bigg[-\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\big(X\cdot e_1 - p\big)\,d\theta - p_t\,|U_{(t)}| \\ &\qquad + \big\{(X\cdot e_1)\sigma_\Sigma\kappa\big\} + \frac{1}{\Lambda^2}\big[\kappa\sin_\Gamma\big]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2\big[\gamma\cdot e_2\big]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\Bigg].\end{aligned} \tag{14}$$

证明。 我们分别计算 q 定义中各项的演化。首先计算仅涉及 Σ 的各项的演化，而这只取决于端点的运动。

$$\frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}(X\cdot e_1)\frac{\sigma_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta = -\left\{(X\cdot e_1)\sigma_\Sigma\kappa\right\},$$

and

$$\frac{d}{dt}[\gamma\cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} = -[\kappa\sin]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}.$$

为计算 $q(U^p{}_{(t)})$ 的演化，我们按如下方式进行。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(U^p_{(t)}) &= \frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)\frac{\sigma^p}{\kappa}\,d\theta + \frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}(X_p\cdot e_1)\frac{\sigma^p_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta\\ &= \{X_p\cdot e_1\sigma^p\kappa_\Sigma\} + \{X_p\cdot e_1\sigma^p_\Sigma\kappa\}\\ &\quad - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)(1+\sigma^p(\kappa_{\theta\theta}+\kappa)) + \frac{\sigma^p}{\kappa}(\kappa\cos\theta - \kappa_\theta\sin\theta)\,d\theta\\ &\quad - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\frac{p_t}{\kappa}(\sigma^p + X_p\cdot e_1\cos\theta)\,d\theta - \int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}\frac{p_t}{\kappa_\Sigma}(\sigma^p_\Sigma + X_p\cdot e_1\cos\theta)\,d\theta\,.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)(1+\sigma^p(\kappa_{\theta\theta}+\kappa))\,d\theta\\ &=[(X_p\cdot e_1)\sigma^p\kappa_\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - [(X_p\cdot e_1)\sigma^p_\theta\kappa]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\\ &\quad + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)(1+(\sigma^p+\sigma^p_{\theta\theta})\kappa)\,d\theta - \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)_\theta(\sigma^p\kappa_\theta - \sigma^p_\theta\kappa)\,d\theta\\ &=[(X_p\cdot e_1)\sigma^p\kappa_\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} - [(X_p\cdot e_1)\sigma^p_\theta\kappa]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\\ &\quad + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(X_p\cdot e_1)(1+(\sigma^p+\sigma^p_{\theta\theta})\kappa)\,d\theta + \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\frac{\sin\theta}{\kappa}(\sigma^p\kappa_\theta - \sigma^p_\theta\kappa)\,d\theta\,,\end{aligned}$$

并且由于

$$\sigma^p + \sigma^p_{\theta\theta} = \sigma + \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\kappa}$$

and

$$\sigma^p_\theta\sin\theta - \sigma^p\cos\theta = -X\cdot e_1 + p\,,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(U^p_{(t)}) &= -\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}X_p\cdot e_1\,d\theta - \frac{1}{3}p_t\int_U \operatorname{div}(X_p + (X_p\cdot e_1)e_1)\\ &= -\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}X_p\cdot e_1\,d\theta - p_t|U_{(t)}|\,.\end{aligned}\tag{15}$$

综合以上结果，并注意到 $\Lambda_t = \Lambda^3$，我们得到（14）。 □

4. Dynamic stability

线性分析（回顾第2.1小节）表明，在模去时间平移和水平空间平移之后，收缩半圆是动态稳定的。为此，我们将证明，对于流的重标度(10)，以及对于˜适当选取的函数 λ 和 p，Γ 的支撑函数 $\tilde{\sigma}$ 具有投影

到满足衰减估计的不稳定模态上，这些衰减估计足以产生向圆点的“快速”收敛。粗略地说，这种规范化意味着，对于重标度流，这些量

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1)\, d\theta, \qquad \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1)\cos\theta\, d\theta$$

˜均为 $e^{-2t} + O(|\sigma - 1|^2_{C^2})$ 阶。我们将分两步完成：首先得到较弱的界 $e^{-t} + O(|\sigma - 1|^2_{C^2})$，然后以此为基础改进估计，从而得到最优界。

引理 4.1。 存在一个缩放函数 $\lambda\colon [0,T) \to \mathbb{R}$，使得 $U(t) = 0$，对所有$t \in [0,T)$ </style}均成立，其中 如式 (11) 所定义。此外，该 λ 满足

$$\lambda(t) - \Lambda(t) = O(1)$$

and

$$\frac{\lambda_t}{\lambda^3} = 1 + O(\Lambda^{-1})\,.$$

证明。 回顾引理 3.1 中给出的 U 的演化。为了求出使 $U(t)$ 恒等于零的 λ，我们求解

$$\frac{\lambda_t}{\lambda}\,(2\Theta + 2\Lambda\{\sigma_\Sigma\}) = \lambda^2(2\Theta - \{\sigma_\Sigma\kappa\}) - \Lambda\{\sigma\kappa\kappa_\Sigma\} + \{\kappa_\Sigma\kappa\} + \Lambda^3\{\sigma_\Sigma\}$$

注意，由收敛式 (1)，我们有

$$\kappa(\theta) = \Lambda + E(\theta) \ \text{ and } \ \sigma(\theta) = \frac{1}{\Lambda} + e(\theta)\,, \tag{16}$$

其中函数 E, e 满足

$$E(\theta) = o(\Lambda)\,,\ e(\theta) = o(\Lambda^{-1})\,. \tag{17}$$

因此， λ 应满足常微分方程

$$\frac{\lambda_t}{\lambda}\,(2\Theta + 2\Lambda\{\sigma_\Sigma\}) = \lambda^2(2\Theta - \Lambda\{\sigma_\Sigma\} + \{E\sigma_\Sigma\}) - \{\Lambda e\kappa\kappa_\Sigma\} + \Lambda^3\{\sigma_\Sigma\}\,,$$

将两边除以 λ^2 后，得到

$$\frac{\lambda_t}{\lambda^3} = 1 + \frac{\{E\sigma_\Sigma\} - 3\Lambda\{\sigma_\Sigma\}}{2\Theta + 2\Lambda\{\sigma_\Sigma\}} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\Lambda^3\{\sigma_\Sigma\} - \{\Lambda e\kappa\kappa_\Sigma\}}{2\Theta + 2\Lambda\{\sigma_\Sigma\}}\,.$$

接下来注意到 $\sigma_\Sigma = O(\Lambda^{-2})$，因为 σ_{Σ_t} 及其导数（σ_{Σ_t}）$_\theta$ 在$\theta = \frac{3\pi}{2}$ 处均为零。因此，根据泰勒定理，结合 (7) 和 (3)，可得

$$\sigma_{\Sigma_t}(\theta) = \frac{1}{2}(\theta - \tfrac{3\pi}{2})^2\,\kappa^{-1}_{\Sigma_t}\big(\tfrac{3\pi}{2}\big) + O\big((\theta - \tfrac{3\pi}{2})^3\big) = O(\Lambda^{-2})\,. \tag{18}$$

利用（17）和（18），该常微分方程可简化为

$$2\frac{\lambda_t}{\lambda^3} = 2 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^2}O(\Lambda)\,.$$

因此，任何具有 $\lambda(t) \to \infty$ 当 $t \to T$ 的解，都满足

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\Lambda^2} + O(\Lambda^{-3}) .$$

为此，注意到存在一个常数 C，使得，

$$2 - \frac{C}{\Lambda} - \frac{C\Lambda}{\lambda^2} \leq 2\frac{\lambda_t}{\lambda^3} \leq 2 + \frac{C}{\Lambda} + \frac{C\Lambda}{\lambda^2} .$$

这意味着

$$\left(e^{\frac{C}{\Lambda}}\lambda^{-2}\right)_t \geq e^{\frac{C}{\Lambda}}\left(2 - \frac{C}{\Lambda}\right) \text{ and } \left(e^{-\frac{C}{\Lambda}}\lambda^{-2}\right)_t \leq e^{-\frac{C}{\Lambda}}\left(2 + \frac{C}{\Lambda}\right) .$$

将这些不等式从 t 积分到 T，即可得到所述估计。重新整理可得关于 λ 的所需估计。

最后，我们注意到，取上述的 λ 时，$U(t) = 0$。事实上，对 λ 作此选择，再结合（12），可推出

$$U'(t) = \frac{2\lambda_t}{\lambda}U(t) .$$

因此

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda^{-2}U(t)\right) = 0 ,$$

且由于 $\lim_{t\to T} U(t) = 0$，结论得证。 □

引理 4.2. 考虑在(13)中定义的 q，其中 λ满足 λ^{-1} 有界。于是，存在一个与 λ无关的平移函数 $p\colon [0,T) \to \mathbb{R}$，使得$q(t) = 0$对所有 $t \in [0,T)$均成立。此外，p满足

$$p = O(\Lambda^{-1}) \quad and \quad p_t = O(\Lambda) .$$

证明. 回顾 q的演化方程 (14)，我们选取 p 使得

$$p_t|U_{(t)}| - p\Theta = -\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} X \cdot e_1 \, d\theta + \{(X \cdot e_1)\sigma_\Sigma\kappa\} + \frac{1}{\Lambda^2}[\kappa \sin]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2[\gamma \cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} .$$

注意，这可以写成

$$(p|U_{(t)}|)_t = -\Delta(t) + \delta(t) , \tag{19}$$

其中 $\Delta(t) = -\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} X \cdot e_1 \, d\theta$，而 $\delta(t)$是右端的其余部分，并注意到这些函数满足

$$\Delta(t) = o(\Lambda^{-1}) \text{ and } \delta(t) = O(\Lambda^{-2}) . \tag{20}$$

事实上，通过用支撑函数表示位置，可以很容易地验证这一点，

$$X = \sigma(\cos\theta, \sin\theta) + \sigma_\theta(-\sin\theta, \cos\theta) ,$$

并利用渐近分析（16）。回想（18）和（2）后，$\delta(t)$ 的估计便显而易见，而对 $\Delta(t)$ 的估计则可通过分部积分直接得到

$$\Delta(t) = [-\sigma \sin\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \sigma \cos\theta d\theta = [(\Lambda^{-1} - e(\theta)) \sin\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} e(\theta) \cos\theta d\theta .$$

因此，将（19）从 t 积分到 T，可得

$$p|U_{(t)}| = O(\Lambda^{-3})\,.$$

现在，回顾第2.2节中 $|U_{(t)}|$的表达式。结合 (16) 和 (18)，可得 $|U_{(t)}| = O(\Lambda^{-2})$，因此我们得到

$$p = O(\Lambda^{-1})\,.$$

另请注意，(19) 与估计 (20) 一起给出了所需的 p_t 估计。最后，取此处的 p，并由 (14)， q 的演化变为

$$\left(\frac{q}{\lambda^3}\right)_t = 0$$

并且由于 $q(t) \to 0$ 且 $t \to T$，而且假设 λ^{-1} 有界，积分可知q 必恒为零。□

现在我们可以对不稳定模态进行估计。为了方便起见，将其˜表示为新时间变量 t的形式，我们先注意到

$$e^{-\tilde{t}} = O(\lambda^{-1}) = O(\Lambda^{-1})\,. \tag{21}$$

To 为验证这一点，回想一下，按照 (10) 中的定义，新时间变量满足

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{t}}{dt} = \lambda^2 \\ \tilde{t}(0) = -\frac{1}{2}\log(2T). \end{cases}$$

利用引理 4.1 中关于 λ 的不等式，我们得到

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = \lambda^2 = \Lambda^2 + O(\Lambda)\,,$$

˜对其积分可得估计 $e^t = O(\Lambda)$，因此得到 (21)。

引理 4. 3. 取引理 *4.1* 和 *4.2* 中的 λ 和 p，重标度流 (10) 满足

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1) = O(e^{-\tilde{t}}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|^2_{C^2})$$

and

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1)\cos\theta = O(e^{-\tilde{t}}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|^2_{C^2})\,.$$

P顶。 表达式 (8) 以及引理 4.1 中给出的关于 λ 的估计，得到

$$\begin{aligned} 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1) &= 2\lambda^2(t)|U_{(t)}| - (\overline{\theta} - \underline{\theta}) - \lambda^2(t)\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma} \frac{\sigma^p_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\, d\theta - \lambda(t)\{\sigma^p_\Sigma\} + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|^2_{C^2}) \\ &= U(t) + O(\Lambda^{-1}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|^2_{C^2})\,. \end{aligned}$$

表达式 (9)、引理 4.1 以及引理 4.2 中给出的关于 p 的估计，得到

$$\begin{aligned}2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\tilde{\sigma}-1)\cos\theta =&3\lambda^3(t)q(U^p_{(t)})-\lambda^3(t)\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma}(X_p\cdot e_1)\frac{\sigma^p_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta-\lambda(t)[\gamma\cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\\&+\sum_{\partial\Gamma}(1-\sigma)(\mathsf{N}_\Sigma\cdot e_1)+O(\|\tilde{\sigma}-1\|^2_{C^2})\\=&q(t)+O(\Lambda^{-1})+O(\|\tilde{\sigma}-1\|^2_{C^2})\,.\end{aligned}$$

由引理 4.1 和 4.2 以及 (21)，结论即得。 □

5. L^2 DECAY

现在考虑 (10) 中定义的归一化流，其中 λ和 p 如引理 4.1、4.2 中所定义。然后，以高斯映射为参数，并在此省略波浪号，支撑函数满足:

$$\partial_t\sigma=L\,\sigma+B\,\sigma\cos\theta-(\sigma_{\theta\theta}+\sigma)^{-1}=:F(\sigma)\,, \tag{22}$$

其中

$$L:=\frac{\lambda_t}{\lambda}\,,\ B:=-\lambda p_t\,, \tag{23}$$

并且还要注意， t是 $t\in(-\frac{1}{2}\log(2T)\ +\infty)$ 中定义的新时间变量。注意，由引理 4.1、4.2 和 (21),

$$|L-1|\le Ce^{-t}\,,\ |B|\le Ce^{-t}\,. \tag{24}$$

此外，支撑函数的角度定义域并未改变，但采用新时间变量后，它们的

$$\frac{d}{dt}\Theta=O(\lambda^{-1})=O(e^{-t})$$

我们将证明， $\sigma-1$ 以指数速度收敛到 0。

定理 5.1. 对于任意 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\alpha<1$，存在 $C(k,\alpha)$，使得重标度流 *10*（其中 λ 和 p如引理 *4.1* 、 *4.2* 中所定义）满足

$$\|\sigma-1\|_{C^k}\le C(k,\alpha)e^{-\alpha t}\,,\forall t\in(-\tfrac{1}{2}\log(2T),+\infty)\,.$$

注. 为证明定理 5.1，我们先证明 L^2 范数的衰减，这一结论稍强一些,

$$\|\sigma-1\|_{L^2}\le Ce^{-2t}\,,\ \forall t\in(-\tfrac{1}{2}\log(2T),+\infty)\,.$$

对于高阶导数，由于我们使用插值来得到估计，衰减因子必须减小。

证明. 我们将通过计算并估计 $\|\sigma-1\|_{L^2(\theta,\theta)}$ 的演化来证明其衰减。随后，高阶范数估计将通过插值得出。

我们将 L， B（如（23）中所定义）仅视为 t 的函数，因此，按照（22）对 $\sigma=1$ 处并沿 $v:=\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\sigma_\varepsilon$ 的速度 F 进行速度的线性化，可得

$$DF\big|_1 v=v_{\theta\theta}+(L+1)v+Bv\cos\theta\,.$$

因此我们得到

(25)

$$\frac{d}{dt}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)^2 d\theta \leq Ce^{-t}\|\sigma-1\|_{C^0}^2 + 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\Big[(\sigma-1)\Big(F(1)+DF\big|_1(\sigma-1)\Big)+C|\sigma-1|\|\sigma-1\|_{C^2}^2\Big]d\theta\,.$$

由于

$$F(1) = L - 1 + B\cos\theta,$$

由引理 4.3 和 (24)，并应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)F(1)\,d\theta \leq C\left(e^{-2t}+\|\sigma-1\|_{C^2}^4\right)\,.$$

(25) 右侧的最后一项利用 Hölder 不等式和柯西-施瓦茨不等式估计为

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}|\sigma-1|\|\sigma-1\|_{C^2}^2 d\theta \leq C\|\sigma-1\|_{C^2}^2\|\sigma-1\|_{L^2} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\sigma-1\|_{C^2}^4 + \epsilon\|\sigma-1\|_{L^2}^2\,,$$

对于任意 $\epsilon>0$。

最后，对于梯度项，我们有

$$2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)DF\big|_1(\sigma-1)d\theta = 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)\Big((\sigma-1)_{\theta\theta}+2(\sigma-1)\Big)d\theta+O(e^{-2t})+O(\|\sigma-1\|_{C^2}^4)\,.$$

为了估计右端第一项，我们在区间 $[0,\pi]$ 上构造 $\sigma-1$ 的一个 C^1 （分段C^2）延拓，并在端点处施加诺伊曼边界条件。该构造对每个时间切片独立进行；因此，我们在记号中略去对 t的依赖。我们通过如下设定来定义该延拓

$$\overline{\sigma}(\theta)-1 = \begin{cases}\underline{a}\theta^2+\underline{b}\theta+\underline{c} & \theta\in[0,\underline{\theta}]\\ \overline{a}\theta^2+\overline{b}\theta+\overline{c} & \theta\in[\overline{\theta},\pi],\end{cases} \tag{26}$$

其中

$$\underline{a} = \frac{\sigma_\theta(\underline{\theta})}{2\underline{\theta}},\quad \underline{b}=0,\quad \underline{c}=\sigma(\underline{\theta})-1-\underline{a}\,\underline{\theta}^2,$$

and

$$\overline{a} = -\frac{\sigma_\theta(\overline{\theta})}{2(\pi-\overline{\theta})},\quad \overline{b}=-2\pi\overline{a},\quad \overline{c}=\sigma(\overline{\theta})-1-\overline{a}\overline{\theta}^2-\overline{b}\,\overline{\theta}.$$

回顾(2)和(18)，我们注意到 a、 $\underline{a}$ 有界， $\overline{a}$ 、 σ 关于 $[0,\theta]$ 递减、关于$[\theta,\pi]$递增，并且

$$\|\sigma-1\|_{C^0} \leq \|\overline{\sigma}-1\|_{C^0} \leq \|\sigma-1\|_{C^0}+Ce^{-2t}\,. \tag{27}$$

现在，我们要估计的梯度项可以写为

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)\Big((\sigma-1)_{\theta\theta}+2(\sigma-1)\Big)d\theta = \int_0^{\pi}(\overline{\sigma}-1)\Big((\overline{\sigma}-1)_{\theta\theta}+2(\overline{\sigma}-1)\Big)d\theta+Err(\overline{\sigma},\sigma)\,,$$

其中，误差项 $Err(\sigma,\sigma)$ 可按如下方式进行界定。

(28)
$$\begin{aligned} Err(\overline{\sigma},\sigma) &= -\int_{[0,\pi]\setminus[\underline{\theta},\overline{\theta}]} (\bar{\sigma}-1)\Big((\bar{\sigma}-1)_{\theta\theta}+2(\bar{\sigma}-1)\Big)d\theta \\ &\le -\int_{[0,\pi]\setminus[\underline{\theta},\overline{\theta}]} (\bar{\sigma}-1)(\bar{\sigma}-1)_{\theta\theta}d\theta \le Ce^{-t}\|\overline{\sigma}-1\|_{L^2} \le \frac{C}{\epsilon}e^{-2t}+\epsilon\|\sigma-1\|_{L^2}^2\,, \end{aligned}$$

对任意 $\epsilon>0$。

最后，我们估计该项

$$\int_0^{\pi} (\overline{\sigma}-1)\Big((\overline{\sigma}-1)_{\theta\theta}+2(\overline{\sigma}-1)\Big)d\theta$$

通过在 $L^2([0,\underline{\pi}])$ 中将 $\underline{\sigma}-1$ 表示为 $\sigma-1=\sum_j \sigma_j\phi_j$，其中 $\phi_j=\cos(j\theta)$ 且 $\sigma_j=\langle\sigma-1,\ \phi_j\rangle$。由于 σ 是一个 C^1，且为分段 C^2 函数，并满足诺伊曼边界数据，因此我们有

$$\int_0^{\pi}\phi(\overline{\sigma}_{\theta\theta}+2\overline{\sigma}) = \int_0^{\pi}\overline{\sigma}(\phi_{\theta\theta}+2\phi)\,,$$

对任意 ϕ，其也满足诺伊曼边界数据。L^2 收敛意味着弱L^2 收敛，因此

(29)
$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi}(\overline{\sigma}-1)((\overline{\sigma}-1)_{\theta\theta}+2(\overline{\sigma}-1)) \\ &\qquad=\int_0^{\pi}\sum_j \sigma_j\phi_j((\overline{\sigma}-1)_{\theta\theta}+2(\overline{\sigma}-1)) \\ &\qquad=\lim_N\sum_j^N\sigma_j\int_0^{\pi}(\overline{\sigma}-1)((\phi_j)_{\theta\theta}+2\phi_j) \\ &\qquad=\lim_N\sum_j^N(2-j^2)\sigma_j\int_0^{\pi}(\overline{\sigma}-1)\phi_j=\lim_N\sum_j^N(2-j^2)\sigma_j^2 \\ &\qquad\le 4(\sigma_0^2+\sigma_1^2)-2\lim_N\sum_{j=0}^N\sigma_j^2=4(\sigma_0^2+\sigma_1^2)-2\|\overline{\sigma}-1\|_{L^2}^2\,. \end{aligned}$$

利用 (27) 和引理 4.3，可以控制这两个不稳定节点，

(30)
$$\begin{aligned} \sigma_0^2+\sigma_1^2 &\le C\left[\left(\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)d\theta\right)^2+\left(\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\sigma-1)\cos\theta d\theta\right)^2+e^{-4t}+\|\sigma-1\|_{C^2}^4\right]. \\ &\le C\left(e^{-2t}+\|\sigma-1\|_{C^2}^4\right) \end{aligned}$$

T因此，将上述所有估计代入（25），对于任意 $\epsilon>$，我们得到 $0,$

$$\frac{d}{dt}\|\sigma-1\|_{L^2}^2 \le \tfrac{C}{\epsilon}(e^{-2t}+\|\sigma-1\|_{C^2}^4)-(4-\epsilon)\|\sigma-1\|_{L^2}^2\,.$$

有界区域上的加利亚尔多-尼伦伯格插值不等式给出

$$\|\sigma-1\|_{C^2}\leq C\|\sigma-1\|_{C^7}^{\frac{1}{3}}\|\sigma-1\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}+C\|\sigma-1\|_{L^2}\,.$$

由于由 (1) 可得，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，$\|\sigma-1\|_{C^k}=o(1)$，我们可以吸收 $\|\sigma-1\|_{C^2}^4$ 项，从而得到：对于任意 $\epsilon>0$，存在 $t_\epsilon\geq-\frac{1}{2}\log(2T)$，使得

$$\frac{d}{dt}\|\sigma-1\|_{L^2}^2\leq Ce^{-2t}-(4-\epsilon)\|\sigma-1\|_{L^2}^2\,,\ \forall t\geq t_\epsilon\,.$$

由此可得

$$\|\sigma-1\|_{L^2}\leq Ce^{-t}\,,\ \forall t\geq\tfrac{1}{2}\log(2T), \tag{31}$$

其中 C 取决于 $\|\sigma(\cdot,\tfrac{1}{2}\log(2T))-1\|_{C^0}$ 和 T，这是因为我们考虑的是整个时间区间上的估计。通过插值，例如使用上述 Gagliardo-Nirenberg 不等式，可得所需的估计。□

现在我们可以利用这一点，为原始（未缩放的）解得到估计。

定理 5.2. 自由边界曲线缩短流解 $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T)}$ 的支撑函数满足：对于任意 $\alpha<1$,

$$\sigma=\sqrt{2(T-t)}+O((T-t)^{\frac{1+\alpha}{2}})$$

and

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}+O((T-t)^{\frac{\alpha-1}{2}})\,.$$

证明。 由定理 5.1 和 (21)，对于任意 $\alpha<1$,

$$|\lambda(\sigma-p)-1|=|\tilde{\sigma}-1|=O(\Lambda^{-\alpha})$$

and

$$|\lambda^{-1}\kappa-1|=|\tilde{\kappa}-1|=O(\Lambda^{-\alpha})\,,$$

这里我们重新为重标度流 (10) 引入波浪号。回顾引理 4.1 中关于 λ 的估计，可立即得到 κ 的估计。为了证明支撑函数的估计，我们将先证明可以改进引理 4.2 中给出的 p的估计。回顾

$$p_t=-\frac{1}{|U_{(t)}|}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}X_p\cdot e_1\,d\theta+\frac{\delta(t)}{|U_{(t)}|}=-\frac{1}{|U_{(t)}|\lambda}\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\tilde{X}\cdot e_1\,d\theta+\frac{\delta(t)}{|U_{(t)}|}\,,$$

˜其中 $\delta(t)$ 的定义见 (20)。由于 $X\cdot e_1=\tilde{\sigma}\cos\theta-\tilde{\sigma}_\theta\sin\theta$，我们有

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\tilde{X}\cdot e_1=\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\tilde{\sigma}\cos\theta-\tilde{\sigma}_\theta\sin\theta\,d\theta=2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\tilde{\sigma}\cos\theta\,d\theta-[\tilde{\sigma}\sin\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}$$

$$=2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\tilde{\sigma}-1)\cos\theta\,d\theta+[(2-\tilde{\sigma})\sin\theta]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\,.$$

因此，由引理 4.3 可知，上述量的阶为 $O(\Lambda^{-1})$；结合式 (20)，我们得到改进的估计。

$$p_t=O(1)\,.$$

由于 $p(T) = 0$，从 t 到 T 积分可得

$$p(t) = O(\Lambda^{-2})\,. \tag{32}$$

现在，通过缩放回去并回顾引理 4.1 中对λ的估计，我们可以得到所需的估计。

$$\sigma = \frac{1}{\Lambda} + O(\Lambda^{-1-\alpha})\,.$$

□

注意，在定理 5.2 的证明中，我们表明，在得知 σ 具有一定的衰减之后（引理 4.3 已足够），可以回到引理 4.2，改进对 p的估计。我们声称，也可以改进引理 4.1 中对 λ 的估计。为此，注意到根据定理 5.2，按式 16 定义的量 E 和 e满足改进后的估计

$$E(\theta) = O(\Lambda^{1-\alpha})\,,\ e(\theta) = O(\Lambda^{-1+\alpha})\,,\ \forall \alpha < 1\,. \tag{33}$$

因此，按照引理 4.1 的证明，可以对 λ 所满足的常微分方程作出更好的估计：

$$2\frac{\lambda_t}{\lambda^3} = 2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^{1+\alpha}}\right) + \frac{1}{\lambda^2}O(\Lambda^{1-\alpha})\,.$$

因此，一个满足 $\lambda(t) \to \infty$ 当 $t \to T$时条件的解，满足

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\Lambda^2} + O(\Lambda^{-3-\alpha})\,,$$

经过重新排列可得

$$\lambda = \Lambda + O(\Lambda^{-\alpha})\,,\ \forall \alpha < 1\,. \tag{34}$$

现在我们可以将引理 4.3 改进如下。

推论 5.3。 取引理 *4.1* 和 *4.2* 中的 λ和 p，则重标度流 (10) 对任意 $\alpha < 1$均满足，

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1) = O(e^{-(1+\alpha)\tilde{t}}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|_{C^2}^2)$$

and

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1)\cos\theta = O(e^{-(1+\alpha)\tilde{t}}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|_{C^2}^2)\,.$$

证明。 注意，由 (8) 和 (9)，结合 (32)、(34) 中对 p 和 λ 给出的新估计，对于任意 $\alpha < 1$,

$$\begin{aligned} 2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (\tilde{\sigma} - 1) &= 2\lambda^2(t)|U_{(t)}| - (\overline{\theta} - \underline{\theta}) - \lambda^2(t)\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\overline{\theta}_\Sigma} \frac{\sigma_\Sigma^p}{\kappa_\Sigma}\, d\theta - \lambda(t)\{\sigma_\Sigma^p\} + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|_{C^2}^2) \\ &= U(t) + O(\Lambda^{-1-\alpha}) + O(\|\tilde{\sigma} - 1\|_{C^2}^2)\,, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}2\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}(\tilde{\sigma}-1)\cos\theta =&3\lambda^3(t)q(U^p_{(t)})-\lambda^3(t)\int_{\underline{\theta}_\Sigma}^{\bar{\theta}_\Sigma}(X_p\cdot e_1)\frac{\sigma^p_\Sigma}{\kappa_\Sigma}\,d\theta-\lambda(t)[\gamma\cdot e_2]_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}}\\&+\sum_{\partial\Gamma}(1-\sigma)(\mathsf{N}_\Sigma\cdot e_1)+O(\|\tilde{\sigma}-1\|^2_{C^2})\\=&q(t)+O(\Lambda^{-1-\alpha})+O(\|\tilde{\sigma}-1\|^2_{C^2})\,.\end{aligned}$$

该结论现由引理 4.1 和 4.2 以及 (21) 得出。 □

注记。 尽管我们可以提高不稳定模态的衰减率，但不能指望完整的 L^2 范数具有更快的衰减，这是由边界值导致的。具体而言，在边界上我们有 $|\tilde{\sigma}_\theta|=\tilde{\sigma}_\Sigma$ ，其阶为 e^{-t}。回顾公式 (5)，这一点无法改进。

致谢。 TB 和 NB 获得了美国国家科学基金会资助（NSF 2405007）。ML 获得了澳大利亚研究理事会发现项目资助（DP250103952）。

References

[1] Ben Andrews 等. 外在几何流. 第206卷. 数学研究生教材. 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, [2020] ©2020, 第xxviii+759页.[2] Sigurd Angenent. “论曲线缩短流中的奇点形成”. 载于：微分几何杂志 33 (1991), 第601–633页.[3] Sigurd Angenent、Panagiota Daskalopoulos 与 Natasa ˇSeˇsum. “平均曲率流双凸闭古代解的唯一性”. 载于： 数学年刊 190.3 (2019), 第791–816页.[4] Theodora Bourni、Mat Langford 与 Giuseppe Tinaglia. “平均曲率流的塌缩古代解”. 载于：微分几何杂志 119.2 (2021), 第 187–219 页 .[5] M. Gage 与 R.S. Hamilton. “ 收缩凸平面曲线的热方程.” 英文. 载于： 微分几何杂志23 (1986), 第69–96页.[6] Matthew A. Grayson. “缩短嵌入曲线”. 载于： 数学年刊（*2*） 129.1 (1989), 第71–111页.[7] Gerhard Huisken. “凸曲面经平均曲率流变为球面”. 载于： 微分几何杂志 20 (1984), 第 237–266 页 .[8] Gerhard Huisken. “ 带边界条件的非参数平均曲率演化”. 载于： 微分方程杂志 77 (1989), 第369–378页.[9] Mat Langford 与 J. Zhu Jonathan. “带自由边界的曲线缩短流的距离比较原理”. 预印本, ar Xiv:2302.14258.[10] Axel Stahl. “带诺伊曼边界条件的平均曲率流解的收敛”. 载于：变分法与偏微分方程 4.5 (1996), 第 421–441 页 .[11] Xu-Jia Wang. “ 平均曲率流的凸解”. 载于： 数学年刊 173.3 (2011), 第1185–1239页.

Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, TN, 37996, USA
Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, TN, 37996, USA
Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra, ACT, 0200, Australia