arXiv:2603.06975v1 [math.AG] 7 Mar 2026

正特征曲面上的消失定理与 Bogomolov 不等式

叶飞与朱志贤

Abstract. 本文研究正特征曲面上 Bogomolov 不稳定性定理与 Miyaoka-Sakai 定理之间的等价性。我们证明，Bogomolov 不稳定性定理可由 Miyaoka-Sakai 定理推出。反过来，它可推出 Miyaoka-Sakai 定理的一个部分版本，但该版本不包含消失结论。这个部分版本仍足以推出 Mumford-Ramanujam 消失定理。

此外，我们确定了一类正特征曲面，在这类曲面上，Miyaoka-Sakai 定理（或其较弱的变体）成立，或者 Kawamata-Viehweg 消失定理成立。特别地，我们为光滑德尔佩佐曲面上的 Kawamata-Viehweg 消失定理给出了一个新的证明。

作为 Miyaoka-Sakai 定理的一个应用，我们得到了关于 Fujita 猜想的 Reider型结果。

1. Introduction

在零特征的代数闭域上，消失定理在代数几何中发挥着不可替代的作用，尤其是在极小模型纲领的研究中。然而，自 Raynaud 构造出正特征下 Kodaira 消失定理的首个反例以来 [Ray78]，人们又发现了 Kodaira 消失定理和 Kawamata-Viehweg 消失定理的其他反例（例如，参见 [Eke88, Xie10, Xie11, Muk13, CT18, Tot19, Ber21]）。与这些进展并行，Bogomolov 不稳定性定理 [Ray78, Muk13] 和 Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式 [Muk13] 也相继出现了反例。这种病态现象还延伸到了关于伴随线性系的藤田猜想 [GZZ22]，；该猜想在零特征下已在至多五维的情形中得到证明（参见 [Rei88, EL93, Kaw97, YZ20]）。尽管 Kodaira 消失定理、Kawamata-Viehweg 消失定理和 Bogomolov 不等式在许多曲面上均告失效，尤其是在一般型曲面或 Kodaira 维数为一的拟椭圆曲面上，人们仍为确定这些定理成立的条件付出了大量努力（例如，参见 [She91, Ter98, Lan22, Kos23]）。

在零特征下，据 [DC13、FdB95] 可知，博戈莫洛夫不稳定性定理等价于 Kawamata-Viehweg 消失定理以及以下 Miyaoka-Sakai 定理。

定理 1.1 （Miyaoka-Sakai 定理（参见 [Miy80，定理 2.7]，[Sak90，命题 1]））。设 S 是代数闭域上一个零特征光滑曲面，且 D 是一个大除子，满足$H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-D))\ \neq 0$。存在一个非零有效除子 B 使得

(1) $-(D-B)$ 在 B 上数值有效，即对 B 的任意不可约分支 C，$(D-B)\cdot C\leq 0$。*(2)* $H^1(S,\mathcal{O}_S(-D+B))=0$。*(3)* 若 $D^2>0$，则 $D-2B$ 是大除子。

我们的主要兴趣在于研究正特征下博戈莫洛夫不稳定性定理、宫冈-酒井定理与 Kawamata-Viehweg 消失定理之间的等价性。遵循 Sakai 的方法 [Sak90]，，可以从博戈莫洛夫不稳定性定理的有效版本（定理 3.1）推出宫冈-酒井定理的一个部分版本（定理 3.5）以及 Reider型结果（定理 2.2）。然而，这种方法无法直接推出 $H^1(S,\mathcal{O}_S(-D+B))$ 的消失，而这正是 Di Cerbo 通过宫冈-酒井定理证明博戈莫洛夫不稳定性定理时的关键要素 [DC13]。文献 [DC13] 中对这一消失性的证明表明，在正特征下，需要 Kawamata-Viehweg 型

*Key words and phrases.*消失定理、博戈莫洛夫不稳定性、代数曲面、向量丛、正特征。作者谨向 Jiang Chen 和 Lei Zhang 致谢，感谢他们提供宝贵的讨论。第一作者的研究部分得到 PSC-CUNY奖 # 68419-00 56 的资助。

消失定理才能建立完整的宫冈-酒井定理。事实上，只需找到一个特殊的子除子 $Q \leq D$ 使得 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-Q)) = 0$（见引理 4.2）。

我们的第二个目标是找出正特征下的曲面，使得在这些曲面上可以不依赖 Bogomolov 不稳定性定理来证明 Miyaoka-Sakai 定理。

最近，Enokizono 证明了一个消失定理 [Eno23，定理 4。17] 关于大除子的整 Zariski 分解。此类特殊子除子 $Q \leq D$ 的一个自然候选是 $\mathbb{Z}$-正部 $P_{\mathbb{Z}}$（属于 D），只要 $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}})) > \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)_n$，其中

$$H^1(S, \mathcal{O}_S)_n = \ker\left(H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^1(S, F_*^e \mathcal{O}_S)\right), \quad e \gg 0$$

表示 $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ 的弗罗贝尼乌斯幂零部分。

在光滑弗罗贝尼乌斯分裂曲面上，若 $P_{\mathbb{Z}}$ 是有效的。基于这一观察，我们证明 Kawamata-Viehweg 消失定理对有效、数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-除子在光滑弗罗贝尼乌斯分裂曲面上成立（命题5.10）。

在不要求 $P_{\mathbb{Z}}$ 有效的情况下，我们证明 Kawamata-Viehweg 消失定理在 Hirzebruch 曲面和光滑德尔佩佐曲面上仍然成立。因此，Miyaoka-Sakai 定理在这些曲面上也成立。此外，我们还证明了 Miyaoka-Sakai 定理在 Frobenius 分裂的射影直纹曲面和光滑弱德尔佩佐曲面上成立。对于 Kodaira 维数为零的极小曲面，也可以得到类似结果。

对于既非一般型、也非 Kodaira 维数为一的准椭圆曲面的光滑射影曲面，受 Mukai 对 Mumford-Ramanujam 消失定理的证明启发，即 $H^1(S, \mathcal{O}(-D)) = 0$ 若 D 数值有效且大（见 [Ram74，定理]和 [Mum78，第二节]），我们得到了 Miyaoka-Sakai 定理的 $\mathbb{Q}$-除子版本。该版本也推出 Mumford-Ramanujam 消失定理。

总之，我们的研究揭示了以下蕴含关系：

$$\begin{array}{c} \text{Effective Bogomolov's instability theorem (Theorem 2.2)} \\ \Downarrow \\ \text{Effective Miyaoka-Sakai theorem (Theorem 3.1)} \\ \Downarrow \\ \text{Effective Ramanujam vanishing theorem (Corollary 3.2)} \\ \Downarrow \\ \text{Effective Mumford-Ramanujam vanishing (Corollary 3.4)} \end{array},$$

Kawamata-Viehweg 消失定理 $\Rightarrow$ Miyaoka-Sakai 定理 $\Rightarrow$Bogomolov 不稳定性定理，以及

弱 Miyaoka-Sakai 定理（推论 6.6）$\Longrightarrow$Mumford-Ramanujam 消失（推论 6.5）。

本文的组织结构如下。第2节中，我们介绍一些记号，并回顾有关 Bogomolov 不稳定性定理的结果。第 3节中，我们阐述有效 Bogomolov 不稳定性定理（见定理 2.2）的推论，其中包括 Reider 型结果。第4节中，我们证明 Miyaoka-Sakai 消失定理蕴含 Bogomolov 不稳定性定理。第 5节中，我们证明 Kawamata-Viehweg 消失定理在 Hirzebruch 曲面和德尔佩佐曲面上成立，同时 Miyaoka-Sakai 定理在更多 Kodaira 维数至多为零的曲面上成立。第 6节中，我们证明一个 $\mathbb{Q}$除子版本的 Miyaoka-Sakai 定理，并证明它蕴含适用于既非一般型、也非 Kodaira 维数为一的准椭圆曲面的 Mumford-Ramanujam 消失定理。

2. Preliminaries

全文中，我们用 S 表示特征为 p 的代数闭域 $\mathbf{k}$ 上的光滑射影曲面，并用 K_S 表示其上的典范除子 S。除非另有说明，除子均指整 Cartier 除子。

博戈莫洛夫不稳定性定理（[Bog79，10.12. 推论 2]）已得到广泛研究，并被推广到正特征情形，参见 [She91，定理 12], [Lan16，定理 7。1], [Kos23，定理 1。1]我们首先回顾斜率稳定性的定义。

定义 2.1。设 $\mathcal{E}$ 是秩为 r 的局部自由层，H 是 S上的数值非平凡 nef 除子。$\mathcal{E}$ 关于 H 的**斜率**定义为

$$\mu_H(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E}) \cdot H}{r}.$$

我们称 $\mathcal{E}$ 是**slope** H**-半稳定**的

$$\mu_H(\mathcal{F}) \leq \mu_H(\mathcal{E})$$

对于任意子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$，满足 $0 <$ 秩$(\mathcal{F})$ $<$秩$(\mathcal{E})$。

我们称 $\mathcal{E}$ 是 **斜率** H**-不稳定的**，如果它不是斜率 H-半稳定的。

在正特征下，为使博戈莫洛夫不稳定性定理在一般型曲面或 Kodaira 维数为 1 的拟椭圆曲面上成立，已知不等式中需要一个修正项。令 C_S 为如下定义的一个非负整数:

- 若 $\kappa(S) = 2$ 且 $p > 2$，则
$$C_S := \min\left\{\frac{\mathrm{Vol}(S)}{4}, 2 + 5\,\mathrm{Vol}(S) - \chi(\mathcal{O}_S)\right\},$$
其中，$\mathrm{Vol}(S) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\text{维数 } H^0(S,\mathcal{O}_S(mK_S))}{m^2/2!}$ 是 S 的体积;
- 若 $\kappa(S) = 2$ 且 $p = 2$，则
$$C_S := \min\left\{\frac{\max\{\mathrm{Vol}(S), \mathrm{Vol}(S) - 3\chi(\mathcal{O}_S) + 2\}}{4}, 2 + 5\,\mathrm{Vol}(S) - \chi(\mathcal{O}_S)\right\};$$
- 若 $\kappa(S) = 1$，S 是准椭圆的，$p > 0$，且 $\chi(\mathcal{O}_S) \leq 0$，则
$$C_S := 2 - \chi(\mathcal{O}_S);$$
- 否则，$C_S = 0$,

注意，在 C_S 的定义中，$\mathrm{Vol}(S) = K_{S'}^2$，其中 S' 是 S 的极小模型 .

定理 2.2 ([Bog79，10.12. 推论 2], [She91，定理 12], [Lan16，定理 7。1], [Kos23，定理 1。1])。设 $\mathcal{E}$ 是秩为 2 的局部自由层，定义在 S上。若

$$c_1(\mathcal{E})^2 - 4c_2(\mathcal{E}) > 4C_S,$$

则相对于某个数值非平凡的 *nef* 除子 H，$\mathcal{E}$ 是斜率 H-不稳定的。

3. From Bogomolov to Miyaoka-Sakai and then Mumform-Ramanujam

按照 [Sak90，第 3], 节中所述的 Mumford-Reider 方法，我们得到以下有效版宫冈-酒井定理。该定理最初由 [Miy80] 使用 Miyaoka 消失定理和 Zariski 分解证明。Sakai 也在 [Sak90]中给出了略有不同的证明。

定理 3.1 (有效 Miyaoka-Sakai 定理)。设 D 是 S 上的一个大除子，满足 $D^2 > 4C_S$。假设 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$。则存在一个非零有效除子 B，使得
(1) $(D - B)B \leq 0$*(2)* $D - 2B$ 是大且$(D - 2B)^2 \geq D^2$。

证明。由于 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$，因此存在一个非分裂正合列

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_S(D) \to 0, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{E}$ 是秩为 2 的局部自由层，而 $c_1(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_S(D)$。由于 $4c_2(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{E})^2 = D^2 > 4C_S$，根据定理 2.2，$\mathcal{E}$ 关于某个数值非平凡的 nef 除子 H斜率不稳定。于是 H具有一个极大不稳定子层，该子层是秩为 1 的局部自由层。设 $\mathcal{E}$是与该极大不稳定子层相关联的除子。存在一个正合列

$$0 \to \mathcal{O}_S(A) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{O}_S(B) \to 0, \tag{2}$$

其中 B 也是一个除子。此外,

$$(A - B)H = 2(\mu_H(\mathcal{O}_S(A)) - \mu_H(\mathcal{E})) \geq 0. \tag{3}$$

将短正合列 (2) 扭转 $\mathcal{O}_S(-A)$ 后，我们得到 $c_2(\mathcal{E}(-A))$ = 度 $Z \geq 0$。另一方面，我们有

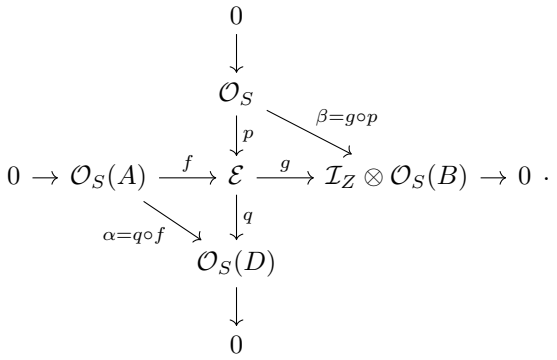
$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{E}(-A)) =& c_2(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E})c_1(\mathcal{O}_S(-A)) + c_1(\mathcal{O}_S(-A))^2 \\ =& -A(A+B) + (-A)^2 \\ =& -AB \\ =& -(D-B)B. \end{aligned} \tag{4}$$

比较 c_2（$\mathcal{E}$）的计算，我们看到（$D-B$）$B = AB =$ –度数 $Z \leq 0$ 这就证明了第（1）部分。此外，该不等式还意味着

$$(A-B)^2 = (A+B)^2 - 4AB = D^2 - 4AB \geq D^2 > 4C_S > 0. \tag{5}$$

如果（$A-B$）$H = 0$，那么由霍奇指数定理（见 [Bˇad01，推论 2.4]）以及H的数值有效性，我们得到 $H^2 = 0$ 且 H 是数值平凡的。这与关于 H的假设矛盾。因此，（$A-B$）$H > 0$。对 H 作微小扰动后，我们可以假设 H 是充足的。由 [Bˇad01，命题 2.2],我们知道 $A-B = D-2B$ 是一个大除子。第（2）部分得证。

为了证明 B 是有效且非平凡的，考虑如下交换图



我们断言复合 α： $\mathcal{O}_S(A) \xrightarrow{f} \mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{O}_S(D)$ 是非平凡的。反设 $q \circ f$是平凡的。由于垂直序列是正合的，存在一个非平凡态射 ϕ: $\mathcal{O}_S(A) \to \mathcal{O}_S$。由此可知 $-A$ 是有效的，因此 $(A-B)H = (2A-D)H = 2AH - DH \leq 0$ 这与 $(A-B)H > 0$矛盾。因此， α 是自然包含，且 $B = D - A$ 是有效的。

我们声称， $B \neq 0$。否则，我们有 $A = D$，度 $Z = 0$，且序列（2）变为

$$0 \to \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_S \to 0$$

这使正合列（1）分裂。这与序列（1）是非分裂的假设矛盾。 □

定理 3.1 导出了数值连通大除子的拉马努金消失定理的一个有效版本，并由此推出 Mumford-Ramanujan 消失定理的一个有效版本。

光滑曲面 S 上的伪有效除子 D，若对任意非平凡的伪有效分解 $D = A + B$，均有 $AB > 0$，则称其为**数值连通的**。数值连通除子的集合包含数值有效且大的除子。

推论3.2（有效拉马努贾姆消失定理）。设 D 是 S 上的一个伪有效除子，满足 $D^2 > 4C_S$。若 D 数值连通，则 H^1（S，$\mathcal{O}_S$（$-D$））$= 0$。

证明。 由 Zariski 分解， D 是大除子。若 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$，根据定理 3.1，将存在一个非零分解 $D = A + B$，由伪有效除子构成，使得 $AB \leq 0$，这与 D 数值连通的假设矛盾。 □

引理 3.3 (Ramanujam 连通性引理（参见 [Ram74，定理], [KM98的证明，引理 1，3],或 [Sak90，引理 2]）。设 D 是 S 上的一个丰沛且大除子，且 $D = M + N$ 是伪有效除子的一个分解。若 $MN \leq 0$，则 M 或 N 数值平凡。

推论 3.4（有效 Mumford-Ramanujam 消失定理）。 设 D 是 S 上的数值有效除子，满足$D^2 > 4C_S$。则 H^1(S，$\mathcal{O}_S(-D)$) $= 0$。

证明。 由于 D 是数值有效的，且 $D^2 > 0$，由引理 3.3， D 数值连通。因此结论由推论 3.2得出。 □

备注。 在若干条件下，已有多篇论文给出了 Mumford-Ramanujam 消失定理的有效版本，例如参见 [Ter99，定理1.6。], [Muk13，定理 3], [DCF15，推论5。9],以及 [Lan16，推论7。4]。

作为定理 3.1的另一个应用，我们给出正特征下伴随除子的 Reider 型结果。我们注意到，定理 3.5并非全新。若干相关结果已在包括以下文献的多部著作中得到研究 [LT25], [Eno23], [Ter99], [Nak93]。在此，我们沿用 Sakai 的方法（[Sak90，定理 3]），给出一种上同调方法。

定理 3.5。 设 D 是 S上的一个数值有效除子。

(1) 若 $D^2 \geq 4C_S + 5$，则 $K_S + D$ 是无基点的，除非存在一个除子 B，使得以下情形之一成立：$DB = 1$ 且 $B^2 = 0$，或 $DB = 0$ 且 $B^2 = -1$。*(2)* 若 $D^2 \geq 4C_S + 9$，则 $K_S + D$ 是非常丰的，除非存在一个除子 B，使得以下条件之一成立：

- $DB = 0$、 $B^2 = -2$ 或 $B^2 = -1$;
- $DB = 1$、 $B^2 = -1$ 或 $B^2 = 0$;
- $DB = 2$、 $B^2 = 0$;
- $C_S = 0$、 $D^2 = 9$和 $D \equiv 3B$。

证明。 在此证明中，对于任意子概形 $Z \subset S$，我们用 $\mathcal{I}_Z$ 表示其理想层。

为证明该定理，我们考虑以下几种情形。

(1) 假设 K_S+D 在 $Z = \{p\}$ 处不是自由的，其中 p 是一个点。则 $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S+D)\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{I}_Z) \neq 0$.~令 $\phi\colon S \to S$ 为在 p 处的吹起， E 为例外除子。由此可得 $\phi_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E)) = \mathcal{I}_Z$,$E^2 = -1$，且 $K_{\tilde{S}} = \phi^*($ $K_S) + E$。(2) 假设 $K_S + D$ 不能分离两个不同的点 p 和 q。则 $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + D) \otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{I}_Z) \neq 0$，其中 Z 是支撑在 $\{p, q\}$上的约化闭子概形。令 $\phi\colon S \to S$ 为沿 Z吹起 S， E 为位于 Z上方的例外除子。由此可得 $\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E) = \mathcal{I}_Z$, $E^2 = -2$，且$K_{\tilde{S}} = \phi^*(K_S) + E$。(3) 若 $K_S + D$ 不能在点 p处分离切向量，则 $H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + D)) \to \mathcal{O}_S(K_S + D) \otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_p^2$ 不是满射。令 (x, y) 为 S 在 p处的局部坐标， Z 为支撑在 p处且局部由 (x, y^2) 定义的零维子概形。因此， $H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S+D)) \to \mathcal{O}_S(K_S+D)$ $\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S/\mathcal{I}_Z$ 不是满射。于是 $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + D) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{I}_Z) \neq 0$。令 $\phi_1\colon S_1 \to S$ 为在 p 处吹起 S， 其例外除子 E_1 位于 p上方；令 p' 为 E_1 与局部由 $y = 0$定义的曲线的严格~变换的交点。令 $\phi_2\colon$ $S \to S_1$ 为在点 p' 处吹起 S_1， 且~ ~E_2为位于 p'上方的例外除子。令 $\phi = \phi_2 \circ \phi_1\colon S \to S$为复合，且 $E = E_1 + 2E_2$，其中 $\bar{E}_1$为 E_1的严格变换。则 $\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-E) = \mathcal{I}_Z$, $E^2 = -2$, $K_{\tilde{S}} = \phi^*K_S + E$。

~令 $D = \phi^*D - 2E$。则有

$$H^1(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-\widetilde{D})) = H^1(S, \phi_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\phi^*K_S + \phi^*D - E)) = H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + D) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{I}_Z) \neq 0.$$

根据 E的定义可知， $\widetilde{D}^2 = (\phi^*D - 2E)^2 = D^2 - 4$的次数为 $Z > 4C_S$，其中 $Z = -E^2$。根据~ ~ ~ ~ ~ ~定理 3.1，存在一个非零有效除子 B，使得 $(D - B)B < 0$，且 $(D - 2B)$ 是大除子。令~ ~$B = \phi_*B$。注意到 B 是有效的，因为 B 是有效的。因此，存在一个除子 G，其支撑包含于~例外除子 E 中，使得 $\phi^*B = B + G$。由此可得

$$\begin{aligned}(\widetilde{D} - \widetilde{B})\widetilde{B} =&(\phi^*D - \phi^*B - 2E + G)(\phi^*B - G)\\ =&(D - B)B + (2E - G)G\\ =&(D - B)B + E^2 - (E - G)^2\\ \geq&(D - B)B + E^2.\end{aligned}$$

Since $(\widetilde{D} - \widetilde{B})\widetilde{B} \leq 0$，则 $(D - B)B \leq -E^2 = \deg Z$，或等价地， $B^2 \geq DB - \deg Z$。

~ ~由于 $(D-2B)$ 是大，由 [Sak90，引理 3]， $D-2B$ 是大。由于 D 是数值有效且大，由引理 3.3，我们知道 $(D-2B)2B>0$，这意味着 $B^2<\frac{DB}{2}$。因此， $DB/2>DB-\deg Z$。于是，

$$DB-\deg Z\leq B^2<\frac{DB}{2}<\deg Z.$$

由 Z的定义，我们得到以下结论。

若 K_S+D 不是无基点的，则$\deg Z=-E^2=1$，由此得到 $0\leq DB\leq 1$ 和 $DB-1\leq B^2<\frac{DB}{2}$。若 $DB=0$，则 $B^2=-1$。若 $DB=1$，则 $B^2=0$。

若 K_S+D 不是非常丰的，则$\deg Z=-E^2=2$ 由此得到 $0\leq DB\leq 3$ 和 $DB-2\leq B^2<\frac{DB}{2}$。若 $DB=0$，则 $B^2=-1$ 或 $B^2=-2$。若 $DB=1$，则 $B^2=0$ 或 $B^2=-1$。若 $DB=2$，则 $B^2=0$。若$DB=3$，则 $B^2=1$。在这最后一种情形中，由霍奇指数定理（见 [Bˇad01，推论2.4] 以及关于 D的假设，我们看到

$$0\geq(D-3B)^2=D^2-6DB+9B^2=D^2-9\geq 4C_S\geq 0.$$

因此， $C_S=0$ 且$(D-3B)^2=0$，这意味着由霍奇指数定理可知， D与 $3B$数值等价。□

因为当 $\kappa(S)\leq 1$ 且 S 不是具有 $\kappa(S)=1$的准椭圆时 $C_S=0$，藤田猜想在这样的曲面上成立。当 S 是具有 $\kappa(S)=1$的准椭圆时，藤田猜想已在 [Che21]中得到证实。当 $\kappa(S)=2$时，在 [GZZ22]，中，顾、张、张证明，对每个非负整数 m，存在曲面 S 和除子 A_R，使得 $\mathcal{O}_S(K_S+mA_R)$不是整体生成的。因此，藤田猜想对(S,A_R)不成立。通过直接计算可以验证$(mA_R)^2<4C_S+5$，也就是说，mA_R 不满足定理 3.5的条件。

关于藤田猜想的一个推广，涉及 kKodaira 维数为 1 的拟椭圆曲面上伴随线丛的 -非常丰性，见 [Zha 23]。关于一般情形下 k-非常丰性的研究可参见 [Ter99]。值得注意的是，定理 3.5证明中采用的论证可以推广，从而在 k-生成性方面建立类似结果。通过应用 Bridgeland 稳定性条件，Larsen 和 Tenie [LT25]最近在正规射影曲面上获得了 Kodaira 型消失定理和 Reider型结果。

4. From Miyaoka-Sakai to Bogomolov

在零特征下，定理 3.1 由 Zariski 分解和 Kawamata-Viehweg 消失定理推出（见 [Sak90，第 3]节）。此外，这种方法还导出消失 $H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-D+B))=0$ （见 [DC13，推论 2.1]），这对于从 Miyaoka-Sakai 定理推出博戈莫洛夫不稳定性定理（见 [DC13]）起着关键作用。

正特征下的情形有所不同，因为众所周知，Kawamata-Viehweg 消失定理在一般情况下会失效（例如参见 [CT18，定理3。1]）。特别是，目前尚不清楚消失 $H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-D+B))=0$ 是否仍成立。尽管如此，若假设这一消失成立，便可推出 Bogomolov 不稳定性定理（见命题4.5）。这一观察促使我们给出以下定义，以简化后续讨论。

定义 4.1。设 D 是一个大除子 S，满足 $D^2>0$。若存在一个有效除子 B 使得

(1) 若 $B\neq 0$，则对 B 的任意不可约分支 C，有 $(D-B)C\leq 0$。(2) $D-2B$ 是大除子，且 $(D-2B)^2\geq D^2$。(3) $H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-D+B))=0$。

我们称**Miyaoka-Sakai 定理在** S 上成立，如果每个满足条件 $D^2>0$ 的 S 上的大除子 D 都是 Miyaoka-Sakai 除子。

对于 S上任意满足条件 $D^2>0$ 的大除子 D，尚不清楚它是否为 Miyaoka-Sakai 除子。使 D 成为 Miyaoka-Sakai 除子的一项充分条件是存在一个除子 Q，使得 $H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-Q))=0$，且 $D-Q$ 是 D的 Zariski 分解负部的子除子。

引理 4.2. 设 D 是 S 上的大除子，使得 $D^2>0$ 且 $H^1(S,\mathcal{O}_S(-D))\neq 0$。若存在一个除子 $Q\leq D$，使得 $H^1(S,\mathcal{O}_S(-Q))=0$，且 $D-Q$ 是 D 的 *Zariski* 分解的负部的子除子，则 D 是 *Miyaoka-Sakai* 除子。

证明. 设 $M = D - Q$，根据 Q 的定义及关于 D 的假设，它是一个非零有效除子。$_r$写作 $M = \sum k_i C_i$，其中 $k_i > 0$。考虑 r-元组的集合 $_{i=1}$

$$T := \{(j_1, \cdots, j_r) \in \mathbb{Z}^r \mid 0 \le j_i \le k_i, H^1(S, \mathcal{O}_S(-D + \sum_{i=1}^{r} j_i C_i) = 0\}.$$

$_r$由于 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D + \sum k_i C_i)) = H^1(S, \mathcal{O}_S(-Q)) = 0$，集合 T非空。此外，它是有界的$_{i=1}$，因为 $0 \le j_i \le k_i$。因此， T关于自然偏序有一个极小元（$m_1, \cdots, m_r$）：若 $j_i \le j_i'$且对所有 $1 \le i \le r$及某个 $1 \le a \le r$有 $j_a < j_a'$，则（$j_1, \cdots, j_r$）$<$（$j_1', \cdots, j_r'$）。令 $B =_r \sum m_i C_i$。那么 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D+B)) = 0$。由 B的极小性可知，对于任意满足 $m_i > 0$的 i，都有 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D+B-C_i)) \neq 0_{i=1}$。由短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D + B - C_i) \to \mathcal{O}_S(-D + B) \to \mathcal{O}_S(-D + B)|_{C_i} \to 0,$$

我们看到

$$\dim H^0(C_i, \mathcal{O}_S(-D + B)|_{C_i}) \ge \dim H^1(S, \mathcal{O}_S(-D + B - C_i)) \ge 1.$$

由此可得， $\mathcal{O}_S(-D + B)|_{C_i}$ 是有效的，这意味着$(D - B)C_i \le 0$。

由于 B 是有效的，因此$(D - B)B \le 0$。所以，

$$(D - 2B)^2 = D^2 - 4DB + 4B^2 = D^2 - 4B(D - B) \ge D^2 > 0.$$

设 P为 D的 Zariski 分解的正部。则 $PB = 0$且 $PD = P^2 > 0$，这意味着$(D - 2B)P > 0$。因此，$D - 2B$ 是大的。□

显然，若 Kawamata-Viehweg 消失定理在 S上成立，则这样的除子 Q存在。一般而言，要使 $Q \le D$ 满足 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-Q)) = 0$，通常需要 D具有更强的正性。

推论 4.3。设 S 上的 D 是一个大除子，且满足 $D^2 > 0$。存在一个整数 $m > 0$，使得对于所有正整数 $k \ge 0$, kmD 都是一个 *Miyaoka-Sakai* 除子。

证明。令 $D = P + N$为 Zariski 分解。于是 $P^2 \ge D^2 > 0$。令 m 为使 mP成为整数且（mP）$^2 > 4C_S$的最小整数。kmP 为整数且（kmP）$^2 > 4C_S$。令 $Q = kmP$。由推论 3.4， $H^1(S, \mathcal{O}_S(-Q)) = 0$。由引理 4.2， kmD 是一个 Miyaoka-Sakai 除子。□

Di Cerbo 已证明 [DC13]，宫冈-酒井定理（[Sak84，命题 1]）等价于特征 0 下的 Bogomolov 不稳定性定理（[Bog79, 10.12. 推论 2]）。此外，根据 [Miy80],[Sak84] 以及 [FdB95],，这两个定理也等价于 Kawamata-Viehweg 消失定理。

本节将证明，在 Miyaoka-Sakai 消失定理成立的曲面上，Bogomolov 不稳定性定理也成立。

我们先回顾以下由 Fern´adenz del Busto 提出的引理，该引理在正特征下仍然成立。

引理 *4.4*（[*FdB95*，*Laz97*，一致重数性质（*UMP*）]）。设 $\mathcal{E}$ 是 S 上秩为 *2* 的全局生成的局部自由层，其中 $P = \{[s] \mid \dim\ Z\ (s)\ = 0\} \subset \mathbb{P}H^0\ (S,\ \mathcal{E})$，且 $\mathfrak{Z} = \{\ (x,\ [s])\ \mid x \in Z\ (s)\ \} \subset S \times P$。设 $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{Z}$ 是 $S \times P$ 上的有效除子，且在 P 上平坦。假设对每个一般的 $[s] \in P$，存在一点 $x \in Z$（s）和一个正整数 m，使得 $mult_x D_s \ge m$ 对于 $D_s = \mathfrak{D}|_s$ 成立。那么，对于一般截面 $[s] \in P$ 以及所有 $x \in Z$（s），有 $mult_x D_s \ge m$。

命题 4.5. 假设 *Miyaoka-Sakai* 消失定理在 S 上成立。那么， S 上秩2的局部自由层 $\mathcal{E}$，满足 $\Delta = c_1(\mathcal{E})^2 - 4c_2(\mathcal{E}) > 0$，相对于某个充足除子 H 是斜率 H-不稳定的。

证明. 设 $\mathcal{E}$ 是 S 上秩 2 的局部自由层，且 D 是一个除子，满足 $\det(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_S(D)$。对于 S 上的任意除子 G，有

$$c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_S(G)) = D + 2G \quad \text{and} \quad c_2(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_S(G)) = DG + G^2 + c_2(\mathcal{E}).$$

由此可得

$$c_1(\mathcal{E})^2 - 4c_2(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(G))^2 - 4c_2(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(G))$$

对于任意除子 G。

由于扭转线丛不会改变稳定性和 Bogomolov 不等式，通过扭转一个充分丰的除子，我们可以假设 D 是非常丰的，$c_2(\mathcal{E}) > 0$，且 $\mathcal{E}$ 是整体生成的，并且由 Bertini 定理可知，一般截面 Z_s 的零点集 s属于 $\mathcal{E}$ 由 $r = c_2(\mathcal{E}$个互异点组成（见[Spr96，命题 A] 或 [Kle74，命题 11]）。考虑由一般截面确定的 Koszul 复形 s，它给出一个短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{I}_{Z_s} \to 0,$$

其中 $\mathcal{I}_{Z_s}$ 是 Z_s的理想层。由于 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{O}_S$ 都是局部自由的，因此该正合列是非分裂的。由此可得 $H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S+D)\otimes\mathcal{I}_{Z_s}) \neq 0$。令 $\pi\colon \widetilde{S} \to S$为沿 Z_s 吹起 S所得的吹起，$E = E_1+\cdots+E_r$为例外除子。于是

$$H^1(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(-\pi^*D+2E)) = H^1(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(K_{\widetilde{S}}+\pi^*D-2E)) = H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S+D)\otimes\mathcal{I}_{Z_s}) \neq 0.$$

令 $D = \pi^*D - 2E$。我们看到

$$\widetilde{D}^2 = D^2 - 4r = c_1(\mathcal{E}) - 4c_2(\mathcal{E}) > 0,$$

且 $\pi_*D = D$ 是大除子。根据 [Sak90，引理 3]，D 也是大除子。由于宫冈-酒井消失定理在 S上成立，存在非零有效除子 $\widetilde{B}_s$，使得 $(\widetilde{D}_S - \widetilde{B}_s)\widetilde{B}_s \leq 0$且 $H^1(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(-\widetilde{D}+\widetilde{B}_s)) = 0$。注意，$\widetilde{B}_s$ 取决于 E，因此也取决于截面 s。令 $B_s = \pi_*B_s$。写作 $B_s = \pi^*B_s + \sum a_iE_i$，其中 a_i 为整数。我们要证明存在 i 使得 $a_i < 0$，从而 B_s 经过一点 $x \in Z_s$。

由不等式（$\widetilde{D} - \widetilde{B})\widetilde{B} \leq 0$，我们得到

$$(D-B_s)B_s + \sum a_i(2+a_i) = \big((\pi^*D-2E) - (\pi^*B + \sum a_iE_i)\big)(\pi^*B + \sum a_iE_i) = (\widetilde{D}-\widetilde{B})\widetilde{B} \leq 0.$$

因为 D 是充足的，B_s 是有效的，$D-2B_s$ 是大的，我们看到（$D-B_s$）$B_s > 0$ 由引理 3.3。因此，$\sum_{i=1}^{r} a_i$（$2+a_i$）< 0 这意味着存在一个指标 i 使得 $a_i < 0$。

因此，$\mathrm{mult}_x B_s > 0$ 对某个 $x \in Z_s$。由一致重数性质（引理 4.4），取一般的 s，我们可以假设 $\mathrm{mult}_x B_s > 0$ 对所有 $x \in Z_s$。由此可得 $\mathcal{I}_{Z_s} \supset \mathcal{O}_S(-B_s)$ 且$\beta\colon \mathcal{O}_S(D-B_s) \to \mathcal{O}_S(D)\otimes\mathcal{I}_{Z_s}$是单射，从而诱导出如下扩张的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(D-B_s) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_s}\otimes\mathcal{O}_S(D) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于 $H^1(\widetilde{S}, \mathcal{O}_{\widetilde{S}}(-\widetilde{D}+\widetilde{B}_s)) = 0$，由投影公式和Leray谱序列，我们知道$H^1(S, \mathcal{O}_S(-D+B_s)\otimes\mathcal{I}_{Z'}) = 0$，其中 $\mathcal{I}_{Z'} = \pi_*\mathcal{O}_S(-(2+a_i)E_i)$。由于 Z' 的维数为 0，由短正合列 $0 \to \mathcal{O}_S(-D+B_s)\otimes\mathcal{I}_{Z'} \to \mathcal{O}_S(-D+B_s) \to \mathcal{O}_S(-D+B_s)\otimes\mathcal{O}_S/\mathcal{I}_{Z'} \to 0$，取上同调，我们得到

$$0 = H^1(S, \mathcal{O}_S(-D+B_s)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(-D+B_s)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_S(D-B_s), \mathcal{O}_S).$$

由此可知，$\mathcal{O}_S(D-B_s)$由 $\mathcal{O}_S$扩张必定分裂。因此，单射 β可提升为单射$\mathcal{O}_S(D-B_s) \to \mathcal{E}$。

由于 $D-2B_s$ 是大（big）的，$(D-2B_s)^2 \geq D^2 > 0$，且 D 是充足的，根据霍奇指数定理，我们知道$(D-2B_s)D > 0$，这意味着

$$\mu_D(D-B_s) = (D-B_s)D > \frac{1}{2}(D^2 + (D-2B_s)D) > \frac{D^2}{2} = \mu_D(\mathcal{E}).$$

因此，$\mathcal{E}$ 是斜率 D-不稳定的。证明至此完成。 □

5. Vanishing Theorems on Surfaces of Kodaira Dimension at Most Zero

在 [Eno23], Enokizono 给出了正特征下正规曲面上 Kawamata-Viehweg 消失定理的一个有效版本。假设 $p > 0$。应用这一结果，我们证明 Kawamata-Viehweg 消失定理在 Hirzebruch 曲面与德尔佩佐曲面上成立，而 Miyakao-Sakai消失定理还在光滑Frobenius分裂的纤维化曲面、弱德尔佩佐曲面、阿贝尔曲面以及双椭圆曲面上成立。

定义 5.1 ([Eno23，定义 3.10])。 除子 D 在 S 上称为 $\mathbb{Z}$-正的，如果 $B-D$ 在B 上不是数值有效的（即 $BC<DC$ 对某个不可约分支 C （ B的）成立），对任意有效负定除子$B>0$ 在 S上。

Enokizono（[Eno24，定理3。5]）证明，伪有效除子有唯一的整 Zariski 分解，其正部是 $\mathbb{Z}$-正整除子。

定理 5.2 （整 Zariski 分解）。设 D 是 S 上的伪有效除子。那么存在唯一的分解 $D=P_{\mathbb{Z}}+N_{\mathbb{Z}}$，使得

(1) $P_{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$-正的。*(2)* $N_{\mathbb{Z}}=0$ 或 $N_{\mathbb{Z}}>0$ 是负定例外整除子。*(3)* 对于 $N_{\mathbb{Z}}$ 的任意不可约分支， $P_{\mathbb{Z}}C\leq 0$ 。

根据 [Eno24，命题 3.16 和注 3。17], 伪有效 D 的整 Zariski 分解 $D=P+N$ 可通过以下迭代过程从标准 Zariski 分解 $P_0=\lceil P\rceil$得到。令 P为 $i\geq 1$的向上取整。对于 $N_{i-1}=D-P_{i-1}$，令 C_i。若存在不可约分支 N_{i-1} 属于 $P_{i-1}\cdot C_i>0$且满足 $P_i=P_{i-1}+C_i$，则令 $P_iC\leq 0$。当对于 $N_i=D-P_i$的任意不可约分支，

因此，我们得到整 Zariski 分解的 $\mathbb{Z}$-正部的如下刻画。

命题 5.3。 设 D 是 S 上的伪有效除子，其 *Zariski* 分解为 $D=P+N$，其中 P 是正部。则 D 的整 *Zariski* 分解的 $\mathbb{Z}$- 正部 $P_{\mathbb{Z}}$ 可写为 $P_{\mathbb{Z}}=P+M$，其中 M 是满足 $M\leq N$ 的有效 $\mathbb{Q}$- 除子。

由 [Laz04，命题 5.3。21], 我们看到，以下引理可由命题5.3立即得到 .

引理 5.4。 设 $D=P_{\mathbb{Z}}+N_{\mathbb{Z}}$ 为整 *Zariski* 分解。则 $H^0(S,\ \mathcal{O}_S(D))=H^0(S,\ \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}}))$。

设 $F:\ S\to S$ 为 Frobenius 态射。记 $H^1(S,\ \mathcal{O}_S)_n$ 为 $H^1(S,\ \mathcal{O}_S)$ 的 **Frobenius-幂零** 部分，即

$$H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=\ker((F^e)^*:H^1(S,\mathcal{O}_S)\to H^1(S,\mathcal{O}_S))$$

当 e 足够大时，其中 $(F^e)^*=(F^*)^e$ 是由 F 诱导的 p-线性映射 $F^*(av)=a^pF^*(v)$ 的 e 次迭代，对任意 $a\in\mathbf{k}$ 和 $v\in H^1(S,\mathcal{O}_S)$。

Enokizono 的另一项重要观察是：对于大除子的整 Zariski 分解的正部，存在一个消失定理。

定理 5.5（Enokizono 消失定理 [Eno23，定理 4.17]）。设 D 是 S 上一个大 $\mathbb{Z}$-正除子。若 dim $H^0(S,\mathcal{O}_S(D))$ $>$ dim $H^1(S,\mathcal{O}_S)_n$，则 $H^1(S,\mathcal{O}_S(-D))=0$。

推论 5.6。 设 D 是 S 上的一个除子，满足 $D^2>0$ 且 维数 $H^0(S,\mathcal{O}_S(D))>$维数 $H^1(S,\mathcal{O}_S)_n$。则D 是一个宫冈-酒井除子。

证明. 由于 dim $H^0(S,\mathcal{O}_S(D))>$dim $H^1(S,\mathcal{O}_S)_n\geq 0$且 $D^2>0$，我们知道 D是大的。设 $D=P_{\mathbb{Z}}+N_{\mathbb{Z}}$为整 Zariski 分解， $D=P+N$为 D的 Zariski 分解。

由命题 5.3, $P_{\mathbb{Z}}=P+M$，其中 $0\leq M\leq N$。由于 D是大的，故 P亦然，从而 $P_{\mathbb{Z}}$是大的。

由引理 5.4,

$$\dim H^0(S,\mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}}))=\dim H^0(S,\mathcal{O}_S(D))>\dim H^1(S,\mathcal{O}_S)_n.$$

由定理 5.5, $H^1(S,\mathcal{O}_S(-P_{\mathbb{Z}}))=0$。因此，由引理 4.2，我们看到 D 是一个 Miyaoka-Sakai 除子。□

在 $H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=0$ 的情形下，条件 $H^0(S,\mathcal{O}_S(D))>H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=0$ 等价于 D是有效的。基于这一观察，我们将证明：在 D 有效的条件下，Miyaoka-Sakai 消失定理在光滑弗罗贝尼乌斯分裂曲面上成立。

定义 5.7 ([MR85，定义 2], [SS10，定义 3.1])。 曲面 S 是 **Frobenius 分裂** (F-分裂)，如果 Frobenius 态射 $\mathcal{O}_S\to F_*\mathcal{O}_S$ 分裂。若存在一个正整数 e使得自然态射 $\mathcal{O}_S\to F_*^e(\mathcal{O}_S(D))$ 对每个有效除子 D都分裂，则称其为全局 F-**正则**。

容易验证，全局 F-正则蕴含 F-分裂。然而，反过来并不成立。例如，普通阿贝尔曲面是 F-分裂的，但并非全局 F-正则。

引理 5.8. 若 S 是 *Frobenius* 分裂的，则 $H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=0$。

证明。Since S 是 Frobenius 分裂的，Frobenius 态射在上同调上诱导出一个单射：

$$F^*: H^1(S,\mathcal{O}_S)\to H^1(S,\mathcal{O}_S)=H^1(S,F_*\mathcal{O}_S).$$

通过归纳，若 $(F^*)^e(v)=0$，则 $v=0$。因此，$H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=0$。 □

根据 [MS91，引理 1]，若 S 是 Frobenius 分裂的，则 $H^0(S,\mathcal{O}_S((1-p)K_S))\neq 0$。由此可知，Kodaira 维数为 $\kappa(S)\geq 1$ 的光滑曲面 S 不可能是 Frobenius 分裂的。事实上，根据 [SS10，定理 4.3]，若 S 是 F-分裂的，则存在一个有效 $\mathbb{Q}$-除子 Δ，使得 (S,Δ) 是对数 Calabi-Yau，也就是说，(S,Δ) 是对数典范的，且 $K_S+\Delta$ 是 $\mathbb{Q}$-平凡的。

例 5.9 (Frobenius 分裂曲面)。以下是不完全列举的一些 Frobenius 分裂曲面.

(1) 环面曲面。根据 [Smi00，命题 6.4]，，光滑环面曲面 S 是全局 F-正则的，因此是 Frobenius 分裂的。在环面曲面上，满足额外条件时 Kawamata-Viehweg 消失定理成立（见[WX17，定理 A]以及 [Tan24，定理 1.1] 及其中的参考文献）。(2) 特征为 $p>5$的弱德尔佩佐曲面。根据 [KT25，定理 1.1]，，代数闭域上特征为 $p>5$ 的光滑弱德尔佩佐曲面是全局 F-正则的，特别地，是 Frobenius 分裂的。对于特征为 $p>5$的对数 del Pezzo 曲面，Kawamata-Viehweg 消失定理已得到证明（见 [ABL22，定理 1.1]）。在特征为 $p>3$ 的非完美基域上的德尔佩佐曲面上，Kawamata-Viehweg 消失定理同样成立（见 [Das21，定理 1.1]）。(3) 由 Frobenius 分裂曲线 C作基底的带状曲面 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{L})$。根据 [GT16，命题 3.1]，，如果 C 是 Frobenius 分裂的，即 C 是 $\mathbb{P}^1$ 或普通椭圆曲线，那么 $S=\mathbb{P}(\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{L})$是 Frobenius 分裂的。(4) 普通阿贝尔曲面。根据 [JR03，命题 3.1]，，普通阿贝尔曲面 S 是 Frobenius 分裂的。关于光滑普通簇的定义，见 [JR03，第 3] 节或 [BK86，定义 7.2]。我们将在下一节证明，Kawamata-Viehweg 消失定理在阿贝尔曲面和双曲面上仍然成立（见命题 5.16）。(5) 基曲线和纤维均为普通的椭圆曲面。设 S 有一个椭圆纤维化 $\pi: S\to C$ 到椭圆曲线 C上的映射。如果曲线 C 和一般纤维均为普通的，且 $\mathcal{O}_S((1-p)K_S)=\mathcal{O}_S$，那么根据 [Shi17，定理 5.7]，$S$ 是 Frobenius 分裂的。(6) 弱普通 $K3$曲面。根据 [PST17，命题 2.6]（另见 [MR85，命题 9]），弱普通的光滑 $K3$曲面，即 Frobenius 态射在 $H^2(S,\mathcal{O})$ 上的作用是双射的曲面，是 Frobenius 分裂的。

我们想指出，[KT25，命题 32] 为以下曲面提供了充分条件：它们是 F-纯 klt（包括光滑）曲面，且为 Frobenius 分裂曲面。

对于光滑的 Frobenius 分裂曲面，Enokizono 的消失定理导出了 Kawamata-Viehweg 消失定理的以下变体。

命题 5.10（Frobenius 分裂曲面上的 Kawamata-Viehweg 消失定理）。假设 S 为 *Frobenius* 分裂，且 D 是 S 上一个数值有效且大的 $\mathbb{Q}$ 除子。如果 $\lceil D\rceil$ 线性等价于有效除子，那么 $H^1(S,\mathcal{O}_S(-\lceil D\rceil))=0$。特别地，若 D 有效，则结论成立。

证明。由于 D 数值有效且大，除子 $\lceil D\rceil$ 有效、大且 $\mathbb{Z}$-正，由 [Eno24，推论 3.18]。由引理 5.8，$\dim H^1(S,\mathcal{O}_S)_n=0$。由定理 5.5，$H^1(S,\mathcal{O}_S(-\lceil D\rceil))=0$。 □

如果 S 是光滑托里克簇，命题 5.10 部分恢复了 [WX17，定理 B]。

命题 5.11. 假设 $S=\mathbb{F}_n$ 是 *Hirzebruch* 曲面，且 D 是 S 上的数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-除子。则

$$H^1(S,\mathcal{O}_S(-\lceil D\rceil))=0.$$

证明。由于 S 是有理的，$H^1(S,\mathcal{O}_S)=0$。根据定理 5.5，只需证明 $\lceil D\rceil$ 是有效的。设 C_0 是满足条件的唯一零截面 $C_0^2=-n$，并设 F 为一个纤维。注意，有效锥为 $\mathrm{Eff}(S)=\mathbb{R}_{\geq 0}C_0+\mathbb{R}_{\geq 0}F$（见 [Ros02，定理 1]），且 Picard 群为 $\mathrm{Pic}(S)=\mathbb{Z}C_0+\mathbb{Z}F$。记

$\lceil D\rceil \sim aC_0 + bF$。由于 D 数值有效且大，$k\lceil D\rceil$ 线性等价于某个有效的 $mC_0 + nF$，其中 k足够大。由于 $(ka - m)C_0 + (kb - n)F \sim 0$。与 F和 C_0 相交可得$ka - m = kb - n = 0$，这意味着 $a \geq 0$和 $b \geq 0$，且 $\lceil D\rceil$ 是有效的。□

类似的论证也给出了光滑德尔佩佐曲面上 Kawamata-Viehweg 消失定理的一个新证明。

命题 5.12 (光滑德尔佩佐曲面上的 Kawamata-Viehweg 消失定理 [CT18，定理3。1])。假设 S 是一个德尔佩佐曲面，且 D 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个数值有效且大的除子 S。那么 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-\lceil D\rceil)) = 0$。

证明。由于 D 数值有效且大，根据 [Eno24，推论 3.18]，$\lceil D\rceil$ 是 $\mathbb{Z}$-正的。因此，对于任意满足 $C^2 < 0$ 的不可约曲线，都有 $\lceil D\rceil C > C^2$。由于 $-K_S$ 是充足的，根据伴随公式，所有不可约负曲线都是（-1）-曲线。因此，对于任意负曲线，都有 $\lceil D\rceil C \geq 0$。由于当 m充分大时，$m\lceil D\rceil$ 是有效的，我们可知对于任意不可约曲线 C，都有 $m\lceil D\rceil C \geq 0$。因此，$\lceil D\rceil$ 是数值有效的。根据 Riemann-Roch 定理以及 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$，我们可以得出 $H^0(S, \mathcal{O}_S(\lceil D\rceil)) \neq 0$。

由于 $\lceil D\rceil$ 是一个有效的大 $\mathbb{Z}$-正除子，且 $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$，由定理5.5，我们得到 in

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(-\lceil D\rceil)) = 0.$$

□

注记。 Kawamata-Viehweg 消失定理对全局 F-正则对成立（见 [SS10，定理 6.8]）。

命题 5.13 （Frobenius 分裂曲线上射影直纹曲面的 Miyaoka-Sakai 消失定理）。 假设$S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}) \to C$ 是几何纤维化曲面， D 是 S 上满足 $D^2 > 0$的大除子，且 C 是 *Frobenius* 分裂的。若 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$，则 D 是 *Miyaoka-Sakai* 除子。

证明。由于 C 是 Frobenius 分裂的， C 是 $\mathbb{P}^1$ 或一条普通椭圆曲线。由 [GT16，命题 3.1]， S 是 Frobenius 分裂的。设 $D = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ 为 D的整 Zariski 分解，其中 $P_{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$-正部。则 $P_{\mathbb{Z}}^2 \geq D^2 > 0$。设 a与 b为整数，使得 $P_{\mathbb{Z}}$数值等价于 $aC_0 + bF$，其中 C_0是满足 $C_0^2 = -n$的唯一曲线， F是一条纤维，且 $n =$ deg $\mathcal{L}$。因为 $P_{\mathbb{Z}}$是大的且 $F^2 = 0$，$P_{\mathbb{Z}}F > 0$从而推出 $a > 0$。因为 $P_{\mathbb{Z}}^2 = (aC_0 + bF)^2 = -na^2 + 2ab > 0$。因此 $-an + 2b > 0$。注意 $-K_X = 2C_0 + (n + 2 - 2g)F$。则

$$-P_{\mathbb{Z}}K_S = -an + 2b + a(2 - 2g) > 0.$$

注意到 $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 1 - q = 1 - g(c) \geq 0$。由 Riemann-Roch 定理可知，

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(P_{\mathbb{Z}})) \geq \frac{1}{2}(P_{\mathbb{Z}}^2 - K_S P_{\mathbb{Z}}) + \chi(\mathcal{O}_S) > 0.$$

由此可得 $P_{\mathbb{Z}}$ 有效。

由引理5.8，dim $H^0(S, \mathcal{O}_S)_n = 0$。由于 $P_{\mathbb{Z}}$有效，由定理5.5可知 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-P_{\mathbb{Z}})) =$0。于是，根据引理 D 4.2，是一个 Miyaoka-Sakai 除子。□

类似于命题5.13的证明，弱德尔佩佐曲面上也有如下 Miyaoka-Sakai 消失定理。

命题 5.14 (光滑弱德尔佩佐曲面上的 Miyaoka-Sakai 消失定理)。 设 S 是一个弱德尔佩佐曲面， D 是 S 上的一个大除子，且满足 $D^2 > 0$。则 D 是一个 *Miyaoka-Sakai* 除子。

证明。 设 $D = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ 为整 Zariski 分解，其中 $P_{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$-正部。由于 S 是有理的，dim $H^1(S, \mathcal{O}_S)_n \leq$ dim $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$。只需证明 $P_{\mathbb{Z}}$ 有效。由 Riemann-Roch 定理，得

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}})) \geq \frac{1}{2}(P_{\mathbb{Z}}^2 - K_S P_{\mathbb{Z}}) + \chi(\mathcal{O}_S) \geq \frac{1}{2}P_{\mathbb{Z}}^2 + 1 > 1.$$

根据定理 5.5， $H^1(S, \mathcal{O}_S(-P_{\mathbb{Z}})) = 0$。根据引理 4.2， D 是一个 Miyaoka-Sakai 除子。 □

在本节余下部分，我们证明宫冈-酒井消失定理在 Kodaira 维数为零的极小曲面上成立。

命题 5.15 (在 $K3$ 和 Enriques 曲面上的 Miyaoka-Sakai 消失定理)。 假设 S 是一个 $K3$ 曲面或按 [BM 77], 中定义的 D *Enriques* 曲面，并且 S 是 $D^2 > 0$上的大除子，满足 D 是一个 *Miyaoka-Sakai* 除子。

证明。 由引理 5.4 与推论 5.6，只需证明 $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}})) > q(S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)$。由于 K_S 是数值平凡的，由 Riemann-Roch 定理，我们有

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}})) \geq \frac{1}{2}P_{\mathbb{Z}}^2 + \chi(\mathcal{O}_S) > \chi(\mathcal{O}_S) \geq \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) \geq \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)_n.$$

此处，不等式 $\chi(\mathcal{O}_S) \geq \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)$ 由分类定理（[BM77，定理5]）。 □

命题 5.16 （阿贝尔曲面与双椭圆曲面上的 Kawamata-Viehweg 消失定理）。 设 S 是阿贝尔曲面或双曲面，且 D 是 S 上满足 $D^2 > 0$ 的大除子。则 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。此外， $H^1(S, \mathcal{O}_S(-\lceil M \rceil)) = 0$ 对任意数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-除子 M （在 S 上）成立。

证明。根据分类定理（[BM77，定理 6 及其下方的命题]），我们知道K_S 是数值平凡的，且 $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$。由于 D 是大除子，且 $D^2 > 0$，由 Riemann-Roch 定理可知

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) = \frac{1}{2}D^2 + \dim H^1(S, \mathcal{O}_S(D)) > 0.$$

因此， D 是有效的。

根据分类定理（[BM77，定理 4]），我们知道存在一个无分歧有限覆盖：$\pi: A \to S$ 其中 A 是阿贝尔曲面。由于 A 是阿贝尔的，其上不存在负定曲线。因此，任意有效除子都是数值有效的。对于任意不可约曲线 C，在 S上有 $(\deg \pi)C^2 = (\pi^*(C))^2 \geq 0$。因此，除子 D 在 S 上也是数值有效的。

由于 D 是数值有效且大的，由 [Muk13，定理 3]（另见推论 6.5），可得 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。将 M的向上取整记作 $\lceil M \rceil = M + \Delta$.。由于 Δ是有效的，因此它是数值有效的。于是， $\lceil M \rceil$是数值有效且大的。因此， $H^1(S, \mathcal{O}_S(-\lceil M \rceil)) = 0$。 □

6. Weak Miyaoka-Sakai theorem

令 $F: S \to S$ 为 Frobenius 态射。自然导子 $d: \mathcal{O}_S \to \Omega_S$ 诱导出一个态射$F_*d : F_*\mathcal{O}_S \to F_*\Omega_S$。我们将 $\mathcal{B}_S^1$ 记作 F_*d的像。由 [Tan72，命题 3]，可得以下短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow F_*\mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{B}_S \longrightarrow 0. \tag{6}$$

对于 D 上的任意除子 S，将正合列（6）与 $\mathcal{O}_S(D)$ 作扭结并取上同调，可得以下长正合列：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(-D)) \longrightarrow H^0\big(S, F_*(\mathcal{O}_S(-pD))\big) \longrightarrow H^0\big(S, \mathcal{B}_S(-D)\big) \\ \xrightarrow{\ \delta\ } H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \longrightarrow H^1\big(S, F_*(\mathcal{O}_S(-pD))\big) \longrightarrow H^1\big(S, \mathcal{B}_S(-D)\big), \end{aligned} \tag{7}$$

其中 δ 是余边界映射。我们将 $K(D)$ 记作 $F_*: H^1(S, \mathcal{O}_S(-D) \to H^1(S, F_*(\mathcal{O}_S(-pD))$ 的核。于是 $K(D) = \delta(H^0(S, \mathcal{B}_S(-D)))$。若 D 是大除子或有效除子，则

$$H^0(S, F_*(\mathcal{O}_S(-pD))) = H^0(S, \mathcal{O}_S(-pD)) = 0.$$

因此，$\ker \delta = 0$ 和

$$K(D) = H^0(S, \mathcal{B}_S(-D)).$$

由长正合列（7），可知 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$ 当且仅当 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^eD)) = 0$ 对某个正整数 e 以及 $H^0(S, \mathcal{B}_S(-p^kD)) = 0$ 对所有 $0 \leq k \leq e-1$。

对于除子 D，在 [Muk13的第 1 节中。2], Mukai 证明了

$$\mathcal{B}_S(-D) = F_*(dQ(S) \cap \Omega_S(-pD)),$$

其中 $Q(S)$是 S的函数域。因此，

$$H^0(S, \mathcal{B}_S(-D)) = \{df \in \Omega_{Q(S)} \mid f \in Q(S), df \in H^0(S, \Omega_S(-pD))\}. \tag{8}$$

利用对 $H^0(S,\mathcal{B}_S(-D))$的这一描述，Mukai 证明了当 $H^0(S,\mathcal{B}_S(-D)) = 0$ 在 D 数值有效且大时成立，由此证明了 Mumford-Ramanujam 消失定理 [Muk13，定理 3]。下文将证明，对于任意满足 $H^0(S,\mathcal{B}_S(-D))$ 的大除子 $= 0 \quad D$，若 $D^2 > 0$，则该消失成立。这个消失结果导出了宫冈-酒井定理的一个弱版本，而该版本也蕴含 Mumford-Ramanujam 消失定理。

我们先回顾 Sakai 的以下引理，该引理在正特征下仍然成立。

引理 6.1 ([Sak90，引理 3])。设 $\pi\colon S \to X$ 是一个双有理态射。设 D 是 S上的一个除子，并令 $D_X = \pi_* D$。

(1) 若 D 是大除子，则 D_X 是大除子。*(2)* 若 $D^2 > 0$ 且 D_X 是大除子，则 D 是大除子。

引理 6.2. 假设 S 是 *Kodaira* 维数为 $\kappa(S) \leq 1$ 的（相对）极小曲面，但若 $\kappa(S) = 1$则不是准椭圆曲面。设 D 是 S 上的一个大除子，且满足 $D^2 > 0$。那么

$$H^0(S,\mathcal{B}_S(-D)) = 0.$$

证明。根据 $\mathcal{B}_S$ 的定义，我们知道

$$H^0(S,\mathcal{B}_S(-D)) \subseteq H^0(S,\Omega_S(-pD)).$$

根据代数曲面分类（见 [BM77]），我们知道 X 是射影平面、带状曲面、阿贝尔曲面、 $K3$ 曲面、Enriques 曲面、双曲面、准双椭圆曲面或椭圆曲面。

(1) 若 S 是射影平面，则由扭曲 Euler 正合列可得 $H^0(S,\Omega_S(-pD)) = 0$。因此，$H^0(S,\mathcal{B}_S(-D)) = 0$。

(2) 假设 S 是带状曲面、椭圆曲面、双曲面或准双椭圆曲面。那么它存在一个纤维化 $f\colon S \to C$，其纤维在其为带状曲面时亏格为 0，否则为 1。记 F 为一般纤维。考虑正合列

$$0 \to f^*\Omega_C \to \Omega_S \to \Omega_{S/C} \to 0.$$

由于 F 光滑且亏格至多为 1，$\deg \Omega_{S/C}|_F = \deg \Omega_F \leq 0$。如果

$$H^0(S, f^*\Omega_C(-D)) \neq 0 \quad \text{or} \quad H^0(S,\Omega_{S/C}(-D)) \neq 0,$$

then

$$\deg(f^*\Omega_C(-D))|_F = -DF \geq 0 \quad \text{or} \quad \deg(\Omega_{S/C}(-D))|_F = \deg \Omega_F - DF \geq 0.$$

由此可得 $DF \leq 0$。由于 D 是大除子，存在一个有效的 $\mathbb{Q}$-除子 E 和一个充足的 $\mathbb{Q}$-除子 A，使得 $D = A + E$。由于 F是一条纤维，我们知道 F是数值有效的。因此， $DF = AF + EF > 0$，这就导致矛盾。因此， $H^0(S,\ \Omega_S(-D)) = 0$，由此便得到所需结论。

(3) 如果 S 是阿贝尔的，那么 Ω_S 是平凡的。如果 $H^0(S,\ \Omega_S(-D)) \neq 0$，那么 $H^0(S,\ \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$。由此可得，对于一个充足除子 H，有$HD \leq 0$。由霍奇指数定理可得 $D^2 \leq 0$，这与假设 $D^2 > 0$相矛盾。因此， $H^0(S,\ \Omega_S(-D)) = 0$，由此同样可得所需结论。

(4) 假设 S 是 $K3$ 或恩里克斯曲面。如果 $H^0(S,\ \mathcal{B}_S(-D)) \neq 0$，那么一个非零截面 s 定义了一个非平凡态射 $\phi\colon \mathcal{O}_S(D) \to \mathcal{B}_S$，其定义方式是乘以 s。由于 $\mathcal{B}_S$ 是无挠层，作为 $\mathcal{B}_S$ 的子层的像 $\mathrm{im}(\phi)$ 也是无挠的。这迫使 $\ker(\phi) = 0$。因此， ϕ 是单射，并且

$$\dim H^0(S,\mathcal{B}_S) \geq \dim H^0(S,\mathcal{O}_S(D)).$$

由于 K_S 数值平凡，根据 Riemann-Roch 定理，我们有

$$\dim H^0(S,\mathcal{O}_S(D)) \geq \frac{1}{2}D^2 + \chi(\mathcal{O}_S) - \dim H^0(S,\mathcal{O}_S(K_S - D)).$$

因为 $-(K_S - D) \equiv D$ 是大类，我们必有 $H^0(S,\mathcal{O}_S(K_S - D)) = 0$。根据 [BM77],，我们知道$q < \chi(\mathcal{O}_S)$。因此，

$$\dim H^0(S,\mathcal{B}_S) \geq \dim H^0(S,\mathcal{O}_S(D)) > q = \dim H^1(S,\mathcal{O}_S).$$

然而，根据 [Muk13，引理 1。14]， $H^0(S,\ \mathcal{B}_S) =$核 $\left[H^1(S,\ \mathcal{O}_S) \to H^1(S,\ F_*\mathcal{O}_S)\right]$。这就产生了矛盾。因此我们得出 $H^0(S,\ \mathcal{B}_S(-D)) = 0$。

□

下面的引理由 [Muk13命题 3 的证明推得。2]。

引理 6.3。设 $\pi: S \to X$ 是一个 (-1)-曲线的收缩，E 且 D 是 S上的一个除子。令 $D_X = \pi_* D$。若 $H^0(X, \mathcal{B}_X(-D_X)) = 0$，则 $H^0(S, \mathcal{B}_S(-D)) = 0$。

证明。由于 π 是一个双有理态射，函数域 $Q(S)$ 和 $Q(X)$ 可视为相同。根据等式（8），只需证明 $H^0(S, \Omega_S(-pD)) \subseteq H^0(X, \Omega_X(-pD_X))$。

注意，对于整数 a，$D = \pi^* D_X - aE$。考虑短正合列

$$0 \to \pi^* \Omega_X \to \Omega_S \to i_* \Omega_E = i_* \mathcal{O}_E(-2) \to 0 \tag{9}$$

若 $a \geq 0$，将正合列（9）用 $\mathcal{O}_S(-pD)$ 扭曲后再取上同调，我们得到短正合列

$$0 \to H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p(\pi^* D_X - aE))) \to H^0(S, \Omega_S(-pD)) \to H^0(E, \mathcal{O}_E(-2 - pa)).$$

由于 $a \geq 0$, $H^0(E, \mathcal{O}_E(-2 - pa)) = 0$ 这意味着

$$H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p(\pi^* D_X - aE))) = H^0(S, \Omega_S(-pD)).$$

根据投影公式,

$$H^0(S, \Omega_S(-pD)) = H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p(\pi^* D_X - aE))) = H^0(X, \Omega_X(-pD_X)).$$

若 $a < 0$，将正合列（9）张量 $\mathcal{O}_S(-p\pi^* D_X)$，然后取上同调，可得短正合列

$$0 \to H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p(\pi^* D_X))) \to H^0(S, \Omega_S(-p(D + aE))) \to H^0(E, \mathcal{O}_E(-2))$$

这意味着

$$H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p\pi^* D_X))) = H^0(S, \Omega_S(-p(D + aE))).$$

由于 $a < 0$,

$$H^0(S, \Omega_S(-pD)) \subseteq H^0(S, \Omega_S(-p(D + aE))).$$

根据 p 投影公式，我们有 $H^0(S, \pi^* \Omega_X(-p\pi^* D_X))) = H^0(X, \Omega_X(-pD_X)))$。因此 ，

$$H^0(S, \Omega_S(-pD)) \subseteq H^0(X, \Omega_X(-pD_X)).$$

□

推论 6.4（广义 Mumford-Ramanujam 消失定理）。设 D 是 S 上的大除子，满足 $D^2 > 0$。假设 $\kappa(S) \leq 1$，并且当 $\kappa(S) = 1$ 时，S 不是准椭圆的。

若 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^e D)) = 0$ 对某个非负整数 e成立，则 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$.

证明。设 X 是 S的一个极小模型。记 $D_X = \pi_* D$ 和 $D = \pi^* D_X - E$，其中 E 是一个例外除子。于是 $D_X^2 = D^2 - E^2 \geq D^2 > 0$。由引理 6.1，$D_X$ 也是大除子。因此，由引理 6.2，可知 $H^0(X, \mathcal{B}_X(-p^k D_X)) = 0$对任意非负整数 k均成立。

由引理 6.3,

$$H^0(S, \mathcal{B}_S(-p^k D)) = 0$$

对任意非负整数 k均成立。因此映射

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^k D)) \hookrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^{k+1} D))$$

对每个非负整数都是单射。

由于 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^e D)) = 0$ 对某个非负整数 e成立，由归纳法可得 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。 □

推论 6.5 (Mumford-Ramanujam 消失定理 ([Muk13, 第 3]节))。设 D 是S上的丰沛且大除子。假设 $\kappa(S) \leq 1$ 且当 S 时，不是准椭圆的 $\kappa(S) = 1$。则 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。

证明。由 [Szp79, 命题 2.1]（另见 [LM81, 命题 2]），我们知道对所有 $k \gg 0$，$H^1(S, \mathcal{O}_S(-kD)) = 0$，特别地，对某个正整数 e，有 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-p^e D)) = 0$。由推论 6.4 可知，$H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。□

推论 6.4 与定理 5.5 共同推出以下 Q-除子形式的宫冈-酒井定理。

推论 6.6 (弱 Miyaoka-Sakai 定理)。设 D 是 S上的一个大除子。假设 $\kappa(S) \leq 1$，且当 $\kappa(S) = 1$时，S 不是准椭圆的。若 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$，则对任意充分大的整数 e，存在一个非零有效除子 B_e，使得

(1) $(p^eD - B_e)C \leq 0$ 对 B_e的任意不可约分支 C 均成立；*(2)* $H^1($
$S, \mathcal{O}_S(-p^eD + B_e)) = 0$；*(3)* 若 $D^2 > 0$，则 $p^eD - 2B_e$ 是大除子。

证明。 设 e 为一个充分大的数，使得 $\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(p^eD)) > \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)_n$。设 $p^eD = P_{\mathbb{Z}} + N_{\mathbb{Z}}$ 为 p^eD 的整 Zariski 分解。由于 $D^2 > 0$，因此 $P_{\mathbb{Z}}^2 > D^2 > 0$。由命题5.3可知， $P_{\mathbb{Z}}$ 是大除子。因为

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}_S(P_{\mathbb{Z}}) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(p^eD)) > \dim H^1(S, \mathcal{O}_S)_n,$$

根据 [Eno23，定理],

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(-P_{\mathbb{Z}})) = 0.$$

由引理 4.2，存在一个非零有效除子 B_e 使得
(1) $(D - B_e)C \leq 0$ 对于 B_e 的任意不可约分支。(2) (
$D - B_e)^2 \geq D^2$。(3) $H^1(S,\ \mathcal{O}_S(-D + B_e)) = 0$。

□

推论 6.7 (拉马努金消失定理)。 设 D 是 S 上的大除子，且满足 $D^2 > 0$。假设 $\kappa(S) \leq 1$ ，并且当 $\kappa(S) = 1$时， S 不是准椭圆的。若 D 数值连通，则$H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) = 0$。

证明。 我们用反证法证明。假设 $H^1(S, \mathcal{O}_S(-D)) \neq 0$。根据推论 6.6，存在一个分解 $D = A + B$ 使得 B 非零且有效， $AB \leq 0$ 并且 $A - B$ 是大除子，因而是伪有效的。然而，这与 D的数值连通性矛盾。 □

根据 Ramanujam 连通性引理 3.3，数值有效且大的除子的 Mumford-Ramanujam 消失定理可由拉马努金消失定理推出。

References

[ABL22] Emelie Arvidsson、Fabio Bernasconi 和 Justin Lacini。关于正特征下对数 del Pezzo 曲面的 Kawamata–Viehweg 消失定理。 *Compositio Mathematica*, 158(4):750–763, 2022年4月。[B˘ad01] Lucian Silvestru B˘adescu。 *Algebraic Surfaces*。Universitext。施普林格出版社，纽约，2001年。[Ber21] Fabio Bernasconi。特征 3 下对数 del Pezzo 曲面的 Kawamata-Viehweg 消失定理失效。 *J. Pure Appl. Algebra*, 225 11( ):106727, 2021年。[BK86] Spencer Bloch 和 Kazuya Kato。 p-进 étale 上同调。 *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 63:107–152, 1986年。[BM77] E. Bombieri 和 D. Mumford。特征 p 下的恩里克斯曲面分类，II。载于 T. Shioda 和 W. L. Jr Baily（编），
Complex Analysis and Algebraic Geometry: A Collection of Papers Dedicated to K. Kodaira，第 23–42 页。剑桥大学出版社，剑桥，1977年。[Bog79] F. A. Bogomolov。射影簇上的全纯张量与向量丛。 *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 13 3 1979 499, ( ): 1979年6月。[Che21] Yen-An Chen。准椭圆曲面的藤田猜想。 *Mathematische Nachrichten*, 294(11):2096–2104, 2021年。[CT18] Paolo Cascini 和 Hiromu Tanaka。违反 Kawamata-Viehweg 消失定理的光滑有理曲面。 *Eur. J. Math.*, 4 1 162( ): –176, 2018年。[Das21] Omprokash Das。非完美域上特征 p 德尔佩佐曲面的 Kawamata-Viehweg 消失定理 > 3。
Osaka Journal of Mathematics, 58(2):477–486, 2021年4月。[DC13] Gabriele Di Cerbo。博戈莫洛夫不稳定性的上同调解释。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 141 9 3049 3053, 2013 , ( ): – 6
月。[DCF15] Gabriele Di Cerbo 和 Andrea Fanelli。特征 p *Algebra &* 下曲面
Number Theory 9 6 1453 1475, 2015
的有效松坂定理。, ( ): – 9月。[Eke88] Torsten Ekedahl。正特征下一般型曲面的典范模型。 *Publications Mathématiquesde l'IHÉS*, 67:97–144, 1988 年。[EL93] Lawrence Ein 和 Robert Lazarsfeld。光滑射影三维簇上多重典范线性系与伴随线性系的整体生成。
Journal of the American Mathematical Society, 6(4):875–903, 1993年。[Eno23] Makoto Enokizono。正特征下正规曲面上的消失定理与伴随线性系。 *Pacific Journal of Mathematics* 324 1 71 110, 2023 , ( ): – 6
月。[Eno24] Makoto Enokizono。正规曲面上 Zariski 分解的整系数版本。 *European Journal of Mathematics*, 10 2 2024 ( ):38, 6月。[FdB95] Guillermo Fern´andez del Busto。博戈莫洛夫不稳定性与 Kawamata-Viehweg 消失定理。 *J. Algebr. Geom.*, 4(4):693–700, 1995年。[GT16] Yoshinori Gongyo 和 Shunsuke Takagi。整体 F-正则与 F-分裂型曲面。 *Mathematische Annalen*, 364 3 841 2016 ( ): –855, 4月。

[GZZ22] 顾毅、Lei Zhang 和 Yongming Zhang。正特征下曲面上藤田猜想的反例。*Adv. Math.*, 400:论文编号 108271, 17, 2022年。[JR03] Kirti Joshi 和 C. S. Rajan。Frobenius 分裂与普通性。 *International Mathematics Research Notices*, 2003 2 109 2003 ( ): –121, 2003年1月。[Kaw97] 川又雄二郎。关于三维簇和四维簇的 Fujita 自由猜想。 *Math. Ann.*, 308(3):491–505, 1997年。[Kle74] Steven L. Kleiman。一般平移的横截性。 *Compos. Math.*, 28:287–297, 1974年。[KM98] 河内武和 Vladimir Ma.sek。正规曲面上的 Reider 型定理。 *J. Algebr. Geom.*, 7(2):239–249, 1998年。[Kos23] 小关直树。关于正特征下的 Bogomolov–Gieseker 不等式。 *International Mathematics Research Notices* 2023 24 20784 2023 , ( ): –20811, 12月。[KT25] Tatsuro Kawakami 和 Hiromu Tanaka。弱德尔佩佐曲面的全局 F-正则性。 *Forum of Mathematics, Sigma*, 13:e77, 2025年。[Lan16] Adrian Langer。正特征下对数曲面的 Bogomolov–Miyaoka–Yau 不等式。 *Duke Mathematical Journal* 165 14 2737 2769, 2016 , ( ): – 10月。[Lan22] Adrian Langer。关于半稳定层的有界性。 *Documenta Mathematica*, 27:1–16, 2022年。[Laz97] Robert Lazarsfeld。线性系讲义。由 Guillermo Fern´andez del Busto 协助编写。载于 , , , , 第 – 页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，1997年。[Laz04] Robert Lazarsfeld。 *Complex algebraic geometry. Lectures of a summer program Park City UT 1993* 163 219 *Positivity in Algebraic Geometry. I. Classical Setting: Line Bundles and Linear Series*，第 48 卷 *Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge*。柏林：施普林格，2004年。[LM81] R. Lewin-M´enegaux。正特征下的一个消失定理。载于 , 卷号 , 页码 – 。法国数学会，。[LT25] Anne Larsen 和 Anda Tenie。通过 Bridgeland 稳定性研究正规曲面上的 Reider 型定理。 *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux* 86 *Astérisque* 35 43 1981 *International Mathematics Research Notices* 2025 16 2025 , ( ):253, 8月。[Miy80] 宫冈洋一。关于曲面上的 Mumford-Ramanujam 消失定理。代数几何日，法国昂热，1979，239–247（1980）。, 1980年。[MR85] V. B. Mehta 和 A. Ramanathan。舒伯特簇上的 Frobenius 分裂与上同调消失。 *Annals of Mathematics* 122 1 27 40, 1985 , ( ): – 。[MS91] V. B Mehta 和 V. Srinivas。正规 F-纯曲面奇点。 *Journal of Algebra*, 143(1):130–143, 1991年10月。[Muk13] 向井茂。正特征下 Kodaira 消失定理与 Yau 不等式的反例。 *Kyoto J. Math.* 53 2 515 2013年。[Mum78] D. Mumford。关于 C. P. Ramanujam 研究成果的若干补注。C.P. Ramanujam——纪念文集。C.P. Ramanujam 论文集及纪念文集论文，塔塔基础研究所，数学研究丛书 8，247–262（1978）。, 1978年。[Nak93] 中岛彻。关于正特征下曲面的 Reider 方法。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 438 175 , : –186, 1993年。[PST17] Zsolt Patakfalvi、Karl Schwede 和 Kevin Tucker。正特征代数几何，2017年1月。[Ram74] C. P. Ramanujam。“关于 Kodaira 消失定理的评论”一文的补编。 *J. Indian Math. Soc., New Ser.* 38 121 124, 1974 , : – 。[Ray78] M. Raynaud。特征 ´下“消失定理”的反例。载于 *C. P. Ramanujam—a tribute*，第 8 卷 *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.*，第 273–278 页。施普林格，柏林-纽约，1978年。[Rei88] Igor Reider。代数曲面上的秩 2 向量丛与线性系。 *Ann. of Math. (2)*, ( ): – 。[Ros02] Jeff Rosoff。带状曲面上的有效除子类。 *Pacific Journal of Mathematics*, 202(1):119–124, 2002年1月。[Sak84] 酒井文雄。正规曲面上的 Weil 除子。 *Duke Mathematical Journal*, 51(4):877–887, 1984年12月。[Sak90] 酒井文雄。在正规曲面上的 Reider-Serrano 方法。载于 Andrew John Sommese、Aldo Biancofiore 和 Elvira Laura Livorni（编）， *Algebraic Geometry*，第 301–319 页，柏林，海德堡，1990年。Springer Berlin Heidelberg。[She91] N. I. Shepherd-Barron。特征 p 下曲面上的不稳定向量丛与线性系。 *Inventiones mathematicae* 106 1 243 1991 , ( ): –262, 12月。[Shi17] 白户智明。某些阿贝尔纤维空间上的 Frobenius 分裂。 *Journal of Pure and Applied Algebra*, 221(6):1383– 1406, 2017 年 6 月。[Smi00] Karen E. Smith。全局 F- 正则簇：在 Fano 簇商的消失定理中的应用。 *Michigan Mathematical Journal*, 48(1), 2000年。[Spr96] Maria Luisa Spreafico。任意特征下向量丛的 Bertini 型定理。 *Commun. Algebra*, 24(13):4147– 4157, 1996年。[SS10] Karl Schwede 和 Karen E. Smith。全局 F-正则与对数 Fano 簇。 *Advances in Mathematics*, 224(3):863–894, 2010年6月。[Szp79] L. Szpiro。关于 Parsin 和 Arakelov 刚性定理。载于 *Astérisque*，第 64 卷，第 169–202 页。法国数学会，1979年。[Tan72] 丹戈宏。Frobenius 映射下向量丛扩张的行为。 *Nagoya Mathematical Journal* 48 73 89, 1972 , : – 。[Tan24] Hiromu Tanaka。环面簇的 Kawamata-Viehweg 消失定理，2024年10月。[Ter98] 寺川弘之。关于正特征下曲面的 Kawamata-Viehweg 消失定理。*Mathematik* 71 5 370 375, 1998 *Archiv der* , ( ): – 11 月。[Ter99] 寺川弘之。正特征下射影曲面上的 d- 非常丰性。 *Pacific Journal of Mathematics* 187 1 187 1999 , ( ): –199, 1月。

[Tot19] Burt Totaro。Fano 簇上 Kodaira 消失定理的失效，以及非 Cohen-Macaulay 的终端奇点。*J. Algebraic Geom.*，28(4):751–771，2019。[WX17] Yuan Wang 与 Fei Xie。环面曲面上的消失，2017 年 7 月。[Xie10] Qihong Xie。正特征射影直纹曲面上 Kawamata-Viehweg 消失定理的反例。 *J.* ，（）：–。[*Algebra* 324 12 3494 3506, 2010
Xie11] Qihong Xie。正特征曲面上 Kodaira-Ramanujam 消失定理反例的刻画。 *Chinese Ann. Math. Ser. B*，32(5):741–748，2011。[YZ20] 叶飞与朱志贤。关于 5 维 Fujita 自由猜想。 *Adv. Math.*，371:107210，56，2020。附 Jun Lu 的附录。[Zha23] Yongming Zhang。拟椭圆曲面上伴随线丛的 *d* *Journal of Pure and Applied* -非常丰性。， *Algebra* 227 5 107271, 2023
（）：5 月。

Department of Mathematics and Computer Science, Queensborough Community College of CUNY, 222-05, 56thAvenue Bayside, NY 11364Department of Mathematics, CUNY Graduate Center, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016*Email address*: feye@qcc.cuny.eduDepartment of Mathematics, Capital Normal University, Beijing China*Email address*: zhixian@cnu.edu.cn