arXiv:2603.06994v1 [math.RT] 7 Mar 2026

通过阿贝尔范畴的粘合构造余挠对

Jinrui Yang、Yongyun Qin

云南师范大学数学学院、云南省现代解析数学及其应用重点实验室，云南昆明 650500。
电子邮箱：qinyongyun2006@126.com

摘要

设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是阿贝尔范畴的一个粘合。假设在 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中分别给定两个余挠对 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$。我们在 $\mathcal{A}$ 中构造两个余挠对 $({}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 和 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, (\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp})$。此外，我们给出这两个余挠对相等的一个充分条件，并研究 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 的遗传性和完备性。这些结果应用于在 Morita 环中构造新的余挠对。在证明过程中，我们对阿贝尔范畴的粘合作出一项具体约束：对于任意投射对象 $P \in \mathcal{A}$，ε_P 必须是单态射，其中 $\varepsilon : j_!j^* \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 是 $(j_!, j^*)$ 的余单位。这类粘合具有丰富的同调性质，因此可能具有独立的研究价值。

MSC2020：16B50；16E30；18G10；18G15；18G25。

关键词：再黏合；余挠对；Morita 环；三角矩阵环。

1 引言

余挠对的概念由 Salce [27] 提出，作为经典扭挠对的一种类比，其中 Hom 的正交性被 Ext^1取代。余挠对为研究给定范畴中的分解提供了一种视角，并且与范畴论和表示论中备受关注的其他同调概念密切相关。近年来，余挠对的概念得到了极大的推动，这在很大程度上归功于 Hovey 提出的

阿贝尔模型结构与阿贝尔范畴中某些余挠对之间的对应关系 [14, 18]。因此，在相对同调代数中构造余挠对和模型结构至关重要 [7, 15, 18]。

再黏合由Beilinson-Bernstein-Deligne在三角范畴的背景下引入 [2], ，并已被许多作者在阿贝尔范畴中加以研究 [9, 11, 25, 26]。应当指出，阿贝尔范畴的再黏合比三角范畴的再黏合出现得更为自然，因为环的任意幂等元都会在模范畴之间诱导出一个粘合情形。此外，阿贝尔范畴的再黏合在粘合与约化中非常有用；例如参见 [1, 5, 20, 21, 30, 31, 32]。特别地，许多专家研究了 $\mathcal{A}'$ 与 $\mathcal{A}''$ 中的（完备遗传的）余挠对何时能够诱导 $\mathcal{A}$中的（完备遗传的）余挠对，其中（$\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*$）是阿贝尔（正合、三角或外三角）范畴的一个粘合[4, 10, 19, 22, 29], ，并且一些作者将这种粘合技术从余挠对推广到 n-余挠对 [3, 17, 23]。在本文中，我们继续探讨在何种条件下可以沿阿贝尔范畴的再黏合来粘合（完备遗传的）余挠对；已知的粘合技术仅在 i^* 与 $i^!$ 均为正合、或仅 $i^!$ 为正合这一假设下成立，参见 [10, 19, 22, 29]。然而，这一假设显得相当受限，因为其中 $i^!$ 为正合的阿贝尔范畴再黏合只能存在于逗号范畴或三角矩阵环的情形 [9, 11]。众所周知， $i^!$ （相应地， i^*）的正合性蕴含j_* （相应地， $j_!$）的正合性；例如参见 [8, 28]。在本文中，我们通过放宽对 $i^!$ 或 i^*的正合性条件，仅要求导出函子 $\mathbb{R}_1 j_*$ 或 $\mathbb{L}_1 j_!$ 在某些对象上消失，从而推广了关于余挠对与阿贝尔范畴再黏合的已知粘合技术。为精确陈述我们的结果，我们首先引入一些记号。

本文始终假设，所有阿贝尔范畴都有足够多的投射对象和内射对象。设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是阿贝尔范畴的一个黏合，并设 $\mathcal{X}$（分别地， $\mathcal{Y}$）是 $\mathcal{A}'$（分别地，$\mathcal{A}''$）的一个子范畴。受 Hu-Zhu-Zhu [19], 的启发，我们定义

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^!X \in \mathcal{X},\ j^*X \in \mathcal{Y},\ (\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0\},$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^*X \in \mathcal{X},\ j^*X \in \mathcal{Y},\ (\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0\}.$$

对于 $\mathcal{A}$ 中的一个对象类 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathcal{A}$ 中满足对所有 $C \in \mathcal{C}$ 都有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$ 的 X 的类记为 $\mathcal{C}^{\perp}$，记号 ${}^{\perp}\mathcal{C}$ 的定义类似。

定理 1.1. (定理 3.3) 假设$(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$和$(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$是余挠

对，分别位于 $\mathcal{A}'$和 $\mathcal{A}''$中。若$(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$，则$({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$是 $\mathcal{A}$中的余挠对；若$(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则$(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$是 $\mathcal{A}$中的余挠对。

一般而言，刻画类 ${}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 和 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$ 并非易事。我们的下一个目标是确定何时有 ${}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 和 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} = \mathcal{N}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，这将意味着 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是一个余挠对。为此，我们对粘合添加一个更强的假设。我们称阿贝尔范畴的粘合 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 满足条件 (P)，如果对于 $\mathcal{A}$ 中的任意投射对象 P，ε_P 都是单态射，其中 $\varepsilon\colon j_! j^* \to 1_{\mathcal{A}}$ 是伴随对 $(j_!, j^*)$ 的余单位。在此条件下，我们在命题 3.7 中证明等式 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$ 成立。此外，我们还得到了关于 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 的遗传性与完备性的以下结果。

定理 1.2。 (定理 3.12) 设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是满足条件 *(P)* 的阿贝尔范畴粘合。假设$(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和$(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的完备遗传余挠对。若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$ 且 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则$(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对。

满足条件 (P) 的阿贝尔范畴粘合自然地出现在表示论中。首先，只要 i^* 或 $i^!$ 是正合的，该条件就成立；参见命题 4.1。因此，定理 1.2 通过放宽对 $i^!$ 或 i^* 正合性的要求，扩展了关于余挠对与阿贝尔范畴粘合的已知粘合方法[3, 19] ；参见注 4.3。其次，三角矩阵环给出两个满足条件 (P) 的模范畴粘合，由此定理 1.1 和定理 1.2 推广并加强了文献 [24, 33] 中关于余挠对与三角矩阵环的一些结果；参见注 4.10。最后，与 Morita 环 $\Lambda_{(\phi,\psi)} = \begin{pmatrix} A & {}_A N_B \\ {}_B M_A & B \end{pmatrix}$ 相关的粘合在 ϕ 或 ψ 是单态射时满足条件 (P)，从而可以应用定理 1.2 在这类环上构造新的余挠对；参见推论 4.6 和 4.7。特别地，当 $M \otimes_A N = 0$ 或 $N \otimes_B M = 0$ 时，我们构造了一些不同于文献 [6] 中所述的显式余挠对；参见推论 4.8 和 4.9。

本文结构如下。在第2节中，我们给出证明所需的一些定义和一些预备结果。在第3节中，我们通过阿贝尔范畴的再黏合来粘合余挠对，并证明

引言中所述的定理 1.1 和定理 1.2。在第 4 节中，我们给出在 Morita 环和三角矩阵环中的一些应用。

2 预备知识

全文中，$\mathcal{A}$ 是一个具有足够多投射对象和内射对象的阿贝尔范畴。我们用 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的投射对象类，用 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$表示 $\mathcal{A}$的内射对象类。两个同态$f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 的复合记为 gf。本文中，所有子范畴均假定为对同构封闭的全子范畴。

首先，我们回顾阿贝尔范畴的粘合的定义；例如参见 [2, 9]。

定义 2.1. 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 为阿贝尔范畴。一个相对于 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 的粘合$\mathcal{A}$由下图给出

$$\mathcal{A}' \underset{i^!}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{A} \underset{j_*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}''$$

以下记作（$\mathcal{A}'$， $\mathcal{A}$， $\mathcal{A}''$， i^*， i_*， $i^!$， $j_!$， j^*， j_*），并满足以下条件：

（1）（i^*， i_*），（i_*， $i^!$），（$j_!$， j^*）和（j^*， j_*）是伴随对；（2） i_*、 $j_!$ 和 j_* 是全忠实函子；（3）核 $j^* = \mathrm{Im} i_*$。

在下面的注记中，我们列出粘合情形下若干容易验证的性质，这些性质将在后文中发挥作用。

注 2.2。 **(1)** 函子 i_* 和 j^* 是正合的， i^* 和 $j_!$ 是右正合的，而 $i^!$ 和 j_* 是左正合的。这表明 i^* 和 $j_!$ 保持投射对象，而 $i^!$ 和 j_* 保持内射对象。

(2) 存在四个自然同构 $i^*i_* \cong 1_{\mathcal{A}'}$， $i^!i_* \cong 1_{\mathcal{A}'}$， $j^*j_! \cong 1_{\mathcal{A}''}$和 $j^*j_* \cong 1_{\mathcal{A}''}$，它们分别由这些伴随对的单位和余单位给出。

(3)（见 [25, 命题 2.6] 或 [8, 引理 3.1]）对于任意 $A \in \mathcal{A}$，存在 M'， $N' \in \mathcal{A}'$使得单位和余单位诱导出以下两个正合列

$$0 \to i_*(M') \to j_!j^*(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A \to i_*i^*(A) \to 0,$$

$$0 \to i_*i^!(A) \to A \xrightarrow{\delta_A} j_*j^*(A) \to i_*(N') \to 0.$$

(4) 由伴随关系可知 $\mathrm{Im}j_! \subseteq$核i^* 和 $\mathrm{Im}j_* \subseteq$核$i^!$。

现在我们回顾余挠对的概念。

定义 2.3. ([27]) 阿贝尔范畴中的一对对象类 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 称为余挠对，若 $\mathcal{C}^\perp = \mathcal{D}$ 且 ${}^\perp\mathcal{D} = \mathcal{C}$。这里，$\mathcal{C}^\perp$ 是 $\mathcal{A}$ 中满足对所有 $C \in \mathcal{C}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C, X) = 0$ 的 X 类；类似地，${}^\perp\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{A}$ 中满足对所有 $D \in \mathcal{D}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y, D) = 0$ 的 Y 类。

由 [7, 15], ，若对每个 $M \in \mathcal{A}$，都存在两个短正合列，则余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 称为完备：

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0\ ,\ \ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} D_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$。

命题 2.4. ([7, 命题 7。17]) 设$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是$\mathcal{A}$中的一个余挠对。以下条件等价：

(1) $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是完备的；(2) 对于任意 $X \in \mathcal{A}$，都存在短正合列 $0 \to D \to C \to X \to 0$，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $D \in \mathcal{D}$；(3) 对于任意 $X \in \mathcal{A}$，都存在短正合列 $0 \to X \to D' \to C' \to 0$，其中 $C' \in \mathcal{C}$ 且 $D' \in \mathcal{D}$。

根据 [15], ，余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是遗传的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 对满态射的核封闭，且 $\mathcal{D}$ 对单态射的余核封闭。对于遗传余挠对，我们有以下命题。

Proposition 2.5. ([13, Theorem 2.10]) *Let $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ be a cotorsion pair in $\mathcal{A}$.* **命题 2.5.** ([13, Theorem 2.10]) 设$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是$\mathcal{A}$中的一个余挠对。那么，以下条件等价：理由：

(1) $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是遗传的；(2) $\mathcal{C}$ 在满态射的核下封闭；

(3) $\mathcal{D}$ 在单态射的余核下封闭；(4) $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$；

(5) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$ 对 $i \geq 1$成立。

3 沿再黏合粘合余挠对

设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是阿贝尔范畴的一个粘合。本节中，我们将探讨如何将 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的余挠对粘合起来，从而在 $\mathcal{A}$ 中得到一个余挠对。我们先来看下面的引理。

引理 3.1. 对于任意的 $X \in \mathcal{A}$、$L \in \mathcal{A}'$ 和 $Y \in \mathcal{A}''$，有

(1) 若 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_* L, X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(L, i^! X)$。(2) 若 $(\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0$，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(i^* X, L) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, i_* L)$。(3) 若 $(\mathbb{R}_1 j_*)(Y) = 0$，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(j^* X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, j_* Y)$。(4) 若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(Y) = 0$，则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_! Y, X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(Y, j^* X)$。

证明。我们只证明（1）。断言（2）、（3）和（4）可类似证明。

（1）由于 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象，存在 $\mathcal{A}$ 中的短正合列 $0 \rightarrowtail X \rightarrow I \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow 0$ $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$。应用左正合函子 $i^!$，并利用 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$，可得以下短正合列

$$0 \longrightarrow i^! X \longrightarrow i^! I \longrightarrow i^! C \longrightarrow 0 .$$

由于 $i^!$ 保持内射对象，由 [6, 引理 3.7（2）]（该结论对阿贝尔范畴同样成立）可知，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_* L, X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(L, i^! X)$。 □

在 [33], 中，Zhu-Peng-Ding 构造了三角矩阵环上的四个余挠对。受 [33], 启发，并注意到三角矩阵环会导出阿贝尔范畴的一个特殊粘合，我们沿任意阿贝尔范畴的粘合构造余挠对。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的两个对象类。回顾一下，在我们的设定中

$$\mathcal{N}^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^! X \in \mathcal{X},\ j^* X \in \mathcal{Y},\ (\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0\},$$
$$\mathcal{M}^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}} = \{X \in \mathcal{A} \mid i^* X \in \mathcal{X},\ j^* X \in \mathcal{Y},\ (\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0\}.$$

受 [33, 命题 3.3], 的启发，我们设 $\mathcal{C}^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}} = i_*(\mathcal{X}) \cup j_!(\mathcal{Y})$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{X}}_{\mathcal{Y}} = i_*(\mathcal{X}) \cup j_*(\mathcal{Y})$，并得到以下引理。

引理 3.2。(1) 假设 $\mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}''$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的对象类。若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$ 和 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{U}'$，则 $(\mathcal{C}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp} = \mathcal{N}^{\perp_{(\mathcal{U}')} \perp_{(\mathcal{U}'')}}$。

(2) 假设 $\mathcal{V}'$ 和 $\mathcal{V}''$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$中的对象类。若 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$ 且 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{V}'$，则 ${}^{\perp}(\mathcal{D}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}) = \mathcal{M}^{\perp_{(\mathcal{V}')} \perp_{(\mathcal{V}'')}}$。

证明。我们只证明 (1)，(2) 的证明类似。首先，我们证明 $(\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{U}')^{\perp}(\mathcal{U}'')^{\perp}$。对于任意 $X \in (\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} = (i_*(\mathcal{U}') \cup j_!(\mathcal{U}''))^{\perp}$，有$X \in (i_*(\mathcal{U}'))^{\perp}$以及 $X \in (j_!(\mathcal{U}''))^{\perp}$。为证明 $X \in \mathcal{N}(\mathcal{U}')^{\perp}(\mathcal{U}'')^{\perp}$，只需证明 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$、$i^!X \in (\mathcal{U}')^{\perp}$ 以及 $j^*X \in (\mathcal{U}'')^{\perp}$。考虑短正合列 $0 \succ X \succ I \overset{g}{\succ} C \succ 0$，其中 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}.}$。由于 $\mathcal{A}'$ 有足够多的投射对象，存在一个满态射 $f: P_1 \to i^!C$，其中 $P_1 \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}'}$。由于 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{U}'$ 且 $X \in (i_*(\mathcal{U}'))^{\perp}$，我们有 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(i_*(P_1)\ X) = 0$，于是得到以下短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(P_1), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(P_1), I) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(i_*(P_1), C) \longrightarrow 0\,.$$

由伴随关系可知，序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(P_1, i^!X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(P_1, i^!I) \xrightarrow{(i^!g)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(P_1, i^!C) \longrightarrow 0$$

也是正合的。因此，$(i^!g)_*$ 是一个满态射，进而存在$u \in \mathbf{Hom}(P_1, i^!I)$，使得 $f = (i^!g)_*(u) = (i^!g)u$。由于 f 是一个满态射，我们推得 $i^!g$ 也是一个满态射，进而有 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$。对于任意 $A \in \mathcal{U}'$，由 $X \in (i_*(\mathcal{U}'))^{\perp}$可知 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_*A, X) = 0$，进而由引理 3.1 (1) 得 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(A, i^!X) = 0$。因此，我们得到 $i^!X \in (\mathcal{U}')^{\perp}$。对于任意 $C' \in \mathcal{U}''$，由 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$及引理 3.1 (4) 可知 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C', j^*X) \cong \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!C', X)$，而这为零，因为 $X \in (j_!(\mathcal{U}''))^{\perp}$。因此，我们得到 $j^*X \in (\mathcal{U}'')^{\perp}$。

现在我们证明 $\mathcal{N}(\mathcal{U}')^{\perp}(\mathcal{U}'')_{\perp} \subseteq (\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$。对于任意 $X \in \mathcal{N}^{(\mathcal{U}'}{}^{\perp}(\mathcal{U}'')^{\perp}$，有 $i^!X \in (\mathcal{U}')^{\perp}, j^*X \in (\mathcal{U}'')^{\perp}$，且 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$。对于任意 $A \in \mathcal{U}'$，由引理 3.1 (1) 可知 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_*A, X) \cong \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(A, i^!X)$，而后者为零，因为 $i^!X \in (\mathcal{U}')^{\perp}$。因此，我们得到 $X \in (i_*(\mathcal{U}'))^{\perp}$。对于任意 $C' \in \mathcal{U}''$，由于 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$，由引理 3.1 (4) 可知 $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!C', X) \cong \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C', j^*X)$，而后者为零，因为 $j^*X \in (\mathcal{U}'')^{\perp}$。因此，我们得到 $X \in (j_!(\mathcal{U}''))^{\perp}$，从而$X \in (i_*(\mathcal{U}') \cup j_!(\mathcal{U}''))^{\perp} = (\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$

□

受 [33, 定理3.4], 的启发，我们在下一定理中构造了 $\mathcal{A}$ 中的两个余挠对。

定理 3.3。 假设 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$和 $\mathcal{A}''$中的余挠对。若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$，则 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是 $\mathcal{A}$中的余挠对；若 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$ 是 $\mathcal{A}$中的余挠对。

证明。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$中的一个对象类。容易验证，$({}^{\perp}(\mathcal{C}^{\perp})\ \mathcal{C}^{\perp})$ 和 $({}^{\perp}\mathcal{C}, ({}^{\perp}\mathcal{C})^{\perp})$ 都是 $\mathcal{A}$中的余挠对。因此，我们有 $({}^{\perp}((\mathcal{C}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp}), (\mathcal{C}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp})$ 和 $({}^{\perp}(\mathcal{D}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}), ({}^{\perp}(\mathcal{D}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}))^{\perp})$ 都是余挠对。由于 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是余挠对，由定义可得 $\mathcal{P}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}'} \subseteq \mathcal{V}'$。若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$，则由引理 3.2 (1)可得 $(\mathcal{C}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp} = \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，从而 $({}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 是 $\mathcal{A}$中的余挠对。若 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则由引理 3.2 (2)可得 ${}^{\perp}(\mathcal{D}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}) = \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，从而 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, (\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp})$ 是 $\mathcal{A}$中的余挠对。

□

接下来，我们将讨论何时 $({}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}) = (\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, (\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''})^{\perp})$。我们需要以下引理。

引理 3.4. 设 X 是 $\mathcal{A}$中的一个对象。

(1) 若单位 $X \xrightarrow{\delta_X} j_*j^*X$ 是满态射，则 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$；反之，若对任意 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，$\delta_I$ 是满态射，则结论也成立。

(2) 若余单位 $j_!j^*X \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ 是单态射，则 $(\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0$；反之，若对任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$，$\varepsilon_P$ 是单态射，则结论也成立。

证明。我们只证明 (1)，(2) 的证明类似。考虑 $\mathcal{A}$ 中带有 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$的短正合列 $0 \rightarrowtail X \overset{f}{\rightarrowtail} I \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \twoheadrightarrow 0$。由注 2.2 (3)，我们得到以下正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & i_*i^!X & \xrightarrow{i_*i^!f} & i_*i^!I & \xrightarrow{i_*i^!g} & i_*i^!C & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_I} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_C} & & \\
0 & \longrightarrow & j_*j^*X & \longrightarrow & j_*j^*I & \longrightarrow & j_*j^*C. & &
\end{array}$$

如果 δ_X 是满态射，那么由蛇引理可得序列

$$0 \longrightarrow i_*i^!X \xrightarrow{i_*i^!f} i_*i^!I \xrightarrow{i_*i^!g} i_*i^!C \longrightarrow 0$$

是正合的。应用 i^*，我们得到以下正合列

$$i^*i_*i^!X \xrightarrow{i^*i_*i^!f} i^*i_*i^!I \xrightarrow{i^*i_*i^!g} i^*i_*i^!C \longrightarrow 0\,.$$

由于 $i^*i_* \cong 1_{\mathcal{A}'}$，我们得到一个正合列 $i^!X \overset{i^!f}{\underline{\succ}} i^!I \overset{i^!g}{\underline{\succ}} i^!C \underline{\succ} 0$，进而有 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$。

反之，若 $(\mathbb{R}_1 i^!)(X) = 0$，则该序列

$$0 \longrightarrow i^!X \xrightarrow{i^!f} i^!I \xrightarrow{i^!g} i^!C \longrightarrow 0$$

是正合的。应用 i_*，我们得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow i_*i^!X \longrightarrow i_*i^!I \xrightarrow{i_*i^!g} i_*i^!C \longrightarrow 0\,.$$

因此， g在 $\mathrm{Ker}(\delta_I)$ 与 $\mathrm{Ker}(\delta_C)$ 之间诱导出一个满态射。另一方面，由蛇引理可知，该序列

$$\mathrm{Ker}(\delta_I) \to \mathrm{Ker}(\delta_C) \to \mathrm{Coker}\delta_X \to \mathrm{Coker}\delta_I$$

是正合的。由于 δ_I 是满态射，我们得到 $\mathrm{Coker}\delta_I = 0$，这意味着 $\mathrm{Coker}\delta_X = 0$。因此， δ_X 是满态射。 □

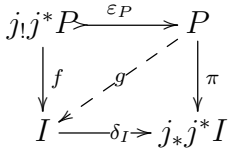
以下观察对于后续内容至关重要。

引理 3.5。 $j_!j^*P \overset{\varepsilon_P}{\to} P$ 对于任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ 都是单态射，当且仅当 $I \overset{\delta_I}{\to} j_*j^*I$ 对于任意 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$都是满态射。

证明。 假设对任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$， $j_!j^*P \overset{\varepsilon_P}{\to} P$ 都是单态射。对任意 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，设 $\pi :\ P \twoheadrightarrow j_*j^*I$ 为 j_*j^*I的投射覆盖。由伴随，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j_!j^*P, I) & \xrightarrow{(\delta_I)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}''}(j_!j^*P, j_*j^*I) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j^*P, j^*I) & \xrightarrow{(j^*\delta_I)_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}''}(j^*P, j^*j_*j^*I). \end{array}$$

令 $\xi :\ j^*j_* \to 1_{\mathcal{A}''}$ 为伴随对 (j^*, j_*) 的余单位。由于 $\delta :\ 1_{\mathcal{A}} \to j_*j^*$ 是单位，我们有 $(\xi_{j^*I}) \circ (j^*\delta_I) = 1_{j^*I}$，进而 $(\xi_{j^*I} \circ j^*\delta_I)_* = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j^*P, j^*I)}$。因此，我们得到 $(\xi_{j^*I})_* \circ (j^*\delta_I)_* = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j^*P, j^*I)}$。另一方面，由注 2.2 (2) 可知， ξ 是一个自然同构，进而 $(\xi_{j^*I})_*$ 是一个同构。因此，$(j^*\delta_I)_*$ 是一个同构，由上述交换图可知 $(\delta_I)_*$ 也是同构。考虑同态 $\pi\varepsilon_P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j_!j^*P, j_*j^*I)$。由于 $(\delta_I)_*$ 是一个同构，存在 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j_!j^*P, I)$，使得 $(\delta_I)_*(f) = \pi\varepsilon_P$。因此，我们得到 $\delta_I f = \pi\varepsilon_P$。考虑下面的交换图：



由于 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，存在 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, I)$，使得 $f = g\varepsilon_P$。于是可得 $\pi\varepsilon_P = \delta_I f = \delta_I g\varepsilon_P$，也就是说，$(\pi - \delta_I g)\varepsilon_P = 0$。另一方面，由伴随可知，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(j^*P, j^*I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, j_*j^*I) \xrightarrow{(\varepsilon_P)_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(j_!j^*P, j_*j^*I) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}''}(j^*P, j^*I)$。正如我们已经证明 $(\delta_I)_*$ 是一个同构，我们也可以类似地证明 $(\varepsilon_P)^*$ 是一个同构，进而 $\pi - \delta_I g = 0$，因为 $(\varepsilon_P)^*(\pi - \delta_I g) = (\pi - \delta_I g)\varepsilon_P = 0$。因此，我们得到 $\pi = \delta_I g$。注意，π 是一个满态射，因此 δ_I 也是。逆命题可对偶地证明。 □

为方便起见，我们称阿贝尔范畴的粘合 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 满足条件 *(P)*，如果对于任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$，$\varepsilon_P$ 都是单态射，其中 $\varepsilon : j_!j^* \to 1_{\mathcal{A}}$ 是伴随对 $(j_!, j^*)$ 的余单位。为了给出 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$ 的一个充分条件，我们需要以下引理。

引理 3.6。设 $\mathcal{U}'$、$\mathcal{V}'$、$\mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的对象类。假设 $\mathcal{U}'$、$\mathcal{V}'$、$\mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 都包含零对象。那么 $i_*\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$、$i_*\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$、$j_!\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 和 $j_*\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。

证明。对于任意 $C \in \mathcal{U}'$，要证明 $i_*C \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，只需证明 $i^*(i_*C) \in \mathcal{U}'$，$j^*(i_*C) \in \mathcal{U}''$ 以及 $(\mathbb{L}_1 i^*)(i_*C) = 0$。根据粘合的性质，我们有 $i^*i_*C \cong C \in \mathcal{U}'$ 和 $j^*i_*C = 0 \in \mathcal{U}''$。此外，由命题 4.7] 可得 [9,，即 $(\mathbb{L}_1 i^*)i_* = 0$，因此 $i_*\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。其余包含关系可类似证明。 □

现在我们可以给出一个充分条件，使得 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$。以下命题受命题 3.7] 启发。

命题 3.7. 设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是满足条件 *(P)* 的粘合。假设 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的余挠对。若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$ 且 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$。

证明。 由定理 3.3 可知，$({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 和 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp})$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的余挠对。现在我们证明 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'} = (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$，进而这两个余挠对相同。

首先，我们证明 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'} \subseteq (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$。对于任意 $X \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$，有 $i^{!}X \in \mathcal{V}'$，$j^{*}X \in \mathcal{V}''$ $\mathbb{R}_1 i^{!}\ X = 0$ 3 5 3 4 以及 ( ) 。由引理 . 和引理 . 可知， δ_X 是一个满态射。根据注 2.2 (3)，我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow i_{*}i^{!}X \longrightarrow X \xrightarrow{\delta_X} j_{*}j^{*}X \longrightarrow 0\ .$$

因此，要证明 $X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$，只需证明 $i_{*}i^{!}X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$以及 $j_{*}j^{*}X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$。对于任意 $Y \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，有 $i^{*}Y \in \mathcal{U}'$, $j^{*}Y \in \mathcal{U}''$ 以及 $(\mathbb{L}_1 i^{*})(Y) = 0$。由引理 3.1 (2)可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Y, i_{*}i^{!}X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(i^{*}Y, i^{!}X)$，而由于 $i^{*}Y \in \mathcal{U}'$和 $i^{!}X \in \mathcal{V}'$，该式为零。因此，我们推得 $i_{*}i^{!}X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$。另一方面，由 $(\mathbb{R}_1 j_{*})(\mathcal{V}'')$ $=$ 0 $= 0$ 3 1 3 Y $\cong$ 可知 ($\mathbb{R}_1 j_{*})(j^{*}X)$ 。应用引理 . ( )，可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\ , j_{*}j^{*}X)$ $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(j^{*}Y, j^{*}X)$，而由于 $j^{*}Y \in \mathcal{U}''$和 $j^{*}X \in \mathcal{V}''$，该式为零。因此，我们得到 $j_{*}j^{*}X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$，进而得到 $X \in (\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$。

接下来，我们证明 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。由于 $(\mathcal{U}',\ \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'',\ \mathcal{V}'')$ 是余挠对，因此 $\mathcal{U}'$、 $\mathcal{V}'$、 $\mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 都包含零对象。由引理 3.6 可得 $i_{*}\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 和 $j_{!}\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，进而 $\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'} = i_{*}(\mathcal{U}') \cup j_{!}(\mathcal{U}'') \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。因此，我们得到 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} \subseteq (\mathcal{C}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp}$，并由引理 3.2 (1) 推得 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'})^{\perp} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。

□

受 [24, 定理 4.4]，启发，我们考虑以下定理。

定理 *3.8.* 设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^{*}, i_{*}, i^{!}, j_{!}, j^{*}, j_{*})$ 是一个满足条件 *(P)* 的粘合。假设 $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V}'$, $\mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的对象类。若 $(\mathbb{L}_1 j_{!})({}^{\perp}\mathcal{V}'') = 0$、$(\mathbb{R}_1 j_{*})(\mathcal{U}''^{\perp}) = 0$，且 $(\mathbb{L}_1 j_{!})(\mathcal{U}'') = 0$ 或 $(\mathbb{R}_1 j_{*})(\mathcal{V}'') = 0$，则 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是余挠对，当且仅当 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是余挠对。

证明。 若 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是余挠对，则 $\mathcal{U}'' = {}^{\perp}\mathcal{V}''$和 $\mathcal{V}'' = \mathcal{U}''^{\perp}$，因此 $(\mathbb{L}_1 j_{!})(\mathcal{U}'') = 0$且 $(\mathbb{R}_1 j_{*})(\mathcal{V}'') = 0$。由定理 3.3 和命题 3.7 可得 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是余挠对。

反之，假设 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'},\ \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个余挠对。那么 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 和 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 都包含零对象，因此根据 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 的定义， $O_{A'} = i^{*}O_A \in \mathcal{U}'$。类似地，我们得到 $\mathcal{V}'$、 $\mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 都包含

零对象。对于任意 $A \in \mathcal{U}'$ 和 $B \in \mathcal{V}'$，由 [25, 备注 3.7 (1)] 可知，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(A, B) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_*A, i_*B)$，而该对象为零，因为 $i_*A \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$ 和 $i_*B \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，见引理 3.6。因此，我们得到 $\mathcal{U}' \subseteq {}^{\perp}\mathcal{V}'$ 和 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}'^{\perp}$。

现在我们证明 ${}^{\perp}\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}'$。对于任意 $X \in {}^{\perp}\mathcal{V}'$，我们将证明 $i_*X \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，然后根据 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$ 的定义得到 $X \cong i^*i_*X \in \mathcal{U}'$。由于 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 是一个余挠对，为了证明 $i_*X \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，只需证明 $i_*X \in {}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$。对于任意 $Y \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，有 $i^!Y \in \mathcal{V}'$ 和 $(\mathbb{R}_1 i^!)Y = 0$。由引理 3.1 (1) 可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(i_*X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}'}(X, i^!Y)$，由于 $X \in {}^{\perp}\mathcal{V}'$，其值为零。因此，我们得到 $i_*X \in {}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，进而得到 ${}^{\perp}\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}'$。类似地，我们可以证明 $\mathcal{U}'^{\perp} \subseteq \mathcal{V}'$，于是 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 是 $\mathcal{A}'$ 中的一个余挠对。

对任意$C \in \mathcal{U}''$与 $D \in \mathcal{V}''$，我们断言 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C, D) = 0$。事实上，若 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$，则我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C, D) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C, j^*j_*D) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!C, j_*D),$$

其中第二个同构由引理 3.1 (4) 得到。若 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C, D) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(j^*j_!C, D) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!C, j_*D),$$

其中第二个同构由引理 3.1 (3) 得到。由引理 3.6，我们得到 $j_!C \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$与 $j_*D \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，进而 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!C, j_*D) = 0$。因此，我们得到 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(C, D) = 0$，从而 $\mathcal{U}'' \subseteq {}^{\perp}\mathcal{V}''$与 $\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{U}''^{\perp}$。

现在我们证明 ${}^{\perp}\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{U}''$。对任意 $X \in {}^{\perp}\mathcal{V}''$，我们将断言 $j_!X \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，然后由 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$的定义得到 $X \cong j^*j_!X \in \mathcal{U}''$。由于$(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$是一个余挠对，为了证明 $j_!X \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，只需证明 $j_!X \in {}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$。对任意 $Y \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，我们有 $j^*Y \in \mathcal{V}''$。由于$(\mathbb{L}_1 j_!)({}^{\perp}\mathcal{V}'') = 0$，由引理 3.1 (4)可知，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(j_!X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}''}(X, j^*Y)$，而由于$X \in {}^{\perp}\mathcal{V}''$，它为零。因此，我们得到 $j_!X \in {}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$，进而得到 ${}^{\perp}\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{U}''$。用类似的论证，我们可以证明 $\mathcal{U}''^{\perp} \subseteq \mathcal{V}''$ （其中用到了假设$(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{U}''^{\perp}) = 0$），从而$(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$是 $\mathcal{A}'$中的一个余挠对。

□

假设 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是遗传的或完备的，自然会问诱导出的余挠对 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 是否具有相同的性质。

定理3.9。采用定理 *3.8* 中的记号和假设。则余挠对 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是遗传的，当且仅当 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 也是遗传的。

证明。 如果 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是遗传余挠对，则由定理 3.8 可知 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是一个余挠对。下面只需证明 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是遗传的。根据命题 2.5，只需证明 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 在满态射的核下封闭。设 $0 \rightarrowtail X \overset{f}{\rightarrowtail} Y \overset{g}{\rightarrowtail} Z \rightarrowtail 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个短正合列，其中 $Y, Z \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。于是有 $i^*Y \in \mathcal{U}'$、$i^*Z \in \mathcal{U}'$、$j^*Y \in \mathcal{U}''$、$j^*Z \in \mathcal{U}''$、$(\mathbb{L}_1 i^*)(Y) = 0$ 以及 $(\mathbb{L}_1 i^*)(Z) = 0$。因此，我们得到两个正合列

$$0 \longrightarrow i^*X \xrightarrow{i^*f} i^*Y \xrightarrow{i^*g} i^*Z \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow j^*X \xrightarrow{j^*f} j^*Y \xrightarrow{j^*g} j^*Z \longrightarrow 0\,,$$

这意味着 $i^*X \in \mathcal{U}'$和 $j^*X \in \mathcal{U}''$，因为 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 都是遗传的。因此，要证明 $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，还需证明 $(\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0$。由于 $j^*Z \in \mathcal{U}'' = {}^{\perp}\mathcal{V}''$ 且 $(\mathbb{L}_1 j_!)({}^{\perp}\mathcal{V}'') = 0$，我们得到 $(\mathbb{L}_1 j_!)(j^*Z) = 0$，于是有如下短正合列

$$0 \longrightarrow j_!j^*X \xrightarrow{j_!j^*f} j_!j^*Y \xrightarrow{j_!j^*g} j_!j^*Z \longrightarrow 0\,.$$

另一方面，由引理 3.4 可知 ε_Y 是单态射；根据下面的交换图， ε_X 也是单态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & j_!j^*X & \xrightarrow{j_!j^*f} & j_!j^*Y & \longrightarrow & j_!j^*Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_Z} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

再次应用引理 3.4，我们得到 $(\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0$ ，因此 $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。

反过来，假设 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是遗传余挠对。由定理 3.8 可知，$(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 都是余挠对。接下来只需证明 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 都是遗传的。根据命题2.5，只需证明 $\mathcal{V}'$ 和 $\mathcal{V}''$ 对单态射的余核封闭。

设 $0 \to X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z' \to 0$ 是 $\mathcal{A}'$ 中的一个短正合列，其中X', $Y' \in \mathcal{V}'$。应用 i_*，得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow i_*X' \xrightarrow{i_*f} i_*Y' \xrightarrow{i_*f} i_*Z' \longrightarrow 0\,.$$

另一方面，由引理 3.6 可知 i_*X'、 $i_*Y' \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$，从而由于 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是遗传的，可得 $i_*Z' \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。因此，由 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 的定义，我们得到 $Z' \cong i^!i_*Z' \in \mathcal{V}'$。

设 $0 \to X'' \xrightarrow{\alpha} Y'' \xrightarrow{\beta} Z'' \to 0$ 是 $\mathcal{A}''$ 中的短正合列，且 X'', $Y'' \in \mathcal{V}''$。由于 $\mathcal{V}'' = \mathcal{U}''^{\perp}$ 且 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{U}''^{\perp}) = 0$，我们得到短正合列 $0 \to j_*X'' \xrightarrow{j_*(\alpha)} j_*Y'' \xrightarrow{j_*(\beta)} j_*Z'' \to 0$。另一方面，由引理 3.6 可知 j_*X''、 $j_*Y'' \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$，从而由于 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是遗传的，可得 $j_*Z'' \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。因此，由 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 的定义，我们得到 $Z'' \cong j^*j_*Z'' \in \mathcal{V}''$。

□

为了验证前面构造的余挠对的完备性，我们需要下面两个引理。回忆: 一个子范畴是分解的，如果它在扩张和满射的核下封闭，并且包含所有投射对象 [15]。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$的一个对象类。对任意 $X \in \mathcal{A}$，我们称 X 有一个特殊 $\mathcal{C}$-预覆盖，如果存在短正合列 $0 \to Y \to C \to X \to 0$，其中 $C \in \mathcal{C}$ 且 $Y \in \mathcal{C}^{\perp}$ [7]。对偶地，我们有余可解子范畴和特殊 $\mathcal{C}$-预包络的定义。在下面两个引理中，我们假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{A}$的两个子范畴，使得 $\mathcal{C}$ 是分解的且 $\mathcal{D}$ 是余分解的。

引理 3.10. [24, 引理 5.4] 设$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ 是$\mathcal{A}$中的一个短正合列。

(1)如果 A_1 和 A_3 具有特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖，那么 A_2也具有特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖。

(2) 如果 A_1 和 A_3 具有特殊的 $\mathcal{D}$-预包络，那么 A_2也具有特殊的 $\mathcal{D}$-预包络。

引理 3.11. 设 $0 \to A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \to 0$是 $\mathcal{A}$中的一个短正合列。

(1) 若 $A_1 \in \mathcal{C}^{\perp}$ 和 A_2 有特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖，则 A_3也有。(2) 若 $A_1 \in \mathcal{D}$ 和 A_2 有特殊的 $\mathcal{D}$- 预包络，则 A_3 也有。(3) 若 $A_3 \in \mathcal{C}$ 和 A_2 有特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖，则 A_1也有。(4) 若 $A_3 \in {}^{\perp}\mathcal{D}$ 和 A_2 有特殊的 $\mathcal{D}$-预包络，则 A_1 也有。

证明。 我们只证明 (1) 和 (2)，(3) 和 (4) 的证明类似。

(1) 由于 A_2 具有特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖，存在一个短正合列 $0 \longrightarrow B_3 \xrightarrow{l} C_2 \xrightarrow{\rho} A_2 \longrightarrow 0$，其中 $C_2 \in \mathcal{C}$ 且 $B_3 \in \mathcal{C}^{\perp}$。于是我们得到如下拉回图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & B_3 & = & B_3 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\sigma} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 & \xrightarrow{g} & A_3 & \longrightarrow & 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

由于 $\mathcal{C}^{\perp}$ 对扩张封闭，由第一列可得 $K \in \mathcal{C}^{\perp}$。现在，第二行表明 σ 是 A_3 的一个特殊 $\mathcal{C}$-预覆盖。

(2) 由于 A_2 具有特殊的 $\mathcal{D}$-预包络，存在一个短正合列 $0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{i} D_2 \xrightarrow{\pi} B_2 \longrightarrow 0$，其中 $D_2 \in \mathcal{D}$ 且 $B_2 \in {}^{\perp}\mathcal{D}$。于是我们得到如下推出图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 & \xrightarrow{g} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0. \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & B_2 & = & B_2 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于 $\mathcal{D}$ 对单态射的余核封闭，我们由第二行得到 $H \in \mathcal{D}$。现在，第三列表明 τ 是 A_3 的特殊 $\mathcal{D}$-预包络。

□

现在我们可以验证 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 的完备性了。

定理 3.12。 设$(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是满足条件 *(P)* 的粘合。假设 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的完备遗传余挠对。若$(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$ 且$(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，则$(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对。

证明。 由于 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是一个余挠对，我们得到 ${}^{\perp}\mathcal{V}'' = \mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{U}''^{\perp} = \mathcal{V}''$。于是有 $(\mathbb{L}_1 j_!)({}^{\perp}\mathcal{V}'') = 0$ 和 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{U}''^{\perp}) = 0$，并且根据定理3.9，我们得到 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 是一个遗传余挠对，这说明 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$ 是分解的， $\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$ 是余分解的，参见命题2.5。现在我们通过以下三个步骤证明 $(\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''})$ 的完备性。

步骤1：对于任意 $Y \in \mathcal{A}'$，我们断言 i_*Y 有一个特殊的 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$-预覆盖和一个特殊的 $\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$-预包络。由于 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 是完备的，存在一个短正合列 $0 \rightarrowtail V_1' \rightarrowtail U_1' \twoheadrightarrow Y \twoheadrightarrow 0$，其中 $V_1' \in \mathcal{V}'$ 且 $U_1' \in \mathcal{U}'$。应用 i_*，我们得到以下正合列

$$0 \longrightarrow i_*V_1' \longrightarrow i_*U_1' \longrightarrow i_*Y \longrightarrow 0\,,$$

从而得到 i_*Y具有一个特殊的 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$-预包，因为 $i_*V_1' \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$和 $i_*U_1' \in \mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$，参见引理 3.6。对偶地，我们可以证明 i_*Y具有一个特殊的 $\mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$-预包络。

步骤 2：对于任意 $X \in \mathcal{A}$，我们断言 j_*j^*X 具有一个特殊的 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$-预包。事实上，由于 $j^*X \in \mathcal{A}''$ 且 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是完备的，我们得到一个短正合列 $0 \rightarrowtail V_1'' \rightarrowtail U_1'' \xrightarrow{f} j^*X \twoheadrightarrow 0$，其中 $V_1'' \in \mathcal{V}''$和 $U_1'' \in \mathcal{U}''$。由于 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$，我们得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow j_*V_1'' \longrightarrow j_*U_1'' \xrightarrow{j_*f} j_*j^*X \longrightarrow 0\,.$$

另一方面，由引理 3.6 可知 $j_*\mathcal{V}'' \in \mathcal{N}^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}''}$。为证明$j_*j^*X$ 具有特殊的 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$-预包络，根据引理 3.11 (1)，只需证明 j_*U_1''具有特殊的 $\mathcal{M}^{\mathcal{U}'}_{\mathcal{U}''}$-预包络。由注 2.2 (3)，存在一个正合列

$$0 \longrightarrow i_*X' \longrightarrow j_!j^*j_*U_1'' \xrightarrow{\varepsilon_{j_*U_1''}} j_*U_1'' \longrightarrow i_*i^*j_*U_1'' \longrightarrow 0$$

具有 $X' \in \mathcal{A}'$。由于 $j_!j^*j_*U_1'' \cong j_!U_1''$，我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow i_*X' \xrightarrow{f} j_!U_1'' \longrightarrow j_*U_1'' \longrightarrow i_*i^*j_*U_1'' \longrightarrow 0\,,$$

由此得到两个短正合列 $0 \to i_*X' \xrightarrow{f} j_!U_1'' \to L \to 0$ 和 $0 \to L \to j_*U_1'' \to i_*i^*j_*U_1'' \to 0$，其中 $L =$余核f。由步骤 1 可知，i_*X'具有一个特殊的 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$-预包络，也就是说，存在一个短正合列 $0 \to i_*X' \xrightarrow{\alpha} N \to M \to 0$，其中 $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$且 $N \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$。于是我们有如下推出图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & i_*X' & \xrightarrow{f} & j_!U_1'' & \to & L & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & N & \to & W & \to & L & \to & 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & M & = & M & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

由引理 3.6，我们得到 $j_!U_1'' \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$，再由第二列推得 $W \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。现在，第二行表明 L 有一个特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。由步骤 1 可知，$i_*i^*j_*U_1''$ 有一个特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。将引理 3.10 (1) 应用于 $0 \to L \to j_*U_1'' \to i_*i^*j_*U_1'' \to 0$，可得 j_*U_1''有一个特殊的$\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。

步骤 3：对于任意 $X \in \mathcal{A}$，由注 2.2 (3) 可知，存在一个正合列

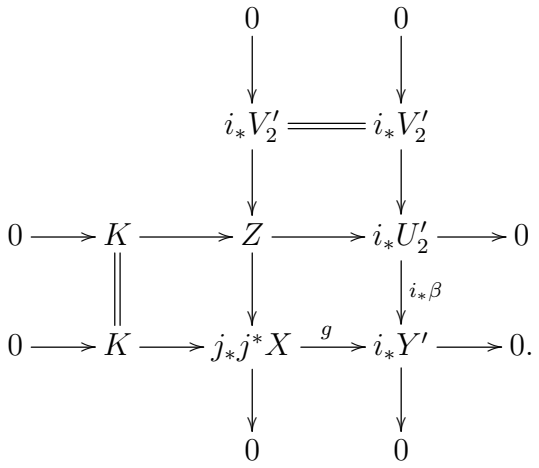
$$0 \to i_*i^!X \xrightarrow{\eta_X} X \xrightarrow{\delta_X} j_*j^*X \xrightarrow{g} i_*Y' \to 0$$

其中 $Y' \in \mathcal{A}'$。令余核$\eta_X = K$。那么有两个正合列 $0 \to i_*i^!X \xrightarrow{\delta_X} X \to K \to 0$ 和 $0 \to K \to j_*j^*X \xrightarrow{g} i_*Y' \to 0$。由于 $Y' \in \mathcal{A}'$ 且 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 是完备的，因此存在一个短正合列

$$0 \to V_2' \to U_2' \xrightarrow{\beta} Y' \to 0$$

其中有 $V_2' \in \mathcal{V}'$和 $U_2' \in \mathcal{U}'$。应用 i_*，我们得到以下正合列

$0 \longrightarrow i_*V_2' \longrightarrow i_*U_2' \xrightarrow{i_*\beta} i_*Y' \longrightarrow 0$，然后我们得到如下拉回图：



根据步骤 1 和步骤 2，我们得到 i_*V_2' 和 j_*j^*X 都有特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。将引理 3.10 (1) 应用于第二列，可推得 Z 有特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。另一方面，由引理 3.6 可知 $i_*U_2' \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。将引理 3.11 (3) 应用于第二行，可得 K 有特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。将引理 3.10 (1) 应用于正合列 $0 \longrightarrow i_*i^!X \longrightarrow X \longrightarrow K \longrightarrow 0$，并结合步骤 1，可得 X 有特殊的 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖。现在由命题 2.4 可知，余挠对 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是完备的。

□

受 [24, 定理 5.6], 的启发，我们考虑定理 3.12 的逆命题。

命题 *3.13.* 设 $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是满足条件 *(P)* 的粘合，且 $\mathcal{U}', \mathcal{V}', \mathcal{U}''$ 和 $\mathcal{V}''$ 分别是 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的对象类。假设 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对，$(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{U}''^{\perp}) = 0$，$(\mathbb{L}_1 j_!)({}^{\perp}\mathcal{V}'') = 0$，且 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$ 或 $(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$ 成立。若满足以下两个条件之一，则 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 均为完备遗传余挠对：

(1) $i^*j_*\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{V}'$ 以及 $(\mathbb{L}_1 i^*)j_*\mathcal{V}'' = 0$;
(2) $i^!j_!\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}'$ 以及 $(\mathbb{R}_1 i^!)j_!\mathcal{U}'' = 0$。

证明。 由定理 3.8 和定理3.9可知，$(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 都是遗传余挠对。现在证明 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是完备的。对于任意 $X \in \mathcal{A}''$，由于 $j_*X \in \mathcal{A}$ 且 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是完备的，我们有

一个短正合列 $0 \to j_*X \to N \xrightarrow{f} M \to 0$，其中 $N \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 且 $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。于是得到 $j^*N \in \mathcal{V}''$ 和 $j^*M \in \mathcal{U}''$，并且有一个短正合列 $0 \to X \to j^*N \xrightarrow{j^*f} j^*M \to 0$. 。这表明余挠对 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$ 是完备的。

接下来，我们在条件 (1) 下证明 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 的完备性。对于任意 $X \in \mathcal{A}'$，由于 $i_*X \in \mathcal{A}$，且 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是完备的，我们有一个短正合列 $0 \to i_*X \to W \xrightarrow{f} Q \to 0$，其中 $W \in \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 且 $Q \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$。于是我们有 $i^!W \in \mathcal{V}'$、$j^*W \in \mathcal{V}''$、$(\mathbb{R}_1 i^!)W = 0$、$i^*Q \in \mathcal{U}'$ 和 $(\mathbb{L}_1 i^*)Q = 0$。应用 i^*，可得一个短正合列 $0 \to X \to i^*W \xrightarrow{i^*f} i^*Q \to 0$。由于 $i^*Q \in \mathcal{U}'$，要验证 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 的完备性，只需证明 $i^*W \in \mathcal{V}'$。另一方面，由引理 3.4 可知 δ_W 是一个满态射，并且根据注 2.2 (3)，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow i_*i^!W \longrightarrow W \xrightarrow{\delta_W} j_*j^*W \longrightarrow 0 .$$

由于 $j^*W \in \mathcal{V}''$ 和 $(\mathbb{L}_1 i^*)j_*\mathcal{V}'' = 0$，该序列

$$0 \longrightarrow i^!W \longrightarrow i^*W \xrightarrow{i^*(\delta_W)} i^*j_*j^*W \longrightarrow 0$$

也是正合的。由于 $i^!W \in \mathcal{V}'$ 和 $i^*j_*j^*W \in i^*j_*\mathcal{V}'' \subseteq \mathcal{V}'$，由上述正合列可得 $i^*W \in \mathcal{V}'$，因此余挠对 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 是完备的。若条件 (2) 成立，则可用同样的方法验证 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ 的完备性——改为从 i_*X 的特殊 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$-预覆盖开始，并应用 $i^!$。

□

4 应用与示例

如第3节所示，对粘合施加的条件 (P) 起着至关重要的作用。在本节中，我们首先给出粘合满足条件 (P) 的一个充分条件，然后将主要结果应用于 Morita 环境环和三角矩阵环。

命题 4.1。 设$(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$ 是阿贝尔范畴的粘合。若 $i^!$ 或 i^* 是正合函子，则其满足条件 *(P)*。

证明。 如果 i^* 是正合的，那么由 [19, 命题 3.3 和引理 3.1]可知，对于任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$，$\varepsilon_P$ 都是单态射。此外，如果 $i^!$ 是正合的，那么对于任意 $I \in \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$，$\delta_I$都是满态射。由引理 3.5 可得，对于任意 $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$，$\varepsilon_P$ 都是单态射。

□

应用定理 3.12 和命题 4.1，我们得到以下推论。

推论 4.2. 设$(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'', i^*, i_*, i^!, j_!, j^*, j_*)$是阿贝尔范畴的粘合。假设$(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$和$(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$分别是 $\mathcal{A}'$和 $\mathcal{A}''$中的完备遗传余挠对。若满足以下条件之一，则$(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$是 $\mathcal{A}$ 中的完备遗传余挠对：

(1) $i^!$ 是正合的，且$(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$；
(2) i^* 是正合的，且$(\mathbb{R}_1 j_*)(\mathcal{V}'') = 0$；
(3) $i^!$ 和 i^* 均是正合的。

证明. 由 [8, 引理 3.1、引理 3.2], 可知， $i^!$ 的正合性（分别地， i^*的正合性）蕴含 j_* （分别地， $j_!$）的正合性。于是，由定理 3.12 和命题 4.1 即得此推论。□

注 4.3。 (1) 推论 4.2 (1) 包含于 [19, 定理 1.1], ，其中作者在假设 $i^!$ 为正合且 $j_!$ 为 $\mathcal{U}''$-正合的条件下，通过正合范畴的粘合构造完备遗传余挠对。我们指出，他们的条件 $j_!$ 为 $\mathcal{U}''$-正合等价于 $(\mathbb{L}_1 j_!)(\mathcal{U}'') = 0$；由于此处 $i^!$ 为正合，他们的记号 $\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$ 和 $\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}$ 与我们的记号一致；根据引理 3.4，当且仅当 $(\mathbb{L}_1 i^*)(X) = 0$ 时，余单位 ε_X 是单态射。

(2) 推论 4.2 (3) 在 [3, 推论 3.3] 中有所讨论。

现在，我们回顾一些关于 Morita 环的事实。更多细节请参阅[16] 。设 A 和 B 为环， ${}_BM_A$ 为一个 B-A-双模， ${}_AN_B$ 为一个A-B-双模， $\phi\colon M \otimes_A N \to B$ 是一个 B-双模映射，且 $\psi\colon N \otimes_B M \to A$ 是一个 A-双模映射，使得

$$m'\psi(n \otimes_B m) = \phi(m' \otimes_A n)m,$$

$$n'\phi(m \otimes_A n) = \psi(n' \otimes_B m)n, \ \forall\ m, m' \in M, \ \forall\ n, n' \in N.$$

一个 *Morita* 环 是 $\Lambda = \Lambda_{(\phi,\psi)} := \begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$，采用分量加法和乘法

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \psi(n \otimes_B m') & an' + nb' \\ ma' + bm' & \phi(m \otimes_A n') + bb' \end{pmatrix}.$$

左 Λ-模可识别为四元组 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f, g$，其中 $X \in A$- 模、 $Y \in B$-模、$f \in \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, Y)$ 和 $g \in \mathrm{Hom}_A(N \otimes_B Y, X)$ 满足

$$g(n \otimes_B f(m \otimes_A x)) = \psi(n \otimes_B m)x,$$

$f(m \otimes_A g(n \otimes_B y)) = \phi(m \otimes_A n)y, \quad \forall\, m \in M, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad y \in Y$.从 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,\, g}$ 到 $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}_{f',\, g'}$ 的 Λ-模同态是一个有序对 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，其中 $a \in \mathrm{Hom}_A(X,\ X')$ 和 $b \in \mathrm{Hom}_B(Y,\ Y')$ 满足以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A X & \xrightarrow{1_M \otimes a} & M \otimes_A X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xrightarrow{\quad b \quad} & Y', \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N \otimes_B Y & \xrightarrow{1_N \otimes b} & N \otimes_B Y' \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ X & \xrightarrow{\quad a \quad} & X'. \end{array}$$

令 $\eta_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, Y) \cong \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_B(M, Y))$ 和 $\eta'_{Y,X}\colon \mathrm{Hom}_A(N \otimes_B Y, X) \cong \mathrm{Hom}_B(Y, \mathrm{Hom}_A(N, X))$ 为伴随同构。对于 $f \in \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A X, Y)$ 和 $g \in \mathrm{Hom}_A(N \otimes_B Y, X)$，令 $\tilde{f} = \eta_{X,Y}(f)$ 和 $\tilde{g} = \eta'_{Y,X}(g)$。

记 Ψ_X 为复合 $N \otimes_B M \otimes_A X \xrightarrow{\psi \otimes 1_X} A \otimes_A X \xrightarrow{\cong} X$，记 Φ_Y 为复合 $M \otimes_A N \otimes_B Y \xrightarrow{\phi \otimes 1_Y} B \otimes_B Y \xrightarrow{\cong} Y$。令 $\delta\colon 1_{A\text{-Mod}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(M, M \otimes_A -)$ 和 $\epsilon\colon M \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, -) \longrightarrow 1_{B\text{-Mod}}$ 分别为伴随对 $(M \otimes_A -, \mathrm{Hom}_B(M, -))$ 的单位和余单位。令 $\delta'\colon 1_{B\text{-Mod}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, N \otimes_B -)$ 和 $\epsilon'\colon N \otimes_B \mathrm{Hom}_A(N, -) \longrightarrow 1_{A\text{-Mod}}$ 分别为伴随对 $(N \otimes_B -, \mathrm{Hom}_A(N, -))$ 的单位和余单位。根据 [16, 命题 2.4], , 存在由幂等元 $\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 诱导的粘合:

$$(B/\mathrm{Im}\phi)\text{-Mod} \underset{P_B}{\overset{Q_B}{\rightleftarrows}} Z_B \Lambda_{(\phi,\psi)}\text{-Mod} \underset{H_A}{\overset{T_A}{\rightleftarrows}} U_A A\text{-Mod}\,,$$

其中，Q_B 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,\, g} \mapsto {}_{B/}\mathrm{Im}_\phi(B/\mathrm{Im}\phi) \otimes_B$ 余核 f 给出；Z_B 由 ${}_{B/}\mathrm{Im}_\phi Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ {}_B Y \end{pmatrix}_{0,\, 0}$ 给出；P_B 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,\, g} \mapsto {}_{B/}\mathrm{Im}_\phi(B/\mathrm{Im}\phi) \otimes_B$ 核 $\tilde{g}$ 给出；T_A 由 $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ M \otimes_A X \end{pmatrix}_{1,\, \Psi_X}$ 给出；U_A 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,\, g} \mapsto X$ 给出；H_A 由 $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ {}_A\mathrm{Hom}\,(N, X) \end{pmatrix}_{\widetilde{\Psi_X},\, \epsilon'_X}$ 给出，其中 $\widetilde{\Psi_X} = \mathrm{Hom}_A(N, \Psi_X) \circ \delta'_{M \otimes_A X}$。此外，还有另一个由幂等元诱导的粘合

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}$:

$$(A/\mathrm{Im}\psi)\text{-Mod} \underset{\mapsto P_{A/}}{\overset{Q_A}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}} \Lambda_{(\phi,\psi)}\text{-Mod} \underset{H_B}{\overset{T_B}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}} B\text{-Mod}\,,$$

其中，Q_A 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f$,$g$ $\mapsto$ $\mathrm{Im}_\psi(A/\mathrm{Im}\psi)\otimes_A$ 余核g给出；Z_A 由$_{A/}\mathrm{Im}_\psi X \mapsto \begin{pmatrix} {}_AX \\ 0 \end{pmatrix}_0$,0给出；$P_A$ 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f$,$g$ $\mapsto$ $\mathrm{Im}_\psi(A/\mathrm{Im}\psi)\otimes_A$ 核 $\tilde{f}$给出；T_B 由 $Y \mapsto \begin{pmatrix} N\otimes_B Y \\ Y \end{pmatrix}_{\Phi_Y}$,1给出；$U_B$ 由 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_f$,$g$ $\mapsto Y$ 给出；H_B 由 $Y \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_B(\ M\ Y\ ) \\ Y \end{pmatrix}_{\epsilon_Y}$,),$\widetilde{\Phi_Y}$给出，其中 $\widetilde{\Phi_Y} = \mathrm{Hom}_B(M,\Phi_Y)\circ\delta_{N\otimes_B Y}$。

为验证上述两个再黏合是否满足条件 (P)，我们需要以下引理。设 A 是一个环，$e\in A$ 是一个幂等元。那么存在一个由 e诱导的粘合 ((A/AeA)-模，A-模，eAe-模,i^*，i_*，$i^!$，$j_!$，j^*，j_*)，其中 $i^* = A/AeA\otimes_A -$,
$i_* = A/AeA\otimes_{A/AeA}$–$\mathrm{Hom}_A(A/AeA,\ -)$，$j_! = Ae\otimes_{eAe} -$,
$j^* = eA\otimes_A -$ 和 $j_* =$$\mathrm{Hom}_{eAe}(eA,\ -)$，参见例 2.7]。

引理4.4。由 e 诱导的粘合满足条件 *(P)*，当且仅当典范映射 $Ae\otimes_{eAe} eA\to A$ 是一个单态射。

证明。 </style}余单位 ε_A： $j_!j^*A\to A$ 正是典范映射 $Ae\otimes_{eAe}eA\to A$。因此，如果该粘合满足条件 (P)，则典范映射 $Ae\otimes_{eAe}eA\to A$ 是单态射。反过来，如果典范映射 $Ae\otimes_{eAe}eA\to A$ 是单态射，则 ε_A 是单态射。由于左伴随函子 $j_!$ 和 j^* 保持余积，余单位 ε: $j_!j^*\to 1_{\mathcal{A}}$ 也保持余积，即 $\varepsilon_{\amalg A} = \amalg\varepsilon_A$。由于 A-模是 Grothendieck 范畴，因此 $\varepsilon_{\amalg A}$ 是单态射，进而对于任意投射模 P，ε_P 都是单态射。

□

现在让我们回到由 Morita 环产生的粘合。

引理4.5。设 $\Lambda = \Lambda_{(\phi,\psi)} := \begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ 是一个 *Morita* 环。

(1) 粘合 *(*$(B/\mathrm{Im}\phi)$-Mod, Λ-Mod, A-Mod, $Q_B, Z_B, P_B, T_A, U_A, H_A$) 满足条件 *(P)* 当且仅当 ϕ 是一个单态射。

(2) 粘合 *(*$(A/$像$\psi)$-模，Λ-模，B-模，$Q_A, Z_A, P_A, T_B, U_B, H_B$) 满足条件 *(P)* 当且仅当 ψ 是单态射。

证明。 设 $e = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。由 [12, 命题 4.1] 的证明可知，典范映射 $\Lambda e \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda \to \Lambda$ 是单态射当且仅当ϕ 是单态射。因此，结论 (1) 由引理 4.4得出，(2) 的证明类似。

□

现在我们将通过粘合（($B/\mathrm{Im}\phi$)-模， Λ-模， A-模， Q_B， Z_B， P_B， T_A， U_A， H_A）在 Morita 环 $\Lambda = \Lambda_{(\phi,\psi)} := \begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ 上构造余挠对。设 $\mathcal{U}'$和 $\mathcal{V}'$是左 $B/\mathrm{Im}\phi$-模的两个类，设 $\mathcal{U}''$和 $\mathcal{V}''$ 是左 A-模的两个类。我们定义

$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'} = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid B/\mathrm{Im}\phi \otimes_B \mathrm{Coker} f \in \mathcal{U}', X \in \mathcal{U}'', f \text{ is a monomorphism} \},$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'} = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid B/\mathrm{Im}\phi \otimes_B \mathrm{Ker} \tilde{g} \in \mathcal{V}', X \in \mathcal{V}'', \tilde{g} \text{ is an epimorphism} \}.$$

推论 4.6。 设 （$\mathcal{U}'$、 $\mathcal{V}'$）和 （$\mathcal{U}''$、 $\mathcal{V}''$）分别是 $B/\mathrm{Im}\phi$-模和 A-模中的余挠对。假设 ϕ 是一个单态射。

(1) 如果 $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathcal{U}'') = 0$，则 $(^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'}, (\mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})^{\perp})$ 是 Λ-模中的余挠对；如果 $\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathcal{V}'') = 0$，则 （$\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$、 （$\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}$）$^{\perp}$）是 Λ-模中的余挠对。

(2) 若 $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathcal{U}'') = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathcal{V}'') = 0$，则 $(\mathcal{M}_{\mathcal{U}''}^{\mathcal{U}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{V}''}^{\mathcal{V}'})$ 是 Λ-Mod中的余挠对；如果 $(\mathcal{U}', \mathcal{V}')$和 $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'')$也分别是完备的和遗传的，那么它也是完备的和遗传的。

证明。 由于 ϕ 是单态射，由引理 4.5 和 3.4 可知，$\mathbb{L}_1 Q_B(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g}) = 0$ 当且仅当 f是单态射，并且 $\mathbb{R}_1 P_B(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g}) = 0$ 当且仅当 $\tilde{g}$ 是单态射。因此，该陈述由定理 3.3、命题 3.7 和定理 3.12 得出。 □

类似地，考虑粘合(($A/\mathrm{Im}\psi$)-Mod, Λ-Mod, B-Mod, $Q_A, Z_A, P_A, T_B, U_B, H_B$)。设 $\mathcal{C}'$与 $\mathcal{D}'$为左 $A/\mathrm{Im}\psi$-模的两个类，并设 $\mathcal{C}''$ 与 $\mathcal{D}''$ 为左 B-模的两个类。我们令

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}'} = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid A/\mathrm{Im}\psi \otimes_A \mathrm{Coker} g \in \mathcal{C}', Y \in \mathcal{C}'', g \text{ is a monomorphism} \},$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{D}''}^{\mathcal{D}'} = \{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid A/\mathrm{Im}\psi \otimes_A \mathrm{Ker} \tilde{f} \in \mathcal{D}', Y \in \mathcal{D}'', \tilde{f} \text{ is an epimorphism} \}.$$

应用定理 3.3、命题 3.7 和定理 3.12，我们得到如下推论。

推论 4.7。设 $(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$ 和 $(\mathcal{C}'', \mathcal{D}'')$ 分别是 $A/\mathrm{Im}\psi$-模和 B-模中的余挠对。假设 ψ 是一个单态射。

(1) 若 $\mathrm{Tor}_1^B(N, \mathcal{C}'') = 0$ 则 $({}^{\perp}\mathcal{N}^{\mathcal{D}\mathcal{D}''}, \mathcal{N}^{\mathcal{D}'\mathcal{D}''})$ 是 Λ-模中的余挠对；若 $\mathrm{Ext}_B^1(M, \mathcal{D}'') = 0$ 则 $(\mathcal{M}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}'}, (\mathcal{M}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}'})^{\perp})$ 是 Λ-模中的余挠对。

(2) 若 $\mathrm{Tor}_1^B(N, \mathcal{C}'') = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_B^1(M, \mathcal{D}'') = 0$，则 $(\mathcal{M}_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}'}, \mathcal{N}_{\mathcal{D}''}^{\mathcal{D}'})$ 是 Λ-模中的余挠对；若 $(\mathcal{C}', \mathcal{D}')$和 $(\mathcal{C}'', \mathcal{D}'')$均为完备且遗传的余挠对，则此余挠对也完备且遗传。

接下来，我们考虑 $M \otimes_A N = 0$ 或 $N \otimes_B M = 0$ 的特殊情形。与 [6], 一样，我们假设 $(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ 分别是 A-Mod 和 B-Mod 中的余挠对。我们定义

$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Coker} f \in \mathcal{V}, X \in \mathcal{U}, f \text{ is a monomorphism}\},$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}} = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Ker}\tilde{g} \in \mathcal{Y}, X \in \mathcal{X}, \tilde{g} \text{ is an epimorphism}\},$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Coker} g \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}, g \text{ is a monomorphism}\},$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}} = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Ker}\tilde{f} \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}, \tilde{f} \text{ is an epimorphism}\}.$$

应用推论 4.6 和 4.7，可得以下两个推论。

推论 4.8. 假设 $M \otimes_A N = 0$。

(1) 如果 $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathcal{U}) = 0$，那么 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}, \mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}})$ 是 Λ-Mod 中的余挠对；如果$\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathcal{X}) = 0$，那么$(\mathcal{M}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}, (\mathcal{M}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}})^{\perp})$ 是 Λ-Mod 中的余挠对。

(2) 如果 $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathcal{U}) = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathcal{X}) = 0$，那么$(\mathcal{M}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}, \mathcal{N}_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}})$ 是 Λ-Mod 中的余挠对；如果$(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ 和$(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$均完备且遗传，则该余挠对也完备且遗传。

推论 4.9。假设 $N \otimes_B M = 0$。

(1) 若 $\mathrm{Tor}_1^B(N, \mathcal{V}) = 0$，则 $({}^{\perp}\mathcal{N}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}, \mathcal{N}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}})$ 是 Λ-模范畴中的余挠对；若$\mathrm{Ext}_B^1(M, \mathcal{Y}) = 0$，则 $(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}, (\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}})^{\perp})$ 是 Λ-模范畴中的余挠对。

(2) 如果$\mathrm{Tor}_1^B(N, \mathcal{V}) = 0$且$\mathrm{Ext}_B^1(M, \mathcal{Y}) = 0$，那么$(\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}, \mathcal{N}_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}})$ 是 Λ-Mod中的一个余扭挠对；并且如果$(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ 和$(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$是完备且遗传的，那么它也是完备且遗传的。

注 4.10. (1) 当 $M=0$ 或 $N=0$时，推论 4.8 和 4.9 的部分结论由 Zhu 等人 [33, 定理 3.4 和命题 3.7]得出。

(2) 运用定理 3.8，我们改进了 [24, 定理 4.4] 的结果。事实上，设 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$ 如 [24], 所示，其中 U 是一个 B-A-双模。考虑第一个粘合 (B-模，Λ-模，A-模，$Q_B, Z_B, P_B, T_A, U_A, H_A$)，其中 $\mathcal{C}_1$和 $\mathcal{C}_2$ （分别为 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$）是左 A-模（分别为 B-模）的类。那么有 $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{D}_1}=\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$ 和 $\mathcal{N}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{D}_2}=\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$，其中符号 $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1}$ 和 $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2}$ 取自 [24]。将定理 3.8 应用于此粘合可得，$(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ 是余挠对，当且仅当 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1},\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是余挠对；只需假设 $\mathrm{Tor}_1^A(U,{}^{\perp}\mathcal{C}_2)=0$，这是由于$H_A$的正合性。类似地，将定理 3.8 应用于第二个粘合 (A-模，Λ- 模，B-模，$Q_A, Z_A, P_A, T_B, U_B, H_B$)，可得在 $\mathrm{Ext}_B^1(U,\mathcal{D}_1^{\perp})=0$ 的假设下，$(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ 是余挠对，当且仅当 $(\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1},\mathfrak{I}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是余挠对，因为 T_B 是正合的。

(3) 将定理 3.12 和命题 3.13 应用于这些粘合，我们改进了 [24, 定理 5.6] 中的结果。事实上，由第一个粘合可知，若 $\mathrm{Tor}_1^A(U,\mathcal{C}_1)=0$，且 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ 是完备遗传余挠对，则 $(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1},\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是完备遗传余挠对；反过来，在 $U\otimes_A\mathcal{C}_1\subseteq\mathcal{D}_1$ 且 $\mathrm{Tor}_1^A(U,{}^{\perp}\mathcal{C}_2)=0$ 的情况下，结论也成立。类似地，由第二个粘合可知，若 $\mathrm{Ext}_B^1(U,\mathcal{D}_2)=0$，且 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ 和 $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ 是完备遗传余挠对，则 $(\mathfrak{A}_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{C}_1},\mathfrak{I}_{\mathcal{D}_2}^{\mathcal{C}_2})$ 是完备遗传余挠对；反过来，在 $\mathrm{Hom}_B(U,\mathcal{D}_2)\subseteq\mathcal{C}_2$ 且 $\mathrm{Ext}_B^1(U,\mathcal{D}_1^{\perp})=0$ 的情况下，结论也成立。

在 [6], Zhang-Cui-Rong 中，他们在假设 $\phi=0=\psi$ 或 $M\otimes_A N=0=N\otimes_B M$ 的条件下，在 Morita 环上构造了四个余挠对。值得注意的是，他们的构造与我们的不同，尤其是因为在 $\phi=0=\psi$ 的情形下，环 A、B 和 Λ 之间的联系更为密切。不过，在推论 4.6 和 4.7 中，我们考虑了不同的情形，即 ϕ 或 ψ 是单态射。因此，我们的构造方法与 [6] 中的方法不同。下面这个由 Zhang-Cui-Rong [6], 给出的例子表明，此处构造的余挠对与 [6] 中的不同。

例 4.11. 设 $A=B$ 为路径代数 $k(1\to 2)$，其中 k 是一个域。我们将路径的乘积按从右到左的顺序书写。因此，$e_1Ae_2=0$ 和$e_2Ae_1\cong k$。取 $M=N=Ae_2\otimes_k e_1A$。于是 $M\otimes_A N=0=N\otimes_A M$。设 Λ 为 Morita 环 $\begin{pmatrix} A & N \\ N & A \end{pmatrix}$。在此情形下，${}_AM={}_AN$是一个投射左 A-模，而 $M_A=N_A$是一个投射右 A-模。取 $(\mathcal{U},\mathcal{X})=(\mathcal{V},\mathcal{Y})=({}_A\mathcal{P},A\text{-模})$，并设

$$\mathcal{M}_1 = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Coker} f \in {}_A\mathcal{P}, X \in {}_A\mathcal{P}, f \text{ is a monomorphism}\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \mathrm{Coker} g \in {}_A\mathcal{P}, Y \in {}_A\mathcal{P}, g \text{ is a monomorphism}\},$$

$$\mathcal{N}_1 = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \tilde{g} \text{ is an epimorphism}\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{f,g} \mid \tilde{f} \text{ is an epimorphism}\}.$$

由推论 4.8 和 4.9 可知，$(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1)$ 和 $(\mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2)$ 都是 Λ-模中的完备遗传余挠对。我们指出，[19] 中的结果不能用于将 $(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ 和 $(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ 粘合在一起，因为此粘合中的函子 $i^!$ 不是正合的。此外，这里构造的余挠对不同于 Cui 等人 [6]构造的余挠对；参见 [6, 例 4.3]。

致谢。本研究得到国家自然科学基金（12561008）、云南省中青年学术和技术带头人项目（202305AC160005）和云南省基础研究计划（202301AT070070）的资助。

参考文献

[1] L. Angeleri H¨ugel、S. Koenig 和 Q. H. Liu，粘合与倾斜对象，《纯粹与应用代数杂志》215（2011），420–438。[2]A. A. Be˘ilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne，偏层，载于《奇异空间上的分析与拓扑》I（吕米尼，1981），5–171，Ast´erisque，100，法国数学会，巴黎，1982。[3]W. Cao、J. Wei 和 K. Wu，粘合与 n-余挠对，arXiv:2403.04220。[4] J. M. Chen，三角范畴粘合中的余挠对，《代数通讯》41（2013），第8期，2903–2915。[5] X. W. Chen，向量丛的一个粘合，《伦敦数学会会报》44（2012），271–284。

[6] J. Cui、S. Rong 和 P. Zhang，Morita 环上的余挠对与模型结构，《代数杂志》661（2025），1–81。[7] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda，《相对同调代数》，德格鲁伊特数学丛书，第30卷，Walter De Gruyter，柏林、纽约，2000。[8] J. Feng 和 P. Zhang，Grothendieck 范畴的 Serre 子范畴的类型，《代数杂志》508（2017），16–34。[9] V. Franjou 和 T. Pirashvili，阿贝尔范畴粘合的比较，《数学文献》9（2004），41–56。[10] X. R. Fu 和 Y. G. Hu，阿贝尔范畴的粘合：余扭挠维数与余扭挠三元组，《伊朗数学会通报》48（2022），第3期，963–977。[11] N. Gao、S. K¨onig 和 C. Psaroudakis，阿贝尔范畴的拼接阶梯，《代数杂志》579（2021），256–302。[12]N. Gao 和 C. Psaroudakis，通过 Morita 环研究单态范畴的 Gorenstein 同调方面，《代数与表示论》20（2017），487–529。[13] J. R. Garcia-Rozas，复形范畴中的覆盖与包络，《数学研究札记》，第407卷，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，FL，1999。[14] J. Gillespie，余挠对与逐次数同调模型结构，《同调与同伦应用》10（2008），第1期，283–304。[15] R. G¨obel 和 J. Trlifaj，《模的逼近与自同态代数》，GEM 41。柏林—纽约：Walter de Gruyter。（2006）。[16] E. L. Green 和 C. Psarounddkis，关于由 Morita 环境产生的 Artin 代数，《代数与表示论》17（2014），第5期，1485–1525。[17] J. He 和 J. He，外三角范畴的 n-余扭挠对与粘合，《代数及其应用杂志》（2025），已在线接受。[18] M. Hovey，余挠对、模型范畴结构与表示论，《数学杂志》241（2002），第3期，553–592。

[19] J. S. Hu、H. Y. Zhu 和 R. M. Zhu, 《正合范畴粘合中的正合模型结构的粘合与提升》, 马来西亚数学科学学会通报 48 (2025年), 第 5 期, 173。[20] Q. H. Liu、J. Vit´oria 和 D. Yang, 《倾斜对象的粘合》, 名古屋数学杂志 216 (2014年), 117–151。[21] X. Ma 和 Z. Y. Huang, 《阿贝尔范畴粘合中的扭挠对》, 中国数学前沿 13 (2017年), 第 4 期, 875–892。[22] X. Ma 和 P. Y. Zhou, 《外三角范畴粘合中的维数与余挠对》, 《代数通讯》53 (2025年), 第 1 期, 242–258。[23] X. Ma 和 P. Y. Zhou, 《外三角范畴粘合中的 n-余扭挠对》, arXiv:2508.20331。[24] L. X. Mao, 《形式三角矩阵环上的余挠对与逼近类》, 《纯粹与应用代数杂志》224 (2020年), 第 6 期, 106271。[25]C. Psaroudakis, 《阿贝尔范畴粘合的同调理论》, 《代数杂志》398 (2014年), 63–110。[26] C. Psaroudakis 和 J. Vit´oria, 《模范畴的粘合》, 应用范畴结构 22 (2014年), 第 4 期, 579–593。[27]L. Salce, 《阿贝尔群的余挠理论》, 数学研讨会 23 (1979年), 11–32。[28] H. Tachikawa、K. Ohtake, 《阿贝尔范畴中的余局部化与局部化》, 《代数杂志》56 (1979年), 1–23。[29] L. Wang、Q. J. Wei 和 H. C. Zhang, 《外三角范畴的再黏合》, 数学讨论会 167 (2022年), 239–259。[30] J. R. Yang 和 Y. Y. Qin, 《粘合中的 ICE-闭子范畴与上砖》, 代数讨论会, 已接受。[31] C. Zhang, 《Artin 代数的全局上同调宽度》, 数学讨论会 146 (2017年), 31–46。[32] Y.Y. Zhang, 《宽子范畴的约化与粘合》, 代数讨论会 30 (2023年), 第 4 期, 713–720。

[33] R. M. Zhu、Y. Y. Peng 和 N. Q. Ding，《上三角矩阵环上与余挠对相关的再黏合》，Debrecen 数学出版物 98 (2021)，第 1 期，83–113。