arXiv:2603.06997v1 [math.NT] 7 Mar 2026

# 带有 η 乘子的半整数权尖点形式的二次同余

Robert Dicks

Abstract. 设 $\ell \geq 5$ 为素数，并令 $\nu_\eta$ 表示 Dedekind η 乘子。对于奇数 $r$以及实狄利克雷特征 $\psi$，Ahlgren、Andersen 和作者近期的研究表明，对于一大类带乘子 $\psi\nu_\eta^r$的半整数权尖点形式，模 $\ell$ 的二次同余成立；这一结果极大地推广了 Atkin 针对分拆函数发现的一些同余。

本文证明，当 $\psi$ 为任意特征时，这类同余仍然成立。我们的方法依赖于模伽罗瓦表示理论。对于素数 $\ell \geq 5$，我们的工作核心是研究模 $\ell$ 的模伽罗瓦表示，这些表示附属于具有任意 Nebentypus 特征且像在精确意义下足够大的整数权特征形式。我们的关键新结果是：给定一组有限个这样的表示以及 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$，存在$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_\ell))$，使其在这些表示下的像属于 $\gamma^2$的共轭类。

## 1. Introduction

对于正整数 $n$，分拆函数 $p(n)$ 计数将 $n$写成一列非递增正整数之和的方法数（按照惯例，我们约定$p(0) = 1$，并且当 $n \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$时，$p(n) = 0$）。对 $p(n)$ 的算术性质的研究，深刻影响了模形式的算术理论。例如，Ramanujan 同余 [Ram21]

$$p\left(\frac{\ell n + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{\ell}, \qquad \ell = 5, 7, 11,$$

预示了许多弱全纯模形式系数中出现的算术现象。

Ramanujan 的工作之后，人们又发现了许多关于 $p(n)$ 的其他同余；其中与本文最相关的是 Atkin 同余，现介绍如下。对于若干素数 $\ell \leq 31$，Atkin [Atk68, eq. (52)] 发现了一些形如

$$p\left(\frac{\ell Q^2 n + \beta}{24}\right) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{if} \quad \left(\frac{n}{Q}\right) = \varepsilon_Q, \tag{1.1}$$

的同余，其中 $Q$ 是一个不同于 $\ell$的素数，$\beta$ 是一个整数，并且 $\varepsilon_Q \in \{\pm 1\}$。Ahlgren、Allen 和 Tang [AAT22] 近期的工作利用模伽罗瓦表示证明，对于每个素数$\ell \geq 5$，都存在一个素数正密度集合 $S$，使得形如 (1.1) 的同余对 $Q \in S$ 成立。

Ahlgren、Allen 和 Tang 的方法基于伽罗瓦理论，并采用了 Yang[Yan14] 关于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上半整数权尖点形式的通常志村对应的研究成果。更确切地说，设 $f(z)$ 是这样一个形式，它在乘子 $\nu_\eta^r$ 的作用下变换，其中 $\nu_\eta$ 是 Dedekind η 函数的乘子（见下文 (2.1)），且 $r$ 是满足 $(r,\ 6) = 1$ 的整数。那么，$f(24z)$ 是 Shimura 意义下的半整数权形式。Yang 得到了关于应用于 $r\,(24z)$ 的志村提升像的精确

日期：2026年3月10日。

信息（当 $(r,\ 6) = 3$ 时，他也证明了类似的结果）。

对于许多取值 $N \in \mathbb{Z}^+$，Ahlgren、Andersen 和作者 [AAD24] 为层 $N$ 的带 η 乘子的半整数权尖点形式建立了精确的志村对应。这项工作的算术推论将类似于 (1.1) 的同余推广到了 $S_{\lambda+\frac{1}{2}}(N,\ \psi\nu_\eta^r)$ 中的一大类形式（有关模形式及相关记号和术语的详情，请参见第 2 节）。这里，$\lambda \in \mathbb{Z}^+$, $\bar{r}$ 是奇数，$\psi$ 是模 $N$ 的实狄利克雷特征。本文中，当 $\psi$ 是模 $N$ 的任意狄利克雷特征时，我们证明类似的结果。

陈述我们的结果需要一些记号。设 $\lambda,\ N \in \mathbb{Z}^+$，并令 $r$ 为奇数。设 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征。若 $(N,\ 6) = 1$，则令 $S^{\text{new}\,2}_{\lambda,\ 2\lambda}{}^{3}(6N,\ \psi^2,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3)$ 表示在 $\Gamma_0(6N)$ 上权为 $2\lambda$、特征为 $\psi^2$、在 2 和 3 处为新形式且在这两个素数处的 Atkin-Lehner特征值分别为 $\epsilon_2$ 和 $\epsilon_3$ 的尖点形式。我们假设这些形式满足某些未在记号中体现的整性条件（详情请参见第 2 节）。当 $N$ 为奇数时，我们对 $S^{\text{new}\,2}_{2\lambda}(2N,\ \psi^2,\ \epsilon_2)$ 作类似定义。令 $\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)$ 表示扩展二次符号，并定义

$$\varepsilon_{2,r,\psi} := -\psi(2)\Big(\frac{8}{r/(r,3)}\Big), \qquad \varepsilon_{3,r,\psi} := -\psi(3)\Big(\frac{12}{r}\Big),$$

在权 $3/2$ 下，根据我们所使用的 Shimura 对应，需要避开一元θ级数。当 $(r,\ 6) = 1$ 时，我们令 $S^c_{3/2}(N,\ \psi\nu_\eta^r)$ 由满足以下条件的形式 $F \in S_{3/2}(N,\ \psi\nu_\eta^r)$ 构成

$$\big\langle F \big| V_{24}, G \big\rangle = 0 \ \text{ for all theta functions } \ G \in S_{\frac{3}{2}}\Big(576N, \psi\big(\tfrac{-1}{\bullet}\big)^{\frac{r+1}{2}}\big(\tfrac{12}{\bullet}\big)\nu_\theta^3\Big),$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是通常的 Petersson内积，$V_{24}$ 是式 (2.2) 中定义的算子，$\nu_\theta$ 是通常 θ函数的乘子。我们对 $S^c_{3\ 2}(N,\ \psi\nu^r$ 也作同样的定义

$$\text{when } (r,6)=3 \text{ with } S_{\frac{3}{2}}\Big(576N, \psi\big(\tfrac{-1}{\bullet}\big)^{\frac{r+1}{2}}\big(\tfrac{12}{\bullet}\big)\nu_\theta^3\Big) \text{ replaced by } S_{\frac{3}{2}}\Big(64N, \psi\big(\tfrac{-1}{\bullet}\big)^{\lambda+\frac{r-1}{2}}\nu_\theta^{2\lambda+1}\Big)^{/\quad\ \eta)}.$$

我们的第一个结果的关键在于适合性的概念。对于我们所考虑空间中的每个新形式 $f$，这是关于与 $f$ 相关联的 $\ell$-进伽罗瓦表示 $\rho_f$ 的模 $\ell$ 约化$\rho_f$ 的一项技术性假设（见下文定理 2.1）；当 $\psi$ 为实数时，我们的定义特化为 [AAD24 § 1] 的定义。

定义。假设 $\ell \geq 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。假设 $N$ 是无平方因子的奇正整数，且满足 $\ell \nmid N$。假设当 $3 \nmid r$ 时，$3 \nmid N$。假设 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征，并令 $k$ 为正偶整数。

若 $(r, 6) = 1$，则称数对 $(k, \ell)$ 对三元组 $(N, \psi, r)$ 是适用的，若对于每个新形式 $f \in S^{\text{new}\ 2}_{k,\quad\ 3}(6N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi}, \varepsilon_{3,r,\psi})$，$\rho_f$ 的像都包含 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ 的一个共轭。若 $(r, 6) = 3$，则我们对 $S^{\text{new}\,2}_k(2N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi})$ 中的新形式作类似定义。

注记。对于 $\lambda \in \mathbb{Z}^+$，我们将证明，只要满足以下条件（见下文命题 3.3），$(2\lambda,\ \ell)$ 对每个三元组 $(N,\ \psi,\ r)$ 都是适用的：

- $\ell > 10\lambda - 4$。

对所有 $n \in \mathbb{Z}$，
- $\psi(n) \neq -1$。
- $\ell \nmid \phi(N)$。
- $2^{2\lambda-1} \not\equiv 2^{\pm 1}$（模 $\ell$）。

最后，对于复上半平面中的 $z$，我们定义 $q = q(z) = e^{2\pi i z}$。我们的主要结果如下。

**定理 1.1**。 假设 $\ell \geq 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。假设 $m$ 和 $\lambda$ 是正整数。假设 $N$ 是无平方因子、奇数的正整数，且满足 $\ell \nmid N$。如果 $3 \nmid r$，则假设 $3 \nmid N$。令 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征。假设

$$F(z) = \sum_{n \equiv r \,(24)} a(n) q^{\frac{n}{24}} \in S_{\lambda+\frac{1}{2}}(N, \psi \nu_\eta^r)$$

其中$(2\lambda, \ell)$ 适合$(N, \psi, r)$，并且若 $\lambda = 1$，进一步假设 $F \in S^c_{3/2}(N, \psi\nu_\eta^r)$。则存在一个由素数组成的正密度集合 $S$，使得若 $p \in S$，则 $p \equiv 1$ (模 $\ell^m$) 且

$$a(p^2 n) \equiv 0 \pmod{\ell^m} \qquad \text{if} \quad \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{r-1}{2}} \psi(p) & \text{if } 3 \nmid r, \\ -\left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{r-1}{2}} \psi(p) & \text{if } 3 \mid r. \end{cases}$$

注记。 在上述定理及后续定理中，我们将密度定义为自然密度。集合 $S$ 取决于 $F$、$\ell$ 和 $m$，并且按照 Serre 的意义是 Frobenius 型的（参见 [Ser12, § 3.3] 以及 [AAT22, § 1] 末尾的讨论）。

我们的下一个结果不依赖于适合性；它是 [AAD24, 定理 1.4 的类似结果。 ].

**定理 1.2**。 设 $\ell \geq 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。令 $m$ 和 $\lambda$ 为正整数。设 $N$ 是无平方因子、奇的正整数，且满足 $\ell \nmid N$。假设当 $3 \nmid r$ 时 $3 \nmid N$。令 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征。假设存在具有如下性质的 $a \in \mathbb{Z}$：

$$2^a \equiv -2 \pmod{\ell}. \tag{1.2}$$

*Let*

$$F(z) = \sum_{n \equiv r \,(24)} a(n) q^{\frac{n}{24}} \in S_{\lambda+\frac{1}{2}}(N, \psi \nu_\eta^r),$$

并且如果 $\lambda = 1$，进一步假设 $F \in S^c_{3/2}(N, \psi\nu_\eta^r)$。那么存在一个正密度的素数集合 $S$，使得若 $p \in S$，则 $p \equiv -2$ (模 $\ell^m$)，并且对于某个 $\varepsilon_p \in \{\pm 1\}$，有

$$a(p^2 n) \equiv 0 \pmod{\ell^m} \qquad \text{if} \quad \left(\frac{n}{p}\right) = \varepsilon_p.$$

注记。 $\varepsilon_p$ 的值可利用下文的定理 3.7 显式计算。根据 Hasse [Has66], 的一个结果，满足 (1.2) 的素数所占比例为 $17/24$。

我们工作的主要新进展是一项结果，粗略地说，它表明可以找到$\sigma \in$Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_\ell))$，使得在我们所考虑的模 $\ell$ 伽罗瓦表示下，$\sigma$ 的像属于同一个共轭类。我们指出一个简单的特例（精确结果见命题 3.5）。

**命题 1.3**。 设 $N \in \mathbb{Z}^+$ 和 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征。假设$f_1, ..., f_s \in S_k(N, \psi)$ 是归一化特征形式，且对每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，$\rho_{f_i}(G_\mathbb{Q})$ 都包含 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ 的一个共轭群。那么对每个 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$，都存在 $\sigma \in$Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_\ell))$，使得若 $i \in \{1, ..., s\}$，则 $\rho_{f_i}(\sigma^2)$ 与 $\gamma^2$ 共轭。

Ahlgren、Allen 和 Tang 在 $\psi$ 为平凡特征时证明了命题 1.3 的一个更精确版本（见 [AAT22，命题 3.8]）。在其论证的关键步骤中，他们遇到了识别模 $\ell$下若干伽罗瓦特征的问题。由于研究的是具有平凡狄利克雷特征的空间，这些伽罗瓦特征很容易识别：它们要么是平凡特征，要么是 $\omega_\ell^{(\ell-1)/2}$，其中 $\omega_\ell$ 是模 $\ell$ 的分圆特征。

将 [AAT22，命题 3.8] 推广的主要障碍在于，分析中出现的相应伽罗瓦特征很难识别。使我们能够证明命题 3.5 的关键洞见是：无需知道出现的是哪些伽罗瓦特征，我们就能证明该结果“相差一个常数因子”。随后，我们可以利用模伽罗瓦表示理论证明，所出现的常数因子具有极好的性质。事实上，在我们的情形下，[AAT22，命题 3.8] 在“相差一个符号”的意义下成立，这使我们能够恢复关于矩阵 $\gamma^2$的结果，其中 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$。这足以满足我们的算术应用。

本文结构如下。第 2 节介绍模形式和伽罗瓦表示的背景。第 3 节是本文的核心；我们证明有关伽罗瓦表示和新形式同余的预备结果，这些结果将用于证明定理 1.1。本节还给出了适合性的充分条件。我们的大部分工作致力于构建工具，以证明证明定理 1.1 所需的主要技术结果。特别是，我们需要证明，对于与我们相关的空间中的新形式，海克算子以特征值 $-1$ 模任意次幂 $\ell$ 对角作用。适合性对这一结果至关重要；而证明定理 1.2 所需的相应技术结果则不涉及适合性。第 4 节证明定理 1.1–1.2。我们的方法关键地运用了 [AAD 24] 中发展的 Shimura 对应，将关于新形式的同余转化为关于半整数权模形式的同余。

## 2. Background

我们主要遵循 [AAT22, § 2] 和 [AAD24 § 3]中的论述。本节中，我们始终假设 $\ell \geq 5$ 是素数。对于上半平面 $\mathbb{H}$中的 $z$，令 $q = q(z) = e^{2\pi i z}$。若 $f$是函数 $\mathbb{H}$, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，且 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$，则我们定义

$$\left(f\big|_k\gamma\right)(z) = (\det\gamma)^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k} f(\gamma z).$$

令 $A \subseteq \mathbb{C}$ 为一个子环。若 $\nu$是 $\Gamma_0(N)$上的乘子系统，则我们用 $M_k(N, \nu, A)$（分别用 $S_k(N, \nu, A)$）表示权为 $k$、乘子为 $\nu$ 、定义在 $\Gamma_0(N)$ 上且傅里叶系数属于 $A$ 的模形式（分别为尖点形式）的 $A$-模。当 $\nu = 1$ 或 $A$ 是由所有位于 $\ell$上方的素数处均为整的代数数构成的子环时，我们在记号中省略它们。这些空间中的形式满足变换律

$$f\big|_k\gamma = \nu(\gamma) f \quad \text{for} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

以及在 $\Gamma_0(N)$的尖点处应满足的适当条件。

我们将η函数定义为

$$\eta(z) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

η函数具有满足以下条件的乘子 $\nu_\eta$

$$\eta(\gamma z) = \nu_\eta(\gamma)(cz+d)^{\frac{1}{2}}\eta(z), \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z});$$

在全文中，我们选取平方根的主值分支。对于 $c > 0$，我们有公式[Kno70, §4.1]

$$\nu_\eta(\gamma)=\begin{cases}\left(\frac{d}{c}\right)e\left(\frac{1}{24}((a+d)c-bd(c^2-1)-3c)\right) & \text{if } c \text{ is odd},\\ \left(\frac{c}{d}\right)e\left(\frac{1}{24}((a+d)c-bd(c^2-1)+3d-3-3cd)\right) & \text{if } c \text{ is even},\\ \nu_\eta(-\gamma)=i\nu_\eta(\gamma).\end{cases}\tag{2.1}$$

接下来，我们回顾 $U$ 和 $V$ 算子。对于正整数 $m$，我们通过傅里叶展开将它们定义为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^{\frac{n}{24}}\right)\Big|U_m:=\sum_{n=1}^{\infty}a(mn)q^{\frac{n}{24}},$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^{\frac{n}{24}}\right)\Big|V_m:=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^{\frac{mn}{24}}.\tag{2.2}$$

若 $p$ 是素数，且 $\psi$ 是模 $N$的狄利克雷特征，则我们定义海克算子$T_p$：$S_k(N,\ \psi)\to S_k(N,\ \psi)$ 如下：

$$T_p=U_p+\psi(p)p^{k-1}V_p.$$

若 $p\mid N$和 $\psi$模 $N/p$定义，则我们用 $S_k^{\mathrm{new}\,p}(N,\ \psi,\ \mathbb{C})$ 表示 $S_k(N,\ \psi,\ \mathbb{C})$ 中由 $S_k(N/p,\ \psi,\ \mathbb{C})$ 和 $S_k(N/p,\ \psi,\ \mathbb{C})\big|V_p$ 生成的子空间的正交补（相对于彼得森内积）。若 $p\mid N$且 $(p,\ N/p)=1$，则阿特金-莱纳矩阵 $W_p^N$是任意满足以下条件的整系数矩阵：

$$W_p^N=\begin{pmatrix}p\alpha & \delta\\ N\beta & p\end{pmatrix},\qquad \alpha,\beta,\delta\in\mathbb{Z},\qquad \det(W_p^N)=p.$$

若 $\chi$模 $N/p$定义，则算子 $\big|_kW_p^N$保持空间 $M_k(N,\ \chi)$，并且在该空间上与矩阵 [ 的具体选取无关（Li75，引理 2]）。

对于子环 $A\subseteq\mathbb{C}$ 和乘子系统 $\nu$（定义在 $\Gamma_0(N)$ 上），我们令 $S_k^{\mathrm{new}}(N,\nu,A)\subseteq S_k(N,\nu,A)$，并令 $S_k^{\mathrm{new}\,p}(N,\nu,A)\subseteq S_k(N,\nu,A)$，分别表示系数属于 $A$ 的形式的相应 $A$-子模（并沿用关于在 $\ell$ 上方所有素数处均为整的代数数以及平凡乘子系统的相同约定）。设 $N\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征。假设 $f\in S_k^{\mathrm{new}\,p}(N,\psi)$ 是一个新形式，也就是说，存在一个层 $N'$，满足 $p\mid N'$ 和 $N'\mid N$，使得 $f\in S_k^{\mathrm{new}}(N',\psi)$，且 $f$ 是算子 $T_Q$（对应 $Q\nmid N'$）和 $U_Q$（对应 $Q\mid N'$）的归一化特征形式（我们称这样的新形式为层 $N'$ 的新形式）。那么存在一个阿特金-莱纳特征值 $\varepsilon_p\in\{\pm1\}$，使得 $f\big|_kW_p^N=f\big|_kW_p^{N'}=\varepsilon_pf$；若 $f=\sum a(n)q^n$，则 $\varepsilon_p=-p^{1-k/2}a(p)$ [AAD24，推论 3.2]。尽管我们主要考虑新形式，但我们使用和证明的许多结果也适用于 $S_k(N,\psi)$ 中的归一化特征形式；更准确地说，这些是算子 $T_Q$（对应 $Q\nmid N$）和 $U_Q$（对应 $Q\mid N$）的归一化特征形式。

我们回顾 [AAD24] 中 η乘子的 Shimura 对应的定义。设 $F=\sum a(n)q^{n/24}\in S_{\lambda+1/2}(N,\ \psi\nu_\eta^r)$，其中 $\lambda\geq1$；如果 $\lambda=1$ 进一步假设$F\in S_{3/2}^c(N,\ \psi\nu_\eta^r)$。对于模 $N$ 的狄利克雷特征 $\chi$，令 $L(s,\ \chi)$ 表示狄利克雷$L$-函数。如果 $t$ 是正平方自由整数，则 $t^{\mathrm{th}}$ 提升由 $\mathcal{S}_t(F)=\sum b(n)q^n$ 给出，其中系数 $b(n)$ 定义为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{n^s}=L\left(s-\lambda+1,\psi\left(\tfrac{\bullet}{t}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n}\right)\frac{a(tn^2)}{n^s}.$$

根据 AAD24 定理 $1.1-1.2$]，当 $(r,6)=1$ 时，有 $\mathcal{S}_t(F)\in S^{\mathrm{new}\ 2}{}_{,2\lambda}{}^{\ 3}(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$；当 $(r,6)=3$ [ 时，有 $\mathcal{S}_t(F)\in S_{2\lambda}^{\mathrm{new}\ 2}(2N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi})$。通过一个标准论证（例如参见 ABR23, (2.13)]，），

我们得到

$$F \equiv 0 \pmod{\ell} \iff \mathcal{S}_t(F) \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{for all positive, squarefree } t. \tag{2.3}$$

对于素数 $p \geq 5$，我们使用半整数权形式的海克算子 $T_{p^2}$。假设 $(r,\ 6) = 1$，并且

$$F(z) = \sum_{n \equiv r\,(24)} a(n) q^{\frac{n}{24}} \in M_{\lambda+\frac{1}{2}}(N, \psi\nu_\eta^r).$$

那么 $T_{p^2}$ 的作用由下式给出

$$F\big|T_{p^2} = \sum_{n \equiv r(24)} \left( a(p^2 n) + \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{r-1}{2}} \left(\frac{12n}{p}\right) \psi(p) p^{\lambda-1} a(n) + \psi^2(p) p^{2\lambda-1} a\left(\frac{n}{p^2}\right) \right) q^{\frac{n}{24}}. \tag{2.4}$$

这些算子保持尖点形式空间不变。此外，若我们令

$$\chi^{(r)} = \begin{cases} \left(\frac{-4}{\bullet}\right) & \text{if } 3 \mid r, \\ \left(\frac{12}{\bullet}\right) & \text{if } 3 \nmid r, \end{cases} \tag{2.5}$$

那么我们有

$$\mathcal{S}_t\big(F\big|T_{p^2}\big) = \chi^{(r)}(p) \mathcal{S}_t(F)\big|T_p. \tag{2.6}$$

现在我们讨论模伽罗瓦表示。更多详情请参见 [Hid00]和 [Edi92]。我们先介绍一些记号。假设 $\ell \geq 5$ 是素数。令 $k$ 为偶整数，并且$N \in \mathbb{Z}^+$ 满足 $\ell \nmid N$。令 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{C}$中 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包。若 $p$ 是素数，令 $\mathbb{Q}_p$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的一个固定代数闭包，并固定一个嵌入 $\iota_p : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$。嵌入 $\iota_\ell$ 使我们能够将 $S_k(N)$ 中形式的系数视为 $\mathbb{Q}_\ell$的元素；对于每个素数 $p$，嵌入$\iota_p$ 使我们能够将 $G_p := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ 视为 $G_\mathbb{Q} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 的子群。若 $I_p \subseteq G_p$ 是惯性子群，我们用 $\mathrm{Frob}_p$表示 $G_p/I_p$ 中的算术弗罗贝尼乌斯。

对于任意有限扩张 $K/\mathbb{Q}$，我们令 $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$，并将 $\mathrm{Frob}_p|_K$ 中元素在 $K$ 上的限制记为 $\mathrm{Frob}_p$。对于在 $p$处非分歧的表示 $\rho : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$（也就是说，$I_p \subseteq \ker \rho$），任意 $\sigma \in G_p$ 在 $\rho$ 下的像仅取决于 $\sigma I_p \in G_p/I_p$；对于任意此类表示，我们将 $\mathrm{Frob}_p$ 中任意元素在 $\rho$下的像记为 $\rho(\mathrm{Frob}_p)$。

我们分别将 $\chi_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_\ell^\times$ 和 $\omega_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathbb{F}_\ell^\times$ 记为 $\ell$-进和模 $\ell$ 分圆特征。令 $\omega_2$，$\omega_2' : I_\ell \to \mathbb{F}_{\ell^2}^\times$ 表示 Serre 基本特征，层为 2（见[Ser87, §2.1]）。这两个特征的阶均为 $\ell^2 - 1$，且有 $\omega_2^{\ell+1} = \omega_2'^{\ell+1} = \omega_\ell$。最后提及，若 $\psi$ 是模 $N$的狄利克雷特征，我们可以按照标准方式将其视为伽罗瓦特征$\psi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_\ell^\times$（例如见 [DS05，第 9 § 3]章）。

以下定理归功于 Deligne、Fontaine、Langlands、Ribet 和 Shimura（见[AAT22，定理 2.1]）。

**定理 2.1**。设 $\ell \geq 5$ 是素数，且 $\psi$ 是模 $N$、导子为 $C_\psi$ 的狄利克雷特征。令 $f = \sum a(n) q^n \in S_k(N, \psi)$ 为一个归一化特征形式。存在一个连续不可约表示 $\rho_f : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，其模 $\ell$ 约化为半单表示$\rho_f : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$，并满足以下性质。

*(1)* 若 $p \nmid \ell N$，则 $\rho_f$在 $p$处非分歧，且 $\rho_f(\mathrm{Frob}_p)$ 的特征多项式为$X^2 - \iota_\ell(a(p))X + \psi(p)p^{k-1}$。这唯一确定了 $\rho_f$。*(2)* 若 $f \in S_k^{\mathrm{new}\,Q}(N)$，其中 $Q$是满足 $Q \,||\, N$的素数，则有

$$\rho_f|_{G_Q} \cong \begin{pmatrix} \chi_\ell \psi_Q & * \\ 0 & \psi_Q \end{pmatrix},$$

其中 $\psi_Q$： $G_Q \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 是满足 $\psi_Q(\mathrm{Frob}_Q) = \iota_\ell(a(Q))$的非分歧特征。若还有 $Q \nmid C_\psi$，则 $\rho_f|_{I_Q}$ 是幺幂的。若 $Q \mid C_\psi$，则有

$$\rho_f|_{I_Q} \cong \begin{pmatrix} \psi & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中我们将 $\psi$ 视为伽罗瓦特征。

*(3)* 假设 $2 \le k \le \ell + 1$。

- 若 $\iota_\ell(a(\ell)) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$，则 $\rho_f|_{G_\ell}$ 可约，且有

$$\rho_f|_{I_\ell} \cong \begin{pmatrix} \chi_\ell^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 若 $\iota_\ell(a(\ell)) \notin \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$，则$-\rho_f|_{G_\ell}$不可约，且 $\rho_f|_{I_\ell} \cong \omega_2^{k-1} \oplus \omega'^{(k-1)}$。

注记。伽罗瓦表示取决于嵌入 $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 的选择，但我们在记号中省略了这一点。

现在我们引入有关群表示的记号（另见 [AAT22, § 3]）。对于$\tau \in$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$以及同态 $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$，我们将 ${}^\tau\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 记作 $\overline{\rho}$ 与由 $\tau$ 诱导的 $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 自同构的复合。对于同态 $r : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$，我们也作类似定义。对于两个同态 $r_1, r_2 : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$，若它们在 $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 中某个元素的共轭作用下相同，我们记作 $r_1 \cong r_2$。当矩阵 $A, B \in \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 在 $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 中某个元素的共轭作用下相同时，我们记作 $A \sim B$。对于归一化特征形式$f \in S_k(N, \psi)$，我们将 $r_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 记作 $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 与自然投影 $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ 的复合。

最后，对于伽罗瓦域扩张 $L/K$ 及其子群 $H \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$，我们用 $L^H$表示 $L$中由 $H$固定的子域。

## 3. Results on Modular Galois representations

**3.1. 预备结果。** 本节中，$\ell \ge 5$ 是素数，$k$ 是偶正整数，$N$ 是无平方因子的正整数。我们首先记录定理 2.1 的两个有用推论，它们有助于证明命题 3.3；该命题给出了满足引言中所述适合性条件的充分条件。

以下结果是 [AAT22 中引理 3.1]的类似结果，它精确说明了模 $\ell$ 的模伽罗瓦表示在经过模 $\ell$ 的伽罗瓦特征扭曲后同构时，二者之间的关系。当权足够低时，可以限制我们所考虑的归一化特征形式的权。

**引理 3.1。** 设 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征，我们将其视为伽罗瓦特征。设 $f, g \in S_k(N, \psi)$ 是归一化特征形式，使得 $f = \sum a(n)q^n$ 且 $\rho_g \cong \rho_f \otimes \varphi$，其中$\varphi : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$是非平凡连续特征。进一步假设 $\ell \nmid \phi(N)$ 且$\psi(\sigma) \ne -1$ 对所有 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$均成立。那么

*(1)* $\varphi = \omega_\ell^{\ell-1}$。*(2)* 如果 $k \le \ell + 1$，则以下陈述成立。

- 如果 $\iota_\ell(a(\ell)) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$，则 $k = \frac{\ell+1}{2}$.
- 若 $\iota_\ell(a(\ell)) \notin \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$，则 $k = \frac{\ell+3}{2}$.

证明。 一个标准论证（例如参见 [DS05, Definition 9.6.10] 之前的讨论）表明，特征 $\varphi$ 的像有限，且其阶与 $\ell$互素。若 $\varphi$ 是非分歧的，它也必定通过 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})/\mathbb{Q})$ 分解，其中 $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})$ 是 $\ell$-进圆分扩张。这两个观察表明， $\varphi$ 通过 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)/\mathbb{Q})$ 分解。由定理 2.1 的第 (1) 部分，我们还有

$$\det \overline{\rho}_f = \omega_\ell^{k-1} = \det \overline{\rho}_g = \varphi^2 \det \overline{\rho}_f,$$

这意味着 $\varphi$是二次的。

因此，要证明 $\varphi = \omega_\ell^{\frac{\ell-1}{2}}$，我们只需证明 $\varphi$ 在 $\ell$之外非分歧；这将说明 $\varphi = \omega_\ell^i$，其中 $1 \le i \le \ell - 2$，而由于 $\varphi$是二次的，我们必有 $i = \frac{\ell-1}{2}$。为此，取一个素数 $p \neq \ell$。当 $Q \nmid C_\psi$时，定理 2.1 的 (1) 和 (2) 部分表明

$$\overline{\rho}_f|_{I_p} \cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于 $\rho_g|_{I_p}$，同样的结论也成立；由 $\rho_g \cong \rho_f \otimes \varphi$ 可知，在这种情况下 $\varphi$ 是非分歧的。

假设 $Q \mid C_\psi$，并令 $\sigma \in I_p$。由于我们有 $\rho_g \cong \rho_f \otimes \varphi$，由定理 2.1 的 (2) 部分可知，$\mathrm{tr}(\rho_g(\sigma)) = \mathrm{tr}(\rho_f(\sigma))$，且 $\mathrm{tr}(\rho_g(\sigma)) = \varphi(\sigma)\,\mathrm{tr}(\rho_f(\sigma))$。由于我们有$\psi(\sigma) \neq -1$，定理 2.1 的 (2) 部分还表明 $\varphi(\sigma) \neq -1$；而 $\varphi$ 是二次的这一事实进一步意味着 $\varphi(\sigma) = 1$。这就完成了 $\varphi$ 是非分歧的证明。

（2）的证明与 [AAT22 的引理 3.1] 证明相同，类似地使用定理 2.1 的（3）即可。□

下一个引理是 [AAT22 中引理 3.2] 的类似结果。由于证明与他们的工作类似，类似地使用引理 3.1 即可，我们省略细节。

**引理 3.2**。 设 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征，我们将其视为伽罗瓦特征。设 $f = \sum a(n)q^n \in S_k(N, \psi)$ 是一个归一化特征形式。假设 $\ell \nmid \phi(N)$ 且 $\psi(\sigma) \neq -1$ 对所有 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ 均成立。假设 $2 \le k \le \ell + 1$，且存在一个素数 $Q$ 使得$Q \mid N$, $Q^{k-1} \not\equiv Q^{\pm 1}$(模 $\ell$)，并且 $f \in S_k^{\mathrm{new}\,Q}(N)$。则以下结论成立。

*(1)* $\rho_f$ 是不可约的。*(2)* 假设存在一个二次扩张 $K/\mathbb{Q}$，使得 $\rho_f\big|_{G_K}$ 是可约的。则$\rho_f \cong \rho_f \otimes \omega_\ell^{\ell-1}$且

- 若 $\iota_\ell(a(\ell)) \in \mathbb{Z}_\ell^\times$，则 $k = \frac{\ell+1}{2}$。
- 若 $\iota_\ell(a(\ell)) \notin \mathbb{Z}_\ell^\times$，则 $k = \frac{\ell+3}{2}$。

3.2. **适合性的充分条件**。 这里我们证明，适合性对许多形式空间成立。（另见 [AAT22，命题 3.3] 以及 [AAD24，命题 7.2]）。

**命题 3.3.** 设 $r$ 是一个奇数。设 $N$ 是一个无平方因子的奇正整数，且满足 $\ell \nmid N$。假设当 $3 \nmid r$时有 $3 \nmid N$。设 $\psi$ 是模$N$的狄利克雷特征。设 $k$是一个偶正整数。则当下列条件成立时，$(k, \ell)$ 对每个三元组$(N, \psi, r)$ 都是适合的。

*(1)* $\psi(\sigma) \neq -1$ 对所有 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ 成立。*(2)* $\ell \nmid \phi(N)$。*(3)* $k \le \ell + 1$。*(4)* $2^{k-1} \not\equiv 2^{\pm 1}$ (模 $\ell$)。*(5)* $k \neq \frac{\ell+1}{2}, \frac{\ell+3}{2}$。

*(6)* $\frac{\ell+1}{(\ell+1,k-1)} \geq 6$. $\frac{\ell-1}{(\ell-1,k-1)}$

当 $\ell > 5k-4$ 时，我们总有条件 (3)、(5) 和 (6)。

证明。最后一个断言很容易验证。我们还假设 $(r,6) = 1$；当 $(r,6) = 3$ 时，证明类似。设 $f = \sum a(n) q^n \in S^{\mathrm{new}\,2}_{,k}{}^{3}(6N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi}, \varepsilon_{3,r,\psi})$ 是一个新形式。根据[DDT97，定理 2.47(*b*)]，，我们看到 $\rho_f$ 的像有四种可能：

**(1)** $\rho_f$ 是可约的。**(2)** $\rho_f$ 是二面体型的，即 $\rho_f$ 不可约，但对于某个二次的 $K/\mathbb{Q}$，$\rho_f|_{G_K}$ 可约。**(3)** $\rho_f$ 是例外的，即$\rho_f$ 的射影像共轭于 $A_4$、$S_4$ 或 $A_5$ 之一。**(4)** $\rho_f$ 的像包含 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ 的一个共轭。

我们的策略是排除前 3 种情形。由条件 **(1)**、**(2)** 和 **(4)**，以及引理 3.2 的第 **(1)** 部分可知，$\rho_f$ 是不可约的。由条件 **(5)** 和引理 3.2 的第 **(2)** 部分可知，$\rho_f$ 不是二面体型的。

要排除例外情形，只需证明射影像包含一个阶为 $\geq 6$ 的元素。假设 $\iota_\ell(a(\ell)) \in \mathbb{Z}_\ell^\times$。由定理 2.1 的第 **(3)** 部分可知，

$$\rho_f|_{I_\ell} \cong \begin{pmatrix} \chi_\ell^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\omega_\ell$ 的阶为 $\ell-1$，$\rho_f$ 的射影像包含一个阶为 $\geq \frac{\ell-1}{(\ell-1,\ k-1)} \geq 6$ 的元素。~~如果 $\iota_\ell(a(\ell)) \notin \mathbb{Z}_\ell^\times$，那么定理 2.1 的第 (3) 部分意味着~~

$$\overline{\rho}_f \cong \begin{pmatrix} \omega_2^{k-1} & 0 \\ 0 & \omega_2'^{k-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $\omega_2/\omega_2'$ 的阶为 $\ell+1$，由条件 **(6)** 可知，$\rho_f$的射影像包含一个阶为 $\frac{\ell+1}{(\ell+1,\ k-1)} \geq 6$的元素。证明完毕。□

**3.3. 证明定理 1.1 的关键要素**。这里汇集了证明主要技术结果所需的结论，该结果对于证明定理 1.1 至关重要。最重要的结果是命题 3.5，它依赖于下一个结果。该结果大致表明，射影像在模 $\ell$ 意义下充分互不相交的归一化特征形式，会切出相应地互不相交的域扩张；此外，它还将 [AAT22，引理 3.7] 推广到了具有任意特征的形式空间。

**引理 3.4**。假设 $N$ 是一个正整数，且 $\psi$ 是模 $N$、导子为 $C_\psi$的狄利克雷特征。设 $f_1, ..., f_s \in S_k(N, \psi)$ 为归一化特征形式。假设对每个$i \in \{1, ..., s\}$，$\rho_{f_i}(G_\mathbb{Q})$ 都包含$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$的一个共轭，并令 $M_i = \overline{\mathbb{Q}}^{\ker(\rho_{f_i})}$。则以下陈述成立。

*(1)* 对于每个 $i \in \{1, ..., s\}$，存在一个次数至多为 *2* 的扩张 $K_i/\mathbb{Q}$ *of degree at most 2 in* $M_i$ *and* 和一个有限扩张 $\mathbb{F}_i/\mathbb{F}_\ell$，使得 $\rho_{f_i}(G_{K_i}(\zeta_{C_\psi \ell}))$ 与 $SL_2(\mathbb{F}_i)$ 共轭。*(2)* 进一步假设，对于每个 $\tau \in$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$，对于每个 $i, j \in \{1, ..., s\}$，都有$i \neq j$。令 $K_i$ 和 $\mathbb{F}_i$ 如第 *(1)* 部分所定义，并设 $M := M_1 ... M_s$ 和 $K := K_1 ... K_s$。那么伽罗瓦群$(M(\zeta_{C_\psi \ell})/K(\zeta_{C_\psi \ell})) \cong \prod_{i=1}^s SL_2(\mathbb{F}_i)$。

证明。对于每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，由于 $\rho_{f_i}(G_\mathbb{Q})$ 包含 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ 的一个共轭子群，根据[DDT97, 定理 2.47(*b*)]，可知存在一个有限扩张 $\mathbb{F}_i/\mathbb{F}_\ell$，使得 $r_{f_i}(G_\mathbb{Q})$ 共轭于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$ 或 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_i)$。将 $\rho_{f_i}$ 替换为一个共轭元后，不妨设$r_{f_i}(G_\mathbb{Q}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$ 或 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_i)$。现在定义 $K_i/\mathbb{Q}$ 为次数至多为 2 的扩张，其中

$M_i$ 使得 $r_{f_i}(G_{K_i}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$。注意，由于 $\ell \geq 5$，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$ 是一个单群。由于$K_i(\zeta_{C_\psi \ell})/K_i$ 是一个阿贝尔扩张，我们看到 $r_{f_i}(G_{K_i(\zeta_{C_\psi \ell})}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$。这一事实以及定理 2.1 的第 (1) 部分意味着 $\rho_{f_i}(G_{K_i(\zeta_{C_\psi \ell})}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_i)$。

（2）部分的证明与 [AAT22 引理 3.7], 中（2）部分的证明非常相似，因此我们简述细节。令 $L_i := M^{\ker(r_{f_i})_i}$。与 [AAT22 引理 3.7] 中（2）部分的证明一样，以下三个断言成立。

（a）伽罗瓦群$(L_i K(\zeta_{C_\psi \ell})/K(\zeta_{C_\psi \ell})) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_i)$。（b）伽罗瓦群$(M_i K(\zeta_{C_\psi \ell})/K(\zeta_{C_\psi \ell})) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_i)$。（c）对于 $i$，$j \in \{1, \ldots, s\}$ 满足 $i \neq j$ 的情形，有 $L_i K(\zeta_{C_\psi \ell}) \cap L_j K(\zeta_{C_\psi \ell}) = K(\zeta_{C_\psi \ell})$。

由上述三个论断以及 [AAT22，引理 3.6]，并按照 [AAT22，引理 3.7] 的证明，即可得到该结果。具体而言，利用这些工具，我们可以对 $j \in \{1, \ldots, s\}$ 作归纳证明:

$$\mathrm{Gal}(M_1 \cdots M_j K(\zeta_{C_\psi \ell})/K(\zeta_{C_\psi \ell})) \cong \prod_{i=1}^{j} \mathrm{Gal}(M_i K(\zeta_{C_\psi \ell})/K(\zeta_{C_\psi \ell})) \cong \prod_{i=1}^{j} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_i).$$

□

下一个结果是 [AAT22，命题 3.8] 的推广，也是证明定理 1.1 的关键新要素。

命题 *3.5.* 设 $N \in \mathbb{Z}^+$，且 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征。设 $f_1, \ldots, f_s \in S_k(N, \psi)$ 为归一化特征形式，并满足对每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，$\rho_{f_i}(G_{\mathbb{Q}})$ 都包含 $SL_2(\mathbb{F}_\ell)$ 的一个共轭。则对每个 $\gamma \in SL_2(\mathbb{F}_\ell)$，存在 $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_\ell))$，使得对所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$，我们有 $\rho_{f_i}(\sigma) \sim \gamma$ 或 $\rho_{f_i}(\sigma) \sim -\gamma$。特别地，我们有 $\rho_{f_i}(\sigma^2) \sim \gamma^2$。

证明。设 $S = \{f_1, \ldots, f_s\}$。对于 $f$，$g \in S$，若存在 $\tau \in$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$ 使得 $r_{f_i} \cong {}^\tau r_{f_j}$，则我们记 $f \simeq g$。设 $S' = \{g_1, \ldots, g_t\}$ 为 $\simeq$ 的一组完全代表元。于是由引理 3.4 可知，存在 $\sigma \in$ 伽罗瓦群$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_{C_\psi \ell}))$，使得对所有 $g \in S'$ 都有 $\rho_g(\sigma) \sim \gamma$。

现设 $f \in S$。由定义，存在 $g \in S'$ 使得 $f \simeq g$。因此，对某个 $\tau \in$ 伽罗瓦群$(\mathbb{F}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$，我们可通过 $\varphi(\sigma) = \rho_f(\sigma)^\tau \rho_g(\sigma)^{-1}$ 定义特征 $\varphi: G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{F}_\ell^\times$。由 $\rho_g(\sigma) \sim \gamma$ 以及定理 2.1 的第 (1) 部分可知，$\det \rho_g(\sigma) = \det \rho_f(\sigma) = \varphi(\sigma)^2 \det \rho_g(\sigma)$。因此，我们有 $\varphi(\sigma)^2 = 1$，结论随之成立。□

**3.4. 主要技术结果。** 现在我们证明主要技术结果，该结果用于定理 1.1 的证明。

**定理 3.6。** 设 $\ell \geq 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。设 $N$ 是无平方因子、奇、正整数，满足 $\ell \nmid N$。假设当 $3 \nmid r$ 时 $3 \nmid N$。令 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征。令 $k$ 为满足下式的偶正整数: $(k, \ell)$ 适用于$(N, \psi, r)$; 并令 $m \geq 1$ 为整数。

如果 $(r,6) = 1$，则存在一个由素数组成的正密度集合 $S$，使得当 $p \in S$ 时，对于每个新形式 $f \in S_k^{\mathrm{new}}(6N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi}, \varepsilon_{3,r,\psi})$，有 $p \equiv 1$ (模 $\ell^m$) 以及 $f|T_p \equiv -f$ (模 $\ell^m$)。如果 $(r, 6) = 3$，则对于 $S_k^{\mathrm{new}}(2N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi})$，同样的结论成立。

证明。我们假设 $(r,6) = 1$; 当 $(r, 6) = 3$ 时，我们省略细节，因为该情形下的证明几乎完全相同。取一个数域 $K$，使其包含所有新形式 $f \in S_k^{\mathrm{new}}(6N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi}, \varepsilon_{3,r,\psi})$ 的全部系数。回忆一下，我们已固定一个嵌入 $\iota_\ell: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_\ell$;

若 $\lambda$ 是由 $\iota_\ell$ 诱导的 $K$ 的素数，则令 $K_\lambda$ 为 $K$ 在 $\lambda$ 处的完备化，其整数环为 $\mathcal{O}_\lambda$，剩余域为 $\mathbb{F}=\mathcal{O}_\lambda/\lambda$。那么，对于任意新形式 $f\in S^{\mathrm{new}\,2}_{,k\quad\ 3}(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$，定理 2.1 中的伽罗瓦表示 $\rho_f$ 和 $\rho_f$ 分别定义在 $\mathcal{O}_\lambda$ 和 $\mathbb{F}$ 上。

根据适合性的定义和命题 3.5，存在 $\sigma\in$伽罗瓦群$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\zeta_{C_\psi\ell}))$，使得对于每个新形式 $f\in S^{\mathrm{new}\,2}$，$\rho_f(\sigma)\sim\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}(_{k\quad\ 3},6N,\psi^2,\epsilon_{2,r,\psi},\epsilon_{3,r,\psi})$。因此，$\rho_f(\sigma)$ 的特征多项式模 $\lambda$ 同余于 $x^2+x+1$。若 $w$ 是正整数，我们按照 AAT22 的证明（定理 1.5] ）中的论证，可知 $\rho_f(\sigma^{\ell^{w-1}})$ 的特征多项式模 $\lambda^w$ 同余于 $x^2+x+1$。现在，我们按照 AAT22 的证明（定理 1.5]）中的做法，应用切博塔廖夫密度定理和定理 2.1。更确切地说，我们得出：对于每个正整数 $w$，存在一个由素数组成的正密度集合 $S_w$，使得若 $p\in S_w$，则 $p\equiv 1$ 模 $\ell^w$，并且有

$$f\big|T_p\equiv -f\pmod{\lambda^w}$$

对每个新形式 $f\in S^{\mathrm{new}\,2}_{,k\quad\ 3}(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$.

证明的其余部分可仿照 [AAD24，定理 7.3] 中的证明进行，只要我们知道 $S^{\mathrm{new}\,2}_{,k\quad\ 3}(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$ 有一个整数系数基。为证明这一断言，令$\{f_1,\dots,f_s\}$ 表示该空间中新形式的集合。仿照 [DS05，定理 5.8.3]中的论证可知，该空间有一个基，其中的模形式具有如下形式：$f_i\big|V_d$，其中 $d\mid 6N/M$，且 $f_i$ 是层为 $M$的新形式。根据标准论证 [DS05，§ 6.1]，只要我们知道这个基在伽罗瓦群 Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 的作用下保持不变，便可得到这一断言。这是因为伽罗瓦作用与 $V_d$ 可交换，而且 2 和 3 处的 Atkin-Lehner特征值分别由 $2^{\mathrm{nd}}$ 和 $3^{\mathrm{rd}}$ 系数决定，而这两个系数属于 $f_i$。鉴于根据 [AAD24，推论 3.2]，这些系数均为整数，证明完成。□

我们还记录以下与 [AAD24 中的定理 7.4]类似的结果。该结果可由定理 2.1 第 (2) 部分的最后一个断言，使用相同的论证得出。

**定理 3.7**。设 $k\in\mathbb{Z}^+$。假设 $\ell\geq 5$ 是素数，且存在一个整数 $a$，使得 $2^a\equiv -2$（模 $\ell$）。设 $m\geq 1$ 为一个整数。设 $N\in\mathbb{Z}^+$ 为奇数且无平方因子，并满足$\ell\nmid N$；若 $3\nmid r$，则 $3\nmid N$。假设 $\psi$是模 $N$的狄利克雷特征。

若 $(r,\ 6)\ =1$，则存在一个由素数组成的正密度集合 $S$，使得若 $p\in S$，则$p\equiv -2$（模 $\ell^m$），并且对每个新形式 $f\in S^{\mathrm{new}\,2}_{,\ k\quad\ 3}$（$6N$、$\psi^2$、$\epsilon_{2,\ r,\ \psi}$、$\epsilon_{3,\ r,\ \psi}$），我们有

$$f\big|T_p\equiv -(-\epsilon_{2,r,\psi})^a p^{\frac{k}{2}-1}f\pmod{\ell^m}.$$

相同的结果对 $S_k^{\mathrm{new}\,2}(2N,\psi^2,\epsilon_{2,r,\psi})$ 也成立，只要 $(r,\ 6)\ =3$。

## 4. Proof of Theorems 1.1-1.2

设 $\ell\geq 5$ 为素数，$r$ 为奇数。设 $m,\lambda\geq 1$ 为整数。假设 $N$ 是无平方因子的奇正整数，且满足 $\ell\nmid N$。假设当 $3\nmid r$时，$3\nmid N$。设 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征，并假设

$$F(z)=\sum_{n\equiv r\ (24)}a(n)q^{\frac{n}{24}}\in S_{\lambda+\frac{1}{2}}(N,\psi\nu_\eta^r).$$

此外，若 $\lambda=1$，假设 $F\in S^c_{3/2}(N,\psi\nu_\eta^r)$。

对于每个正的无平方因子整数 $t$，回顾一下，当 $(r,6)\ =1$ 时，$\mathcal{S}_t(F)\ \in S^{\mathrm{new}\,2}_{,2\lambda\quad\ 3}(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$；当 $(r,6)\ =3$ 时，$\mathcal{S}_t(F)\ \in S^{\mathrm{new}\,2}_{2\lambda}(2N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi})$。随着 $t$ 遍历所有无平方因子整数，

模 $\ell^m$ 时， $\mathcal{S}_t(F)$ 的非零可能取值只有有限多个；令 $\{g_1,\dots,g_k\}$ 为这些取值的一组代表元。令 $\{f_1,\dots,f_s\}$ 为 $S^{\mathrm{new}}_{2\lambda}{}^3(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$ 中满足 $(r,6)=1$ 且属于 $S^{\mathrm{new}}_{2\lambda}{}^2(2N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi})$ 中满足 $(r,6)=3$ 的新形式集合。记

$$g_j=\sum_{i=1}^{s}\sum_{d|N}c_{i,j,d}f_i\big|V_d$$

对于 $j\in\{1,\dots,k\}$，其中 $c_{i,\ j,\ d}\in\mathbb{Q}$。选取 $c\ge 0$，使得 $\ell^c c_{i,\ j,\ d}$ 在 $\ell$ 上方的所有素数处均为整的，对所有 $c_{i,\ j,\ d}$ 都成立。另回忆(2.5)中的特征 $\chi^{(r)}$。我们需要两个简短的引理（其证明与 [AAD24中的引理 7.5 – 7.6]的证明非常相似，使用(2.4)、(2.3)和(2.6)）。

**引理4.1**。 假设 $p,\ell\ge 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。设 $N$ 是一个无平方因子、奇的正整数，使得 $p\nmid N$, $\ell\nmid N$，并且当 $3\nmid r$ 时有 $3\nmid N$。令 $\psi$ 为模 $N$ 的狄利克雷特征，并假设 $F\in S_{\lambda+1/2}(N,\psi\nu_\eta^r)$。设 $m\ge 1$ 为整数，并令形式 $f_i$（其中 $i\in\{1,\dots,s\}$）和整数 $c$ 按上述方式定义。若 $\lambda_p$ 是一个整数，且具有如下性质：对所有 $i\in\{1,\dots,s\}$，都有 $f_i\big|T_p\equiv\lambda_p f_i$ (模 $\ell^{m+c}$)，则

$$F\big|T_{p^2}\equiv\chi^{(r)}(p)\lambda_p F\pmod{\ell^m}.$$

**引理4.2.** 设 $p$、$\ell\ge 5$ 是素数，且 $r$ 是奇数。设 $N$ 是无平方因子的奇正整数，使得 $p\nmid N$、$\ell\nmid N$，并且 $3\nmid N$ 若 $3\nmid r$。设 $m\ge 1$ 是整数。设 $\psi$ 是模 $N$ 的狄利克雷特征，并假设

$$F=\sum_{n\equiv r\,(24)}a(n)q^{\frac{n}{24}}\in S_{\lambda+\frac12}(N,\psi\nu_\eta^r).$$

假设存在 $\alpha_p\in\{\pm1\}$，使得

$$F\big|T_{p^2}\equiv\alpha_p p^{\lambda-1}F\pmod{\ell^m}.$$

于是我们有

$$a(p^2n)\equiv 0\pmod{\ell^m}\quad if\quad \left(\frac{n}{p}\right)=\alpha_p\left(\frac{12}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{r-1}{2}}\psi(p).$$

现在我们来证明定理 1.1–1.2。

定理 *1.1* 的证明. 设 $\ell\ge 5$ 是素数。设 $c$ 是引理4.1中的一个整数。若 $(r,6)=1$，则定理 3.6 推出存在一个由素数组成的正密度集合 $S$，使得若 $p\in S$，则有 $p\equiv 1$ (模 $\ell^m$)、$p\nmid 6N$，并且

$$f\big|T_p\equiv -f\pmod{\ell^{m+c}}$$

对于每个新形式 $f\in S^{\mathrm{new}}_{2\lambda}{}^3(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$; 当 $(r,6)=3$ 时，对于 $S^{\mathrm{new}}_{2\lambda}{}^2(2N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi})$ 也有相同的结论。对于这样的 $p$，由引理4.1可得

$$F\big|T_{p^2}\equiv\chi^{(r)}(p)F\pmod{\ell^m}.$$

结论由引理4.2得出。 □

定理 *1.2* 的证明。 假设 $\ell\ge 5$ 是一个素数，使得对于某个整数 $a$，有 $2^a\equiv -2$ (模 $\ell$)。令 $c$ 为引理4.1中的一个整数。若$(r,6)=1$，则根据定理 3.7，存在$\beta\in\{\pm1\}$ 以及一个由素数组成的正密度集合 $S$，使得若 $p\in S$，则 $p\equiv -2$ (模 $\ell^m$)，$p\nmid 6N$，并且对每个新形式 $f\in S^{\mathrm{new}}_{2\lambda}{}^3(6N,\psi^2,\varepsilon_{2,r,\psi},\varepsilon_{3,r,\psi})$，我们有

$$f\big|T_p\equiv\beta p^{\lambda-1}f\pmod{\ell^{m+c}}.$$

若$(r, 6) = 3$，则对 $S_{2\lambda}^{\mathrm{new}}{}^2(2N, \psi^2, \varepsilon_{2,r,\psi})$，同样的结论成立。

无论哪种情形，对于这样的 $p$，引理4.1表明

$$F\big|T_{p^2} \equiv \beta\chi^{(r)}(p)p^{\lambda-1}F \pmod{\ell^m}.$$

该结果由引理4.2得出。 □

## 5. Acknowledgements

作者感谢Patrick Allen的多次有益讨论，并感谢Olivia Beckwith提出的有益意见。

## References

[AAD24] Scott Ahlgren、Nickolas Andersen与Robert Dicks，带η乘子的模形式的志村提升与同余，《Advances in Mathematics》447 (2024)，论文编号109655，58. MR 4739249[AAT22] Scott Ahlgren、Patrick B. Allen与Shiang Tang，类似于Atkin的分拆函数同余，《美国数学会汇刊》B辑9 (2022)，1044–1064. MR 4524115[ABR23] Scott Ahlgren、Olivia Beckwith与Martin Raum，分拆函数同余的稀缺性，《美国数学杂志》145 (2023)，第5期，1509–1548. MR 4647652[Atk68] A. O. L. Atkin，$p(n)$的乘法同余性质与密度问题，《伦敦数学会会刊》(3) 18 (1968)，563–576. MR 227105[DDT97] Henri Darmon、Fred Diamond与Richard Taylor，费马大定理，椭圆曲线、模形式与费马大定理（香港，1993），国际出版社，马萨诸塞州剑桥，1997，第2–140页. MR 1605752[DS05] Fred Diamond与Jerry Shurman，模形式初步，《数学研究生教材》第228卷，施普林格出版社，纽约，2005. MR 2112196[Edi92] Bas Edixhoven，Serre关于模形式的猜想中的权，《数学发明》109 (1992)，第3期，563–594. MR 1176206.[Has66] Helmut Hasse，关于素数 $p$的密度，f¨对预先给定的有理整数 $a \neq 0$而言，其模.$p$ 的阶为偶数或奇数，《数学年刊》166 (1966)，19–23. MR 205975[Hid00] Haruzo Hida，模形式与伽罗瓦上同调，《剑桥高等数学研究》第69卷，剑桥大学出版社，剑桥，2000. MR 1779182[Kno70] Marvin I. Knopp，解析数论中的模函数，Markham出版公司，伊利诺伊州芝加哥，1970. MR 0265287[Li75] Wen Ch'ing Winnie Li，新形式与函数方程，《数学年刊》212 (1975)，285–315. MR 369263[Ram21] S. Ramanujan，分拆的同余性质，《数学杂志》9 (1921)，第1-2期，147–153. MR 1544457[Ser87] Jean-Pierre Serre，关于模repr´表示（次数degr´为2）的伽罗瓦群(Q/Q)，《杜克数学杂志》54 (1987)，第1期，179–230. MR 885783[Ser 12] , 关于 $N_X(p)$的讲义，Chapman & Hall/CRC数学研究笔记，第11卷，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2012. MR 2920749[Yan14] Yifan Yang，SL(2, $\mathbb{Z}$)上的半整数权模形式，《名古屋数学杂志》215 (2014)，1–66. MR 3263525

Department of Mathematics, Clemson University, Clemson, SC 29634电子邮箱地址：rdicks@clemson.edu