arXiv:2603.07021v1 [math.DS] 7 Mar 2026

拉格朗日问题中临界点的局部莫尔斯同调

Xiuting Tang
fztxt@126.com

2026年3月10日

摘要

本文以一种新方法构造局部莫尔斯同调，并计算了拉格朗日问题的临界点的局部莫尔斯同调。作为推论，我们首次证明，每个线性临界点要么是鞍点，要么是退化临界点；此前的结论则是，如果所有线性临界点均非退化，那么它们都是鞍点。

1 引言

拉格朗日问题是在两个固定中心问题的基础上，再加上一个从两个质量中点作用的弹性力。拉格朗日 [11] 首先观察到该问题是可积的。我们参考 [10]，以全面论述在两个固定中心问题中可以添加哪些力，同时仍使该问题完全可积。将两个固定中心取为 $e=(-\frac{1}{2},0)$和 $m=(\frac{1}{2},0)$，拉格朗日问题的哈密顿函数为

$$H(q,p)=T(p)-U(q). \tag{1}$$

其中

$$T(p)=\frac{1}{2}|p|^2.$$

$$U:\mathbb{R}^2\backslash\{(\pm\frac{1}{2},0)\}\to\mathbb{R},q\to\frac{m_1}{\sqrt{(q_1+\frac{1}{2})^2+q_2^2}}+\frac{m_2}{\sqrt{(q_1-\frac{1}{2})^2+q_2^2}}+\frac{\epsilon}{2}|q|^2,$$

$p=(p_1,p_2)^T,q=(q_1,q_2)^T$和 $m_1,m_2,\epsilon\in\mathbb{R}^+$。

如果设定 $\epsilon=1$ 和 $m_1=m_2=\frac{1}{2}$，那么拉格朗日问题在旋转坐标系中具有与圆型限制性三体问题相同的势能，而整个系统相当于圆型限制性三体问题减去科里奥利力。因此，拉格朗日问题反映了希尔区域边界附近圆型限制性三体问题的一些信息。

在 [14], 中，我们研究了拉格朗日问题的一些性质，并发现它有五个临界点 $\{l_i|i=1,2,3,4,5\}$，其中 l_4，l_5 通过直接计算可知是极大点。

本文以一种新方法构造局部莫尔斯同调，并计算这些临界点的局部莫尔斯同调。与 [14]中“若所有线性临界点均非退化，则它们都是鞍点”这一结论相比，我们首次证明，作为推论，每个线性临界点要么是鞍点，要么是退化临界点。

定理 A. 对于拉格朗日问题中满足 $m_1,m_2,\epsilon\in\mathbb{R}^+$ 的共线临界点 $l_i(i=1,2,3)$，有

$$HM_*^{loc}(l_i)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2,*=1;\\ \{0\},otherwise.\end{cases}$$

对于极大点 $l_i(i=4,5)$，有

$$HM_*^{loc}(l_i)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2,*=2;\\ \{0\},otherwise.\end{cases}$$

推论 A. 拉格朗日问题中位于 x轴上且满足$m_1,m_2,\epsilon\in\mathbb{R}^+$ 的三个临界点，每一个要么是鞍点，要么是退化临界点。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们以一种全新的方式完整地构造局部莫尔斯同调。第 2.1 节中，我们证明梯度流线在局部的行为。第 2.2 节中，我们证明梯度流线模空间的弱紧性和 Floer-Gromov 收敛，这与莫尔斯同调中的情形类似。第 2.3 节中，我们讨论横截性，并证明梯度流线模空间是一个流形，这与莫尔斯同调中的情形类似。第 2.4 节中，我们给出定义良好的局部莫尔斯同调定义。第 2.5 节中，我们通过考察含时流线，证明局部莫尔斯同调关于所选莫尔斯-斯梅尔对和小邻域的不变性。第 3 节中，我们给出拉格朗日问题中临界点的局部莫尔斯同调，并首次证明每个线性临界点要么是鞍点，要么是退化临界点。

2 局部莫尔斯同调

2.1 局部莫尔斯同调简介

局部莫尔斯同调和弗洛尔同调的构造可以追溯到 Floer 的开创性工作（例如，参见[3, 4]）。我们也可以参考 Ginzburg 在[8] 中的构造。

据我们所知，目前还有一些关于局部莫尔斯同调的其他研究。在 [13], 中，Rot 与 Vandervorst 构造了 Morse-Conley-Floer 同调

利用 Conley 隔离块和李雅普诺夫函数。在 [9], 中，D. Hein、U. Hryniewicz 和 L. Macarini 研究了带对称性的局部莫尔斯同调的横截性。

在 [2], Mich`ele Audin 和 Mihai Damian 的著作中，他们从现代视角构造 Morse 同调，并自然地进一步讨论了 Floer 同调。本文从这一现代视角出发，构造下文定义的局部莫尔斯同调，并以此研究拉格朗日问题中的临界点。

˜我们考虑黎曼流形 (M, g) 上的光滑函数 f，它有一个孤立临界点 x_0。在临界点˜的一个小邻域 B 内，我们对函数稍作扰动 f，得到一个莫尔斯函数 f。在扰动过程中， B_δ中会出现或消失一些 f 的临界点。随后，我们将这些莫尔斯指标为 k 的临界点构成的向量空间定义为第 k 个局部莫尔斯复形。存在一条梯度流线，其方程为

$$\partial_s x(s) = -\nabla f(x(s)) \tag{2}$$

连接第 k 个和第 $(k-1)$ 个临界点。这里我们遇到一个在构造 Morse 同调时不会出现的困难：我们必须确保梯度流线的行为是局部的，也就是说，它不能离开临界点 x_0的邻域B。这一点可以通过第 2.2 节引理 4 中的能量分析来证明。

与莫尔斯同调中一样，利用未参数化梯度流线的模空间

$$\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+) := \tilde{\mathcal{M}}(f, g; x^-, x^+)/\mathbb{R}, \tag{3}$$

我们可以将边界算子定义为

$$\partial : CM_k^{loc}(x_0, \delta, f, g) \to CM_{k-1}^{loc}(x_0, \delta, f, g),$$

$$\partial x^- = \sum_{\mu(x^-)=\mu(x^+)+1} \#_2 \mathcal{M}(f, g; x^-, x^+) x^+.$$

将局部莫尔斯同调定义为

$$HM^{loc} = \ker \partial / \mathrm{Im} \partial.$$

为了使这个定义良定义，我们应证明 $\partial^2 = 0.$。策略是证明，对于实数集上的黎曼度量的一般选择，$(f,\ g;\ x^-,\ x^+)$ 是一个紧流形，与莫尔斯同调中的做法类似。

构造的最后一步是证明局部莫尔斯同调关于莫尔斯-斯梅尔对 $(f,\ g)$ 的不变性。这比莫尔斯同调的构造困难得多。证明的核心是确保时变梯度流线在局部范围内保持良好行为。受[5], 的启发，我们构造了一个特定的莫尔斯函数同伦，并通过估计时变梯度流线的能量来证明其局部行为。

最后，我们构造出局部莫尔斯同调，使其不依赖于所选的莫尔斯-斯梅尔对以及所选的小邻域。

在第 2.6 节的定理 8 中，我们证明了局部莫尔斯同调的同伦不变性，这对于计算拉格朗日问题中临界点集的局部莫尔斯同调非常重要。

2.2 临界点附近梯度流线的局部行为

$\tilde{}(M,g)$ 是一个黎曼流形，f： $M \to \mathbb{R}$ 是 M 上的光滑函数。设 $\tilde{}$ x_0 是 f 的一个孤立临界点，即 $\nabla f(x_0) = 0$。

定义 x_0 的邻域 $B_\delta = \{x \in M | ||x - x_0||_g \le \delta, \delta > 0\}$，并且

$$\Delta(\tilde{f}, x_0) = \{\delta | x_0 \text{ is the unique critical point of } \tilde{f} \text{ in } B_{2\delta}\}.$$

$\tilde{}$选取 $\delta \in \Delta$，通过对 $f|_{B_\delta}$ f 稍加扰动，我们可以在 B_δ $\tilde{}$上得到关于 $f|_{M\setminus B_\delta} = f|_{M\setminus B_\delta}$ 的莫尔斯函数，且 f 的临界点只能在 B_δ 中产生。假设 x^- 与 x^+ 是 f 的两个临界点，它们的莫尔斯指标 μ 之差为 1，即 $\mu(x^-) - \mu(x^+) = 1$，则存在该方程的一条梯度流线

$$\partial_s x(s) = -\nabla f(x(s)) \tag{4}$$

连接 x^- 与 x^+，即当 $s \to \pm\infty$ 时，$x(s) \to x^\pm$。

我们在下面的引理 2 中断言，通过对 f 作足够小的扰动，我们可以得到莫尔斯函数 $\tilde{f}$，使得方程 (4) 的梯度流线不能离开 x_0 的邻域 $B_{2\delta}$。

Let

$$\mathcal{F} = \{f \in L^\infty(M, \mathbb{R}) | f|_{M\setminus B_\delta} = \tilde{f}|_{M\setminus B_\delta}\},$$

$$\mathcal{F}_{Morse} = \{f \in \mathcal{F} : f|_{B_\delta} \text{ is a Morse function}\}.$$

我们知道，$\mathcal{F}_{Morse}$ 在 $\mathcal{F}$中稠密，因此存在一列 $f_\nu \in \mathcal{F}_{Morse}$，$\nu \in \mathbb{N}^*$，

$$f_\nu \xrightarrow{C^\infty} \tilde{f}. \tag{5}$$

为了证明引理 2，我们需要下面的引理 1。

引理 1。对于任意 $\eta > 0$，存在 ν_0，使得当 $\nu > \nu_0$时，有最大值 $f_\nu|_{C_\nu}$ − 最小值 $f_\nu|_{C_\nu} < \eta$，其中 $C_\nu = \{x \in B_\delta | \nabla f_\nu(x) = 0\}$。

证明。我们假设该引理不成立，则存在 η_0，使得对于任意 $\nu \in \mathbb{N}$，$\max f_\nu|_{C_\nu} - \min f_\nu|_{C_\nu} \ge \eta_0$。由于$\#C_\nu < \infty$，存在$x_\nu^1$、$x_\nu^2 \in C_\nu$、$\nu \in \mathbb{N}^*$，使得 $f_\nu(x_\nu^1) - f_\nu(x_\nu^2) \ge \eta_0$。由于 x_ν^1、x_ν^2位于有界区域 B_δ中，因此存在收敛子列 $x_{\nu_j}^1 \to x^1$、$x_{\nu_j}^2 \to x^2$、$j \in \mathbb{N}^*$。因此，$\tilde{f}(x^1) - \tilde{f}(x^2) \ge \eta_0$，这意味着 $\tilde{f}(x^1) \ne \tilde{f}(x^2)$。由（45）可知，$x^1$和 x^2是 $\tilde{f}$的临界点，即 $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2) = 0$。这与 f 在 B_δ中只有一个临界点的事实相矛盾。 □

引理 2. 对任意 $\delta \in \Delta$，存在 $f \in \mathcal{F}_{Morse}$，使得 $x(s) \in B_{2\delta}$，$\forall s \in \mathbb{R}$。

证明。采用反证法，则对于任意莫尔斯函数 $f(x)$，流都应从 x^- 离开 $B_{2\delta}$，并最终返回 x^+。记 $A_\delta =$

$B_{2\delta}\backslash B_\delta$，那么流至少应有两次穿过 A_δ。设第一个时间区间为 $[t_0^-, t_0^+]$，最后一个时间区间为 $[t_1^-, t_1^+]$，则

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ||\partial_s x(s)||^2 ds \\ &\geq \int_{x_0^-}^{x_0^+} ||\partial_s x(s)||^2 ds + \int_{x_1^-}^{x_1^+} ||\partial_s x(s)||^2 ds. \end{aligned} \tag{6}$$

~存在 $\epsilon > 0$，使得 $||\nabla f|_{A_\delta}|| \geq \epsilon$。由于 $\partial_s x(s) = -\nabla f|_{A_\delta} = -\nabla f|_{A_\delta}$，我们有 $||\partial_s x(s)|| \geq \epsilon$，$t \in [t_0^-, t_0^+] \cup [t_1^-, t_1^+]$。因此，

$$\begin{aligned} E(x) &\geq \epsilon\Big(\int_{x_0^-}^{x_0^+} ||\partial_s x(s)||ds + \int_{x_1^-}^{x_1^+} ||\partial_s x(s)||ds\Big) \\ &\geq 2\epsilon\delta. \end{aligned} \tag{7}$$

我们还可以如下计算能量 $E(x)$。

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ||\partial_s x(s)||^2 ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\partial_s x, \partial_s x) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\nabla f(x), \nabla f(x)) ds \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} f(x(s)) ds \\ &= f(x^-) - f(x^+). \end{aligned} \tag{8}$$

在引理 1 中固定 $\eta = \epsilon\delta$，我们得到一列莫尔斯函数 $f_\nu(\nu > \nu_0)$，使得 $\max f_\nu|_{C_\nu} - \min f_\nu|_{C_\nu} < \epsilon\delta$。只需在 $\nu > \nu_0$ 中选取 ν 的一个值，并令 $f = f_\nu$，则

$$E(x) \leq \max f_\nu|_{C_\nu} - \min f_\nu|_{C_\nu} < \epsilon\delta. \tag{9}$$

这与（7）矛盾。

□

将引理 2 中找到的莫尔斯函数集合定义为 $\mathcal{F}_{Morse}^\delta$ 和

$$\mathcal{F}_{Morse}^{loc} = \bigcup_{\delta \in \Delta} \mathcal{F}_{Morse}^\delta.$$

2.3 梯度流线模空间的紧致性

设 $x^+, x^- \in$临界点集f, $f \in \mathcal{F}^{\delta}_{Morse}$并且 g是 $B_{2\delta}$上的黎曼度量。将从 x^- 到 x^+ 的参数化梯度流线的模空间定义如下。

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{M}}(f,g;x^-,x^+)\\ :=&\{x(s)\in C^\infty(\mathbb{R},B_{2\delta})|\partial_s x(s)+\nabla_g f(x(s))=0, s\in\mathbb{R}, \lim_{s\to\pm\infty}=x^\pm\}\end{aligned} \tag{10}$$

$\tilde{\mathcal{M}}\ f\ g\ x^-\ x^+$ $r_*x\ s\ =x\ s+$上存在一个重参数化作用，；。若 $(\ )(\ )$，若 $r\ r\in\mathbb{R}$ $x\ s\ \in\tilde{\mathcal{M}}\ f\ g\ x^-\ x^+$ $(\ )(\ ;\ )$，则 $(\ )(\ ;)$。

若$\mathcal{M}(f,$ $=g;x^+,$，则$)\tilde{}=\{x\}$， x是一条常值梯度流线，且 $r_*x=x$， $\forall r\in\mathbb{R}$。

若$\mathcal{M}(f,\neq g;x^-,$则其$)$存在$\tilde{}$我们在下文定义中参数化梯度流线的模空间。

$$\mathcal{M}(f,g;x^-,x^+):=\tilde{\mathcal{M}}(f,g;x^-,x^+)/\mathbb{R}. \tag{11}$$

我们要在本节证明， $\mathcal{M}(f,\ g;x^-,\ x^+)$是一个紧集。

命题 1. *(*弱紧性*)* 设 $x_\nu\in C^\infty(\mathbb{R},B_{2\delta})(\nu\in\mathbb{N})$ 是方程 *(4)* 的解，则存在一个子列 ν_j 和一条梯度流线 x，使得

$$x_{\nu_j}\xrightarrow{C^\infty_{loc}}x.$$

即对于任意 $R>0$,

$$x_{\nu_j}|_{[-R,R]}\xrightarrow{C^\infty}x|_{[-R,R]}.$$

证明。 步骤 1：由于 $x(s)\in B_{2\delta}$ 且 $B_{2\delta}$ 是紧的， $||\nabla f(x_\nu)||_g$ 一致有界。由 (4)， $||\partial_s x_\nu(x)||_g$ 一致有界，即存在 $G>0$，使得 $||\partial_s x_\nu(x)||_g\le G$。那么对于任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta_0=\epsilon/G$，当$|s_2-s_1|<\delta_0$时，

$$||x_\nu(s_2-s_1)||_g\le||x_\nu(s_\nu)||_g|s_2-s_1|\le G|s_2-s_1|<G\delta_0\le\epsilon,$$

其中 $s_1\le s_\nu\le s_2$，因此 x_ν 等度连续。由 Arzel`a-Ascoli 定理，存在一个子列 ν_j和 $x\in C^0(\mathbb{R},\ M)$,

$$x_{\nu_j}\xrightarrow{C^0_{loc}}x.$$

步骤2：归纳地，当 $x_{\nu_j}\xrightarrow{C^0_{loc}}x$ 时，我们有

$$\nabla f(x_{\nu_j})\xrightarrow{C^0_{loc}}\nabla f(x),$$

then

$$\partial_s x_{\nu_j}(s)\to\partial_s x(s),$$

i.e.

$$x_{\nu_j} \xrightarrow{C^1_{loc}} x.$$

设 $s_0 \in \mathbb{R}$，考虑坐标图 V，使得 $x(s_0) \in V$，则存在 $\epsilon > 0$，$j_0 \in \mathbb{N}$，使得 $x_{\nu_j}|_{[\epsilon_0-\epsilon,\epsilon_0+\epsilon]} \subset V$，$j \geq j_0$。对常微分方程归纳地应用链式法则

$$\partial x_{\nu_j}(s) = -\nabla f(x_{\nu_j}(s)),$$

我们得到

$$\partial_s^k x_{\nu_j} = F_k(x_{\nu_j}, \partial_s x_{\nu_j}, ..., \partial^{\nu-1} x_{\nu_j}),$$

F_ν关于 x_{ν_j}，$\partial_s x_{\nu_j}$，.....，$\partial_s^{\nu-1} x_{\nu_j}$是连续函数。根据 $x_{\nu_j} \xrightarrow{C^{\nu-1}_{loc}} x$，我们得到 $x_{\nu_j} \xrightarrow{C^{\nu}_{loc}} x$。归纳地，我们得到 $x_{\nu_j} \xrightarrow{C^{\infty}_{loc}} x$。 □

定义 1。（断裂梯度流线） $x^{\pm}$ 是函数f的临界点。从 x^- 到 x^+ 的一条断裂梯度流线是一个元组

$$y = \{x^k\}_{1 \leq k \leq n}, n \in \mathbb{N},$$

满足

(i) x^k 是一条非常值梯度流线，$1 \leq k \leq n$。

(ii)

$$\lim_{s \to -\infty} x^1(s) = x^-,$$

$$\lim_{s \to +\infty} x^k(s) = \lim_{s \to -\infty} x^{k+1}, 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\lim_{s \to +\infty} x^n(s) = x^+.$$

定义 2。（*Floer-Gromov* 收敛） x_ν 是一列梯度流线，满足

$$\lim_{s \to +\infty} x_\nu(s) = x^{\pm}.$$

$y = \{x^\nu\}_{1 \leq k \leq n}$ 是从 x^- 到 x^+的一条断裂流线。若对于 $1 \leq k \leq n$，存在一个序列 Γ^k_ν，使得 x_k *Floer-Gromov* 收敛到 y，则称 x_k *Floer-Gromov* 收敛到 y。

$$(\Gamma^k_\nu)_* x_\nu \xrightarrow{C^{\infty}_{loc}} x^k.$$

定理 1.（*Floer-Gromov* 紧致性）若 $f \in \mathcal{F}^\delta_{Morse}$，$x_\nu$ 是从 x^- 到 x^+的梯度流线序列，其中 x^- 不同于 x^+，则存在 v_j 和一条从 x^- 到 x^+ 的断裂梯度流线 $y = \{x^k\}_{1 \leq k \leq n}$，使得$x_{\nu_j}$ *Floer-Gromov* 收敛到 y。

若此定理成立，则在 (11) 中定义的 $\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+)$ 是一个紧集。为了证明此定理，我们需要下面的引理 3 和引理 4。

引理 3. 如果 $f \in \mathcal{F}^\delta_{Morse}$，那么 f 在 $B_{2\delta}$ 中只有有限个临界点。

证明. 由于 $f|_{B_\delta}$ 是莫尔斯函数，且只有 B_δ 中有临界点。根据莫尔斯引理，f 在 B_δ 中只有有限个临界点，因此 f 在 $B_{2\delta}$ 中只有有限个临界点。

□

引理 4. 如果 $f \in \mathcal{F}^\delta_{Morse}$，那么存在 $x^\pm$ 使得

$$\lim_{s\to\pm\infty} x(s) = x^\pm.$$

证明。 根据引理 3， f 的临界点个数有限，即 #临界点集f <+∞。令临界点集 $f = \{x_1, ..., x_N\}$， $N \in \mathcal{N}$。选取 x_i的邻域 U_i，使得 $U_i \cap U_j = \emptyset$。

断言 1. 存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得

$$||\nabla f(x)||_g \geq \epsilon_0,$$

对于所有 $x \in M \setminus \cup_1^N U_i$。

断言 1 的证明。由于 $B_{2\delta}$ 是紧的， $B_{2\delta}\setminus \cup_{i=1}^N U_i$ 是紧的。用反证法，假设 ϵ_0 不存在，那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在

$$y_n \in \setminus \cup_{i=1}^N U_i,$$

使得

$$||\nabla f(y_n)||_g \leq \frac{1}{n}. \tag{12}$$

$B_{2\delta}\setminus \cup_{i=1}^N U_i$ 是紧的，意味着 y_n 有一个收敛子列y_{n_j}，使得

$$\lim_{j\to n} y_{n_j} = y \in B_{2\delta}\setminus \cup_{i=1}^N U_i.$$

由（12）， $||\nabla f(y)|| = 0$, 因此 $y \in$临界点集f，这与 $y \in B_{2\delta}\setminus U_{i=1}^N U_i$矛盾。

设 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$V_i^\epsilon := \{x \in U_i | ||\nabla f(x)||_g < \epsilon\} \subset U_i. \tag{13}$$

是 x_i的一个开邻域。

断言 2. 对所有 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$，存在 $s_\nu^\epsilon \to +\infty$ 使得

$$x(s_\nu^\epsilon) \in \cup_{i=1}^N V_i^\epsilon.$$

断言 2 的证明。采用反证法，则存在 $\sigma \in \mathbb{R}$ 使得

$$x(s) \notin \cup_{i=1}^N V_i^\epsilon, \forall s \geq \sigma,$$

then

$$||\nabla f(x(s))||_g \geq \epsilon, \forall \epsilon \geq \sigma.$$

回顾能量

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} ||\partial_s x||_g^2 ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-df(x(s))\partial_s x(s)) ds \\ &= \lim_{s\to-\infty} f(x(s)) - \lim_{s\to+\infty} f(x(s)) \\ &\leq \max f - \min f. \end{aligned} \tag{14}$$

Then

$$\begin{aligned} \max f - \min f \geq E(x) &\geq \int_{\sigma}^{\infty} ||\partial_s x(s)||_g^2 ds \\ &= \int_{\sigma}^{\infty} ||\nabla f(x)||_g^2 ds \\ &\geq \int_{\sigma}^{\infty} \epsilon^2 ds \\ &= +\infty. \end{aligned} \tag{15}$$

这与能量应当有限这一事实相矛盾。

考虑 $\overline{B_{2\delta}}$中的紧子集V_i^2和 $B_{2\delta}\overline{\backslash V_i^\epsilon}$, $V_i^2 \cap M\backslash V_i^\epsilon = \emptyset$。则距离 $d(V_i^2, M\backslash V_i^\epsilon) > 0$。令

$$K_\epsilon := \min_{i=\{1,\dots,N\}} d(\overline{V_i^{\frac{\epsilon}{2}}}, M\backslash V_i^\epsilon) > 0.$$

由于

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} ||\partial_s x(s)||^2 < +\infty,$$

存在 $\sigma_\epsilon \in \mathbb{R}$，使得

$$\int_{\sigma_\epsilon}^{+\infty} ||\partial_s x(s)||_g ds \leq \frac{\epsilon K_\epsilon}{4}.$$

断言3. 存在 $i \in \{1, ..., N\}$ 使得

$$x(s) \in V_i^\epsilon, s \geq \sigma_\epsilon.$$

断言3的证明。根据断言 2，存在 $s_0 \geq \sigma_\epsilon, i \in \{1, ..., N\}$ 使得$x(s_0) \in V_i^2$. 用反证法，假设存在 $s_1 \geq \sigma_\epsilon$ 使得 $x(s_1) \notin V_i^\epsilon$.那么存在 t_0 和 t_1 使得 $\sigma_\epsilon \leq t_0 \leq t_1$, $x(t) \in V_i^\epsilon\backslash V_i^2$对于 $t \in [t_0, t_1]$ 以及 $x(t_0) \in \partial V_i^\epsilon, x(t_1) \in \partial V_i^2$或 $x(t_0) \in \partial V_i^2, x(t_1) \in \partial V_i^\epsilon$. 当 $t \in [t_0, t_1]$,

$$||\partial_s x(t)||_g = ||\nabla f(x(t))||_g \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
d(x(t_0), x(t_1)) &\leq \int_{t_0}^{t_1} ||\partial_s x(s)||_g ds \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_1} ||\partial_s x(s)||_g ds \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \int_{\sigma_\epsilon}^{\infty} ||\partial_s x(t)||_g^2 ds \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon K_\epsilon}{4} \\
&\frac{K_\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

但这与以下事实相矛盾：

$$d(x(t_0), x(t_1)) \geq K_\epsilon \geq 0.$$

现在我们可以直接由断言3证明这个引理。由 (13)，对于 x_i 的任意小邻域，都存在 $\epsilon > 0$ 使得 $V_i^\epsilon \subset V$。由断言3，存在 $i \in \{1, ..., N\}$，对于任意 $s \geq \sigma_\epsilon$，$x(s) \in V_i^\epsilon \subset V$。因此 $\lim_{s\to+\infty} x(s) = x_i$。类似地，$\lim_{s\to-\infty} x(s)$ 也成立。

□

定理 1 的证明。设 $m \in \mathbb{N}$,

(A_m) 存在一个子列 ν_j 和一条断裂梯度流线 $y_m = \{x^k\}_{1\leq k\leq l}$，满足 $l \leq m$，且存在数列 $\Gamma_j^k \in \mathbb{R}$，对于 $1 \leq k \leq l$，使得

(i) $(\Gamma_j^k)_* x_{\nu_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^k, 1 \leq k \leq l.$

(ii) $\lim\limits_{s\to-\infty} x^1(s) = x^-.$

(iii) *If* $l < m$, $\lim\limits_{s\to+\infty} x^l(s) = x^+.$

(A_1) 的证明。由引理 *3* 的证明可知，f 的临界点是孤立的。选取 x^- 的开邻域 V，使得 $V \cap$临界点集$f = \{x^-\}$。将 $x(s)$ 从 $\overline{V}$ 出发的首次离开时间定义为

$$\Gamma_\nu^1 := inf\{s \in \mathbb{R}, x_\nu(s) \notin V\}$$

Γ_ν^1是有限的，因为$\lim_{s\to-\infty} x_\nu(s) = x^-$且$\lim_{s\to+\infty} x_\nu(s) = x^+$。由命题 *1*，存在一个子列 ν_j 和一条梯度流线 x^1，使得

$$(\Gamma_{\nu_j}^1)_* x_{\nu_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^1.$$

x^1 是非常值的，因为

$$x^1(0) = \lim_{j\to+\infty} (\Gamma_{\nu_j}^1)_* x_{\nu_j} = \lim_{j\to+\infty} x_{\nu_j}(r_{\nu_j}^1) \in \partial V.$$

and

$$\partial V \cap critf = \emptyset.$$

定义 $y^1 = \{x^1\}$, $\Gamma_j^1 = \Gamma_{\nu_j}^1$, (i) 已得证。为证明 (ii)，由引理 **4**，存在 $x \in X$，使得 $\lim_{x\to-\infty} x^1(s) = x$。根据 Γ_ν^1 的定义，$(\Gamma_{\nu_j}^1)_* x_{\nu_j}(s) \in V, s \le 0$，于是 $\overline{\lim}_{s\to-\infty} x^1(s) \in$ 临界点集$f \cap V = \{x^-\}$。(ii) 已得证，且 ***(iii)*** 为空。

现在假设(A_m) 成立，我们要证明(A_{m+1})。设 $y_m = \{x^k\}_{1\le k\le l}$为在$(A_m)$中构造的断裂流线。

情形1。$\lim_{s\to+\infty} x^l(s) = x^+$。令 $y_{m+1} = y_m$，则(A_{m+1}) 成立。

情形2。假设$\lim_{s\to+\infty} x^l(s) \neq x^+$，则 $l = m$。由引理 **4**，存在$(x^m)^+ \in$临界点集f 使得

$$\lim_{s\to+\infty} x^m(s) = (x^m)^+.$$

选取$(x^m)^+$ 的开邻域 V，使得

$$\overline{V} \cap critf = \{(x^m)^+\}.$$

由$\lim_{s\to+\infty} x^m(s) = (x^m)^+$，存在 $s_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$x^m(s) \in V, \forall s \ge s_0$$

and

$$(\Gamma_j^m)_* x_{\nu_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^m.$$

则存在 $j_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$(\Gamma_j^m)_* x_{\nu_j}(s_0) \in V, j \ge j_0.$$

定义

$$R_j := \inf\{r \ge 0 : (\Gamma_j^m)_* x_{\nu_j}(s_0 + r) \notin V\}. \tag{17}$$

性质 $R : f_j$

(i) *Since* $\lim_{s\to+\infty(\Gamma_j^m)_* x_{v_j}(s)} = x^+ \notin \overline{V}$, *we have* $R_j < +\infty, j \ge j_0$.

(ii) 由于 $x^m(s) \in V$ 对于 $s \ge s_0$ 和 $(\Gamma_j^m)_* x_{v_j}(s) \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^m(s)$，我们有 $\lim_{j\to+\infty} R_j = +\infty$。定义

$$\Gamma_j^{m+1} := \Gamma_j^m + s_0 + R_j.$$

由命题 **1**，我们有

$$(\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^{m+1}.$$

断言 1。 x^{m+1} 非常值。

断言 1 的证明。

$(\Gamma_j^{m+1})_* x_\nu(0) \in \partial V$意味着 $x^{m+1}(0) \in \partial V$。根据 $\partial V \cap$ 临界点集$f = \emptyset$，我们得到x^{m+1} 不是常值。

断言 2。$\lim_{s\to+\infty} x^{m+1}(s) = (x^m)^+$。

命题 2 的证明。

根据引理 4，存在 $(x^{m+1})^- \in$ 临界点集f 使得 $\lim_{s\to-\infty} x^{m+1}(s) = (x^{m+1})^-$。现在我们用反证法证明 $(x^{m+1})^- = (x^m)^+$ 。假设 $(x^{m+1})^- \neq (x^m)^+$。由于 $V \cap$临界点集$f = \{(x^m)^+\}$，我们可以选取 $(x^{m+1})^-$ 的一个开邻域 V'，使得

$$\overline{V} \cap \overline{V'} = \emptyset. \tag{18}$$

$\lim_{s\to-\infty} x^{m+1}(s) = (x^{m+1})^-$ 这意味着存在 $s_1 < 0$ 使得

$$x^{m+1}(s) \in V', \forall s \leq s_1.$$

$(\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^{m+1}$ 这意味着存在 j_0' 使得 $\forall j \geq j_0'$,

$$(\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j}(s_1) \in V'. \tag{19}$$

R_j 的定义 *(17)* 意味着

$$(\Gamma_j^m)_* x_{v_j}(s) \in V, s \in (s_0, s_0 + R_j). \tag{20}$$

By

$$(\Gamma_j^m)_* x_\nu(s_0 + R_j) = x_v(\Gamma_j^m + s_0 + R_j) = (\Gamma_j^{m+1})_* x_\nu(0),$$

我们有

$$\begin{aligned} (\Gamma_j^m)_* x_{v_j}(s) &= x_{v_j}(s) \\ &= x_{v_j}(s + \Gamma_j^m) \\ &= x_{v_j}(s + \Gamma_j^{m+1} - s_0 - R_j) \\ &= (\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j}(s - s_0 - R_j). \end{aligned} \tag{21}$$

记 $\theta = s - s_0 - R_j$，由 *(20)* 可得

$$(\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j}(\theta) \in V, \theta \in (-R_j, 0). \tag{22}$$

由于 $\lim_{j\to+\infty} R_j = +\infty$，存在 j 使得 $-R_j \leq s_1$。由 *(19)*、*(22)* 及 *(18)*，可得

$$(\Gamma_j^{m+1})_* x_{v_j}(s_1) \in V' \cap V = \emptyset.$$

定义 $y_{m+1} = \{x^k\}_{1\leq k\leq m+1}$，则 y_{m+1} 是一条断裂梯度流线，并满足 (A_{m+1})。

由于$(x^m)^+ \neq (x^{m'})^-$ 对于 $m \neq m'$ 和#临界点集$f < +\infty$，归纳法至多经过#临界点集f 步后稳定。也就是说，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$(x^m)^+ = x^+.$$

2.4 横截性与梯度流线的模空间作为流形

我们定义从 x^- 到 x^+的 $W_{1,2}$条轨迹的希尔伯特流形 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_-,x_+}$。下面定义坐标图。

令 $x \in C^\infty(\mathbb{R},\ B_{2\delta})$ 使得 $\exists T > 0$,

$$x(s) = x^-, s \geq T,$$

$$x(s) = x^+, s \leq T.$$

$x^*TB_{2\delta}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的向量丛。选取零截面的一个开邻域 V_x，使得 $\forall r \in \mathbb{R}$，指数映射的限制

$$exp : T_{x(r)}B_{2\delta} \cap V_x \to B_{2\delta}$$

是单射的。

选取向量丛 $x^*TB_{2\delta}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个平凡化 Φ，

$$\Phi : x^*TB_{2\delta} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

记

$$U_x = \{\xi \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | (r, \xi(r) \in \Phi(V_x), \forall r \in \mathbb{R})\} \in W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

于是我们有坐标图

$$\phi_x : U_x \to \mathcal{H}, \xi \mapsto exp(\Phi^{-1}(\xi)).$$

定义一个位于 $\mathcal{H}$ 上的 L^2-丛

$$s : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$$

$x \in \mathcal{H}$ 上的纤维为

$$\mathcal{E}_x := L^2(x^*TM).$$

$s_x = \pi^{-1}(x)$ $\pi \circ s = id_{\mathcal{H}}$。我们将 $\mathcal{H}$ 视为 $\mathcal{E}$ 的零截面。定义一个依赖于黎曼度量 g 的截面

$$s_g : \mathcal{H} \to \mathcal{E}, s_g(x) = \partial_s x + \nabla_g f(x).$$

那么，截面 s_g 的零点集就是从 x_- 到 x^+ 的参数化梯度流线的模空间。即

$$s_g^{-1}(0) = \tilde{M}(f, g; x^-, x^+)$$

现在我们定义截面 s 的垂直微分。如果 $x \in \mathcal{H}$，那么该截面的微分是一个线性映射

$$ds(x) : T_x\mathcal{H} \to T_{s(x)}\mathcal{E}.$$

注意，如果 $x \in \mathcal{H}$，我们就有切空间 $T_x\mathcal{E}$ 的一个规范分解，将其分为水平子空间和垂直子空间

$$T_x\mathcal{E} = T_x\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}_x.$$

令 π： $T_x\mathcal{E} \to \mathcal{E}_x$ 表示沿着 $T_x\mathcal{H}$ 的投影，并定义垂直微分

$$Ds(x) := \pi \circ ds(s) : T_x\mathcal{H} \to \mathcal{E}_x.$$

定义 3. 如果截面 s： $\mathcal{H} \to \mathcal{E}$ 与零截面横截，记作 $s \pitchfork 0$，则称其为横截的；若 $D_s(x)$ 是满射 $\forall x \in s^{-1}(0)$。

定义 4. 如果截面 $s : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ 满足以下条件，则称其为弗雷德霍姆截面：

$$Ds(x) : T_x\mathcal{H} \to \mathcal{E}_x$$

是弗雷德霍姆算子 $\forall x \in s^{-1}(0)$。

隐函数定理给出了以下定理，参见 [12] 的附录 A。

定理 2. 若 s： $\mathcal{H} \to \mathcal{E}$ 是横截的弗雷德霍姆截面，则 $s^{-1}(0)$ 是一个流形，$x \in s^{-1}(0)$。

$$\dim_x s^{-1}(0) = \dim(\ker D_s(x)) = indD_s(x).$$

推论 1. 若 $s \pitchfork 0$，则 $s^{-1}(0) = \tilde{M}(f, g; x^-, x^+)$ 是一个流形，并且

$$dim\tilde{M}(f, g; x^-, x^+) = \mu(x^-) - \mu(x^+).$$

设 $\mathcal{M}$ 为 $B_{2\delta}$ 上赋予 C^∞-拓扑的所有黎曼度量所成的空间。若存在 $1 \leq i \leq +\infty$ 的开稠密子集$\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$ 使得 $\mathcal{U} = \cap_{i=1}^{+\infty}\mathcal{M}_i$，则称 $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ 为第二纲。由贝尔纲定理，第二纲集合是稠密的。

定理 3.（光滑横截性）存在第二纲的 $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$，使得

$$s_g \pitchfork 0, \forall g \in \mathcal{U}.$$

即 $\mathcal{U}$ 是开子集与闭子集的可数交。

设 $\mathcal{M}^k$ 为 $B_{2\delta}$ 上正则性为 C^k的黎曼度量空间。注意 $\mathcal{M}$ 不是巴拿赫流形，而只是一个Fr´echet流形。 $\mathcal{M}^k$ 是一个巴拿赫流形，我们可以直接应用萨德定理。对于所有足够大的整数 k，借助Taubes的论证，我们可以由下面的 C^k 横截性定理得到光滑横截性定理，参见 [12]中第7.7节。

定理 4。（C^k 横截性）存在属于第二纲的 $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^k$，使得

$$s_g \pitchfork 0, \forall g \in \mathcal{U}.$$

考虑截面

$$S : \mathcal{M}^k \times \mathcal{H} \to \mathcal{E}.$$

若 $(g, x) \in S^{-1}(0)$，则 x 是关于 $\nabla_g f$ 从 x^- 到 x^+ 的梯度流线。

命题 2. 假设 $g \in \mathcal{M}^k, x \in s_g^{-1}(0)$，则

$$DS(g, x) : T_g\mathcal{M} \times T_x\mathcal{H} \to \mathcal{E}_x$$

是满射。

证明。 情况 1. $x^- \neq x^+$。

$(g, x) \in S^{-1}(0)$，即 $\partial_s x + \nabla_g f(x) = 0$。对于黎曼度量 g_1， g_2 和 λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$， $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ 仍是一个黎曼度量。定义关于 $y \in B_{2\delta}$ 的线性映射

$$L_{y,g} : Sym(T_y B_{2\delta}) \to T_y B_{2\delta}, h \mapsto \frac{d}{dr}\Big|_{r=0} \nabla_{g+rh} f(y)$$

S 在 (g, x) 处的垂直微分为

$$DS(g, x) : T_g\mathcal{M}^k \oplus T_x\mathcal{H} \to \mathcal{E}_x, (h, \xi) \mapsto Ds_g(x)\xi + L_{x,g}h. \tag{23}$$

在 $\mathcal{E}_x$ 上，我们定义 L^2 内积，对于 η_1， η_2

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{x(s)}(\eta_1(s), \eta_2(s))ds, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{E}_x.$$

Let

$$\eta \in \mathrm{im}DS(g, x)^\perp = \mathrm{coker}(DS(g, x)), \tag{24}$$

我们要证明 η 消失。(24) 等价于

$$\langle DS(g, x)(h, \xi), \eta \rangle_g = 0, \forall (h, \xi) \in T_g\mathcal{M}^k \oplus T_x\mathcal{H}.$$

由 (23)，这意味着

$$\langle Ds_g(x)\xi, \eta \rangle_g, \forall \xi \in T_x\mathcal{H} \tag{25}$$

and

$$\langle L_{x,g}h, \eta \rangle_g, \forall h \in T_g\mathcal{M}^k. \tag{26}$$

(25) 意味着 η 属于 $Ds_g(x)$ 的余核， $\eta \in Ds_g^\perp$，即

$$\partial_s \xi + A(s)\xi = 0.$$

于是我们有

$$\partial_s \eta - A^T(s)\eta = 0,$$

即， η 属于 $Ds_g(x)$的伴随算子的核。因此， η 是连续的。注意,

$$g(\nabla_g f(x), \eta) = df(x)\eta. \tag{27}$$

对度量 g 求导可得

$$\frac{d}{dr}\Big|_{r=0}(g+rh)(\nabla_{g+rh}f(x),\eta)=h(\nabla_g f(x),\eta)+g(L_{x,g}h,\eta).$$

由于（27）的右端与 g 无关，我们得到

$$h(\nabla_g f(x),\eta)+g(L_{x,g}h,\eta)=0.$$

结合（26），我们得到

$$0=\langle L_{x,g}h,\eta\rangle_g=\int_{-\infty}^{+\infty}g(L_{x,g}h,\eta)ds=-\int_{-\infty}^{+\infty}h(\nabla_g f(x),\eta)ds. \tag{28}$$

用反证法，假设 $\exists s_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\eta(s_0)\neq 0$。由于 $x^-\neq x^+$, x 是一条向下流动的非常值梯度流线，我们有 $\nabla_g f(x(s))\neq 0,\ \forall s\in\mathcal{R}$。根据下面的引理 5，存在定义在 $T_{x(s_0)}M$ 上的对称双线性形式 h_0，使得

$$h_0(\nabla_g f(x(s_0),\eta s_0))>0.$$

这与（28）矛盾，因此 $\eta\equiv 0$。

情形 2。 $x^-\neq x^+$。 $\forall g\in\mathcal{M}$, $s_g^{-1}(0)=x(s)=x^-=x^+$，其中 $x(s)$ 为常值。

断言。对于所有 $g\in\mathcal{M}^k$， $Ds_g(x)$ 都是满射。（4）的梯度流方程的线性化为

$$D_A\xi=\partial_s\xi+A\xi, \tag{29}$$

其中 A是 f 和 $x^-=x^+$的赫essian 矩阵。由于经过坐标变换后 f 是莫尔斯函数，我们可以假设

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & 0\\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & a_n\end{pmatrix},a_i\neq 0,1\leq i\leq n.$$

假设 $\xi\in\ker D_A$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$，则由 (29) 可知

$$\xi_i(s)=\xi_i(0)e^{-a_i s},1\leq i\leq n.$$

由于 $\xi\in W^{1,2}$，我们有 $\xi\equiv 0$ 且 $\ker D_A=\{0\}$。因此，

$$\mathrm{im}D_A^{\perp}=\ker D_{-A}=\{0\}$$

.

□

引理 5。 假设 $v,w\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，则存在对称双线性形式 h使得 $h(v,w)>0$。

证明。 参见 [12] 中的引理 7.8。 □

由命题 2 和隐函数定理可知， $S^{-1}(0)$ 是一个巴拿赫流形。考虑映射

$$\Pi : S^{-1}(0) \to \mathcal{M}^k, (g, x) \to g. \tag{30}$$

如果微分

$$d\Pi(y) : T_y S^{-1}(0) \to T_g \mathcal{M}^k \tag{31}$$

是满射，那么对于所有 $y \in \Phi^{-1}(g)$， g 都称为 Φ 的正则值。由于 $S^{-1}(0)$ 是一个巴拿赫流形，根据萨德定理

$$\mathcal{M}^k_{reg} = \{g \in \mathcal{M}^k : g \text{ is a regular value of } \Pi\}.$$

在 $\mathcal{M}$ 中属于第二纲。

引理 6. 如果 $g \in \mathcal{M}^k_{reg}$，那么对于每个 $(g, x) \in \Pi^{-1}(g)$， Ds_g 都是满射。

证明。 $y = (g, x) \in S^{-1}(0)$,

$$T_{(g,x)} S^{-1}(0) = \{(h, \xi) \in T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H} \big| DS(g, x)(h, \xi) = 0\}.$$

由 (23),

$$T_{(g,x)} S^{-1}(0) = \{(h, \xi) \in T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H} \big| Ds_g(x)\xi = -L_{x,g} h\}. \tag{32}$$

取 $\eta \in \xi_x$。由于 $DS(g, x) : T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H} \to \mathcal{E}_x$ 是满射，存在 $\exists (h_0, \xi_0) \in T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H}$ 使得

$$DS(g, x)(h_0, \xi_0) = \eta. \tag{33}$$

对于 $g \in \mathcal{M}^k_{reg}$,

$$d\Pi(g, x) : T_{g,x} S^{-1}(0) \to T_g \mathcal{M}^k$$

是满射，则存在 $(h_1, \xi_1) \in T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H}$ 使得

$$d\Pi(g, x)(h_1, \xi_1) = h_0.$$

事实上，根据 Π 的定义 (30)， h_1 就是 h_0。即

$$h_1 = h_0 \tag{34}$$

由于 $(h_1, \xi_1) \in T_g \mathcal{M} \times T_x \mathcal{H}$，由 (32)

$$D_{s_g}(x)\xi_1 = -L_{x,g} h_1. \tag{35}$$

由（33）、（23）（34）和（35），

$$\begin{aligned} \eta &= DS(g, x)(h_0, \xi_0) \\ &= D_{s_g}(x)\xi_0 + L_{x,g} h_0 \\ &= D_{s_g}(x)\xi_0 + L_{x,g} h_1 \\ &= D_{s_g}(x)\xi_0 + D_{s_g}(x)\xi_1 \\ &= D_{s_g}(x)(\xi_0 - \xi_1) \end{aligned} \tag{36}$$

令 $\xi = \xi_0 - \xi_1 \in T_x\mathcal{H}$，则有

$$Ds_g(x)\xi = \eta,$$

即， D_{s_g} 是满射。

□

定理的证明 4。 由引理 *6* 和萨德定理可直接得到该定理。

定理的证明 3。 由定理 *4* 和 *Taubes* 的论证可得该定理。

2.5 局部莫尔斯同调的定义

将局部莫尔斯复形定义为向量空间

$$CM_k^{loc}(f) = \{\sum_{c\in \mathrm{Crit}_k(f)} a_c c | a_c \in \mathbb{Z}/2\},$$

其中，$\mathrm{Crit}_k(f)$ 表示莫尔斯指标为 k 的临界点集。

定义 5. 由 $f \in \mathcal{F}^{\delta}_{Morse}$ 和 $g \in \mathcal{M}_{reg}(f)$ 组成的元组 (f, g) 称为局部莫尔斯-斯梅尔对。

若 (f, g) 是局部莫尔斯-斯梅尔对，则由推论 1 和定理 3 可知 $\tilde{\mathcal{M}}(f, g; x^-, x^+)$ 是一个流形，并且

$$\dim\tilde{M}(f, g; x^-, x^+) = \mu(x^-) - \mu(x^+).$$

Then

$$\dim\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+) = \dim\tilde{\mathcal{M}}(f, g; x^-, x^+)/\mathbb{R} = \mu(x^-) - \mu(x^+) - 1.$$

若对 $x^-, x^+ \in \mathrm{crit}f$ 有 $\mu(x^-) = \mu(x^+)+1$，结合定理 1， $\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+)$ 是维数为 0 的紧流形，则 $\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+)$ 由有限个点组成。

定义边界算子

$$\partial : CM_k^{loc}(x_0, \delta, f, g) \to CM_{k-1}^{loc}(x_0, \delta, f, g)$$

$$\partial x^- = \sum_{\mu(x^-)=\mu(x^+)+1} \#_2\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+)x^+.$$

若 $\mu(x^-) = \mu(x^+) + 2$ 对于 x^-， $x^+ \in$临界点集f，则 $\mathcal{M}(f, g; x^-, x^+)$ 是一个维数为 1 的紧流形。注意，紧致一维

流形的唯一例子是有限个闭区间和圆的不交并，因此如果 X是一个一维紧流形，那么 $\#\partial_2 X$ 为偶数。

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 x^- \\
=&\partial\Big(\sum_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \#_2\mathcal{M}(f,g;x^-,c)c\Big) \\
=&\sum_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \#_2\mathcal{M}(f,g;x^-,c)\partial c \\
=&\sum_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \#_2\mathcal{M}(f,g;x^-,c)\sum_{\mu(x^-)=\mu(x^+)+2} \#_2\mathcal{M}(f,g;c,x^+)x^+ \\
=&\sum_{\mu(x^-)=\mu(x^+)+2}\Big(\sum_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \#_2\mathcal{M}(f,g;x^-,c)\#_2\mathcal{M}(f,g;c,x^+)\Big)x^+ \\
=&\sum_{\mu(x^-)=\mu(x^+)+2}\Big(\#_2\big(\bigcup_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \mathcal{M}(f,g;x^-,c)\times\mathcal{M}(f,g;c,x^+)\big)\Big).
\end{aligned}
$$

其中 $\bigcup_{c\in\text{临界点集}f,\ \mu(x^-)=\mu(c)+1}\mathcal{M}(f,\ g;x^-,\ c)\times\mathcal{M}(f,\ g;\ c,\ x^+)$ 是流形 $\mathcal{M}(f,\ g;x^-,\ x^+)$ 的边界。根据以上讨论，其模空间中模 2 的和为零，即

$$
\#_2\big(\bigcup_{c\in \mathrm{crit} f,\mu(x^-)=\mu(c)+1} \mathcal{M}(f,g;x^-,c)\times\mathcal{M}(f,g;c,x^+)\big)=0.
$$

因此，

$$
\partial^2=0.
$$

因此，若 $(f,\ g)$ 是一个局部莫尔斯-斯梅尔对，我们就可以在 $B_{2\delta}$ 中定义局部莫尔斯同调。

$$
HM_k^{loc}(\tilde{f},x_0,\delta,f,g)=\ker\partial_k(\tilde{f},x_0,\delta,f,g)/\mathrm{im}\ \partial_{k+1}(\tilde{f},x_0,\delta,f,g).
$$

2.6 局部莫尔斯同调的不变性

我们旨在证明，HM_*^{loc} 不依赖于莫尔斯函数 f、黎曼度量 g 和邻域 $B_{2\delta}$ 的选取。

关于 δ 的不变性是显然的。事实上，设 $f_\alpha\in\mathcal{F}_{Morse}^{\delta_1}$，$f_\beta\in\mathcal{F}_{Morse}^{\delta_2}$，并令 $\delta=\max\{\delta_1,\delta_2\}$，则有 f_α，$f_\beta\in\mathcal{F}_{Morse}^{\delta}$。此外，局部莫尔斯同调甚至不依赖于临界点邻域的形状。

定理5。若(f_α,g_α)和(f_β,g_β)是两个莫尔斯对，则存在同构

$$
\Phi_{\beta\alpha}:HM_*^{loc}(f_\alpha,g_\alpha)\to HM_*^{loc}(f_\beta,g_\beta).
$$

推论2. 贝蒂数仅依赖于流形 M 和临界点 x_0，而不依赖于莫尔斯-斯梅尔对，即

$$
dim\ HM_k^{loc}(f_\alpha,g_\alpha)=dim\ HM_k^{loc}(f_\beta,g_\beta).
$$

现在我们考虑时变函数与度量的梯度流线。受 [5], 启发，我们按如下方式构造时变函数。

$$f_s(x(s)) = \begin{cases} f_\alpha(x(s)), s \le -T, T > 0, \\ f_\beta(x(s)), s \ge T, \\ \gamma(s) f_\alpha(x(s)) + (1-\gamma(s)) f_\beta(x(s)), -T < s < T. \end{cases} \tag{38}$$

其中 $\delta \in \mathbb{R}^+$ 和

$$\gamma(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\delta}} e^{-\frac{T}{(t+T)\delta}}, -T < s \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\delta}} e^{-\frac{T}{(-t+T)\delta}}, 0 < s < T. \end{cases}$$

直接计算可知，对于所有 $t \in [-T, T]$， $\gamma'(s)$ 都存在；对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $\partial_s f_s(x(s))$ 都存在。为了证明时变梯度流线的局部行为，我们先估计 $\gamma'(s)$。

引理 7. 存在 $\delta > 0$，使得

$$\gamma'(s) \le \frac{1}{T}.$$

证明。

$$\gamma'(s) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\delta}} \frac{T}{(t+T)^2 \delta} e^{-\frac{T}{(t+T)\delta}}.$$

$$\gamma''(s) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\delta}} \frac{T}{(t+T)^4 \delta^2} e^{\frac{T}{(t+T)\delta}} (T - 2(t+T)\delta).$$

若 $\delta \le \frac{1}{2}$， $\gamma'(s)$ 在 $t = 0$ 处取得最大值 ≥ 0. $\gamma'(s)$ $h(\delta)$，且 $h(\delta)$ 在 $\delta = \frac{1}{2}$ 处取得最小值 $\frac{1}{T}$。

若 $\delta \ge \frac{1}{2}$， $\gamma'(s)$ 在 $t + T = \frac{T}{2\delta}$ 处取得最大值 $h(\delta) = \frac{2\delta}{T} e^{\frac{1}{\delta} - 2}$，由于

$$h'(\delta) = 4 e^{\frac{1}{\delta} - 2} \frac{\delta - 1}{\delta} < 0,$$

$h(\delta)$在 $\delta = 1$处取得最小值 $\frac{1}{T}$。

Therefore, let $\delta = \frac{1}{2}$, we get $\gamma'(s) \le \frac{1}{T}$. □

Let

$$g_s(x(s)) = \begin{cases} g_\alpha(x(s)), s \le -T, \\ g_\beta(x(s)), s \ge T, T > 0. \end{cases} \tag{39}$$

是一族光滑的黎曼度量。

梯度流线 $x(s)$: $\mathbb{R} \to M$ 是时变常微分方程的一个解。

$$\partial_s x(s) + \nabla_{g_s} f_s\big(x(s)\big) = 0, s \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

由定义 (38)、(39) 和 (46) 可知，当 $s \le -T$, $x(s)$ 是.....的解时，

$$\partial_s x(s) + \nabla_{g_\alpha} f_\alpha = 0, s \le -T \tag{41}$$

当 $s \geq T$, $x(s)$ 是.....的解时,

$$\partial_s x(s) + \nabla_{g_\beta} f_\beta = 0, s \geq T. \tag{42}$$

引理8。 存在 $\delta_0 > 0$，使得如果 $x(s)$ 是方程 *(46)*、*(41)* 或 *(42)* 的解，那么 $x(s) \in B_{2\delta_0}$。

命题3。 （含时流线的弱紧性）设 $x_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ $\nu \in \mathbb{N}$ 是方程 *(46)* 的解，则存在一个子列ν_j 和一条梯度流线 x，使得

$$x_{\nu_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x.$$

即对任意 $R > 0$,

$$x_{\nu_j}|_{[-R,R]} \xrightarrow{C^\infty} x|_{[-R,R]}.$$

证明。 步骤 1：序列 x_ν 是等度连续的。由 (46) 得,

$$\nabla f_s\big(x(s)\big) = \frac{T-s}{2T}\nabla f_\alpha + \frac{T+s}{2T}\nabla f_\beta + \frac{1}{2T} f_\beta - \frac{1}{2T} f_\alpha.$$

由于 f_α □

对于 $c_1 \in$ 临界点集$f_\alpha, c_2 \in$ 临界点集f_β，定义线性映射

$$\phi^{\beta\alpha} : CM_*^{loc}(f_\alpha) \to CM_*^{loc}(f_\beta), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &\phi^{\beta\alpha}(c_1) \\ &= \sum_{\mu(c_1)=\mu(c_2)} \#_2\{x(s) \big| \partial_s x(s) + \nabla_{g_s} f_s = 0, \lim_{s\to-\infty} x(s) = c_1, \lim_{s\to+\infty} x(s) = c_2\} c_2. \end{aligned} \tag{44}$$

注意

$$\mathcal{F} = \{f \in L^\infty(M, \mathbb{R}) | f|_{M\setminus B_\delta} = \tilde{f}|_{M\setminus B_\delta}\},$$

$$\mathcal{F}_{Morse} = \{f \in \mathcal{F} : f|_{B_\delta} \text{ is a Morse function}\},$$

我们知道， $\mathcal{F}_{Morse}$ 在 $\mathcal{F}$中稠密。因此存在一列 $f_\nu \in \mathcal{F}_{Morse}$， $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$$f_\nu \xrightarrow{C^\infty} \tilde{f}. \tag{45}$$

为了证明时变流线在局部的行为，我们应证明以下引理。

引理 9. 对任意 $\eta > 0$，存在 ν_0，使得对所有 ν_1、$\nu_2 > \nu_0$，我们有$\max f_{\nu_1}|_{C_{\nu_1}} - \min f_{\nu_2}|_{C_{\nu_2}} < \eta$且 $|f_{\nu_1}(x) - f_{\nu_2}(x)| < \eta$、$\forall x \in B_\delta$，其中$C_{\nu_i} = \{x \in B_\delta | \nabla f_{\nu_i(x)} = 0\}$、$i = 1, 2$。

证明。我们对该引理采用反证法，则存在 η_0，对所有ν_0，存在 ν_1，$\nu_2 \in \mathbb{N}$，使得 $\max f_{\nu_1}|_{C_{\nu_1}} - \min f_{\nu_2}|_{C_{\nu_2}} \geq \eta_0$，或者存在 $\hat{x} \in B_\delta$，使得 $|f_{\nu_1}(x_{\nu_1\nu_2}) - f_{\nu_2}(x_{\nu_1\nu_2})| \geq \eta_0$。

假设 $\max f_{\nu_1}|_{C_{\nu_1}} - \min f_{\nu_2}|_{C_{\nu_2}} > \eta_0$ 成立。由于 $\#C_{\nu_i} < \infty, i = 1, 2$，存在 $x^1_{\nu_1} \in C_{\nu_1}, x^2_{\nu_2} \in C_{\nu_2}, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}^*$，使得 $f_{\nu_1}(x^1_{\nu_1}) - f_{\nu_2}(x^2_{\nu_2}) \geq \eta_0$。由于 $x^1_{\nu_1}$，$x^2_{\nu_2}$位于有界区域 B_δ中，存在收敛子列$x^1_{\nu_{1_j}} \to x^1, x^2_{\nu_{2_k}} \to x^2, j, k \in \mathbb{N}^*$。因此，$\tilde{f}(x^1) - \tilde{f}(x^2) \geq \eta_0$，这意味着$\tilde{f}(x^1) \neq \tilde{f}(x^2)$。根据(45)，我们知道 x^1和 x^2是 $\tilde{f}$的临界点，即 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}f(x_1) = f(x_2) = 0$。这与 f 在 B_δ中只有唯一临界点的事实矛盾。

因此存在 $\hat{x} \in B_\delta$，使得 $|f_{\nu_1}(x_{\nu_1\nu_2}) - f_{\nu_2}(x_{\nu_1\nu_2})| \geq \eta$。这意味着存在一个收敛子列 $x_{\nu_1\nu_{2_j}} \to x$，$j \in \mathbb{N}^*$，从而得到一个$\tilde{}$ $\tilde{}$不可能的结果 $0 = |f(x) - f(x)| \geq \eta$。因此，引理的结论成立。

□

与引理 2 类似，对于时变梯度流线，我们有以下引理。

引理 10. 若 $x(s)$ 是时变常微分方程的梯度流线

$$\partial_s x(s) + \nabla_{g_s} f_s\big(x(s)\big) = 0, s \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

则 $x(s) \in B_{2\delta}$。

证明。假设反证法成立。首先，与引理 2 的证明类似，存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $||\nabla f_s|_{A_\delta}|| \geq \epsilon_0$。因此，我们可以证明

$$E(x) \geq \epsilon_0 \delta. \tag{47}$$

其次，

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} ||\partial_s x||_{g_s} ds \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g_s(\nabla_{g_s} f_s(x), \partial_s x) ds \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} df_s(x) \partial_s x ds \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}(f_s(x(s))) ds + \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_s f_s)(x(s)) ds \\ &= f_\alpha(c_1) - f_\beta(c_2) + \int_{-T}^{T} (\partial_s f_s)(x(s)) ds \\ &= f_\alpha(c_1) - f_\beta(c_2) + \int_{-T}^{T} \gamma'(s)(f_\beta(x(s)) - f_\alpha(x(s))) ds \end{aligned} \tag{48}$$

根据引理 7 和引理 9，我们得到

$$E(x) < 3\eta. \tag{49}$$

我们在引理 9 中固定 $\eta = \frac{1}{3}\epsilon_0\delta$，得到

$$E(x) < \epsilon_0\delta.$$

这与 (47) 矛盾，从而得到结论。

□

现在我们开始定义时变梯度流线的 Floer-Gromov 收敛。

定义 6. $\nabla_{g_s} f_s$ 的一条从 c_1 到 c_2 的断裂梯度流线是一个元组

$$y = \{x^k\}_{1\le k\le n}, n \in \mathbb{N},$$

使得

(i) $\exists k_0 \in \{1, ..., n\}$ *such that* x^{k_0} *is gradient flow line of* $\nabla_{g_s} f_s$.

(ii) x^k 对于 $1 \le k < k_0$ 是 $\nabla_{g_\alpha} f_\alpha$ 的一条非常值梯度流线，x^k 对于 $k_0 < k \le n$ 是 $\nabla_{g_\beta} f_\beta$ 的一条非常值梯度流线。

(iii) 极限$_{s\to-\infty} x^1(s) = c_1$, 极限$_{s\to\infty} x^k(s) =$ 极限$_{s\to-\infty} x^{k+1}(s)$, 极限$_{s\to\infty} x^n(s) = c_2, k \in \{1, ..., n-1\}$

通过与命题 1 类似的证明，我们得到如下命题。

命题 4. （时变梯度流线的弱紧性）设 $x_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}, B_{2\delta})$ $\nu \in \mathbb{N}$ 为方程 *(46)* 的解，则存在子列 ν_j 以及一条梯度流线 x，使得

$$x_{\nu_j} \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x.$$

即对任意 $R > 0$,

$$x_{\nu_j}|_{[-R,R]} \xrightarrow{C^\infty} x|_{[-R,R]}.$$

定义 7. （时变流线的 *Floer-Gromov* 收敛） $x_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}, B_{2\delta_0})$ 是 $\nabla_{g_s} f_s$ 的梯度流线序列，且满足

$$\lim_{s\to-\infty} x_\nu(s) = c_1, \lim_{s\to+\infty} x_\nu = c_2$$

且 $y = \{x^k\}_{1\le k\le n}$ 是 $\nabla_{g_s} f_s$ 从 c_1 到 c_2的一条断裂流线。

若对 $1 \le k \le n$ 存在序列 $\Gamma^k_\nu \in \mathbb{R}$，使得 x_v *Floer-Gromov* 收敛于 y

$$\Gamma^k_\nu x_\nu \xrightarrow{C^\infty_{loc}} x^k.$$

定理 6. （时变梯度流线的 *Floer-Gromov* 紧致性） x_ν 是 $\nabla_{g_s} f_s$ 的一列梯度流线，使得

$$\lim_{s\to-\infty} x_\nu(s) = c_1, \lim_{s\to+\infty} x_\nu = c_2.$$

那么存在一个子列 v_j 和一条从 c_1 到 c_2 的断裂梯度流线 $y = \{x^k\}_{1\le k\le n}$，使得

$$x_{v_j} \xrightarrow{Floer-Gromov} y.$$

证明。 这与时间无关情形下定理 1 的证明类似。唯一需要的额外性质是能量一致有界，我们将在下一个引理中证明这一点。

□

将 $\mathcal{N}(f_s, g_s;\ c_1, c_2)$ 定义为从 c_1 到 c_2 的 $\nabla_{g_s} f_s$ 梯度流线模空间。

命题 5. 对于一般同伦， $\mathcal{N}(f_s, g_s;\ c_1, c_2)$ 是一个流形，其维数为

$$dim\mathcal{N}(f_s, g_s; c_1, c_2) = \mu(c_1) - \mu(c_2).$$

(i) 若 $\mu(c_1) = \mu(c_2)$，则 $\mathcal{N}(f_s, g_s;\ c_1, c_2)$ 是一个有限集。

(ii) 若 $\mu(c_1) = \mu(c_2) + 1$，则 $\mathcal{N}$ 可以紧化为一个带边界的 1 维流形 $\mathcal{N}(f_s, g_s;\ c_1, c_2)$，使得

$$\begin{aligned}\partial\overline{\mathcal{N}}(f_s, g_s; c_1, c_2) = &\bigsqcup_{c\in crit(f_\alpha), \mu(c_1)-1=\mu(c)=\mu(c_2)} \mathcal{M}(f_\alpha, g_\alpha; c_1, c) \times \mathcal{N}(f_s, g_s; c, c_2) \\ &\sqcup \bigsqcup_{c\in crit(f_\beta), \mu(c_1)=\mu(c)=\mu(c_2)+1} \mathcal{N}(f_s, g_s; c_1, c) \times \mathcal{M}(f_\beta, g_\beta; c, c_2).\end{aligned} \tag{50}$$

由命题 5 的 (i) 可知，线性映射 (43) 定义良好。由 (50) 可得方程

$$0 = \phi^{\beta\alpha}\partial_\alpha + \partial_\beta\phi^{\beta\alpha}(\mod 2)$$

该方程等价于方程

$$\phi^{\beta\alpha}\partial_\alpha = \partial_\beta\phi^{\beta\alpha}(\mod 2). \tag{51}$$

即， $\phi^{\beta\alpha}$ 是从链复形（CM_*^{loc}（f_α） ∂_α）到（CM_*^{loc}（f_β） ∂_β）的链映射。

命题 6. *(43)* 中的线性映射 $\phi^{\beta\alpha}$ 诱导出线性映射

$$\Phi^{\beta\alpha} : HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\beta, g_\beta).$$

证明. 选取 $\xi \in CM_*$（f_α），使得 $\ker\partial^\alpha\xi = 0$，则由 (51) 可得

$$\partial^\beta\phi^{\beta\alpha}\xi = \phi^{\beta\alpha}\partial^\alpha\xi = 0,$$

因此 $\phi^{\beta\alpha}\xi$ 属于 ∂^β 的核，并在 H_*（f_β， g_β）中表示一个同调类。

假设 $\gamma \in \mathrm{im}\partial_\alpha$，则存在 $\eta \in CM_*^{loc}$（f_α），使得 $\partial_\alpha\eta = \gamma$。由 (51)，可得

$$\phi^{\beta\alpha}(\gamma) = \phi^{\beta\alpha}(\partial_\alpha\eta) = \partial_\beta\phi^{\beta\alpha}\eta \in \mathrm{im}\partial_\beta,$$

因此，类 $[\phi^{\beta\alpha}\xi] \in HM_*^{loc}$（$f_\beta$， g_β）不依赖于 ξ 作为其同调类 HM_*^{loc}（f_α， g_α）的表示的选取。

□

命题7。 $\Phi^{\beta\alpha}$ 与同伦(f_s, g_s)无关。

证明。 假设(f_s^0, g_s^0)和(f_s^1, g_s^1)是从(f_α, g_α)到(f_β, g_β)的两个同伦。考虑这两个同伦之间的同伦

$$(f_s^r, g_s^r), r \in [0,1].$$

令 $c_1 \in$临界点集f_α, $c_2 \in$临界点集f_β, 我们引入模空间

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2)\\ =&\{(x,r)|r \in [0,1], \partial_s x + \nabla_{g_s^r} f_s^r(x) = 0, \lim_{s\to-\infty} x(s) = c_1, \lim_{s\to\infty} x(s) = c_2.\}\end{aligned}$$

$$\dim \mathcal{N}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2) = \mu(c_1) - \mu(c_2) + 1$$

假设 $\mu(c_1) = \mu(c_2)$, 则 $\dim \mathcal{R}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2) = 1$。对于同伦的泛同伦, $\mathcal{R}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2)$ 可紧化为带边界 $\mathcal{R}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2)$ 的紧致一维流形。

存在有限个 $R \in [0,1]$, 使得

$$\begin{aligned}&\partial\bar{\mathcal{R}}(f_s^r, g_s^r; c_1, c_2)\\ =&\mathcal{R}(f_s^0, g_s^0; c_1, c_2) \sqcup \mathcal{R}(f_s^1, g_s^1; c_1, c_2)\\ &\sqcup \bigsqcup_{r_0\in R, c\in \mathrm{crit}_{k+1} f_\alpha, \mu(c)=\mu(c_1)-1=\mu(c_2)-1} \mathcal{R}(f_\alpha, g_\alpha; c_1, c) \times \mathcal{N}(f_s^{r_0}, g_s^{r_0}; c, c_2)\\ &\sqcup \bigsqcup_{r_1\in R, c\in \mathrm{crit}_{k-1} f_\beta, \mu(c)=\mu(c_1)+1=\mu(c_2)+1} \mathcal{N}(f_s^{r_1}, g_s^{r_1}; c_1, c) \times \mathcal{R}(f_\beta, g_\beta; c, c_2).\end{aligned} \tag{52}$$

对于 $c_1 \in$临界点集(f_α), 定义线性映射 T: $CM_*^{loc}(f_\alpha) \to CM_{*+1}^{loc}(f_\beta)$,

$$T(c_1) = \sum_{c_2\in \mathrm{crit}(f_\beta), \mu(c_2)=\mu(c_1)+1} \#_2\Big(\bigsqcup_{r_0\in R} \mathcal{N}(f_s^{r_0}, g_s^{r_0}; c_1, c_2)\Big) c_2.$$

由 (52), 可得

$$0 = \phi^{\beta\alpha}_{(f_s^0, g_s^0)} + \phi^{\beta\alpha}_{(f_s^1, g_s^1)} + \partial_\beta T + T\partial_\alpha,$$

然后

$$\phi_0^{\beta\alpha} = \phi_1^{\beta\alpha} + \partial_\beta T + T\partial_\alpha.$$

即, $\phi_0^{\beta\alpha}$ 与 $\phi_1^{\beta\alpha}$ 链同伦等价。因此, $\Phi_0^{\beta\alpha} = \Phi_1^{\beta\alpha}$。 □

命题8. (f_α, g_α)、(f_β, g_β)、(f_γ, g_γ) 是莫尔斯-斯梅尔对, 则 $\Phi^{\gamma\alpha} = \Phi^{\gamma\beta} \circ \Phi^{\beta\alpha}$: $HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\gamma, g_\gamma)$。

证明。 取一个介于 $(f_s^{\beta\alpha}, g_s^{\beta\alpha})$ 和 (f_α, g_α) 之间的一般同伦 (f_β, g_β), 以及一个介于 $(f_s^{\gamma\beta}, g_s^{\gamma\beta})$ 和 (f_β, g_β) 之间的同伦 (f_γ, g_γ)。存在 $T > 0$, 使得

$$f_s^{\beta\alpha} = \begin{cases} f_\alpha, s \le -T, \\ f_\beta, s \ge T. \end{cases}$$

$$f_s^{\gamma\beta}\begin{cases} f_\beta, s \le -T, \\ f_\gamma, s \ge T. \end{cases}$$

$\Phi^{\gamma\beta} \circ \Phi^{\beta\alpha}(x)$

$$= \sum_{z \in \text{临界点集} f_\gamma, \mu(z)=\mu(y)} \sum_{y \in \text{临界点集} f_\beta, \mu(y)=\mu(x)} \#_2(\mathcal{N}(f_s^{\beta\alpha}, g_s^{\beta\alpha}; x, y) \times (\mathcal{N}(f_s^{\gamma\beta}, g_s^{\gamma\beta}; y, z))z.$$

令 $u \in \mathcal{N}(f_s^{\beta\alpha},\ g_s^{\beta\alpha};\ x,\ y)$, $v \in \mathcal{N}(f_s^{\gamma\beta},\ g_s^{\gamma\beta};\ y,\ z)$, 现在我们将 u和 v粘合在一起。

$$u\#_R v : \mathbb{R} \to M,$$

$$u\#_R v(s) = \begin{cases} u(s+T+R), s \le -R, \\ u(\zeta_1(s)), -R \le s \le 0, \\ y, s = 0, \\ u(\zeta_2(s)), 0 \le s \le R, \\ v(s-T-R), s \ge R. \end{cases}$$

其中

$$\zeta_1 : [-R, 0) \to [T, +\infty)$$

and

$$\zeta_2 : (0, R] \to (-\infty, -T]$$

是光滑单调双射。

Let

$$f_s^{\gamma\alpha,R} = \begin{cases} f_{s+(T+R)}^{\beta\alpha}, s \le -R, \\ f_\beta, -R \le s \le R, \\ f_{s-(T+R)}^{\gamma\beta}, s \ge R. \end{cases}$$

那么, $u\#_R v$ 是 $s \le -R$ 和 $s \ge R$ 的 $\nabla^{\gamma\alpha,}{}_{g_s}{}^{R} f^{\gamma\alpha,}{}_{s}{}^{R}$的梯度流线, 也是 $s \in [-R, R]$的近似梯度流线。利用隐函数定理, 我们可以得到附近的一条实际梯度流线。因此

$$\phi^{\gamma\beta}_{(f_s^{\gamma\beta}, g_s^{\gamma\beta})} \circ \phi^{\beta\gamma}_{(f_s^{\beta\gamma}, g_s^{\beta\alpha})} = \phi^{\gamma\alpha}_{(f_s^{\gamma\alpha,R}, g_s^{\gamma\alpha,R})},$$

and

$$\Phi^{\gamma\beta} \circ \Phi^{\beta\alpha} = \Phi^{\gamma\alpha} : HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\gamma, g_\gamma).$$

□

命题 9. 如果 $\Phi^{\alpha\alpha}$: $HM_*^{loc}(f_\alpha,\ g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\alpha,\ g_\alpha)$, 那么 $\Phi^{\alpha\alpha} = id$。

证明。 选取一个常值同伦

$$f_s = f_\alpha,$$
$$g_s = g_\alpha, s \in \mathbb{R}.$$

Then

$$\phi^{\alpha\alpha}(x) : CM_*^{loc}(f_\alpha) \to CM_*^{loc}(f_\alpha).$$

$$\phi^{\alpha\alpha}(x) = \sum_{y\in \mathrm{crit} f_\alpha, \mu(y)=\mu(x)} \#_2 \mathcal{N}(f_\alpha, g_\alpha; x, y) y.$$

其中

$$\mathcal{N}(f_\alpha, g_\alpha; x, y) = \tilde{\mathcal{M}}(f_\alpha, f_\alpha; x, y).$$

and

$$\mathcal{M}(f_\alpha, f_\alpha; x, y) = \tilde{\mathcal{M}}(f_\alpha, f_\alpha; x, y)/\mathbb{R}$$

如果 $y \neq x$，那么

$$\dim \mathcal{M}(f_\alpha, g_\alpha; x, y) = \mu(x) - \mu(y) - 1 = -1,$$

thus

$$\mathcal{M}(f_\alpha, f_\alpha; x, y) = \emptyset$$

and

$$\tilde{\mathcal{M}}(f_\alpha, f_\alpha; x, y) = \emptyset.$$

如果 $y = x$，那么

$$\tilde{\mathcal{M}}(f_\alpha, f_\alpha; x, y) = \{x\}.$$

因此,

$$\#_2 \tilde{M}(f_\alpha, g_\alpha; x, y) = \begin{cases} 0, y \neq x, \\ 1, y = x. \end{cases}$$

结果是,

$$\phi^{\alpha\alpha} = id : CM_*^{loc}(f_\alpha) \to CM_*^{loc}(f_\alpha),$$

and

$$\Phi^{\alpha\alpha} = id : HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha).$$

□

命题10. $\Phi^{\beta\alpha}$: $HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\beta, g_\beta)$是一个同构。

证明。 由命题8可得

$$\Phi^{\alpha\beta} \circ \Phi^{\beta\alpha} = \Phi^{\alpha\alpha} = id : HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha).$$

$$\Phi^{\beta\alpha} \circ \Phi^{\alpha\beta} = \Phi^{\beta\beta} = id : HM_*^{loc}(f_\beta, g_\beta) \to HM_*^{loc}(f_\beta, g_\beta).$$

因此

$$\Phi^{\alpha\beta} : HM_*^{loc}(f_\alpha, g_\alpha) \to HM_*^{loc}(f_\beta, g_\beta)$$

是一个同构，其逆映射为

$$(\Phi^{\alpha\beta})^{-1} = \Phi^{\beta\alpha}.$$

□

定理 7。 如果扰动后的光滑函数的所有临界点仍然是孤立的，那么局部莫尔斯同调在光滑函数的小扰动下保持不变。

˜证明。假设 x_1 是光滑函数 f_1 的一个临界点，即

$$\nabla \tilde{f}_1(x_1) = 0.$$

注意到

$$\Delta(\tilde{f}, x_0) = \{\delta | x_0 \text{ is the unique critical point of } \tilde{f} \text{ in } B_{2\delta}\}.$$

˜ ˜我们选择 $\delta_1 \in \Delta(f_1, x_1)$，并将 f_1 扰动得足够小，从而得到一个光滑函数 ˜f_2 ，它在 x_1 附近有一个孤立临界点 x_2 ，使得 $x_2 \in B(x_1, 2\delta)$。令$\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ ，并且

$$N = B(x_1, 2\delta) \cap B(x_2, 2\delta).$$

˜ ˜设 (f_1, g_1) 和 (f_2, g_2) 分别是 f_1 和 f_2 的莫尔斯-斯梅尔对。由引理 2 的证明可知，局部莫尔斯同调仅取决于莫尔斯函数和邻域的性质，而不取决于光滑函数的孤立临界点；也就是说，它不取决于此处 x_1 和 x_2 的选择。根据定理5，N 上的局部莫尔斯同调不取决于莫尔斯-斯梅尔对的选择，也不取决于邻域的形状。因此，$HM^{loc}(\tilde{f}_1, g_1, x_1, \delta) = HM^{loc}(\tilde{f}_2, g_2, x_2, \delta)$。

□

根据同伦的紧致性和海涅–博雷尔定理，我们可以直接得到以下定理。

定理 8。（局部莫尔斯同调的同伦不变性）如果光滑函数的临界点在同伦过程中始终是孤立的，则局部莫尔斯同调在光滑函数的同伦下保持不变。

3 拉格朗日问题的应用

拉格朗日问题是这样一个问题：在两个固定中心之间的中点处施加一个弹性力。将两个固定中心设为$e = (-\frac{1}{2}, 0)$和 $m = (\frac{1}{2}, 0)$，其哈密顿函数为

$$H(q, p) = T(p) - U(q). \tag{53}$$

其中

$$T(p) = \frac{1}{2}|p|^2.$$

$$U : \mathbb{R}^2 \backslash \{(\pm\frac{1}{2}, 0)\} \to \mathbb{R}, q \to \frac{m_1}{\sqrt{(q_1 + \frac{1}{2})^2 + q_2^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(q_1 - \frac{1}{2})^2 + q_2^2}} + \frac{\epsilon}{2}|q|^2,$$

$p = (p_1, p_2)^T$，$q = (q_1, q_2)^T$以及 $m_1, m_2, \epsilon \in \mathbb{R}^+$。

由 [14],拉格朗日问题有五个临界点 l_i，$i = 1$，2、3、4、5，其中 l_4，l_5 根据直接计算可知是极大点。现在我们给出这些临界点的局部莫尔斯同调。

定理9. 对于满足 m_1、m_2、$\epsilon \in \mathbb{R}^+$ 的拉格朗日问题的共线临界点 l_i（$i = 1$，2、3），我们有

$$HM_*^{loc}(l_i) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, * = 1; \\ \{0\}, otherwise. \end{cases}$$

对于极大点 $l_i(i = 4,5)$，我们有

$$HM_*^{loc}(l_i) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, * = 2; \\ \{0\}, otherwise. \end{cases}$$

证明。通过在 [14]，中直接计算可知，$l_i(i = 4,5)$ 是拉格朗日问题的极大点，因此可以直接得到它们的局部莫尔斯同调。首先，我们考虑具有 $m_1 = m_2$ 和 $m > \frac{\epsilon}{16}$ 的拉格朗日问题。其哈密顿函数为

$$H_r(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{m}{\sqrt{(q_1+\frac{1}{2})^2+q_2^2}} - \frac{m}{\sqrt{(q_1-\frac{1}{2})^2+q_2^2}} - \frac{\epsilon}{2}|q|^2, \tag{54}$$

for

$$V_r(q,p) = -\frac{m}{\sqrt{(q_1+\frac{1}{2})^2+q_2^2}} - \frac{m}{\sqrt{(q_1-\frac{1}{2})^2+q_2^2}} - \frac{\epsilon}{2}|q|^2.$$

设 $l_i^r, i = 1,2,3$ 是 U_r 在 x 轴上的临界点。由于 U_r 的对称性，我们知道 $l_1 = (0,0)$。由于 U 关于 q_1 轴反射不变，且这三个共线临界点是该反射的不动点，因此我们得出

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 q_2}(l_i) = 0, i = 1,2,3.$$

通过直接计算，我们得到

$$\left.\frac{\partial^2 V_r}{\partial q_1^2}\right|_{q_2=0} = -\frac{2m_1}{|q_1+\frac{1}{2}|^3} - \frac{2m_2}{|q_1-\frac{1}{2}|^3} - \epsilon < 0, \tag{55}$$

and

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 V_r}{\partial q_2^2}\right|_{q=l_1} =& \frac{m}{|q_1+\frac{1}{2}|^3} + \frac{m}{|q_1-\frac{1}{2}|^3} - \epsilon = 16m - \epsilon > 0, \\ \left.\frac{\partial^2 V_r}{\partial q_2^2}\right|_{q=l_2} =& \frac{m\left((q_1+\frac{1}{2})^3 - (q_1-\frac{1}{2})^3\right)}{2q_1(q_1+\frac{1}{2})(q_1-\frac{1}{2})} > 0, \\ \left.\frac{\partial^2 V_r}{\partial q_2^2}\right|_{q=l_3} >& 0. \end{aligned} \tag{56}$$

因此，l_1, l_2, l_3 是 V_r的鞍点，并且我们有

$$HM_*^{loc}(l_i^r) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, * = 1; \\ \{0\}, otherwise. \end{cases}$$

我们构造一个同伦，将满足 $m \geq \epsilon$ 的等质量 m 拉格朗日问题的势能 $V_r(q, p)$，连接到任意其他势能为 $U(q,p)$的拉格朗日问题。

$$U^t(q,p) = -\frac{m + t(m_1 - m)}{\sqrt{(q_1 + \frac{1}{2})^2 + q_2^2}} - \frac{m + t(m_2 - m)}{\sqrt{(q_1 + \frac{1}{2})^2 + q_2^2}} - \frac{\epsilon}{2}|q|^2, t \in [0,1].$$

由 [14], 可知， U_r 在同伦 U^t（q， p）下始终有五个孤立临界点；再由引理 7，局部莫尔斯同调不变。因此，我们得到该结论。

□

由引理 9，我们直接得到如下结论。

推论 3. 拉格朗日问题中带有m_1、 m_2、 $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ 且位于x轴上的三个临界点，每一个要么是鞍点，要么是退化临界点。

注 1. 在 *[14]* , 中对于拉格朗日问题，利用欧拉示性数与*Poincar´e-Hopf*指标理论，我们只能证明：当x轴上的临界点全部非退化时，它们是鞍点。在本文中，利用我们所构造的局部莫尔斯同调，可以说明这三个临界点中有一些是退化的、其余是鞍点的情形是可能发生的。

4 致谢

我谨向 Urs Frauenfelder 致以诚挚的谢意，感谢他在整个研究过程中给予的宝贵指导和真知灼见。

参考文献

[1] A. Abbondandolo, P. Majer，希尔伯特空间上的 Morse 同调，《纯粹与应用数学通讯》，第 LIV 卷，0689-0760（2001）。[2] M. Audin, M. Damian，《莫尔斯理论与弗洛尔同调》。由 Reinie Ern´e[M]从法文翻译。2014。[3] A. Floer，维滕复形与无限维莫尔斯理论，《微分几何杂志》30（1989），207-221。[4] A. Floer，辛不动点与全纯球面，《数学物理通讯》120（1989），575-611。[5] U. Frauenfelder，辛化中的拉宾诺维茨作用泛函梯度流方程。《韩国数学会杂志》60(2)，375-393（2023）。

[6] U. Frauenfelder, O. Van Koert, [数学中的路径] 受限三体问题与全纯曲线。10.1007/978-3-319-72278-8, （2018）。[7] U. Frauenfelder, R. Nicholls，梯度流线的模空间与 Morse 同调[J]。2020。DOI:10.48550/arXiv.2005.10799。[8] V. L. Ginzburg，Conley 猜想。《数学年刊》172(2)，1127-1180（2010）。[9] D. Hein, U. Hryniewicz, L. Macarini，具有对称性的局部 Morse 同调的横截性及其应用。《数学杂志》293(3-4)，1513-1599（2019）。[10] A. M. Hiltebeitel，关于两个固定中心问题及其若干推广。《美国数学杂志》33(1-4)，337-362（1911）。[11] J. Lagrange，关于一个被两个固定中心吸引的物体的运动研究，《都灵杂集》4（1766-69），67-121，M´ecanique Analytique，第2版，巴黎，108-121（1811）。´D. McDuff, D. Salamon，《J-全纯曲线与辛拓扑》第2版，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2012）。[12]T. O. Rot, R. C. A. M. Vandervorst，Morse-Conley-Floer 同调，《拓扑与分析杂志》第6卷，第3期，305-338（2014）。[13] X. Tang，从环面几何的视角看拉格朗日问题。《不动点理论与应用杂志》27，70（2025）。