arXiv:2603.07033v1 [math.RA] 7 Mar 2026

代数中的华林问题

MATEJ BREŠAR 和 CONSUELO MARTÍNEZ

摘要。本文综述了群、李代数和结合代数中的各种华林型问题。

1. 引言

爱德华·华林于1770年提出的经典华林问题，询问是否对每个正整数 n，都存在一个正整数 N，使得每个正整数b 都可以表示为

$$b = a_1^n + \cdots + a_N^n$$

对于某些非负整数 a_i。1909年，大卫·希尔伯特对此问题给出了肯定的回答。

将满足条件的最小数记为 N by $g(n)$。拉格朗日四平方定理指出，$g(2) = 4$。对于许多其他 n，函数 g 的值也已为人所知，例如，$g(3) = 9$、$g(4) = 19$、$g(5) = 37$ 等等。然而，关于函数 g 并非一切都已明了；经典华林问题引出的其他一些问题也仍是数论中的活跃研究领域。

上述问题和结果启发了人们在各种代数结构中提出类似的问题。经典情形已沿着许多不同方向得到推广，尤其是将幂 a^n 的作用替换为更一般的表达式。

本文旨在综述群、李代数和结合代数中的若干华林型结果。需要指出的是，这些研究领域范围过于广泛，难以在一篇短文中全面介绍。对于这一研究方向中群论部分而言，尤其如此（例如参见 [56] 和 [24]）。我们将重点讨论与自身研究兴趣较为接近的主题。

2. 群中的华林问题

群论中的华林型问题与字的宽度 这一概念有关 w。字 $w = w(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是可数秩自由群 $F(\infty)$ 中的一个非平凡元素（$w \neq 1$）（我们也可以将该字视为秩为 n 的自由群中的元素，F_n）。

2020 数学学科分类。 20E18, 20F40, 17B30, 16R10, 16S10, 16S50, 46L05。关键词和短语。 华林问题、宽度、换位子宽度、字、多重线性字、群中的椭圆性、代数中的椭圆性、强椭圆性、pro-p 群、多项式恒等式代数、自由代数、矩阵代数、L'vov-Kaplansky 猜想。第一作者部分获得了ARIS资助项目P1-0288和J1-60025的支持。第二作者部分获得了西班牙项目MCIU-22-PID2021-123461NB-C22的支持。

给定群 G，我们可以考虑通过将 G 中的任意元素代入字 w 而得到的 G 的所有元素组成的集合：

$$w(G) = \{w(g_1, \ldots, g_n) \mid g_1, \ldots, g_n \in G\}.$$

词值集合 $w(G)$生成字子群 $\langle w(G)\rangle$。例如，若 $w = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$，则 $\langle w(G)\rangle = G'$，即 G 的导出子群。

定义 2.1。字 w 在 G 上是椭圆的，如果 $\langle w(G)\rangle = w(G)\underbrace{^{\pm 1} \cdots w(G)^{\pm 1}}_{N}$ 对于某个 N。满足上述条件的最小 N 称为 G 中 w 的宽度 。

参见 [56]，其中有关于群中的椭圆词的完整综述。

2.1. **有限群**。上述定义适用于所有群。显然，每个字在有限群中都有有限宽度。那么，为什么我们要关注有限群中的这一概念呢？我们可以探讨许多有趣的问题。我们可以提出有关有限群中词的分布的各种问题，也可以探讨是否存在适用于每个有限群，或适用于某个特定有限群类中所有群的一致上界。

注意，如果 G 是单群，那么要么 $w(G) = 1$，要么 $\langle w(G)\rangle = G$，因为字子群总是正规子群。

Ore 考察了字 $w = [x, y]$，并证明它在每个交错群 A_m中宽度为 1； $m \geq 5$，他还猜想这一结论对任意有限单群都成立。这个猜想，即*Ore* 猜想，激发了大量研究。

Saxl 和 Wilson 在 [55]（另见 [66]）中证明，任意有限单群中交换子的宽度存在一个上界。Liebeck 和 Shalev 于 2001年 将这一结果推广，证明对于任意字 w，存在一个上界 $c = c(w)$（仅取决于 w），使得任意有限单群中的 w 的宽度均不超过该上界。然而，他们没有给出这个上界的明确数值（见 [37]）。

2009年，Shalev [57] 证明了：如果一个有限单群 G 的阶足够大，则任意字 w 在 G中的宽度均有上界 3。

2010年，Liebeck、O'Brien、Shalev 和 Tiep 证明了 Ore 猜想：有限单群中的每个元素都是一个交换子 [38]。该证明使用了表示特征理论、代数几何和计算方法。

此外，Larsen、Shalev 和 Tiep [36] 证明了：对于任意字 w，在阶充分高的有限非阿贝尔单群中，任意元素都可以表示为两个属于 $w(G)$的元素之积。

2.2. **群的字椭圆性**。我们已经提到，每个字在有限群中都有有限宽度。因此，每个有限群 G 都是字椭圆的，即每个字在 G上都是椭圆的。是否存在无限的字椭圆的群？关于这个问题已有若干研究结果。

Romankov 在 [53]中证明，下列群是字椭圆的：

1. 有限生成虚幂零群。2. 虚阿贝尔群。3. 有限秩虚幂零群。

他还构造了一个可解线性群的例子，其中字 $w = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ 不是椭圆的。

N. Nikolov 和 D. Segal（[47], [48], [56]）证明，存在一个函数 $f(m, n)$，使得字 $w = x^n$ 在每个有限 m生成群上都具有宽度 $\leq f(m, n)$。

这一结果与受限伯恩赛德问题的解决结合起来，证明了 J.P. Serre 的猜想：有限生成的投射有限群的有限指数子群是闭的。

A. Jaikin Zapirain 在 [27] 证明，有限生成的 p-进解析群是字椭圆的。

正如 B. Klopsch 在 [33]所证明的，有限域上的 Nottingham群也是字椭圆的。 [45]中还证明了零特征域上的 Nottingham群也具有这一性质。

2.3. pro-p 群。本节将讨论$pro\text{-}p$ 群。首先回顾群论中的一些概念（见 [56]）。

群 G 是一个 残余有限p群，如果

$$\cap\{H \lhd G \mid |G : H| = p^k, k \geq 1\} = (1).$$

上述子群 H 可视为元素 1 的邻域基，使 G成为一个拓扑群。如果相应的拓扑是完备的，那么 G 是一个$pro\text{-}p$ 群。否则，群 G 的完备化 G_p 是一个 pro-p 群，称为 G的 $pro\text{-}p$ 完备化。

设 $F(\infty)$ 如前所述，是由可数多个生成元 x_1、x_2、x_3、.....生成的自由群。它的 pro-p 完备化 $F = F(\infty)_p$ 是由 x_1、x_2、x_3、.....生成的自由 pro-p 群。若元素$w \in F$ 仅包含有限多个生成元，则它是一个字 。

设 G 是一个 pro-p 群， $w \in F$ 是一个字。再次考虑集合 $w(G) = \{w(g_1、.....、g_n) | g_1、.....、g_n \in G\}$，并将由$w(G)$生成的闭子群记为 $\langle w(G) \rangle$。

若存在整数 $N \geq 1$，使得 $\langle w(G) \rangle = \underbrace{w(G)^{\pm 1} \cdots w(G)^{\pm 1}}_{N}$，我们就称字 $w \in F$ 在 G 上是 椭圆的 （或称在 G 上具有有限的 字宽）。这等价于说 G 中由 $w(G)$ 生成的离散子群是闭的。

2018年，文献 [43] 证明了以下结果。

定理 2.2。 设 Γ 是一个有限生成的剩余有限 p-挠群， $G = \Gamma_p$ 是它的 $pro\text{-}p$ 完备化。那么，任意字 $w \in F$ 在 G 上都是椭圆的。

请注意，Golod-Shafarevich 群、Grigorchuk 群或 Gupta-Sidki 群等重要群都是剩余有限 p 挠群。

在该结果的证明中，使用了 E. Zelmanov 的以下重要结果（见 [67]）。

定理 2.3. 设 G是满足非平凡 $pro\text{-}p$-恒等式的 $pro\text{-}p$ 群。若 G 有一个稠密有限生成挠离散子群，则 G 是有限群。

给定一个 pro-p 群 G 和 $1 \neq w \in F$，群 G 满足 pro-p 恒等式 $w = 1$，当且仅当 $w(g) = 1$。

在同一篇论文中， [43] 讨论了强椭圆性的概念。考虑一个字 $w = w(x_1, \cdots, x_n) \in F$和 G 一个 pro-p 群。选取 $n-1$ 个元素$a_1, \ldots\ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots\ldots, a_n \in G$，并固定除 x_i之外的所有变量 $x_j = a_j$。我们构造集合 $w(G, i, \alpha)$，其中 $\alpha = (a_1, \ldots\ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots\ldots, a_n)$，方法如下：

$$w(G, i, , \alpha) = \{w(a_1, \ldots, a_{i-1}, g, a_{i+1}, \ldots, a_n) \mid g \in G\}.$$

定义 2.4。字 $w \in F$ 在 G 上是强椭圆的，当且仅当存在有限子集$M_i \subset G \times \cdots \times G$、$1 \leq i \leq n$，以及集合 $\cup_{i=1}^{n} M_i = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_q\}$、$n-1$ 上的一个序

$\alpha_k \in M_{i_k}$、 $1 \leq i_k \leq n$，使得字子群 $\langle w(G)\rangle$ 等于

$$\overline{\langle w(G)\rangle} = w(G, i_1, \alpha_1)^{\pm 1} \cdots w(G, i_q, \alpha_q)^{\pm 1}.$$

显然，任何在 G 上强椭圆的字也是椭圆的。

为了证明有限生成的 pro-p 群的导出子群是闭的，P. 塞尔证明了（见 [60]），交换子在有限生成的 pro-p 群上是强椭圆的。

[43] 中提到的结果可以推广到多线性字。下面来定义这一概念。

与前面一样，令 F 为自由 pro-p 群。考虑其中心列 $F = F_1 \geq F_2 \geq \cdots$。

定义 2.5. 令 $w \in F$ 为一个字。假设 $w \in F_n \setminus F_{n+1}$。若 $w = \tilde{w}w'$，则字 w 是多线性的，其中

(i) $\tilde{w}$ 是左规范换位子的乘积

$$\tilde{w} = \prod_{\sigma \in S_n} [\cdots [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], \cdots, x_{\sigma(n)}]^{k_\sigma},$$

w这里 $k_\sigma \in Z_p$ 是 p-进整数，使得元素 $\tilde{w}F_{n+1}$ 不属于 to $pL(F)$，并且

(ii) 元素 $w' \in F_{n+1}$是 $x_1, \ldots, x_n$中交换子的收敛乘积，长度为 $\geq n+1$，且每个交换子都包含所有 n 个生成元 $x_1, \ldots, x_n$。

利用代数中广为人知的线性化过程的思想，可以证明以下结果：对于任意的字 $w \in F$，都存在一个多线性词 x，它属于由 $w(F)$ 生成的闭子群（见 [43]）。

以下定理也在 [43] 中得到证明。

定理 2.6。设 Γ 是一个有限生成的剩余有限 p-挠群，$G = \Gamma_p$ 是它的 pro-p-完备化。那么，任意多线性词 $w \in F$ 在 G 上都是强椭圆的。

3. 李代数中的华林问题

在许多情况下，李代数中的华林问题与相关李代数所对应的群中的类似问题有关。我们将重点关注这方面工作的成果，不过这并非唯一的研究方向（见 [3] 或 [35]）。例如，在 [35]中，作者研究了当前李代数的括号宽度。下面简要综述他们的结果。

若 L 是无限域 K上的李代数，则 $z \in [L,L]$ $l(z)$是最小的数 n，使得 z 可以表示为 n 个李括号之和： $z = \sum_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$。 L 的括号宽度 是长度 $l(z)$的上确界，其中 z 遍历导出代数 $[L,L]$。

如果 K 是特征零的代数闭域， L是有限维单李 K代数，且 A是交换结合含幺 K 代数，那么与 L 和 A 对应的流代数是李代数张量积 $L \otimes_K A$ ，其乘积为

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab.$$

作者证明了以下结果：

定理 3.1。 $L \otimes_K A$ 的括号宽度小于或等于 *2*。

在 $A = K[[t]]$的特殊情况下，所得结果为：

定理 3.2。 *1*）如果 $L = \mathrm{sl}_2,$ ，则 $L \otimes_K K[[t]]$ 的括号宽度等于 *1*。*2*）如果 L 属于 A_n 型或 C_n （$n \geq 2$）型，则 $L \otimes_K K[[t]]$ 的括号宽度等于 *2* .

3.1. **与 pro-p 群相关的李代数**。 群的椭圆性和强椭圆性概念可以定义于李代数。

首先，我们回顾与 pro-p 群 G 相关的李环。

考虑 G 的下中心列： $G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots$，其中 $G_{i+1} = [G, G_i]$。每个因子 G_i/G_{i+1} 都是阿贝尔群，可以视为 Z_p 上的模； Z_p 是 p-进整数环。直和

$$L(G) = \sum_{i \geq 1} G_i/G_{i+1}$$

是环 Z_p 上的李代数，其李乘积是将定义在齐次元素上的乘积线性延拓到 $L(G)$ 的任意元素上得到的，定义为

$$[aG_{i+1}, bG_{j+1}] = [a,b]G_{i+j+1},\ a \in G_i,\ b \in G_j.$$

特别地，当 $G = F$ 是自由 pro-p群时，李代数 $L(F)$ 是以自由生成元集合 $X = \{\bar{x}_i = x_i F_2 \,|\, i \geq 1\}$ 为基础集的自由李 Z_p-代数。

现在我们可以给出相应的定义。

令 $Lie\langle X\rangle$ 为以自由生成元集合 $X = \{x_i \,|\, i \geq 1\}$ 为基的自由李 Z_p 代数。设 $f(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是 $Lie\langle X\rangle$ 的一个多线性元素。对于任意李 Z_p 代数 L，我们可以考虑 $f(L) = \{f(a_1, \ldots\ldots, a_n)$ $| \, a_i \in L\}$。

定义 3.3。 若存在一个自然数 $N \geq 1$ ，使得 $f(L)$ 的 Z_p-线性张成等于……，则元素 f 在 L 上是椭圆的

$$Span(f(L)) = \underbrace{f(L) + \cdots + f(L)}_{N}.$$

定义 3.4。 若存在有限集 $M_i \subseteq L \times \cdots \times L$、 $1 \leq i \leq n$，使得 $Span(f(L))$ 是加法子群 $n-1$的和，则元素 f 在 L 上是强椭圆

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, L, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

其中 $(a_1, \ldots\ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots\ldots, a_n) \in M_i$， $1 \leq i \leq n$。

显然，如果 f 是强椭圆的，那么它就是椭圆的。

为证明定理 3.9，下一节需要以下两个结果。

定理 3.5. 设 L 是由有限集 $X \subseteq L$生成的 Z/p^kZ-李代数。假设 X 中的任意交换子都是 ad-幂零的，即相应的伴随映射是幂零的（并将 X 中的元素视为长度为 1 的交换子）。设 $f(x_1, \ldots, x_n) \in Lie\langle X\rangle$ 是自由李 Z_p-代数中的一个多线性元素，且$f \notin pLie\langle X\rangle$。那么

i) $I = Span(f(L))$ 是 L 中的一个理想，且 $|L : Span(f(L))| < \infty$,

ii) f 在 L上是强椭圆的。

现在假设 $L = L(G)$是与 pro-p 群 G 的下中心列相关联的李代数，并考虑 F，即以自由生成元集$\{x_1, x_2, \cdots\}$为基的自由 pro-p 群，以及 $L(F) = \oplus F_i/F_{i+1}$，即以上述自由生成元集$\{\bar{x}_i = x_iF_2 \mid i \geq 1\}$为基的自由李 Z_p-代数。

如果 $w = \bar{w}w' \in F$ 是一个多线性词，其中

$$\bar{w} = \prod_{\sigma\in S_n} [\cdots[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], \cdots, x_{\sigma(n)}]^{k_\sigma}, k_\sigma \in Z_p,\ w' \in F_{n+1},$$

那么 $f(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n) \in L(F)$ 是一个多线性元素，而 $Span(f(L))$ 是 L 中的一个理想 .

定理 3.6。沿用上述记号，若 $|L : Span(f(L))| < \infty$，且 f 在 L 上强椭圆，那么 $|G : \langle w(G)\rangle| < \infty$，且 w 在 G 上强椭圆。

在 [45] 中，证明了任意多重线性多项式在无中心维拉索罗代数 Vir 及其子代数 $Vir^{(k)}$, $k \geq -1$ 上都是强椭圆的，其中 Vir 以 $\{e_i \mid i \in Z\}$ 为 K-基，乘法为 $[e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}$，$K$ 是一个零特征域，且 $Vir^{(k)} = \sum_{i=k}^{\infty} Ke_i$。

3.2. **有限生成幂零代数**。下文中，K 表示特征为 $\neq 2$的域。令 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$，并令 $K\langle X\rangle$ 为以自由生成元集合 X为自由生成元的自由结合 K-代数。

显然，对于任意元素 $f \in K\langle X\rangle$ 以及任意 K-代数，我们都可以考虑 f 在任意结合代数 A上的椭圆性和强椭圆性。

在李代数 $K\langle X\rangle^{(-)}$ 中，我们可以考虑由X生成的李子代数 $Lie\langle X\rangle$ 。我们将 $Lie\langle X\rangle$ 中的元素称为李多项式。

以下结果已在 [44]中得到证明。

引理3.7。设 $\mathcal{V}$ 是结合 K-代数的一个非平凡簇。则存在非零李多重线性多项式 h，使得 $h = 0$ 属于 $\mathcal{V}$。

命题3.8。对于任意非零多线性元素 $f \in K\langle X\rangle$，空间$Spanf(K\langle X\rangle)$ 包含一个非零多重线性李多项式。

定理 3.9。设 A 是一个有限生成的幂零 K-代数。假设非零多线性元素 f 属于 $Lie\langle X\rangle$。那么 f 在 A上是强椭圆的。

定理3.10。设 A 是一个有限生成的幂零 K-代数。来自 $K\langle X\rangle$ 的任意非零多重线性元素在 A 上都是强椭圆的。

4. 结合代数中的华林问题

设 K 是一个交换含幺环，并设 $f = f(X_1, \dots, X_m)$ 是一个（非交换）多项式，即自由代数 $F\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 的一个元素。设 A 是一个结合的 K-代数。集合

$$f(A) = \{f(a_1, \dots, a_n) \,|\, a_i \in A\}$$

称为 A中 f的像。用 span $f(A)$ 表示 $f(A)$的线性张成。

借鉴上文引入的一些术语，我们给出如下定义。

定义 4.1. 若存在一个 $N \geq 1$ ，使得 span $f(A)$中的每个元素都能表示为 $f(A)$中 N个元素的线性组合，则称 f 在 A 中具有有限宽度。这样的 N 中的最小值称为 f 在 A 中的宽度，记作$W_{f,\ A}$。若 f 在 A中不具有有限宽度，则记作$W_{f,\ A} = \infty$。如果每个多项式 f 在 A中都具有有限宽度，那么

$$W_A := \sup_f W_{f,A}$$

称为 A的华林常数。

所谓中的华林问题，大致是指对刚刚引入的概念及其各种变体的研究。

备注 4.2。(a) 或许值得单独考虑一种更一般的情形：将上述定义中的“线性组合”替换为“和”。此外，也可以考虑 A只是某个代数子集的情形。这样一来，便特别涵盖了经典华林问题，其中 $f = X^n$、 $K = \mathbb{Z}$和$A = \mathbb{N} \cup \{0\}$ （$W_{f,\ A}$ 此时是引言中提到的函数 $g(n)$）。此外，它还涵盖了经典问题的各种推广，这些推广关注某些环中的元素能否表示为固定个数的 n次幂之和。不过，我们在此不讨论这一主题；这里只提及几篇可供查阅更多参考文献的论文 [32, 34, 39, 50, 61] 。

(b) 在下文提及的一些结果中，线性组合所需的系数只有 ± 1。更确切地说，某些代数元素将表示为该集合中元素的和

$$f(A) - f(A) = \{s - t \,|\, s, t \in f(A)\}.$$

不过应当补充一点：同时使用 1 和 -1 ，远比只允许 1 作为系数方便得多（见 [61]）。

4.1. 一般多项式的华林问题。 要处理任意多项式的华林问题，自然应先考虑矩阵代数。我们首先陈述 [5] 中一个相当一般的结果，它讨论了域上任意代数上的矩阵代数。在此之前，我们回顾一下：若多项式 f 满足 $f(M) = \{0\}$，则称它是代数 M 上的多项式恒等式；若 $f(M)$ 属于 M 的中心，但 f 不是 M 上的多项式恒等式，则称 f 是 M 的中心多项式。

以下是 [5, 定理 3.12]。

定理 4.3. 设 K 是一个特征$\mathrm{char}(K) \neq 2$的无限域，设 $n \geq 2$，设 f 是一个既非恒等多项式也非 $M_n(K)$的中心多项式的多项式，设 $k \geq 1$，并设 B 是一个含幺 K-代数，使得 $A = M_n(B)$ 中的每个元素都可以表示为 k 个交换子与一个中心元之和。那么 A 中的每个交换子都可以表示为 $f(A) - f(A)$中的$1936k^2 + 22k$ 个元素之和。

证明结合了 PI 理论、结合代数的李理论，以及与将交换子表示为平方为零元之和有关的结果。

数字 $1936k^2 + 22k$ 显然不是最优的。该定理的要点在于，这样一个数字确实存在，而且与矩阵的大小无关，当然，前提是 k 也与矩阵大小无关。对于各种代数 B，这一结论都成立：

(a) 如果 B 是交换代数，那么 $M_n(B)$ 中每个迹零矩阵都是至多两个交换子 [46] 之和。因此，假设 K 的特征为 0，由 $a = \left(a - \frac{\mathrm{tr}(a)}{n} 1\right) + \frac{\mathrm{tr}(a)}{n} 1$ 可知，对于每个 n，定理 4.3 中的数字 k 至多为 $\overline{2}$。因此，$A = M_n(B)$ 中的每个交换子都是 $f(A)$ 中 $1936 \cdot 4 + 22 \cdot 2 = 7788$ 个元素之和。

(b) 设 K 如定理 4.3 中所述，设 V 为K上的无穷维向量空间，并设 $A = \mathrm{End}_K(V)$。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，V^n 都同构于 V，故 A 同构于 $M_n(A)$。给定任意非常数多项式 f，我们可以选取 n，使得 f 既不是 $M_n(K)$ 的多项式恒等式，也不是其中心多项式。利用 A 中每个元素都是交换子 [46], 这一事实，可知每个元素都是来自 $f(A)$ 的 $1936 \cdot 1 + 22 \cdot 1 = 1958$ 个元素之和。由此立即可得 $W_A \leq 2 \cdot 1958 = 3916$。采用更精细的方法，只要 K 是代数闭的且特征为 0 [12, 推论 3.11]，这个四位数便可降至 14。然而，华林常数 W_A 的精确值迄今未知。

(c) 设 H 是一个无限维希尔伯特空间，并令 $A = B(H)$，即 A 是 H 上所有有界线性算子的代数。与 (b) 中一样，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $A \cong M_n(A)$。此外，A 中每个不具有 $\lambda I + K$ 形式的元素（其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 K 是紧算子）都是一个交换子 [13]。特别地，紧算子都是交换子，因此 A 中的每个元素都是一个交换子与一个中心元 λI 之和。也就是说，$k = 1$。由于 $B(H)$ 中的每个元素都是两个交换子之和 [25], ，因此华林常数 W_A 存在，且不超过某个四位数。再次强调，更复杂的方法能得到更好的结果。根据 [10, 定理 4.2], $W_A \leq 8$。此外，[12, 推论 3.12] 研究了更一般的代数 $B(X)$，其中 X 是一个巴拿赫空间，满足 $X \cong X \oplus X$。然而，W_A 的确切值尚不清楚。

现在让我们聚焦于基本且最有趣的情形：我们的代数是普通矩阵代数。

$$M_n = M_n(\mathbb{C}), \ n \geq 2.$$

将范围限制在域 $\mathbb{C}$ 上，主要是为了简化论述。我们建议感兴趣的读者查阅原始文献，了解下文所述结果对域实际上有哪些条件要求。

首先注意，$W_{f,\ M_n} = 1$ 如果 f 是 M_n的多项式恒等式或中心多项式。因此，我们可以假设 f 不是这样的多项式。于是，span $f(M_n)$只能

是由所有迹为零矩阵构成的空间 $\mathrm{sl}_n = \mathrm{sl}_n(\mathbb{C})$，或是整个代数 M_n[9]。结合这一点以及每个迹为零矩阵都是交换子 [58],这一事实，利用定理 4.3 很容易得出 $W_{M_n} < \infty$。

计算 W_{M_n} 则是另一回事。虽然定理 4.3 给出了一个四位数的上界，但早在 [5] 中就已证明 $W_{M_n} \leq 9$。[10, 11, 12] 中又有了进一步的发展。我们现在回顾这些论文中的一些结果。

让我们首先指出 $W_{M_n} \neq 1$。事实上，$W_{X^2,\ M_n} \neq 1$。的确，具有最大幂零指数的幂零矩阵 $a \in M_n$ 不是 M_n 中某个矩阵的平方。这是因为 $a = b^2$ 蕴含 $b^{2n} = a^n = 0$，从而 $b^n = 0$，导致矛盾 $a^{n-1} = b^{2n-2} = 0$。

不那么显然的是，W_{M_n} 并不总等于 2。粗略地说，$W_{f,\ M_n}$ 常常为 2，但并非对每个 f 都如此。由 PI 理论可知，若 f^2 是中心多项式而 f 不是，则 f 是 M_n 的 2-中心多项式。例如，$[X_1, X_2]$ 是 M_2 的 2-中心多项式。已知对于某些偶数 $n > 2$[30], 2-中心多项式也存在。

如下即为 [10, 定理 1.2]。

定理 4.4。假设 $n > 2$ 且存在一个2-中心多项式 f，适用于 M_n。那么$W_{f,\ M_n} \geq 3$，因此 $W_{M_n} \geq 3$。

另一方面，[10, 定理 1.1] 推出以下结论。

定理 4.5。$W_{M_n} \leq 5$ 对每个 $n \geq 2$。

计算 W_{M_n} 仍然是一个开放问题。

定理 4.4 表明，对于给定的多项式 f，当矩阵的规模相对于 f的次数较小时，可能会出现病态现象。为避免这种情况，自然需要确定$W_{f,\ M_n}$ 对于任意足够大的 n。这一问题最初由 [11] 研究，随后在 [12]中继续探讨。我们只讨论后者的论文；忽略一些技术性假设后，该文包含了更强的结果。

以下定理是 [12, 定理 3.2]的一个特例。

定理 4.6. 设 f 为非常数多项式。那么，对所有足够大的 n，都有 $\mathrm{sl}_n \subseteq f(M_n) - f(M_n)$。

证明用到了中心单代数理论、代数几何、自由分析和经典数论中的工具。值得注意的是，当 f 为非交换有理函数时，该定理在更一般的情形下仍然成立。[12], 中的基本定理（其他所有定理，包括定理 4.6，均由此推得）指出：给定一个含有 m 个变量的非常数非交换有理函数 f，对任意足够大的 n，都存在矩阵 $A_1, \ldots, A_m \in M_n$，使得矩阵 $f(A_1, \ldots, A_m)$ 有 n 个互不相同且非零的特征值。

定理 4.6 对由（某些多项式的）交换子之和构成的多项式，给出了我们问题的确定性解答。这是因为此类多项式的像包含于 sl_n。对于不属于此类的多项式，我们希望将 M_n 中的任意矩阵表示为来自 $f(M_n)$ 的两个矩阵的线性组合。现在陈述[12,定理 3.5], 它表明这「几乎」是成立的。

定理 4.7。如果多项式 f 不是交换子的和，那么当 n足够大时，M_n 中的每个非数量矩阵都是来自 $f(M_n)$的两个矩阵的线性组合。

我们不知道这个定理是否真的应该排除数量矩阵。可以立即得出的推论是，数量矩阵是来自 $f(M_n)$ 的三个矩阵的线性组合（因此，对于所有足够大的 n，$W_{f,\ M_n} \leq 3$）。不过，或许可以用 2 代替 3。

一个自然且有趣的问题，是将上述某些结果推广到有限维单代数。对于有限维除代数，目前所有问题都尚未解决。可以提出如下问题：给定一个域 K，是否存在一个常数 C，使得对于每个有限维除K-代数 A，都有 $W_A \leq C$？（这里要指出，如果 A 是任意有限维 K-代数，那么显然有 $W_A \leq$ 维$_K\, A$。）

我们在本小节最后提及论文 [15, 49]，这些论文探讨了上三角矩阵代数中的类似问题。

4.2. **L'vov-Kaplansky 猜想**。 确定矩阵代数 M_n（K）中多项式可能像的问题，据说最初由 I. Kaplansky 提出。[16], I. V. L'vov 提出了以下问题，如今这个问题通常以他和 Kaplansky 的名字命名。

L'vov-Kaplansky 猜想：若 f 是多重线性多项式， K 是域且 $n \geq 2$，则$f(M_n(K))$是一个向量空间。

使用上文引入的记号，这可以改写为

$$W_{f,M_n(K)} = 1$$

只要 f 是多重线性的。

如上文所述，span $f(A)$只能等于 $\{0\}$（若 f是多项式恒等式）、数量矩阵空间 K（若 f 是中心多项式）、零迹矩阵空间 $\mathrm{sl}_n(K)$，或整个代数 $M_n(K)$。因此，L'vov-Kaplansky 猜想还可以进一步改写为

$$f(M_n(K)) \in \{\{0\}, K, \mathrm{sl}_n(K), M_n(K)\}$$

对每个多重线性多项式 f都成立。

大约15年前，A. Kanel-Belov、S. Malev 和 L.Rowen [29]重新引起了人们对这一猜想的兴趣，他们证明了以下定理。

定理 4.8. 如果 K 是平方封闭域，且 f 是多重线性多项式，那么 $f(M_2(K))$ 是一个向量空间。

换言之，L'vov-Kaplansky 猜想对 $n = 2$ 成立（且 K 是平方封闭域）。尽管付出了诸多努力，该猜想对 $n > 2$仍未解决。关于部分解的较为完整的信息，请参阅综述论文 [31], 。

除了考虑小规模的矩阵，也可以考虑低次数的多项式。D. Vitas [64] 最近得到了以下结果（推广了 [18] 的结果，该结果涉及偶数阶矩阵）。

定理 4.9。 若 K 是特征为0的代数闭域，且 f 是次数为3 （或更低）的多重线性多项式，那么对任意 $n \geq 2$， $f(M_n(K))$ 都是向量空间。

总而言之，可以公允地说，我们距离解决 L'vov-Kaplansky 猜想还很遥远。另一方面，许多作者已成功研究了这一猜想的不同版本。以下列出一些满足如下性质的代数 A：对任意多重线性多项式 f， $f(A)$都是向量空间：

(a) $A = \mathbb{H}$，四元数代数 [42]。(b) A 是域 K [19]上的所有严格上三角矩阵构成的代数。(c) A 是无限域 K [23, 40]上的所有上三角矩阵构成的代数。(d) A 是域 K 上的一个含幺代数，具有满射内导子 [65]（其中包括外尔代数，以及代数 $\mathrm{End}_K(V)$，这里 V是一个无限维向量空间）。

其他相关结果请参见 [14, 20, 21, 28, 63]及其中的参考文献。

4.3. 交换子宽度。我们将代数 A中多项式 $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$ 的宽度称为，即

$$\gamma_A := W_{[X_1,X_2],A},$$

交换子宽度 A。

照例，我们用 $[A, A]$ 表示 A中所有交换子的线性张成。条件 $\gamma_A \le n$ 表示 $[A, A]$ 中的每个元素都可以写成至多 n 个交换子的和；若 $\gamma_A = n$，则 $[A, A]$ 中的某些元素无法写成 $n-1$ 个交换子的和。如果对每个 n， $[A, A]$ 中都有一个元素不能写成 n 个交换子的和，那么我们有 $\gamma_A = \infty$。例如，容易看出，若 A 是自由代数$K\langle X_1, X_2, \dots\rangle$（见 [7, 引理 4.4]），则这一结论成立。

1937年，K. Shoda [58] 证明，若 K 是特征为 0 的域，则 $\mathrm{sl}_n(K)$ 中的每个矩阵 $n \ge 2$ 都是一个交换子。注意，这只是换一种说法来表达$\gamma_{M_n(K)} = 1$。二十年后，A. Albert 和 B. Muckenhoupt [1] 证明，这对任意域 K都成立。最近，A. Stasinski [59] 指出，只需假设 K 是主理想整环即可。另一方面，$\gamma_{M_2(K)} = 1$ 并非对每个交换含幺环 K [54]都成立，但我们总有$\gamma_{M_n(K)} \le 2$ [46, 54]。

我们将这些结果总结如下。

定理 4.10。设 K 是一个交换含幺环。则对每个 $n \ge 2$，都有$\gamma_{M_n(K)} \le 2$，并且存在交换含幺环 K，使得$\gamma_{M_2(K)} = 2$。然而，若 K 是主理想整环（特别是，若 K 是域），则对每个 $n \ge 2$，都有$\gamma_{M_n(K)} = 1$。

单代数 A的交换子宽度是多少？Albert-Muckenhoupt定理回答了基本情形下的这一问题，即 $A = M_n(K)$，K 是一个域。要将这一结论推广到更一般的单代数，似乎并不容易。以下结果由 S. A. Amitsur 和 L. Rowen 在 1994 [2] 中证明。

定理 4.11. 若 A 是有限维单代数，则 $\gamma_A \le 2$。

目前还没有已知的满足 $\gamma_A = 2$ 的例子。因此，有限维单代数的交换子宽度是否确实为 1，仍是一个未解决的问题。 [2] 中的结果表明，在某些特殊情形下结论成立。

无限维单代数的换位子宽度并不总是 1。下面的定理综合了两个结果。第一个由 L. Makar-Limanov[41] 证明，第二个由 L. Robert [52]证明。

定理 4.12. 存在一个除代数 D （在其中心上无限维），使得 $\gamma_D = 2$。此外，存在一个单代数 A，使得 $\gamma_A = \infty$。

Makar-Limanov 的除代数 D 也满足 $D = [D, D]$。因此， D 中的每个元素都可以表示为至多两个交换子的和，而 D 中存在一些不是交换子的元素。

Robert 的单代数 A 实际上是一个 C^*-代数，因此该证明并非纯代数证明。我们所指的结果是 [52, 定理 1.4]。然而，从其表述来看， $\gamma_A = \infty$这一点可能并不明显。因此，我们来作一说明。显然，该定理意味着，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个自伴元 a，属于$[A, A]$，且不能写成 $\sum_{i=1}^{n}[x_i^*, x_i]$，其中 $x_i \in A$。注意，对于任意自伴元 s和 t，有 $i[s, t] = [x^*, x]$，其中 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + it)$。由于 A中的每个元素都可以写成 $u+iv$，其中 u， v自伴，因此 A中的每个交换子都可以写成 $[x_1^*, x_1] + [x_2^*, x_2] + i($ $[x_3^*, x_3] + [x_4^*, x_4])$，其中 $x_i \in A$，由此可得 $\gamma_A = \infty$。

从李代数理论的角度来看，Robert 的定理也很有趣。也就是说，该定理中的 C^*-代数 A 具有一个迹态，因此其中心与 $[A, A]$的交集平凡，所以李代数 $[A, A]$ 是单李代数（见 [26]），且具有无限的换位子宽度。这回答了 [17, 问题 6]。

实际上，关于 C^*-代数中的交换子之和，已有大量研究。这里只提及 C. Pop [51], 的基本结果，用我们的记号可表述如下：若 A 是一个没有迹态的含幺 C^*-代数，则 $[A, A] = A$ 且$\gamma_A < \infty$。

4.4. 交换子乘积的宽度。另一种得到系统研究的特定多项式是

$$h := [X_1, X_2][X_3, X_4],$$

两个交换子的乘积。我们记作

$$\xi_A := W_{h,A},$$

也就是说， ξ_A 是 A中 $[X_1, X_2][X_3, X_4]$ 的宽度。

不过，这项研究直到最近才刚刚开始。在开创性的论文中， [22], E. Gardella 和 H. Thiel 证明了以下定理。

定理 4.13. 设 A 是交换含幺环 K 上的含幺代数。若 A 等于其交换子理想 $A[A, A]A$，则 $A = \operatorname{span} h(A)$ 且 $\xi_A < \infty$。

特别地，该定理表明，在每个满足 $A = \operatorname{span} h(A)$ 的含幺 K-代数A 中， h 都具有有限宽度。容易看出，只要 K 是特征为 0 [61] 的域，多项式X^k 也具有同样的性质。现在可以进一步探讨其他哪些多项式 f 具有这一性质，也就是说，在每个满足 $A = \operatorname{span} f(A)$ 的含幺 K-代数 A中， f 都具有有限宽度。我们认为，这个问题在很大程度上仍未解决。

另一个显然源自定理 4.13 的问题，是确定满足 $A = A[A, A]A$ 的代数中的 ξ_A。我们将在本小节余下部分简要讨论这一问题。

很久以前，J. D. Botha 证明了，对于每个域 K 以及每个$n \geq 2$ [4, 定理 4.1]，都有 $\xi_{M_n(K)} = 1$。在 [22] 以及

后续论文 [6] 中研究了更一般的矩阵代数。我们不提及这些论文中的所有结果，只提及 [22,定理 5.4], [6, 定理 2.2]，和 [6, 定理 4.4]。我们将它们综合为一个统一的表述。

定理 4.14。若 B 是任意含幺代数，则 $\xi_{M_n(B)} \leq 2$ 对每个 $n \geq 2$ 都成立，并且存在一个含幺交换代数 B，使得 $\xi_{M_n(B)} = 2$。若 D 是无限中心的除代数，则 $\xi_{M_n(D)} = 1$ 对每个 $n \geq 2$ 都成立。

中心无限这一假设是否必要，仍是一个未解决的问题。

对于单含单位代数 A，ξ_A 可能取哪些值？这个问题由 [22] 提出，并在最近的一篇论文 [8] 中得到探讨。我们将 [8] 的主要结果归纳为一个陈述。

定理 4.15。若 A 是有限维除环，则 $\xi_A = 1$。另一方面，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个单含单位代数 A_n（相对于其中心是无限维的），使得 $\xi_{A_n} > n$。

代数 A_n 是 C^*-代数，而定理 4.14 第二个陈述的证明与定理 4.12 第二个陈述的证明一样，都依赖于 [62]中的 Villadsen 技术。 [8]中证明的结果实际上不止说明 $\xi_{A_n} > n$。它指出， A_n 的单位元 1 不能写成 $\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i, z_i]w_i$，其中某些$x_i$， y_i， z_i，$w_i \in A_n$。

E. Gardella 和 H. Thiel 证明，对于每个除代数 D [22, ， $\xi_D \leq 2$ 命题 5.8], ，并提出问题： ξ_D 是否实际上等于 1。定理 4.14 的第一个陈述在有限维情形下给出了肯定答案。一般情形下，这个问题仍未解决。

4.5. **乘法华林问题**。到目前为止，我们考察的是多项式像中的元素的线性组合。因此，我们所讨论的问题更准确的名称应是线性华林问题。在本小节中，我们将考察乘法华林问题。所谓乘法华林问题，是指将元素表示为多项式像中的元素之乘积的问题。 [12]开创了这一研究主题。我们将陈述该论文中的两个结果。

如上所述，我们用 M_n 表示 $M_n(\mathbb{C})$。我们的第一个结果是 [12,定理 4.6]。

定理 4.16。设 f 和 g 为非常数多项式。对于所有足够大的 n， M_n 中的每个非数量可逆矩阵都可以表示为一个来自 $f(M_n)$ 的矩阵与一个来自 $g(M_n)$ 的矩阵之积（即，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C} \subseteq f(M_n) \cdot g(M_n)$）。

与定理 4.7一样，我们不知道排除数量矩阵是否必要。

第二个结果是 [12, 定理 4.9]。不同于仅考虑可逆矩阵的定理 4.16，该定理考虑 M_n 中的所有矩阵（这也是因子数量大得多的原因）。

定理 4.17。如果非零多项式 f 的常数项为零，那么，对于所有足够大的 n， M_n 中的每个矩阵都可以表示为来自 $f(M_n)$的十二个矩阵之积。

可以将 f 具有零常数项这一假设，替换为较弱的假设： f 在 $\mathbb{C}$中有一个根。不过，我们不知道对 f作出任何假设

（除了要求其不是常数之外）是否是必要的。此外，我们也不知道这个命题中的“十二”可以替换成的最小数是多少。

参考文献

[1] A. A. Albert，B. Muckenhoupt，迹为零的矩阵，《Michigan 数学杂志》4（1957），1–3。[2] S. A. Amitsur，L. Rowen，约化迹为 0 的元素，《以色列数学杂志》87（1994），161–179。[3] T. Bandman，N. Gordeev，B. Kunyavskiĭ，E. Plotkin，单李代数中的方程，代数杂志355（2012），67–79。[4] J. D. Botha，具有预定零度和迹的矩阵的乘积，《线性代数及其应用》252（1997），173–198。[5] M. Brešar，非交换多项式的交换子与像，《数学进展》374（2020），107346，21页。[6] M. Brešar，E. Gardella，H. Thiel，矩阵环中的交换子乘积，《加拿大数学通报》86（2025），512–529。[7] M. Brešar，M. Grašič，J. Sánchez Ortega，零乘积决定的矩阵代数，《线性代数及其应用》430（2009），1486–1498。[8] M. Brešar，H.-Y. Jang，L. Robert，单代数中的交换子乘积，预印本，arXiv:2509.23956。[9] M. Brešar，I. Klep，非交换多项式的值、李斜理想与迹 Nullstellen 结果，《数学研究通讯》16（2009），605–626。[10] M. Brešar，P. Šemrl，矩阵代数的华林问题，《以色列数学杂志》253（2023），381–405。[11] M. Brešar，P. Šemrl，矩阵代数的华林问题，II，《伦敦数学学会通报》55（2023），1880–1889。[12] M. Brešar，J. Volčič，非交换有理函数的矩阵赋值与华林问题，《Selecta 数学》31（2025），19，16页。[13] A. Brown，C. Pearcy，算子交换子的结构，《数学年刊》82（1965），112–127。[14] L. Centrone，S. Findik，维数不超过 3 的实李代数上李多项式的像，代数杂志659（2024），344–360。[15] Q. Chen，Y. Wang，上三角矩阵代数的华林问题，《加拿大数学杂志》77（2025），1398–1424。[16]《德涅斯特笔记》：环与模理论中的未解决问题，第4版，俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所，新西伯利亚，1993。[17] A. Dubouloz，B. Kunyavskiĭ，A. Regeta，单李代数的括号宽度，《Documenta Mathematica》26（2021），1601–1627。[18] K. J. Dykema，I. Klep，关于三次多项式的 Kaplansky–Lvov 多线性猜想的若干实例，《线性代数及其应用》508（2016），272–288。[19] P. S. Fagundes，严格上三角矩阵上多重线性多项式的像，《线性代数及其应用》563（2019），287–301。[20] P. S. Fagundes，小维数上三角矩阵上多重线性分次 $*$-多项式的值，代数杂志644（2024），730–748。[21] P. S. Fagundes，P. Koshlukov，上三角矩阵代数上多重线性分次多项式的像，《加拿大数学杂志》75（2023），1540–1565。[22] E. Gardella，H. Thiel，由交换子生成的环与 C^*-代数，代数杂志662（2025），214–241。[23] I. G. Gargate，T. C. de Mello，无限域上 $n \times n$ 上三角矩阵的多重线性多项式的像，《以色列数学杂志》252（2022），337–354。[24] N. Gordeev，B. Kunyavskiĭ，E. Plotkin，特殊域上单代数群中字方程的几何（俄文），《数学科学进展》73（2018），3–52；译文见《俄罗斯数学综述》73（2018），753–796。[25] P. R. Halmos，算子交换子 II，《美国数学杂志》76（1954），191–198。[26] I. N. Herstein，单结合环中的李结构与 Jordan 结构，《美国数学学会通报》67（1961），517–531。

[27] A. Jaikin-Zapirain，有限生成的投射有限p群的字宽，《伊比利亚美洲数学杂志》24（2008），617-630。[28] A. Kanel-Belov，S. Malev，C. Pines，L. Rowen，八元数代数上多重线性多项式与半齐次多项式的像，《线性与多重线性代数》72（2024），178–187。[29] A. Kanel-Belov，S. Malev，L. Rowen，在2×2矩阵上取值的非交换多项式的像，《美国数学学会会刊》140（2012），465–478。[30] A. Kanel-Belov，S. Malev，L. Rowen，矩阵上的幂中心多项式，《纯粹与应用代数》220（2016），2164–2176。[31] A. Kanel-Belov，S. Malev，L. Rowen，R. Yavich，代数上非交换多项式的赋值：方法与问题，以及 L’vov-Kaplansky 猜想，《SIGMA 对称性、可积性与几何方法及其应用》16（2020），论文编号071，61页。[32] S. A. Katre，A. S. Garge，交换环上的矩阵作为 k次幂之和，《美国数学学会会刊》141（2013），103–113。[33] B. Klopsch，Nottingham群的自同构，代数杂志223（2000），37–56。[34] K. Kishore，A. Vasiu，S. Zhan，有限域上矩阵的华林问题，《纯粹与应用代数杂志》228（2024），107656，25页。[35] B. Kunyavskii，J. Makedonskyi，A. Regeta，当前李代数的括号宽度，代数杂志676（2025），139–149。[36] M. Larsen，A. Shalev，P. H. Tiep，有限单群的华林问题，《数学年刊》174（2011），1885–1950。[37] M. W. Liebeck，A. Shalev，单群的直径：精确界与应用，《数学年刊》154（2001），383–406。[38] M. W. Liebeck，E. A. O’Brien，A. Shalev，P. H. Tiep，Ore 猜想，《欧洲数学学会杂志》12（2010），939–1008。[39] Y.-R. Liu，T. D. Wooley，函数域中的华林问题，《纯粹与应用数学杂志》638（2010），1–67。[40] Y. Luo，Y. Wang，关于 Fagundes-Mello猜想，代数杂志592（2022），118–152。[41] L. Makar-Limanov，一个没有迹的除环实例，《交换代数》17（1989），2303–2307。[42] S. Malev，在四元数代数上取值的非交换多项式的像，《代数及其应用杂志》20（2021），2150074，8页。[43] C. Martínez，字的椭圆性，代数杂志500（2018），242–252。[44] C. Martínez，有限生成诣零代数上多重线性字的强椭圆性，预印本（2026）。[45] J. Martínez，C. Martínez，Nottingham群及相关李代数中的字宽，代数杂志574（2021），316–326。[46] Z. Mesyan，换位子环，《澳大利亚数学学会通报》74（2006），279–288。[47] N. Nikolov，D. Segal，关于有限生成的投射有限群 I，II，《数学年刊》165（2007），171–273。[48] N. Nikolov，D. Segal，有限群中的幂，《群、几何与动力系统》5（2011），501–507。[49] S. Panja，S. Prasad，上三角矩阵代数上多项式的像与华林型问题，代数杂志631（2023），148–193。[50] S. Panja，P. Saini，A. Singh，矩阵上多项式映射的满射性，《欧洲数学杂志》11（2025），62，22页。[51] C. Pop，交换子的有限和，《美国数学学会会刊》130（2002），3039–3041。[52] L. Robert，核维数与交换子之和，《印第安纳大学数学杂志》64（2015），559–576。[53] V. Romankov，可解群中字子群的宽度，《代数与逻辑》21（1982），60-72。[54] M. Rosset，S. Rosset，不是交换子的迹零元素，《交换代数》28（2000），3059–3072。[55] J. Saxl，J. S. Wilson，关于有限群的幂的注记，《剑桥哲学学会数学汇刊》122（1997），91–94。[56] D. Segal，字：群中字宽札记，剑桥大学出版社，2009。[57] A. Shalev，字映射、共轭类与一个非交换型华林问题，《数学年刊》170（2009），1383–1416。

[58] K. Shoda, 《关于矩阵的一些定理》, 日本数学杂志**13** (1937年), 361–365。[59] A. Stasinski, 《主理想环上矩阵的相似与交换子》, 美国数学会汇刊**368** (2016), 2333–2354。[60] J. P. Serre, 《伽罗瓦上同调》, 施普林格出版社, 1964。[61] L. N. Vaserstein, 《域上的代数的华林问题》, 数论杂志 **26** (1987), 286–298。[62] J. Villadsen, 《关于简单 C^*代数的稳定秩》, 美国数学会杂志**12** (1999), 1091–1102。[63] D. Vitas, 《有限矩阵代数中的多重线性多项式的像包含迹为零矩阵》线性代数及其应用 **626** (2021), 221–233。[64] D. Vitas, 《三次多项式的 L'vov-Kaplansky 猜想》, 线性代数及其应用, 即将出版。[65] D. Vitas, 《多重线性多项式在具有满射内导子的代数上是满射的》, 代数杂志**565** (2021), 255–281。[66] J. Wilson, 《一阶群论》, 载于无限群 *1994* (拉韦洛), 德格鲁伊特, 柏林, 1996, 第301–314页。[67] E. Zelmanov, 《李代数与满足恒等式的挠群》, J. *Comb. Algebra* **1** (2017), 289–340。

数学与物理学院, 卢布尔雅那大学 & 自然科学与数学学院, 马里博尔大学 & IMFM, 斯洛文尼亚卢布尔雅那电子邮箱地址: matej.bresar@fmf.uni-lj.si

数学系, 奥维耶多大学, 西班牙电子邮箱地址: cmartinez@uniovi.es