arXiv:2603.07034v1 [math.CV] 7 Mar 2026

核中含双复 Prabhakar 函数的分数阶微分积分算子及其应用

URVASHI PUROHIT SHARMA [1], RITU AGARWAL [2*]1科学与人文系，Kalaniketan 理工学院，贾巴尔普尔-482001，印度2数学系，马拉维亚国家理工学院，斋浦尔-302017，印度
电子邮箱： [1]*urvashius100@gmail.com*, [2] *ragarwal.maths@mnit.ac.in*

摘要

本文引入双复数 Prabhakar 导数，将分数阶微积分推广至四维双复数空间。利用含双复 Prabhakar 函数的广义核，我们构造了双复数 Prabhakar 导数，并证明了包括线性性、复合规则以及与 Riemann-Liouville 算子和 Caputo 算子之间联系在内的基本运算性质。我们进一步研究分数阶算子如何作用于双复 Prabhakar 函数本身，并建立积分表示与变换公式。

本研究为在双复数域中对具有记忆效应和多维耦合的复杂现象进行建模提供了严谨的理论基础。双复数丰富的代数结构与 Prabhakar 核的灵活性相结合，构成了一个适用于各类科学与工程学科的多功能框架。

关键词： 双复数，Prabhakar函数，Mittag-Leffler 函数，分数阶微积分，双复拉普拉斯变换。

MSC 2020 分类： 33E12, 30G35, 26A33, 34A08. *通讯作者 [通讯请联系 ragarwal.maths@mnit.ac.in]

1 引言

双复数分数阶微积分将经典分数阶微积分 [17] 扩展至四维双复空间，兼具分数阶算子（用于描述记忆效应和非局部动力学）的优势，以及交换双复数分析 [24] 更丰富的结构。该框架在多个领域具有广泛的应用前景：电磁理论（各向异性介质中的分数阶麦克斯韦方程 [19]）、热传递与反常扩散、种群动力学（具有遗传效应的耦合捕食者—猎物模型）、含耦合分数阶元件 [34], 的电路分析，以及量子力学（时间分数阶薛定谔方程）。Prabhakar导数以三参数Mittag-Leffler函数 [23], 为特征；与 Riemann-Liouville 或 Caputo 算子相比，它凭借一个额外参数带来更高的灵活性，从而更有利于实验数据拟合并具有更好的正则化性质。尽管双复数 Riemann-Liouville 算子 [12], 近期取得了进展，双复数 Prabhakar 导数仍未得到探索，这促使本研究建立其理论基础，并考察其在具有记忆效应和非局部相互作用的耦合多维系统中的应用。

双复数由 Corrado Segre 于 19 世纪末提出 [30]，是对超复数系进行更广泛研究的一部分。双复数构成实数域上的交换代数，与非交换的四元数不同。双复数为处理涉及多个复变量的问题提供了自然框架，同时保持交换性，因此是普通复数的一种优雅推广。人们发现了双复数的许多性质。近年来，双复数的各种代数和几何特征及其应用一直是研究的重点（例如参见 [20, 27, 28]）。

1.1 双复数

Segre [30] 将双复数集合定义为：

定义 1.1 (双复数**)。** 用实数分量表示时，双复数集合定义为

$$\mathbb{T} = \{\xi : \xi = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + j x_3 \mid x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\ \in \mathbb{R}\}, \tag{1}$$

用复数表示，可写为

$$\mathbb{T} = \{\xi : \xi = z_1 + i_2 z_2 \mid z_1,\ z_2\ \in \mathbb{C}\}. \tag{2}$$

我们采用以下记号： $i_1^2=-1$， $i_2^2=-1$， $j=i_1i_2$， $j^2=1$, $x_0=\mathrm{Re}(\xi)$ $x_1=\mathrm{Im}_{i_1}(\xi)$ $x_2=\mathrm{Im}_{i_2}(\xi)$ $x_3=\mathrm{Im}_{j}(\xi)$。其中， i_1， i_2 是虚数单位，而 j 是双曲单位。

$\mathbb{T}$，两个非平凡的幂等零因子记为 e_1 和 e_2，定义如下 [24]:

$e_1=\frac{1+i_1i_2}{2}=\frac{1+j}{2}$， $e_2=\frac{1-i_1i_2}{2}=\frac{1-j}{2}$、 $e_1.e_2=0$、 $e_1+e_2=1$ 和$e_1^2=e_1$， $e_2^2=e_2$。

根据 e_1 和 e_2，每个元素 $\xi\in\mathbb{T}$ 都有唯一的幂等表示，具体如下:

$$\xi=z_1+i_2z_2=\xi_1e_1+\xi_2e_2, \tag{3}$$

其中 $\xi_1=(z_1-i_1z_2)$ 且 $\xi_2=(z_1+i_1z_2)$。

定义 1.2（双复数偏序）。对于 ξ、$\eta\in T$，其幂等表示分别为 $\xi=\xi_1e_1+\xi_2e_2$ 和 $\eta=\eta_1e_1+\eta_2e_2$，记作

$$\xi\prec\eta \quad \textit{if and only if} \quad |\xi_1|<|\eta_1| \textit{ and } |\xi_2|<|\eta_2|.$$

双复数的投影映射 $P_1:\ \mathbb{T}\to T_1\subseteq\mathbb{C}$， $P_2:\ \mathbb{T}\to T_2\subseteq\mathbb{C}$ 定义如下（例如，参见 [27]）：

$$P_1(\xi)=\xi_1\in T_1 \text{ and } P_2(\xi)=\xi_2\in T_2, \tag{4}$$

其中

$$T_1=\{\xi_1=z_1-i_1z_2\,|z_1,z_2\in\mathbb{C}\} \text{ and } T_2=\{\xi_2=z_1+i_1z_2\,|z_1,z_2\in\mathbb{C}\}. \tag{5}$$

现有文献仅涉及双复数的基本性质。其他性质可见 [20, 24, 25, 28]。

许多作者研究了 Mittag-Leffler 函数（ML函数）的各种推广、其性质以及该函数在分数阶微积分领域中的应用。这些函数的形成源于分数阶微积分的发展，以及新形式的积分和微分方程的求解 [11]。

近年来，研究者致力于将 Mittag-Leffler 型函数及其应用拓展至双复空间。Agarwal 等人引入了双复单参数ML函数，其定义为

$$\mathbb{E}_m(\zeta)=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{\zeta^u}{\Gamma_2(mu+1)}, \tag{6}$$

其中， $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$。这里， Γ_2 是双复数伽马函数 [14]。

Sharma等人定义的双复数二参数ML函数 [33]

$$\mathbb{E}_{m,n}(\zeta) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\zeta^u}{\Gamma_2(mu+n)}, \tag{7}$$

其中 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$。

Bakhet等人定义的双复数单参数k-ML函数 [7]如下

$$\mathbb{E}_{k,m}(\zeta) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\zeta^u}{\Gamma_{2,k}(mu+1)}, \quad \zeta, m \in \mathbb{T}, \tag{8}$$

其中 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$。这里 $\Gamma_{2,k}$ 是k-双复数伽马函数 [38] ，定义为

$$\Gamma_{2,k}(\zeta) = \int_{\Upsilon} e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\zeta-1} dt, \tag{9}$$

其中 $\Upsilon = (\gamma_1, \gamma_2)$,其中 $\gamma_1 \equiv \gamma_1(t_1)$ $\gamma_2 \equiv \gamma_2(t_2)$ 且 $t_1 : 0$ 到 ∞, $t_2 : 0$ 到 ∞.将 $k = 1$ 代入方程（9），得到Goyal等人定义的双复数伽马函数 [14]。

Bakhet等人 [6]引入了二参数k-ML函数，如下所示

$$\mathbb{E}_{k,m,n}(\zeta) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\zeta^u}{\Gamma_{2,k}(mu+n)}, \quad \zeta, m, n \in \mathbb{T},\ k \in \mathbb{R}^+, \tag{10}$$

其中 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$。他们在双复数框架下，为该扩展函数建立了相应的 k-Riemann–Liouville 分数阶微积分。作为特例，我们可以得到 $\mathbb{E}_{k,\ m,\ 1}(\zeta) = \mathbb{E}_{k,\ m}(\zeta)$ ， $\mathbb{E}_{1,\ m,\ n}(\zeta) = \mathbb{E}_{m,\ n}(\zeta)$ 和 $\mathbb{E}_{1,\ m,\ 1}(\zeta) = \mathbb{E}_m(\zeta)$ 。

在论文 [6, 7], 中，Bakhet等人通过双复数k-伽马函数引入了一种新的变形参数 k，从而将早期的双复数 Mittag-Leffler 函数推广为一个可扩展解析族。他们的工作自然延续了 Sharma等人 [33]和 Agrawal 等人[3], 提出的公式；后两者分别利用双复数伽马函数，在双复数域中定义了单参数和双参数Mittag-Leffler函数，由此形成了双复数分数阶模型层级。

在一篇近期文章中，Sharma等人 [32] 使用双复数伽马函数 [14]引入了双复 Prabhakar 函数。他们还讨论了该函数的性质，并推导了

它的双复拉普拉斯变换和梅林变换。双复三参数 ML 函数（Prabhakar函数）定义为

$$\mathbb{E}_{m,n}^{l}(\zeta) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(l)_u}{u!\Gamma_2(mu+n)}\zeta^u, \tag{11}$$

其中 $\zeta,\ m,\ n,\ l \in \mathbb{T},\quad \zeta = z_1 + i_2 z_2 = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2,\quad m = m_1 e_1 + m_2 e_2,\quad n = n_1 e_1 + n_2 e_2$, 其中 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)\quad |\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$。这里 $(l)_u$ 是双复 Pochhammer 符号，定义为 [14]

$$(\ell)_u = \ell(\ell+1)(\ell+2)\cdots(\ell+u-1) = \frac{\Gamma_2(\ell+u)}{\Gamma_2(\ell)}.$$

Kumar 等人 [18] 提出了双复拉普拉斯变换及其基本性质。这些发现具有很大的信号处理应用潜力。这些结果在信号处理领域具有很高的适用性。

定义 1.3 (双复拉普拉斯变换)。设 $f(t)$ 是一个指数阶为 $M \in \mathbb{R}$ 的双复值函数。那么，对于 $t \geq 0,\quad f(t)$ 的拉普拉斯变换定义为：

$$\mathcal{L}(f(t);\xi) = \tilde{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\xi t}dt. \tag{12}$$

这里 $\tilde{f}(\xi)$ 存在且对所有 $\xi \in \Omega$ 均收敛，其中

$$\Omega = \{\xi : H_\rho(\xi)\ \ represents\ a\ Right\ half\ plane\ a_0 > M + |a_3|\},$$

以及 $\xi = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 j.$

有关双复拉普拉斯变换的更多详细信息，请参见 [1, 18]。Agrawal 等人 [1]讨论了拉普拉斯变换的卷积定理，内容如下

定理 1.4。设 $\mathcal{L}((f(t);\ \xi) = f(\xi)$ 以及 $\mathcal{L}((g(t);\ \xi) = \tilde{g}(\xi)$ 满足 $\mathrm{Re}(\xi) > M + |\mathrm{Im}_j(\xi)|$

其中 $M = \max(M_1, M_2)$ 和 $f(t)$ 以及 $g(t)$ 分别为指数阶 M_1 和 M_2。那么

$$\mathcal{L}((f * g)(t);\xi) = \tilde{f}\ \tilde{g}.$$

Prabhakar函数的双复拉普拉斯变换为 [32]

$$\mathcal{L}(t^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}(rt^{m});\xi)=\int_0^{\infty}e^{-\xi t}\mathbb{E}^{l}_{m,n}(rt^{m})t^{n-1}dt=\frac{\xi^{ml-n}}{(\xi^{m}-r)^{l}}, \tag{13}$$

其中 $|\mathrm{Im}(n)|<\mathrm{Re}(n)$ $|\mathrm{Im}(\xi)|<\mathrm{Re}(\xi)$ $|r\xi^{-m}|_j\prec 1.$

近年来，分数阶微积分中积分与微分算子的一般化一直是众多研究的主题。随着分数阶微积分不断展现其在现实世界现象建模中的效用——从反常扩散到长记忆时间序列——本文提出的双复扩展为这样一类系统提供了自然的推广：多个耦合变量通过非局部、依赖记忆的关系相互作用。该理论的未来发展有望揭示新的数学结构与实际应用，搭建经典分析、分数阶微积分和复杂系统科学之间的桥梁。

双复数 Prabhakar 导数的引入为分数阶微积分开启了新篇章。双复数丰富的代数结构与 Prabhakar 核的灵活性相结合，为众多科学与工程学科提供了适用性广泛的框架。

Prabhakar导数是分数阶微积分中的一种广义算子，是对经典Riemann–Liouville积分与Caputo导数的扩展 [16]。它以Prabhakar函数为基础，可用于描述具有记忆和遗传特性的系统。文献中还介绍了Riemann-Liouville积分、导数、Caputo分数阶导数以及其他分数阶积分与导数的定义（例如参见 [17, 21, 29]）。

本文研究了涉及双复 Prabhakar 函数 [32]的分数阶微积分。我们推导了 Prabhakar 积分算子、Prabhakar导数和正则化 Prabhakar 导数的双复扩展及其性质。我们得到了正则化 Prabhakar 分数阶导数的拉普拉斯变换，它为处理分数阶初值问题提供了强有力且系统的工具。该变换极大地简化了对记忆依赖过程的分析，并使复杂的分数阶微分方程能够得到有效处理。利用这一方法，我们求解了涉及 Prabhakar型分数阶算子的柯西问题，展示了该方法的适用性与效率。这些结果凸显了正则化 Prabhakar 导数在刻画具有非局部记忆效应的一大类分数阶动力系统方面的效用。

2 双复 Prabhakar 函数的分数阶微积分

在此，我们研究与双复 Prabhakar 函数相关联的双复 Riemann–Liouville 分数阶积分$\mathbb{I}_{a+}^{\alpha}$ 和导数 $\mathbb{D}_{a+}^{\alpha}$ [12, 13]的复合。

定理 2.1. 设 $a \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$，并设 α、m、n、l、$r \in \mathbb{T}$，且 $|\mathrm{Imj}(\alpha)| < \mathrm{Re}(\alpha)$ $|\mathrm{Imj}(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Imj}(n)| < \mathrm{Re}(n)$。则对 $x > a$，下列公式成立：

1. $\mathbb{I}_{a+}^{\alpha}\big[(t-a)^{n-1}\mathbb{E}_{m,n}^{l}\big(r(t-a)^{m}\big)\big](x) = (x-a)^{n+\alpha-1}\mathbb{E}_{m,n+\alpha}^{l}\big(r(x-a)^{m}\big).$
2. $\mathbb{D}_{a+}^{\alpha}\big[(t-a)^{n-1}\mathbb{E}_{m,n}^{l}\big(r(t-a)^{m}\big)\big](x) = (x-a)^{n-\alpha-1}\mathbb{E}_{m,n-\alpha}^{l}\big(r(x-a)^{m}\big).$

证明。(1). 由 [16, 定理 3，方程 (3.1)] 复 Prabhakar 函数对 Re(α_i) > 0， Re(m_i) > 0， Re(n_i) > 0 成立，(i=1,2)

$$\big(\mathbb{I}_{a+}^{\alpha_i}\big[(t-a)^{n_i-1}\mathbb{E}_{m_i,n_i}^{l_i}\big(r_i(t-a)^{m_i}\big)\big]\big)(x) = (x-a)^{n_i+\alpha_i-1}\mathbb{E}_{m_i,n_i+\alpha_i}^{l_i}\big(r_i(x-a)^{m_i}\big) \tag{14}$$

利用幂等表示，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha}\big[(t-a)^{n-1}\mathbb{E}_{m,n}^{l}\big(r(t-a)^{m}\big)\big](x) =& \big(\mathbb{I}_{a+}^{\alpha_1}\big[(t-a)^{n_1-1}\mathbb{E}_{m_1,n_1}^{l_1}\big(r_1(t-a)^{m_1}\big)\big]\big)(x)e_1\\ &+\big(\mathbb{I}_{a+}^{\alpha_2}\big[(t-a)^{n_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2}^{l_2}\big(r_2(t-a)^{m_2}\big)\big]\big)(x)e_2\\ =&(x-a)^{n_1+\alpha_1-1}\mathbb{E}_{m_1,n_1+\alpha_1}^{l_1}\big(r_1(x-a)^{m_1}\big)e_1\\ &+(x-a)^{n_2+\alpha_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2+\alpha_2}^{l_2}\big(r_2(x-a)^{m_2}\big)e_2\\ =&(x-a)^{n+\alpha-1}\mathbb{E}_{m,n+\alpha}^{l}\big(r(x-a)^{m}\big).\end{aligned} \tag{15}$$

(2). 由 [16, 定理 3，方程 (3.2)] 复 Prabhakar 函数在 Re(α_i) > 0， Re(m_i) > 0， Re(n_i) > 0 时成立，(i=1,2)

$$\mathbb{D}_{a+}^{\alpha_i}\big[(t-a)^{n_i-1}\mathbb{E}_{m_i,n_i}^{l_i}\big(r_i(t-a)^{m_i}\big)\big](x) = (x-a)^{n_i-\alpha_i-1}\mathbb{E}_{m_i,n_i-\alpha_i}^{l_i}\big(r_i(x-a)^{m_i}\big) \tag{16}$$

通过使用幂等表示

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha}\big[(t-a)^{n-1}\mathbb{E}_{m,n}^{l}\big(r(t-a)^{m}\big)\big](x) =& \mathbb{D}_{a+}^{\alpha_1}\big[(t-a)^{n_1-1}\mathbb{E}_{m_1,n_1}^{l_1}\big(r_1(t-a)^{m_1}\big)\big](x)e_1\\ &+\mathbb{D}_{a+}^{\alpha_2}\big[(t-a)^{n_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2}^{l_2}\big(r_2(t-a)^{m_2}\big)\big](x)e_2\\ =&(x-a)^{n_1-\alpha_1-1}\mathbb{E}_{m_1,n_1-\alpha_1}^{l_1}\big(r_1(x-a)^{m_1}\big)e_1\\ &+(x-a)^{n_2-\alpha_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2-\alpha_2}^{l_2}\big(r_2(x-a)^{m_2}\big)e_2\\ =&(x-a)^{n-\alpha-1}\mathbb{E}_{m,n-\alpha}^{l}\big(r(x-a)^{m}\big).\end{aligned} \tag{17}$$

□

卷积恒等式是涉及 Prabhakar 算子的分数阶微积分中的基础，因为它使得基于这些核函数定义的分数阶积分/导数满足复合律和半群性质。双复 Prabhakar 函数的卷积恒等式如下所示。

定理 2.2（卷积恒等式）. 设 $m, n, l, \nu, \sigma, r \in \mathbb{T}$ 满足 $|\mathrm{Im}(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}(n)| < \mathrm{Re}(n)$ $|\mathrm{Im}(\nu)| < \mathrm{Re}(\nu)$. 则

$$\int_0^x (x-t)^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}\big(r(x-t)^m\big)\, t^{\nu-1}\mathbb{E}^{\sigma}_{m,\nu}\big(rt^m\big)\, dt = x^{n+\nu-1}\mathbb{E}^{l+\sigma}_{m,n+\nu}\big(rx^m\big). \tag{18}$$

证明。 利用幂等表示，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^x (x-t)^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}\big(r(x-t)^m\big)\, t^{\nu-1}\mathbb{E}^{\sigma}_{m,\nu}\big(rt^m\big)\, dt \\
&= \int_0^x (x-t)^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}\big(r_1(x-t)^{m_1}\big)\, t^{\nu_1-1}\mathbb{E}^{\sigma_1}_{m_1,\nu_1}\big(r_1t^{m_1}\big)\, dt\ e_1 \\
&+ \int_0^x (x-t)^{n_2-1}\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2}\big(r_2(x-t)^{m_2}\big)\, t^{\nu_2-1}\mathbb{E}^{\sigma_2}_{m_2,\nu_2}\big(r_2t^{m_2}\big)\, dt\ e_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

分别对幂等分量 [16, 35] 应用拉普拉斯变换的帕塞瓦尔定理，并利用 Prabhakar 函数的拉普拉斯变换（参见例如 [11, 17]），对于 $|r_1\xi_1^{-m_1}| < 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(\int_0^x (x-t)^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}\big(r_1(x-t)^{m_1}\big)\, t^{\nu_1-1}\mathbb{E}^{\sigma_1}_{m_1,\nu_1}\big(r_1t^{m_1}\big)\, dt;\xi_1\right) \\
&= \mathcal{L}\left(x^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}(r_1x^{m_1});\xi_1\right)\cdot\mathcal{L}\left(x^{\nu_1-1}\mathbb{E}^{\sigma_1}_{m_1,\nu_1}(r_1x^{m_1});\xi_1\right) \\
&= \xi_1^{-n_1}\left(1-r_1\xi_1^{-m_1}\right)^{-l_1}\cdot\xi_1^{-\nu_1}\left(1-r_1\xi_1^{-m_1}\right)^{-\sigma_1} \\
&= \xi_1^{-(n_1+\nu_1)}\left(1-r_1\xi_1^{-m_1}\right)^{-(l_1+\sigma_1)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

式 (20) 的右侧是 $x^{n_1+\nu_1-1}\mathbb{E}^{l_1+\sigma_1}_{m_1,\ n_1+\nu_1}(r_1x^{m_1})$ 的拉普拉斯变换，因此通过取拉普拉斯逆变换，我们得到

$$\left[\int_0^x (x-t)^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}\big(r_1(x-t)^{m_1}\big)\, t^{\nu_1-1}\mathbb{E}^{\sigma_1}_{m_1,\nu_1}\big(r_1t^{m_1}\big)dt\right] = x^{n_1+\nu_1-1}\mathbb{E}^{l_1+\sigma_1}_{m_1,n_1+\nu_1}(r_1x^{m_1}). \tag{21}$$

同理，对于 $|r_2\xi_2^{-m_2}|<1,$ ，我们得到

$$\left[\int_0^x (x-t)^{n_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2}^{l_2}\left(r_2(x-t)^{m_2}\right)t^{\nu_2-1}\mathbb{E}_{m_2,\nu_2}^{\sigma_2}\left(r_2t^{m_2}\right)dt\right]=x^{n_2+\nu_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2+\nu_2}^{l_2+\sigma_2}(r_2x^{m_2}). \tag{22}$$

将方程（21）和（22）代入方程（19），得到

$$\begin{aligned}&\int_0^x (x-t)^{n-1}\mathbb{E}_{m,n}^{l}\left(r(x-t)^{m}\right)t^{\nu-1}\mathbb{E}_{m,\nu}^{\sigma}\left(rt^{m}\right)dt\\&=x^{n_1+\nu_1-1}\mathbb{E}_{m_1,n_1+\nu_1}^{l_1+\sigma_1}(r_1x^{m_1})\ e_1+x^{n_2+\nu_2-1}\mathbb{E}_{m_2,n_2+\nu_2}^{l_2+\sigma_2}(r_2x^{m_2})\ e_2\\&=x^{n+\nu-1}\mathbb{E}_{m,n+\nu}^{l+\sigma}(rx^{m}),\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $|r\xi^{-m}|_j\prec 1,$ 由（1.1）可得。 □

3 双复数 Prabhakar 分数阶算子

受近期研究的启发 [8, 36, 37] ，以下定义可逐分量地用于双复值函数:

定义 3.1。设有限区间 $[a,b]$（实数轴 $\mathbb{R}$ 上的）勒贝格可测函数空间 $L(a,b)$ 定义如下（参见例如 *[16]*）：

$$L(a,b)=\left\{f(x):\parallel f\parallel_1=\int_a^b|f(x)|dx<\infty\right\}. \tag{24}$$

那么，相应的双复值函数空间 $L_{\mathbb{T}}(a,b)$ 由所有形如 $f=f_1e_1+f_2e_2$ 的函数组成，其中 $f_1,f_2\in L(a,b)$。

定义 3.2。空间 $W^{m,\ 1}(a,b)$ 是索伯列夫空间（例如参见 *[22]*），定义如下:

$$W^{m,1}(a,b)=\left\{f\in L^1(a,b):\frac{d^m}{dt^m}f\in L^1(a,b)\right\}. \tag{25}$$

相应的双复数值函数空间 $W^{m,\ \mathbb{T}\ ^1}(a,b)$ 由所有形如 $f=f_1e_1+f_2e_2$ 的函数构成，其中 $f_1,f_2\in W^{m,\ 1}(a,b)$。

定义 3.3。设空间 $AC^M(a,b)$ 是（参见，例如 *[22]*）由定义在(a,b) 上的、具有直到 $M-1$ 阶连续导数的实值函数 $f(t)$ 组成的空间，并且$f^{(M-1)}(t)$ 属于绝对连续函数 $AC(a,b)$ 空间。相应地，双复值函数空间 $AC_{\mathbb{T}}^M(a,b)$ 由所有形如 $f=f_1e_1+f_2e_2$ 的函数组成，其中 $f_1,f_2\in AC^M(a,b)$。

以下引理在证明后续结果时发挥着关键作用。通过建立这一引理，我们确保后续定理能够以更加系统且清晰的方式推导出来。

引理 3.4。若 $m \in \mathbb{T}$ 其中 $m = m_1 e_1 + m_2 e_2$，若 $\mathrm{Re}(m_1) > 0$ 且 $\mathrm{Re}(m_2) > 0$，则 $|\mathrm{Im}_{\mathbb{j}}(m)| < \mathrm{Re}(m)$。此外，若 $\mathrm{Re}(m_1) > k$ 且 $\mathrm{Re}(m_2) > k$，则 $|\mathrm{Im}_{\mathbb{j}}(m)| < \mathrm{Re}(m) - k$.

证明。将 $m \in \mathbb{T}$ 表示为实部件，我们有

$$\begin{aligned} m &= p_0 + i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_1 i_2 p_3 \\ &= (p_0 + i_1 p_1) + i_2 (p_2 + i_1 p_3). \end{aligned} \tag{26}$$

根据方程（3）中给出的幂等表示定义，可得

$$m = m_1 e_1 + m_2 e_2, \tag{27}$$

其中 $m_1 = (p_0 + p_3) + i_1(p_1 - p_2)$ $m_2 = (p_0 - p_3) + i_1(p_1 + p_2)$，且 $\mathrm{Re}(m_1) = p_0 + p_3$，$\mathrm{Re}(m_2) = p_0 - p_3$.
Also, $p_0 = \dfrac{\mathrm{Re}(m_1) + \mathrm{Re}(m_2)}{2}$, $p_3 = \dfrac{\mathrm{Re}(m_1) - \mathrm{Re}(m_2)}{2}$

由于 $\mathrm{Re}(m_1) > 0$ 且 $\mathrm{Re}(m_2) > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad p_0 + p_3 > 0 \text{ and } p_0 - p_3 > 0. \\ &\Rightarrow \quad p_0 > -p_3 \text{ and } p_0 > p_3. \\ &\Rightarrow \quad -p_3 < p_0 \text{ and } p_3 < p_0. \\ &\Rightarrow \quad |p_3| < p_0. \\ &\Rightarrow \quad |\,\mathrm{Im}_{\mathbb{j}}(m)| < \mathrm{Re}(m). \end{aligned} \tag{28}$$

此外，若 $\mathrm{Re}(m_1) > k$ 且 $\mathrm{Re}(m_2) > k$，其中 $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad p_0 + p_3 > k \text{ and } p_0 - p_3 > k. \\ &\Rightarrow \quad p_0 - k > -p_3 \text{ and } p_0 - k > p_3. \\ &\Rightarrow \quad |p_3| < p_0 - k. \\ &\Rightarrow \quad |\,\mathrm{Im}_{\mathbb{j}}(m)| < \mathrm{Re}(m) - k. \end{aligned} \tag{29}$$

□

3.1 双复Prabhakar核

Prabhakar核是通过Prabhakar函数定义的一种广义核函数。它是Prabhakar分数阶积分和导数算子的基础。为了讨论双复 Prabhakar 积分，我们在双复空间中定义Prabhakar核。

定理3.5。 设 $t \in \mathbb{R}$, $m, n, r, l \in \mathbb{T}$, $m = m_1 e_1 + m_2 e_2$, $n = n_1 e_1 + n_2 e_2$, $r = r_1 e_1 + r_2 e_2$, $l = l_1 e_1 + l_2 e_2$ 和 |虚部j(m)| < 实部(m) |虚部j(n)| < 实部(n)。那么，涉及双复 *Prabhakar* 函数(11)的双复*Prabhakar*核定义为

$$e^{l}_{m,n,r}(t) = t^{n-1}(\mathbb{E}^{l}_{m,n})(rt^{m}). \tag{30}$$

证明。 考虑

$$e^{l}_{m,n,r}(t) = t^{n-1}(\mathbb{E}^{l}_{m,n})(rt^{m}). \tag{31}$$

利用幂等表示

$$\begin{aligned} e^{l}_{m,n,r}(t) &= t^{n_1-1}(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1})(r_1 t^{m_1})e_1 + t^{n_2-1}(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2})(r_2 t^{m_2})e_2 \\ &= e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1}(t)e_1 + e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2}(t)e_2. \end{aligned} \tag{32}$$

Now,

$$e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1}(t) = t^{n_1-1}(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1})(r_1 t^{m_1}), \tag{33}$$

复Prabhakar核在 Re(m_1) > 0, Re(n_1) > 0 [9, 22] 时存在。

同理,

$$e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2}(t) = t^{n_2-1}(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2})(r_2 t^{m_2}), \tag{34}$$

复Prabhakar核对于 Re(m_2) > 0, Re(n_2) > 0 同样存在（参见例如 [9, 22]）。

由于 $e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1}(t)$ 与 $e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2}(t)$ 分别存在于 T_1 和 T_2，根据 Ringleb分解定理（参见例如 [26]），(30) 对于 |Imj(m)| <Re(m) |Imj(n)| < Re(n).同样存在于 T

□

定理3.6。 设 $f \in L_{\mathbb{T}}(a, b)$ $0 \le a < t < b \le \infty$ 是双复值函数，且 $m, n, r, l \in \mathbb{T}$, $m = m_1 e_1 + m_2 e_2$, $n = n_1 e_1 + n_2 e_2$, $r = r_1 e_1 + r_2 e_2$, $l = l_1 e_1 + l_2 e_2$以及 |虚部j(m)| < 实部(m) | 虚部j(n)| < 实部(n)。则双复 *Prabhakar* 积分定义为

$$(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+})f(t) = (f * e^{l}_{m,n,r})(t) = \int_{\Upsilon} (t-y)^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}[r(t-y)^{m}]f(y)dy, \tag{35}$$

其中 $\Upsilon = (\gamma_1, \gamma_2)$ 是 $\mathbb{T}$ 中的一条分段光滑曲线，且 γ_1： a 到 t 以及 γ_2： a 到t 是 $\mathbb{C}$.中的分段光滑曲线

证明。 考虑

$$(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+})f(t) = (f * e^{l}_{m,n,r})(t) = \int_{\Upsilon} (t-y)^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}[r(t-y)^{m}]f(y)dy. \tag{36}$$

利用幂等表示

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+})f(t) =& (f * e^{l}_{m,n,r})(t) \\
=& \int_{\Upsilon} (t-y)^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}[r(t-y)^{m}]f(y)dy \\
=& \int_{\gamma_1} (t-y)^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}[r_1(t-y)^{m_1}]f_1(y)dy\ e_1 \\
&+ \int_{\gamma_2} (t-y)^{n_2-1}\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2}[r_2(t-y)^{m_2}]f_2(y)dy\ e_2 \\
=& (f_1 * e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1})(t)\ e_1 + (f_2 * e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2})(t)\ e_2 \\
=& (\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})f_1(t)\ e_1 + (\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})f_2(t)\ e_2.
\end{aligned} \tag{37}$$

Now,

$$(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})f_1(t) = (f_1 * e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1})(t) = \int_{\gamma_1} (t-y)^{n_1-1}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1}[r_1(t-y)^{m_1}]f_1(y)dy, \tag{38}$$

是复 Prabhakar 积分 [9, 22] 在 Re(m_1) > 0，Re(n_1) > 0.的条件下存在。同理,

$$(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})f_2(t) = (f_2 * e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2})(t) = \int_{\gamma_2} (t-y)^{n_2-1}\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2}[r_2(t-y)^{m_2}]f_2(y)dy, \tag{39}$$

也是复 Prabhakar 积分，在 Re(m_2) > 0，Re(n_2) > 0.的条件下存在
由于 $(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,\ n_1,\ r_1,\ a^+})f_1(t)$ 和 $(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,\ n_2,\ r_2,\ a^+})f_2(t)$ 分别存在于 T_1 和 T_2 中，根据 Ringleb分解定理，(35) 也存在于 T 中，其中 |Im$_j$(m)| <Re(m) |Im$_j$(n)| < Re(n)。 □

Fol以下结果表明，算子 $\mathbb{E}^{l}_{m,\ n,\ r,\ a^+}$ 在空间 $L_{\mathbb{T}}$(a，b上有界).
如果定义域本身是复平面中的一条曲线，例如 f： $\Gamma \to \mathbb{C}$，其中 Γ 是 $\mathbb{C}$中的一条围道（路径），那么可以定义沿该围道的 L^p 范数。

我们用 $z=\gamma(t)\quad t\in[a,b]$ 对围道进行参数化，并定义

$$\| f \|_{L^p(\Gamma)}=\left(\int_a^b |f(\gamma(t))|^p\,|\gamma'(t)|\,dt\right)^{1/p}.$$

这里，$|\gamma'(t)|\,dt$ 表示沿围道 Γ 的弧长测度 。这类似于沿路径积分，但 L^p 范数仅取决于模$|f|$，而不取决于围道的方向或取向。

定理 *3.7.* 设 $m,n,r,l\in\mathbb{T}$，$m=m_1e_1+m_2e_2$，$n=n_1e_1+n_2e_2$，$r=r_1e_1+r_2e_2$，$l=l_1e_1+l_2e_2$和 $|Im_j(m)|<Re(m)\quad |Im_j(n)|<Re(n)$ 和 $b>a$，则算子 $(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}$ 在 $L_{\mathbb{T}}(a,b)$ 上有界

$$\int_\Upsilon \left|\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}f(t)\right|_j dt \prec K\int_\Upsilon |f(y)|_j\,dy,\quad f\in L_{\mathbb{T}}(a,b),\tag{40}$$

其中 $\Upsilon=(\gamma_1,\gamma_2)$ 表示 $\mathbb{T}$ 中的一对路径，其中 γ_1和 γ_2是从 a 到 t的 $\mathbb{C}$ 中的分段光滑路径。 $K=K_1e_1+K_2e_2$，并且

$$K_i=(b-a)^{\mathrm{Re}(n_i)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|(l_i)_k|}{|\Gamma_2(m_ik+n_i)|[\mathrm{Re}(m_i)k+\mathrm{Re}(n_i)]}\frac{|r_i(b-a)^{\mathrm{Re}(m_i)}|^k}{k!}\quad (i=1,2).$$

证明。 将式 (40) 的左端分解为幂等分量，然后使用其中适用于复数域的结果 [16, p.40]，即可得到该结果。再次合并幂等分量，便可在双复数域中得到所需结果。

常数 K取决于 $b-a$、参数 m，n，l，r，并在 $|r(b-a)^{Re(m)}|<$ 处收敛，其半径由 Mittag-Leffler 函数确定。对于较小的区间或适当的参数选择，可以使 K 任意小。 □

Prabhakar导数（包括 Riemann–Liouville 意义下的导数和正则化的 Caputo 型导数）在扩展分数阶微积分中发挥着核心作用。现在我们定义双复数 Prabhakar 导数如下：

定理 3.8。 设 $f\in L_{\mathbb{T}}(a,b)\quad 0\le a<t<b\le\infty$ 是双复值函数，且 $f*e^{-l}_{m,\,k-n,\,r}(.)\in W^{k,1}_{\mathbb{T}}(a,b)\quad k=\lceil n\rceil=\lceil\mathrm{Re}(n_1)\rceil e_1+\lceil\mathrm{Re}(n_2)\rceil e_2\in\mathbb{D}$. 双复数 ***Prabhakar*** 导数定义为

$$(\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+}f)(t)=\left(\frac{d^k}{dt^k}(\mathbb{E}^{-l}_{m,k-n,r,a^+}f)\right)(t),\tag{41}$$

其中 m，n，r，$l\in\mathbb{T}$，$m=m_1e_1+m_2e_2$，$n=n_1e_1+n_2e_2$，$r=r_1e_1+r_2e_2$，$l=l_1e_1+l_2e_2$且 $|\mathrm{Im}_j(m)|<\mathrm{Re}(m)\quad|\mathrm{Im}_j(n)|<\mathrm{Re}(n)$。

证明。考虑

$$(\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t)=\left(\frac{d^m}{dt^m}(\mathbb{E}^{-l}_{m,k-n,r,a^+}f)\right)(t). \tag{42}$$

通过使用幂等表示

$$\begin{aligned}(\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t)=&\left(\frac{d^k}{dt^k}(\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,k-n_1,r_1,a^+}f_1)\right)(t)\ e_1+\left(\frac{d^m}{dt^m}(\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,k-n_2,r_2,a^+}f_2)\right)(t)\ e_2\\ =&(\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1)(t)\ e_1+(\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2)(t)\ e_2.\end{aligned} \tag{43}$$

Now,

$$(\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1)(t)=\left(\frac{d^k}{dt^k}(\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,k-n_1,r_1,a^+}f_1)\right)(t), \tag{44}$$

复 Prabhakar 导数 [9, 22] 存在于 Re(m_1) >0, Re(n_1) >0, $k=\lceil$Re(n_1)$\rceil$.

同样地,

$$(\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2)(t)=\left(\frac{d^k}{dt^k}(\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,k-n_2,r_2,a^+}f_2)\right)(t), \tag{45}$$

当 Re(m_2) >0, Re(n_2) >0, $k=\lceil$Re(n_2)$\rceil$.时，也存在复 Prabhakar 导数

由于 ($\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,\ n_1,\ r_1,\ a^+}f_1$)($t$) 和 ($\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,\ n_2,\ r_2,\ a^+}f_2$)($t$) 分别存在于 T_1 和 T_2 中，根据 Ringleb分解定理（参见例如 [5]），(41) 也存在于 T 中，其中|Im$_j$(m)| $<$ Re(m) |Im$_j$(n)| $<$ Re(n)。

□

同样地，双复正则化 Prabhakar 导数可定义如下定理所示:

定理3.9。 设 $f\in AC^{M}_{\mathbb{T}}(a,b)$ 是一个双复值函数，在 *(a,b)* 上具有 $0\le a<t<b\le\infty$ 阶连续导数。设 $m,n,r,l\in\mathbb{T}$,$m=m_1e_1+m_2e_2$，$n=n_1e_1+n_2e_2$，$r=r_1e_1+r_2e_2$，$l=l_1e_1+l_2e_2$，双复正则化 *Prabhakar* 导数定义为

$$\begin{aligned}({}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t)=&\left(\mathbb{E}^{-l}_{m,k-n,r,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f\right)(t)\\ =&(\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t)-\sum_{p=0}^{k-1}t^{p-n}\mathbb{E}^{-l}_{m,p-n+1}(rt^m)f^{(p)}(a^+).\end{aligned} \tag{46}$$

证明。 考虑

$$\begin{aligned}({}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t) &= \left(\mathbb{E}^{-l}_{m,k-n,r,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f\right)(t)\\ &= (\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f)(t) - \sum_{p=0}^{k-1} t^{p-n}\mathbb{E}^{-l}_{m,p-n+1}(rt^m)f^{(p)}(a^+).\end{aligned} \tag{47}$$

通过使用幂等表示

$$\begin{aligned}\left({}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,a^+}f\right)(t) &= \left(\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,k-n_1,r_1,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f_1\right)(t)e_1 + \left(\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,k-n_2,r_2,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f_2\right)(t)e_2\\ &= \left((\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1)(t) - \sum_{p=0}^{k-1} t^{p-n_1}\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,p-n_1+1}(r_1t^{m_1})f_1^{(p)}(a^+)\right)e_1\\ &\quad + \left((\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2)(t) - \sum_{p=0}^{k-1} t^{p-n_2}\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,p-n_2+1}(r_2t^{m_2})f_2^{(p)}(a^+)\right)e_2\\ &= \left({}^{C}\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1\right)(t)e_1 + \left({}^{C}\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2\right)(t)e_2.\end{aligned} \tag{48}$$

Now,

$$\begin{aligned}\left({}^{C}\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1\right)(t) &= \left(\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,k-n_1,r_1,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f_1\right)(t)\\ &= (\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}f_1)(t) - \sum_{p=0}^{k-1} t^{p-n_1}\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,p-n_1+1}(r_1t^{m_1})f_1^{(p)}(a^+),\end{aligned} \tag{49}$$

复正则化 Prabhakar 导数是否存在于 $\mathrm{Re}(m_1) > 0$, $\mathrm{Re}(n_1) > 0$.同样,

$$\begin{aligned}\left({}^{C}\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2\right)(t) &= \left(\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,k-n_2,r_2,a^+}\frac{d^k}{dt^k}f_2\right)(t)\\ &= (\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}f_2)(t) - \sum_{p=0}^{k-1} t^{p-n_2}\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,p-n_2+1}(r_2t^{m_2})f_2^{(p)}(a^+),\end{aligned} \tag{50}$$

is a复正则化 Prabhakar 导数也存在于 $\mathrm{Re}(m_2) > 0$, $\mathrm{Re}(n_2) > 0$.

由于 $({}^{C}\mathbb{D}^{l_1}_{m_1,\ n_1,\ r_1,\ a^+}f_1)(t)$ 和 $({}^{C}\mathbb{D}^{l_2}_{m_2,\ n_2,\ r_2,\ a^+}f_2)(t)$ 分别存在于 T_1和 T_2中，根据Ringleb分解定理，方程 (46) 也存在于 T中，其中对于 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$ 和 $|\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$。 □

注3.10。对于 $l = 0$，算子 (35) 与双复空间中阶数为 n 的黎曼–刘维尔分数阶积分相同

$$(\mathbb{E}^0_{m,n,r,a^+}f) \equiv \mathbb{I}^n_{a+}f. \tag{51}$$

对于 $l=0$，算子 (46) 与 Caputo导数相同。

4 双复 Prabhakar 分数阶算子的若干性质

定理4.1证明了双复 Prabhakar 积分算子、双复 Prabhakar 导数以及双复正则化 Prabhakar 导数的线性性质。

定理*4.1*。设 f、g 为双复值函数，c、d 为常数。设 m、n、r、$l \in \mathbb{T}$ 和 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$。对于 *(i)* 和 *(ii)*，$f$、$g \in L_{\mathbb{T}}(a, b)$；对于 *(iii)*，$f$、$g \in AC^M_{\mathbb{T}}(a, b)$。那么

$$(i) \quad (\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})(cf(t)+dg(t)) = c(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})f(t) + d(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})g(t). \tag{52}$$

$$(ii) \quad (\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})(cf(t)+dg(t)) = c(\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})f(t) + d(\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})g(t). \tag{53}$$

$$(iii) \quad ({}^{C}\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})(cf(t)+dg(t)) = c({}^{C}\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})f(t) + d({}^{C}\mathbb{D}^l_{m,n,r,a^+})g(t). \tag{54}$$

证明。 (i) 利用（37），我们得到

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})(cf(t)+dg(t)) \\
&= \left[(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})e_1 + (\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})e_2\right][\{cf_1(t)+dg_1(t)\}e_1 + \{cf_2(t)+dg_2(t)e_2\}] \\
&= \left[(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})\{cf_1(t)+dg_1(t)\}\right]e_1 + \left[(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})\{cf_2(t)+dg_2(t)\}\right]e_2 \\
&= \left[c\{(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})e_1 + (\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})e_2\}\{f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2\}\right] \\
&\quad + \left[d\{(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+})e_1 + (\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+})e_2\}\{g_1(t)e_1 + g_2(t)e_2\}\right] \\
&= c(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})f(t) + d(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+})g(t).
\end{aligned} \tag{55}$$

用类似的方法，我们证明双复 Prabhakar 导数和双复正则化 Prabhakar 导数的线性性质。 □

双复 Prabhakar 积分算子的半群性质非常重要，因为它既能简化计算，也能确立该算子作为经典分数阶积分的一种自然推广。下面给出双复积分算子的半群性质：

定理 4.2 (半群性质). 设 $\sigma, \nu, m, n, l, r \in \mathbb{T}$, 则对于 $|\mathrm{Im}_j(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_j(n)| < \mathrm{Re}(n)$ $|\mathrm{Im}_j(\nu)| < \mathrm{Re}(\nu)$ 关系式

$$\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{E}^{\sigma}_{m,\nu,r,a^+} f \equiv \mathbb{E}^{l+\sigma}_{m,n+\nu,r,a^+} f, \tag{56}$$

i对任意双复值可积函数 $f \in L_{\mathbb{T}}(a, b)$均成立。特别 $r,$

$$\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f \equiv \mathbb{I}^{n+\nu}_{a^+} f. \tag{57}$$

证明。 利用方程（37）以及 [16, 定理 8、方程（6.1）], , 可得

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{E}^{\sigma}_{m,\nu,r,a^+} f\right)(x) &= \left(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}\mathbb{E}^{\sigma_1}_{m_1,\nu_1,r_1,a^+} f_1\right)(x)e_1 + \left(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}\mathbb{E}^{\sigma_2}_{m_2,\nu_2,r_2,a^+} f_2\right)(x)e_2 \\ &= \left(\mathbb{E}^{l_1+\sigma_1}_{m_1,n_1+\nu_1,r_1,a^+} f_1\right)(x)e_1 + \left(\mathbb{E}^{l_2+\sigma_2}_{m_2,n_2+\nu_2,r_2,a^+} f_2\right)(x)e_2 \\ &= \mathbb{E}^{l+\sigma}_{m,n+\nu,r,a^+} f.\end{aligned} \tag{58}$$

这证明了该关系式

$$\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\,\mathbb{E}^{\sigma}_{m,\nu,r,a^+} f \equiv\ \mathbb{E}^{l+\sigma}_{m,n+\nu,r,a^+} f. \tag{59}$$

将 $\sigma = -l$ 代入上述方程（59），可得

$$\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\,\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f \equiv\ \mathbb{E}^{0}_{m,n+\nu,r,a^+} f. \tag{60}$$

利用方程（51），方程（60）右侧的算子与双复空间中阶数为 $n+\nu$ 的 Riemann–Liouville分数阶积分一致。因此，我们得到

$$\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f \equiv \mathbb{I}^{n+\nu}_{a^+} f. \tag{61}$$

□

研究分数阶演算算子与双复 Prabhakar 积分算子的复合非常重要。它们通过将分数阶算子的连续作用替换为一个参数经过调整的 Prabhakar 算子，简化了分析过程。这里，我们得到如下分数阶演算算子与以双复 Prabhakar 函数为核的积分算子的复合：

定理 4.3（Riemann–Liouville 分数阶积分算子与 Prabhakar 积分算子的复合）。设 $f \in L_{\mathbb{T}}(a,b)$ 为双复值函数。设$\alpha, m, n, l, r \in \mathbb{T}$，$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$，$\beta = m_1 e_1 + m_2 e_2$，$n = n_1 e_1 + n_2 e_2$，$l = l_1 e_1 + l_2 e_2$，则对于 $|\mathrm{Im}_i(\alpha)| < \mathrm{Re}(\alpha)$ $|\mathrm{Im}_i(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_i(n)| < \mathrm{Re}(n)$，

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{a^+}\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+} f \equiv \mathbb{E}^{l}_{m,n+\alpha,r,a^+} f \equiv \mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{I}^{\alpha}_{a^+} f. \tag{62}$$

证明。由方程（37）和方程 [15, 定理 6,(5.1)]，可得 $x > a$

$$\begin{aligned}(\mathbb{I}^{\alpha}_{a^+}\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+} f)(x) &= (\mathbb{I}^{\alpha_1}_{a^+}\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}\ f_1)(x)\ e_1 + (\mathbb{I}^{\alpha_2}_{a^+}\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}\ f_2)(x)\ e_2 \\ &= \mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1+\alpha_1,r_1,a^+}\ f_1(x)\ e_1 + \mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2+\alpha_2,r_2,a^+}\ f_2(x)\ e_2 \\ &= \mathbb{E}^{l}_{m,n+\alpha,r,a^+}\ f(x).\end{aligned} \tag{63}$$

此外，

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+}\mathbb{I}^{\alpha}_{a^+} f)(x) &= (\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,a^+}\mathbb{I}^{\alpha_1}_{a^+}\ f_1)(x)\ e_1 + (\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,a^+}\mathbb{I}^{\alpha_2}_{a^+}\ f_2)(x)\ e_2 \\ &= \mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1+\alpha_1,r_1,a^+}\ f_1(x)\ e_1 + \mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2+\alpha_2,r_2,a^+}\ f_2(x)\ e_2 \\ &= \mathbb{E}^{l}_{m,n+\alpha,r,a^+}\ f(x).\end{aligned} \tag{64}$$

□

这就是 Riemann–Liouville 分数阶积分算子与双复 Prabhakar 积分算子的交换性。类似地，Riemann–Liouville 分数阶导数算子 $\mathbb{D}^{\alpha}_{a+}$ 的 [16] 结果如下：

定理 4.4（Riemann–Liouville 分数阶导数算子与 Prabhakar 积分算子的复合）。设 $f \in L_{\mathbb{T}}(a,b)$ 为双复值函数。设 $\alpha, m, n, l, r \in \mathbb{T}$，$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$，$\beta = m_1 e_1 + m_2 e_2$，$n = n_1 e_1 + n_2 e_2, l = l_1 e_1 + l_2 e_2$，则对于 $|\mathrm{Im}_i(\alpha)| < \mathrm{Re}(\alpha)$ $|\mathrm{Im}_i(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}_i(n)| < \mathrm{Re}(n)$，

$$\mathbb{D}^{\alpha}_{a^+}\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,a^+} f \equiv \mathbb{E}^{l}_{m,n-\alpha,r,a^+} f, \tag{65}$$

对任意连续函数 $f \in C(a,b)$ 均成立。特别地，对于 $k \in \mathbb{N}$ 和$|\mathrm{Im}(n)| < \mathrm{Re}(n) - k$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+} f \equiv \mathbb{E}^l_{m,n-k,r,a^+} f. \tag{66}$$

在此，我们构造算子 $\mathbb{E}^l_{m,n,r,a+}$的左反演算子

定理 4.5（左反演定理）。设 $m,n,l,r \in \mathbb{T}$，$|Im(m)| < Re(m)$ $|Im(n)| < Re(n)$。则算子 $\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}$ 在空间 $L(a,b)$ 中可逆，且对于 $f = f_1 e_1 + f_2 e_2 \in L_{\mathbb{T}}(a,b)$，其左逆为

$$\left(\left[\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}\right]^{-1} f\right)(x) = \left(\mathbb{D}^{n+\nu}_{a^+}\, \mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f\right)(x),$$

其中 $\nu \in \mathbb{T}$和 |虚部（ν）| < 实部（ν）。

证明。 我们先定义算子 $\left[\mathbb{E}^l_{m,n,r,a+}\right]^{-1}$，使得

$$\left(\mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}\psi\right)(x) = f(x), \quad \psi = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 \in L_{\mathbb{T}}(a,b). \tag{67}$$

根据定理 3.7， $\mathbb{E}^l_{m,\ n,\ r,\ a^+}\psi \in L_{\mathbb{T}}(a,\ b)$，因此 $f \in L_{\mathbb{T}}(a,\ b)$。

将算子 $\mathbb{E}^{-l}_{m\ ,\ \nu,\ r,\ a^+}$ 应用于等式（67）的两边

$$\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f(x) = \mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} \mathbb{E}^l_{m,n,r,a^+}\psi(x),$$

其中 $\nu \in \mathbb{T}$和 $|\mathrm{Im}(\nu)| < \mathrm{Re}(\nu)$。

利用半群性质 (57)，我们得到

$$\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f(x) = \left(\mathbb{I}^{n+\nu}_{a^+}\psi\right)(x).$$

现在，应用黎曼-刘维尔分数阶导数 $\mathbb{D}^{n+\nu}_{a^+}$，并利用结果[16,引理 3、方程 (3.9)]，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{n+\nu}_{a^+}\mathbb{E}^{-l}_{m,\nu,r,a^+} f(x) &= \mathbb{D}^{n_1+\nu_1}_{a^+}\mathbb{E}^{-l_1}_{m_1,\nu_1,r_1,a^+} f_1(x)e_1 + \mathbb{D}^{n_2+\nu_2}_{a^+}\mathbb{E}^{-l_2}_{m_2,\nu_2,r_2,a^+} f_2(x)e_2 \\
&= \mathbb{D}^{n_1+\nu_1}_{a^+}\mathbb{I}^{n_1+\nu_1}_{a^+}\psi_1(x)e_1 + \mathbb{D}^{n_2+\nu_2}_{a^+}\mathbb{I}^{n_2+\nu_2}_{a^+}\psi_2(x)e_2 \\
&= \psi_1(x)e_1 + \psi_2(x)e_2 \\
&= \psi(x).
\end{aligned} \tag{68}$$

因此，我们通过算子复合从 f 中恢复了 ψ：

$$\psi(x)=\left(\mathbb{D}_{a+}^{n+\nu}\mathbb{E}_{m,\nu,r,a^+}^{-l}f\right)(x),$$

这证明了 $\left[\mathbb{E}_{m,n,r,a^+}^{l}\right]^{-1}$ 是$\mathbb{E}_{m}^{l}$的左逆，$n,\ r,\ a^+$ 在 $L_{\mathbb{T}}(a,\ b)$中。

□

5 分数阶导数的拉普拉斯变换及其在求解柯西问题中的应用

本节推导双复 Prabhakar 积分、双复数 Prabhakar 导数和双复正则化 Prabhakar 导数的拉普拉斯变换。双复数 Prabhakar 导数的 LT 在简化˜分数阶微分方程的分析中发挥着基础作用。本节使用记号 $f(\xi)$ 表示函数 f 的拉普拉斯变换。

定理 5.1。设 f 是双复值函数。对于 *(i)*、*(ii)* $f\in L_{\mathbb{T}}^{1}(a,b)$，以及对于 *(iii)* $f\in AC_{\mathbb{T}}^{M}(a,b)$，且 $\xi,m,n,l,r\in\mathbb{T}$，其中 $\xi=\xi_1e_1+\xi_2e_2|\mathrm{Im}(\xi)|<\mathrm{Re}(\xi)\ \ |r\xi^{-m}|_j\prec 1$，$k=\lceil n\rceil=\lceil\mathrm{Re}(n_1)\rceil e_1+\lceil\mathrm{Re}(n_2)\rceil e_2\in\mathbb{D}$。双复数分数阶算子的 LT 为

(i) $\mathcal{L}\left(\mathbb{E}_{m,n,r,0^+}^{l}f(t);\xi\right)=\mathcal{L}\left((f*e_{m,n,r}^{l})(t);\xi\right)=\dfrac{\xi^{ml-n}}{(\xi^m-r)^l}\tilde{f}(\xi).$

(ii) $\mathcal{L}\left(\mathbb{D}_{m,n,r,0^+}^{l}f(t);\xi\right)=\xi^{n-ml}\left(\xi^m-r\right)^l\tilde{f}(\xi)-\sum_{p=0}^{k-1}\xi^{k-p-1}\left(\mathbb{E}_{m,k-n-p,r,0^+}^{-l}f\right)(0^+).$

(iii) $\mathcal{L}\left({}^{C}\mathbb{D}_{m,n,r,0^+}^{l}f(t);\xi\right)=\xi^{n-ml}\left(\xi^m-r\right)^l\left[\tilde{f}(\xi)-\sum_{p=0}^{k-1}\xi^{-p-1}f^{(p)}(0^+)\right].$

证明。 (i) 根据 Prabhakar 导数的拉普拉斯变换 [10, p.27]和

结果 (35)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\mathbb{E}^{l}_{m,n,r,0^+}f(t);\xi\right) &= \mathcal{L}\left(\mathbb{E}^{l_1}_{m_1,n_1,r_1,0^+}f_1(t);\xi_1\right)e_1 + \mathcal{L}\left(\mathbb{E}^{l_2}_{m_2,n_2,r_2,0^+}f_2(t);\xi_2\right)e_2\\ &= \mathcal{L}\left((f_1 * e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1})(t);\xi_1\right)e_1 + \mathcal{L}\left((f_2 * e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2})(t);\xi_2\right)e_2\\ &= \mathcal{L}\left(e^{l_1}_{m_1,n_1,r_1}(t);\xi_1\right)\tilde{f}_1(\xi_1)e_1 + \mathcal{L}\left(e^{l_2}_{m_2,n_2,r_2}(t);\xi_2\right)\tilde{f}_2(\xi_2)e_2\\ &= \frac{\xi_1^{m_1 l_1 - n_1}}{(\xi_1^{m_1}-r_1)^{l_1}}\tilde{f}_1(\xi_1)e_1 + \frac{\xi_2^{m_2 l_2 - n_2}}{(\xi_2^{m_2}-r_2)^{l_2}}\tilde{f}_2(\xi_2)e_2\\ &= \frac{\xi^{ml-n}}{(\xi^m - r)^l}\tilde{f}(\xi),\end{aligned} \tag{69}$$

对于 $|\mathrm{Im}(\xi)| < \mathrm{Re}(\xi)$ $|r\xi^{-m}|_j \prec 1.$ □

类似地，可以证明 (ii) 和 (iii)。

正则化 Prabhakar 导数自然适用于具有分布式记忆核的系统建模，例如具有层级弛豫过程的黏弹性材料，或非均质介质中的多尺度扩散。参数 l 控制记忆分布程度；当 l=0 时，恢复经典的 Riemann-Liouville 情形。

考虑涉及正则化 Prabhakar 导数的柯西问题。在下面的定理中，我们求出双复空间中的柯西问题的解。

定理 5.2. 设 $f \in L_{\mathbb{T}}[a,b]$ 是满足柯西问题的双复值函数

$$\begin{cases} {}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,0^+}f(t) = Af(t),\\ f^{(k)}(0^+) = \tau_k, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \end{cases} \tag{70}$$

其中 m, n, r, A, τ_0, ..., $\tau_{m-1} \in \mathbb{T}$, $|\mathrm{Im}(m)| < \mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}(n)| < \mathrm{Re}(n)$ $k = \lceil n \rceil = \lceil \mathrm{Re}(n_1) \rceil e_1 + \lceil \mathrm{Re}(n_2) \rceil e_2$, $l = l_1 e_1 + l_2 e_2 \in \mathbb{D}$。

证明。 对于柯西问题

$${}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,0^+}f(t) = Af(t) \tag{71}$$

对式 (71) 应用拉普拉斯变换，得到

$$\xi^{n-ml}(\xi^m - r)^l\left(\tilde{f}(\xi) - \sum_{k=0}^{m-1}\xi^{-k-1}\tau_j\right) = A\,\tilde{f}(\xi).$$

重新排列后，得到

$$\tilde{f}(\xi)=\frac{\xi^{n-ml}(\xi^m-r)^l\sum_{k=0}^{m-1}\xi^{-k-1}\tau_k}{\xi^{n-ml}(\xi^m-r)^l-A}. \tag{72}$$

我们可以将（72）改写为

$$\tilde{f}(\xi)=\sum_{k=0}^{m-1}\xi^{-k-1}\tau_k\cdot\frac{1}{1-\dfrac{A}{\xi^{n-ml}(\xi^m-r)^l}}.$$

将其分解为幂等分量后，对于充分大的 $\xi_{\mathrm{i}},(i=1,2)$，我们可以将分母展开为 Neumann（几何）级数，然后合并幂等分量，得到以下结果

$$\frac{1}{1-\dfrac{A}{\xi^{n-ml}(\xi^m-r)^l}}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\,\xi^{-k(n-ml)}(\xi^m-r)^{-kl},\quad \left|\frac{A}{\xi^{\,n-ml}\,(\xi^m-r)^l}\right|\prec 1.$$

˜代入 $f(\xi)$ 得

$$\tilde{f}(\xi)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}A^k\,\xi^{-k-1-j(n-ml)}(\xi^m-r)^{-jl}\tau_k. \tag{73}$$

通过逐项进行拉普拉斯反演，（73）在双复数域中的解析解为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}A^j t^{nj+k}\mathbb{E}^{jl}_{m,nj+k+1}(rt^m)\,\tau_k. \tag{74}$$

□

定理5.3。 设 $f,g\in L_{\mathbb{T}}[a,b]$ 及 为指数阶的双复值函数，并且

$${}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,0^+}f(t)+kf(t)=g(t),\qquad f(0^+)=\tau_0, \tag{75}$$

其中 k 和 τ_0 为常数，参数满足 $m,n,r\in\mathbb{T}$，$|\mathrm{Im}(m)|<\mathrm{Re}(m)$ $|\mathrm{Im}(n)|<\mathrm{Re}(n)$ 以及 $l\in\mathbb{D}$，$l=l_1e_1+l_2e_2$，$0<l_1,l_2<1$.

积分的下限为 0^+。那么

$$f(t)=(h*g)(t)+\tau_0\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\xi^{n-1}(1-r\xi^{-m})^l}{\xi^n(1-r\xi^{-m})^l+k}\Big\}(t), \tag{76}$$

其中

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\xi^{n}\left(1-r\xi^{-m}\right)^{l}+k}\right\}(t),$$

证明。对（75）进行拉普拉斯变换，并利用公式

$$\mathcal{L}({}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,0^{+}}f(t);\xi)=\xi^{n}(1-r\xi^{-m})^{l}\tilde{f}(\xi)-\xi^{n-1}(1-r\xi^{-m})^{l}f(0^{+}),$$

可得

$$\xi^{n}(1-r\xi^{-m})^{l}\tilde{f}(\xi)-\xi^{n-1}(1-r\xi^{-m})^{l}\tau_{0}+k\tilde{f}(\xi)=\tilde{g}(\xi).$$

整理得

$$\tilde{f}(\xi)[\xi^{n}(1-r\xi^{-m})^{l}+k]=\xi^{n-1}(1-r\xi^{-m})^{l}\tau_{0}+\tilde{g}(\xi).$$

$$H(\xi):=\frac{1}{\xi^{n}\left(1-r\xi^{-m}\right)^{l}+k}.$$

于是有

$$\widetilde{f}(\xi)=H(\xi)\,\widetilde{g}(\xi)+\tau_{0}\,\xi^{n-1}\left(1-r\xi^{-m}\right)^{l}H(\xi).$$

逐项取拉普拉斯逆变换可得

$$f(t)=(h*g)(t)+\tau_{0}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\xi^{n-1}(1-r\xi^{-m})^{l}}{\xi^{n}(1-r\xi^{-m})^{l}+k}\Big\}(t),$$

其中，$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(\xi)\}(t)$ $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\widetilde{g}(\xi)\}(t)$，$(h*g)(t)=\int_{0}^{t}h(t-s)\,g(s)\,ds.$

□

对于上述定理中的 $k=0$，$h(t)=[t^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}(rt^{m})]$，我们得到以下推论作为一个特例。

推论 5.4. 设 f、$g\in L_{\mathbb{T}}[a,b]$ 为指数阶双复值函数，且

$${}^{C}\mathbb{D}^{l}_{m,n,r,0^{+}}f(t)=g(t),\qquad f(0^{+})=\tau_{0},\tag{77}$$

其中参数满足 $m,n,r\in\mathbb{T}$，|虚部j(m)| <实部(m) |虚部j(n)| <实部(n)，且 $l\in\mathbb{D}$，$l=l_{1}e_{1}+l_{2}e_{2}$，$0<l_{1},l_{2}<1.$

积分的下限为 0^{+}。接下来

$$f(t)=\tau_{0}+[t^{n-1}\mathbb{E}^{l}_{m,n}(rt^{m})]*g(t).\tag{78}$$

6 结论

本文推导了 Prabhakar 积分算子、Prabhakar导数和正则化 Prabhakar 导数的双复扩展，并研究了它们的性质。利用 $\mathbb{E}^{l}_{m,\ n,\ r,\ a+}\cdot$ 确定了 Riemann–Liouville 分数阶积分与微分算子的复合形式。此外，还研究了双复 Prabhakar 函数的分数阶微积分。

在本研究中，我们推导了正则化 Prabhakar 分数阶导数的拉普拉斯变换，以求解柯西问题，并建立了一个稳健的框架来处理分数阶初值问题。结果表明，该方法在对具有非局部记忆效应的一大类分数阶动力系统进行建模时行之有效且适用性广泛。

本研究为未来研究带来了若干有前景的方向。该框架可扩展至双复 k 参数 Prabhakar 函数，从而能够求解多维或耦合分数阶系统中更一般的柯西型分数阶微分方程。研究结果还可推广至维数为 2^n 、适用于 $n > 2$ 的多复空间，为更高维耦合系统提供框架。

我们希望本研究能激励数学家、物理学家和工程师探索双复分数阶微积分的丰富领域，并为其理论发展和实际应用作出贡献。

声明

作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金、拨款或其他支持。

利益冲突

作者声明，与本研究相关的利益冲突不存在。 .

数据可用性

本研究未使用任何外部数据。

作者贡献

U.P.S.：形式分析与调查、撰写初稿、概念化、方法论；R.A.：概念化、方法论、撰写审阅与编辑、资源。所有作者均已阅读并批准最终稿件。

参考文献

[1] Agarwal, R., Goswami, M. P. 和 Agarwal, R. P.（2014）。双复拉普拉斯变换的卷积定理及其应用。《数学科学与应用进展》，24(1)：113–127。[2] Agarwal, R. 和 Sharma, U. P.（2023）。双复 Mittag-Leffler 函数及其在积分变换和分数阶微积分中的应用。载于数学与计算智能在社会科学分析及应用中的应用，第 157–167 页。施普林格。[3] Agarwal, R.、Sharma, U. P. 和 Agarwal, R. P.（2022a）。双复 Mittag-Leffler 函数及其相关性质。《非线性科学与应用杂志》，15：48–60。[4] Agarwal, R.、Sharma, U. P. 和 Agarwal, R. P.（2023）。涉及双复 Mittag-Leffler 函数的双复时间分数阶薛定谔方程的求解。载于数学建模、应用分析与计算国际会议，第 14–30 页。施普林格。[5] Agarwal, R.、Sharma, U. P.、Agarwal, R. P.、Suthar, D. L. 和 Purohit, S. D.（2022b）。狄利克雷级数的双复 Landau 定理与 Ikehara 定理。《数学杂志》，2022：1–8。[6] Bakhet, A.、Hussain, S.、Zayed, M. 和 Fathi, M.（2025a）。含两个参数的双复 k-Mittag-Leffler 函数：理论及其在分数阶动力学方程中的应用。《分形与分数阶》，9(6)：344。[7] Bakhet, A.、Zayed, M.、Saleem, M. A. 和 Fathi, M.（2025b）。一种新型双复 Mittag-Leffler 函数及其在分数阶动力学方程中的应用。《亚历山大工程杂志》，125：409–423。

[8] Dubey, S.、Kumar, R. 和 Sharma, K.（2014）。关于双复Orlicz空间的一则注记。*arXiv*预印本 *arXiv:1401.7112*，第 1–12 页。[9] Garra, R.、Gorenflo, R.、Polito, F. 和 Tomovski, ˇZ.（2014）。Hilfer-Prabhakar导数及其若干应用。《应用数学与计算》，242：576–589。[10] Giusti, A.、Colombaro, I.、Garra, R.、Garrappa, R.、Polito, F.、Popolizio, M. 和 Mainardi, F.（2020）。Prabhakar分数阶微积分实用指南。《分数阶微积分与应用分析》，23(1)：9–54。[11] Gorenflo, R.、Kilbas, A. A.、Mainardi, F. 和 Rogosin, S. V.（2014）。*Mittag-Leffler*函数：相关主题与应用。施普林格，柏林海德堡。[12] Goswami, M. P. 和 Kumar, R.（2022）。双复阶 Riemann–Liouville 分数阶算子及其性质。《应用科学中的数学方法》，45(10)：5699–5720。[13] Goswami, M. P. 和 Kumar, R.（2023）。双复空间中 Riemann-Liouville 分数阶算子的推广及其应用。《数学与统计学》，11(5)：802–815。[14] Goyal, S. P.、Mathur, T. 和 Goyal, R.（2006）。双复伽马函数与贝塔函数。《拉贾斯坦物理科学学院学报》，5(1)：131–142。[15] Kilbas, A. 和 Saigo, M.（1995）。Mittag-Leffler 型函数的分数阶积分与导数。《白俄罗斯科学院院刊》，39(4)：22–26（俄文）。[16] Kilbas, A. A.、Saigo, M. 和 Saxena, R. K.（2004）。广义Mittag-Leffler函数与广义分数阶微积分算子。《积分变换与特殊函数》，15(1)：31–49。[17] Kilbas, A. A.、Srivastava, H. M. 和 Trujillo, J. J.（2006）。分数阶微分方程理论与应用。爱思唯尔，阿姆斯特丹。[18] Kumar, A. 和 Kumar, P.（2011）。拉普拉斯变换的双复版本。《国际工程与技术杂志》，3(3)：225–232。[19] Kumar, R.、Kumar, D. 和 Sharma, S. K.（2023）。双复空间中 Riemann-Liouville 分数阶算子的推广及其在分数阶微分方程中的应用。《数学与统计学》，11(5)：823–837。[20] Luna-Elizarr´as, M. E.、Shapiro, M.、Struppa, D. C. 和 Vajiac, A.（2012）。双复数及其初等函数。《*Cubo* 数学杂志》，14(2)：61–80。

[21] Miller, K. S. 和 Ross, B. (1993). 分数阶微积分与分数阶微分方程导论. Wiley，纽约。[22] Polito, F. 和 Tomovski, Z. (2016). Prabhakar 型分数阶微积分算子的一些性质。分数阶微分学，6(1):73–94。[23] Prabhakar, T. R. (1971). 核中含有广义 Mittag-Leffler 函数的奇异积分方程。横滨数学杂志，19:7–15。[24] Price, G. B. (1991). 多复空间与函数导论. Marcel Dekker Inc. 纽约。[25] Riley, J. D. (1953). 双复变量函数论的若干贡献。东北数学杂志，5(2):132–165。[26] Ringleb, F. (1933). 超复系统函数论的贡献。*I.* 巴勒莫数学会报告，57:311–340。[27] Rochon, D. 和 Shapiro, M. (2004). 关于双复数与双曲数的代数性质。奥拉迪亚大学纪事。数学分册，11:71–110。[28] Rönn, S. (2001). 双复代数与函数论。*arXiv:0101200v1[*数学：复变函数*],*第 1–71 页。[29] Samko, S. G.、Kilbas, A. A. 和 Marichev, O. I. (1993). 分数阶积分与导数：理论与应用. Gordon and Breach Science，伊韦尔东，瑞士。[30] Segre, C. (1892). 复形式的实表示与超代数对象。数学年刊，40:413–467。[31] Sharma, U. P. 和 Agarwal, R. (2022). 分数阶双复拉普拉斯变换的性质与应用。计算分析与应用杂志，30(1):370–385。[32] Sharma, U. P. 和 Agarwal, R. (2025). 双复空间中的 Prabhakar 函数与统一分数阶动力学方程。已提交。[33] Sharma, U. P.、Agarwal, R. 和 Nisar, K. S. (2022). 双复二参数 Mittag-Leffler 函数及其性质，以及在分数阶时间波动方程中的应用。巴勒斯坦数学杂志，12(1):462–481。

[34] Thirumalai, S. 和 Muthunagai, A. (2024). 双复数分数阶拉普拉斯变换应用概述。数学与计算机科学杂志，33:294–311。[35] Titchmarsh, E. C. (1937). 傅里叶积分理论导论. 克拉伦登出版社。[36] Toksoy, E. (2024). 双曲值 Beurling 加权双复数勒贝格空间及其若干几何特征。不等式与应用杂志，2024(1):153。[37] Toksoy, E. 和 Sağır, B. (2024). 关于具有双曲值范数的新型双复数勒贝格空间的几何特征与不等式。格鲁吉亚数学杂志，31(3):483–495。[38]Zayed, M.、Bakhet, A.、Fathi, M. 和 Saleem, M. A. (2025). 关于 k-双复数伽马函数与 k-双复数贝塔函数及其性质。《数学杂志》，2025(1):2657169。