无界柱形区域中旋转分层流三维 Boussinesq 方程的半解析伪谱方法

Jinge Wang[a], Philip S.Marcus[a], *

arXiv:2603.07046v1 [physics.flu-dyn] 7 Mar 2026

文章信息

关键词：涡旋动力学 剪切流 谱方法 Boussinesq近似 无界柱形区域 指数时间差分

摘要

本文提出一种伪谱方法，用于求解无界柱形区域中的三维 Boussinesq方程，专门针对受强方位剪切影响的旋转稳定分层流。为有效捕捉整体几何特征，同时不牺牲谱精度，空间离散在方位和轴向方向采用傅里叶展开，在径向方向采用映射缔合勒让德多项式。该基底覆盖半无限区域，并以解析方式处理原点处的坐标奇点。尽管这一谱框架能够保证较高的空间精度，但由于快速恢复性波力和迅速的背景平流所导致的数值刚性，对这些旋转剪切流进行时间积分仍面临严峻的计算挑战。为此，我们开发了一种指数时间差分（ETD）格式，对完全耦合的线性算子进行解析积分，其中包括径向变化的平流交叉项。通过将背景流的物理共振特征和稳定性极限直接编码到积分算子中，所提出的ETD公式消除了背景剪切和层化所施加的数值稳定性约束。因此，积分时间步可由物理不稳定性的缓慢宏观演化决定，而非快速的背景运动学；与标准隐式-显式混合格式相比，这显著提升了计算效率。通过精确守恒能量和角动量，验证了该方法的精度和稳定性，从而为模拟天体物理和地球物理涡旋中的不稳定性建立了稳健框架。

1. 引言

在从行星大气到原行星吸积盘等地球物理和天体物理系统中，动量输运和能量耗散往往由强背景旋转、稳定密度层化以及差异方位角剪切共同支配（Barranco 和 Marcus，2005；Armitage，2011）。这三种物理效应的共同作用可能引发复杂的流体动力学现象，包括分层旋转不稳定性（SRI）（Yavneh、McWilliams 和 Molemaker，2001；Molemaker、McWilliams 和 Yavneh，2001；Dubrulle, B.、Marié, L.、Normand, Ch.、Richard, D.、Hersant, F. 和 Zahn, J.-P.，2005）以及僵尸涡旋不稳定性（ZVI）（Marcus、Pei、Jiang 和 Hassanzadeh，2013；Marcus、Pei、Jiang、Barranco、Hassanzadeh 和 Lecoanet，2015）。历史上，对这类系统的数值研究和解析进展一直依赖局部剪切盒近似（见图1）（Balbus 和 Hawley，1998；Barranco 和 Marcus，2006）。然而，这种笛卡尔理想化模型存在固有的数学和物理局限（Regev 和 Umurhan，2008）。具体而言，剪切盒将局部剪切率与局部背景旋转人为地割裂开来，忽略了量级为 $\mathcal{O}(1/r)$ 的全局曲率项，并强加严格线性的背景速度分布，这可能人为限制大尺度模态的宏观径向演化。因此，尽管僵尸涡旋不稳定性等现象会在剪切盒中出现，但它们能否在连续的全局区域中维持，以及其结构如何演化，仍是有待解答的问题。为了施加几何约束并探究这类不稳定性是否能够在物理上维持，有必要在全局区域中研究该系统（Armitage，1998；Machida、Hayashi 和 Matsumoto，2000；Ebrahimi 和 Blackman，2016；Zhu、Jiang 和 Stone，2020）。

*通讯作者jinge@berkeley.edu (J. Wang); pmarcus@me.berkeley.edu (P.S. Marcus)https://cfd.me.berkeley.edu(P.S. Marcus) 开放研究者与贡献者身份标识符(s): 0009-0008-5310-8230(J. Wang); 0000-0001-5247-0643 (P.S. Marcus)https://www.linkedin.com/profile/view?id=jinge-wang-cfd (J. Wang)

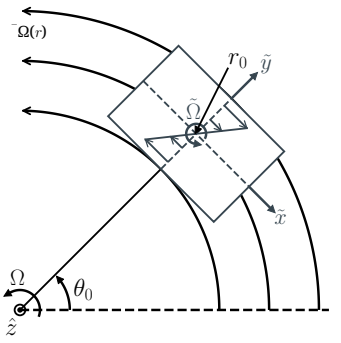


图1： 全局柱坐标 (r,θ,z) 与以 (r_0,θ_0)为中心的局部剪切盒 $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 之间的映射。局部坐标定义为 $\tilde{y}=r-r_0$、$\tilde{x}=-r_0(\theta-\theta_0)$和 $\tilde{z}=z$，使得局部单位向量分别对应于 $\tilde{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}$。重力沿 $-z$ 方向作用（指向页面内）。局部参考系以角速度 $\tilde{\Omega}=\bar{\Omega}(r_0)+\Omega$与背景共同旋转，其中 $\bar{\Omega}$表示全局背景流中随径向变化的角速度（通常遵循幂律剖面，例如吸积盘中的开普勒 $\bar{\Omega}\propto r^{-3/2}$），而 Ω是全局参考系的恒定背景旋转率。背景流的差分旋转在局部近似为线性剪切剖面 $\bar{u}_{\tilde{x}}=-\sigma\tilde{y}$，其中恒定剪切率定义为 $\sigma=r_0(\mathrm{d}\bar{\Omega}/\mathrm{d}r)|_{r_0}$（图示示例中为 $\sigma<0$）。

为在空间上离散化这些全局区域，通常采用谱方法。谱方法将空间区域投影到一组正交连续函数基上，并在谱空间中解析地计算空间导数；对于光滑函数，谱方法具有指数收敛和极低的数值耗散（Canuto、Hussaini、Quarteroni 和 Zang，2007）。Dedalus 项目（Burns、Vasil、Oishi、Lecoanet 和 Brown，2020）等现代开源框架，展现了这些技术在流体建模中的灵活性和广泛应用。然而，要在全局圆柱域中研究该系统，标准多项式基需要施加专门的奇偶性约束，以处理原点处的坐标奇点（Boyd 和 Yu，2011）。此外，在许多天体物理应用中，采用无界圆柱形区域有助于使流体不受刚性外边界引起的人为波反射影响。为此，本框架针对半无限径向区域采用映射缔合勒让德多项式（Matsushima 和 Marcus，1997），并结合方位和轴向方向上的傅里叶展开。这种组合在坐标奇点处具有自然的解析性，并在无穷远处呈代数衰减，由此构成稳健的伽辽金基，能够确保较高的计算效率，而无需显式施加极点条件。

为模拟分层系统的热力学和运动学，Boussinesq近似得到了广泛应用（Spiegel和Veronis，1960年）。通过滤除声波，该近似使速度场严格满足无散条件。通常采用极向-环向分解来施加这一约束，同时还能解析性地从动量方程中消去压力势（Matsushima和Marcus，1997年；Lee和Marcus，2023年；Wang、Lee和Marcus，2026）。在时间积分中，Boussinesq方程通常采用伪谱隐显式（IMEX）格式推进：在谱空间中对线性扩散项进行隐式处理（例如采用Crank-Nicolson方法），并在物理配置空间中对非线性平流项和科里奥利项进行显式处理（例如采用Adams-Bashforth方法）（Garcia、Net、García-Archilla和Sánchez，2010年；Garcia、Bonaventura、Net和Sánchez，2014；Gardner、Guerra、Hamon、Reynolds、Ullrich和Woodward，2018年；Gopinath、Fournier和Gastine，2022）。然而，强旋转、稳定分层和强烈方位剪切的综合物理效应会带来显著的数值刚性。非静水背景流驱动的快速平流输运，以及快速恢复的惯性重力（庞加莱）波，都会施加严格的Courant-Friedrichs-Lewy（CFL）条件（Gardner等，2018年；Vogl、Steyer、Reynolds、Ullrich和Woodward，2019年），迫使显式时间步长缩短到不切实际的程度，才能维持数值稳定性。对于垂直剪切不稳定性（ZVI）等慢不稳定性，这一计算瓶颈尤其难以克服，因为它们的演化时间尺度很长（Wohlever、Jiang和Marcus，2025年），需要采用较大的数值时间步长才能使计算保持可行。

为避免恢复性波力与背景平流共同造成的刚性，同时不依赖计算成本高昂的全局因式分解，指数时间差分（ETD）方法提供了一种有效的替代方案（Coxand Matthews，2002；Kassam and Trefethen，2005；Garcia et al.，2014）。ETD 方法利用矩阵指数来

解析性地积分控制方程中完全耦合的线性部分，从而自然跨越最快的线性时间尺度。正如（Moler and Van Loan，2003年）所述，尽管这类方法在过去受到算法复杂度的限制，但围道积分和 Krylov 子空间近似等稳定化技术的发展，已缓解了大规模矩阵求指数运算所面临的问题（Schulze,Schmid and Sesterhenn，2009年；Lan, Leng, Wang, Ju andGunzburger，2021年）。在本研究中，所选用的映射缔合勒让德基将线性算子组织成相互独立的低维块，从而便于直接实现 ETD。极向-环向分解对于标准 IMEX 格式具有显著优势，但会使 ETD 所需的精确矩阵对角化变得复杂。因此，本文提出的 ETD 格式采用原始速度变量进行构造，随后将极向-环向分解用作精确投影法，以充当压力求解器并施加无散条件。

本文其余部分安排如下。在 §2中，我们给出旋转分层布西内斯克流体的全非线性控制方程，并构建具体的全局背景剪切剖面。在 §3中，我们详细介绍采用映射缔合勒让德基进行的空间离散，并构建基本的块对角指数时间差分时间步进框架。我们进一步扩展指数时间差分格式，以解析性地对角化背景平流剪切，并阐述其与离心稳定性和临界层共振的物理联系。最后，在 §4中，我们给出代码的数值验证结果，并将其与已知的线性稳定性界限进行比较，最后在 §5中总结全文。

2. 控制方程

2.1. 方位剪切下的 Boussinesq 方程

我们研究无界全局柱状区域内黏性分层流体的动力学，该区域定义为$\hat{}$坐标 (r,θ,z) 及其单位矢量 $(\hat{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{z}})$，其中 $0 \le r < \infty$。流体受到恒定重力加速度 $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$的作用，所研究的系统处于绕垂直轴以恒定角速度旋转的参考系中： $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{z}}$，如图 1所示。流体的原始状态变量包括速度 $\boldsymbol{u}$、规范压力 p和重标度浮力 $b \equiv \rho g/\rho_0$。后两者均相对于密度恒定的流体静力参考态 ρ_0定义。

为分离我们关注的动力学过程，将总流动状态分解为稳态、轴对称的背景分量（用上横线表示）和随时间变化的分量（用撇号表示，例如 $p = \bar{p} + p'$）。背景状态假设为随径向变化的方位剪切流动，

$$\bar{\boldsymbol{U}} \equiv \bar{U}_\theta(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{1}$$

¯ ¯其角速度 Ω 和轴向涡度 ζ 可表示为

$$\bar{\Omega}(r) = \frac{\bar{U}_\theta}{r}, \quad \bar{\zeta}(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\bar{U}_\theta)}{\mathrm{d}r} = 2\bar{\Omega} + r\frac{\mathrm{d}\bar{\Omega}}{\mathrm{d}r}. \tag{2a,b}$$

假设背景浮力仅依赖于垂直坐标，且呈线性分布，其特征由一个常数布伦特-魏萨拉频率给出

$$\bar{N} = \sqrt{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bar{b}(z)}. \tag{3}$$

我们还要求扰动分量在原点 $(r = 0)$ 处保持解析，并在远场 $(r \to \infty)$ 足够快地衰减至零，从而使其在物理上局限于有限区域，且其总质量异常和能量均有限。关于这些极点条件的详细讨论见第2.3节。

我们采用 Boussinesq近似来描述流动动力学，并假设密度变化相对于 ρ_0 足够小，因此在惯性项中可以忽略，但在重力中予以保留。在这一近似下，只要背景压力场 $\bar{p}(r,z)$ 满足静力平衡和旋转地转平衡，给定的背景状态在无黏极限下便构成精确的平衡解：

$$\partial_r\bar{p} = \rho_0(\bar{\Omega} + 2\Omega)\bar{U}_\theta, \tag{4a}$$
$$\partial_\theta\bar{p} = 0, \tag{4b}$$
$$\partial_z\bar{p} = -\bar{\rho}g, \tag{4c}$$

径向压力梯度提供必要的向心力，以平衡背景旋转产生的科里奥利效应和惯性效应，而垂直梯度则平衡静力分层。为维持流态分解所隐含的稳态假设，我们明确忽略背景流的缓慢扩散，并假设其发生的时间尺度远长于我们关注的动力学过程。这一物理依据确保背景剖面保持不变，避免非物理漂移，并意味着控制方程中的黏性和扩散算子仅作用于扰动场。

通过从 Boussinesq 方程中去除背景平衡态，可得到系统的控制方程。注意到，线性背景分层的平流可简化为 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\bar{b} = -u_z'\bar{N}^2$，控制方程可写成涡量形式：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}' = 0, \tag{5a}$$

$$\partial_t\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}' - 2\Omega\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}' - b'\hat{\boldsymbol{z}} - \left(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\bar{\boldsymbol{U}} - \left(\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{u}' + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{\nabla}\Pi, \tag{5b}$$

$$\partial_t b' = -(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla})b' + u_z'\bar{N}^2 - (\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla})b' + \kappa\nabla^2 b', \tag{5c}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}'$，$\nu$ 和 κ 分别为流体的黏度和热扩散率，而 $2\Omega\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}'$在（5b）中表示作用于扰动速度的科里奥利力。这里，Π 是有效压力势，它吸收了压力（p'/ρ_0）、离心力[1], 以及与向量恒等式 $(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{\nabla}\left(|\boldsymbol{u}'|^2/2\right) - \boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}'$相关的标量势。需要强调的是，两个平流交叉项必须采用相同的形式（平流形式或涡量形式）：

$$\begin{aligned} &-\left(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\bar{\boldsymbol{U}} - \left(\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{u}' \\ &= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\bar{\boldsymbol{U}}\times\boldsymbol{u}') + \boldsymbol{u}'\times\bar{\zeta}\hat{\boldsymbol{z}} + \bar{\boldsymbol{U}}\times\boldsymbol{\omega}'\right] + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}'\times\bar{\boldsymbol{U}}) + \bar{\boldsymbol{U}}\times\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{u}'\times\bar{\zeta}\hat{\boldsymbol{z}}\right] \\ &= \boldsymbol{u}'\times\bar{\zeta}\hat{\boldsymbol{z}} + \bar{\boldsymbol{U}}\times\boldsymbol{\omega}', \end{aligned} \tag{6}$$

这要求每个交叉项中的两次旋度运算相互抵消，才能得到等式。

Boussinesq方程（5）可使用参考密度 ρ_0、特征速度U_0和长度尺度 L_0进行无量纲化，其中后两个特征尺度的选取取决于所关注的具体流动。由此得到一组无量纲参数，即罗斯贝数（Ro）、雷诺数（Re）和水平弗劳德数（Fr）：

$$Ro \equiv \frac{U_0}{2\Omega\cdot L_0}, \quad Re \equiv \frac{U_0\cdot L_0}{\nu}, \quad Fr \equiv \frac{U_0}{L_0\cdot\bar{N}}, \tag{7a,b,c}$$

其中，Fr 是平流时间尺度 L_0/U_0与内重力¯波特征时间尺度 $1/N$之比，反映了惯性力与浮力之间的相对强度。

2.2. 守恒定律

为建立验证数值格式的框架，我们推导 Boussinesq方程（5）的守恒定律。我们将扰动动能（E_{K}）和可用势能（E_{AP}）定义为:

$$E_{\mathrm{K}} \equiv \frac{1}{2}\int_V |\boldsymbol{u}'|^2\,\mathrm{d}V\,, \tag{8a}$$

$$E_{\mathrm{AP}} \equiv \frac{1}{2\bar{N}^2}\int_V (b')^2 dV. \tag{8b}$$

体积积分扩展到无界圆柱形区域（$0 \le r < \infty$），其中我们假设方位角（θ）和轴向（z）方向具有周期性；通过考虑足够长的区域长度，使所关注的动力学与边界效应相隔离，可以证明这一轴向周期性假设是合理的。需要注意的是，尽管背景浮力$\bar{b}(z)$ 是线性且非周期性的，但它与（5）解耦，因此不受这一假设的影响。

对动量方程（5b）取 $\boldsymbol{u}'$ 的标量积并在整个区域上积分，即可推导出动能演化方程。我们采用非线性项的涡量形式 $\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}'$，它

[1]与沿垂直轴的恒定背景旋转相关的离心加速度，可以表示为标量势的梯度。

由于向量正交性，与 $\boldsymbol{u}'$ 收缩时自然为零。科里奥利力的贡献同样为零，而所有通量项根据散度定理积分后均为零（详细推导见附录A ）。将浮力方程乘以 b' 并以相同方式积分，可得可用势能演化方程。由此得到的能量收支满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{K}} = -\mathscr{E}_{\mathrm{exc}} - \mathscr{E}_{\mathrm{shear}} - \mathscr{E}_{\mathrm{visc}}, \tag{9a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\mathrm{AP}} = \mathscr{E}_{\mathrm{exc}} - \mathscr{E}_{\mathrm{diff}}, \tag{9b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{AP}}\right) = -\mathscr{E}_{\mathrm{shear}} - \mathscr{E}_{\mathrm{visc}} - \mathscr{E}_{\mathrm{diff}}, \tag{9c}$$

其中，能量交换、剪切产生和耗散项定义如下：

$$\mathscr{E}_{\mathrm{exc}} = \int_V (b' \cdot u_z')\,\mathrm{d}V\,, \tag{10a}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{shear}} = \int_V \left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bar{\Omega}\right) u_r' u_\theta'\,\mathrm{d}V\,, \tag{10b}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{visc}} = \nu \int_V |\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}'|^2\,\mathrm{d}V\,, \tag{10c}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{diff}} = \frac{\kappa}{\bar{N}^2}\int_V |\boldsymbol{\nabla} b'|^2\,\mathrm{d}V\,. \tag{10d}$$

需要注意的是，我们采用可用势能 E_{AP}，而不是标准势能定义 $E_{\mathrm{P}} \equiv \int_V (z \cdot b')\,\mathrm{d}V$，因为后者的演化方程在轴向周期域中定义不明确，这是由于非零的边界通量 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[b' z \boldsymbol{u}'\right]$ 显式包含了非周期性的垂直坐标 z[2]。

在没有扩散的情况下，总扰动能量 $E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{AP}}$ 仅由剪切产生项驱动演化$\mathscr{E}_{\mathrm{shear}}$，该项表示背景流的方位剪切与扰动场之间的能量交换。注意， E_{shear} 仅作用于 E_{K}，因为方位剪切与层化方向正交。浮力通量 $\mathscr{E}_{\mathrm{exc}}$ 在 E_{K} 和 E_{AP} 方程中以相反符号出现，表示通过垂直运动实现的动能与势能之间的可逆转换。因此，如果考虑总流动场（背景流加扰动）的等效能量平衡，这两个相互作用项将成为系统内部项并不再出现；在无扩散极限下，整个系统的总能量严格守恒，详见附录A。

2.3. 极向-环向分解

控制 Boussinesq方程（5）以原始扰动变量 $(p', b', \boldsymbol{u}')$ 表示。由于速度场根据（5a）严格无散，我们采用极向-环向分解（Chandrasekhar，1981；Matsushima 和 Marcus，1997年；Lee 和 Marcus，2023年；Wang 等，2026年），以满足无散约束并解析性地消去压力变量。

选取轴向单位向量 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 作为参考向量，任意一般的无散向量场 $\boldsymbol{A}(r,\theta,z)$ 均可表示为两个标量势的形式：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times(\psi\hat{\boldsymbol{z}}) + \boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times(\chi\hat{\boldsymbol{z}})\right], \tag{11}$$

其中， $\psi(r,\theta,z)$ 和 $\chi(r,\theta,z)$ 分别为环向和极向流函数。对该分解取轴向分量和轴向旋度，可得到一组二维泊松方程：

$$-\nabla_\perp^2\chi = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{12a}$$

$$-\nabla_\perp^2\psi = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}), \tag{12b}$$

其中横向拉普拉斯算子$\nabla_\perp^2$ 定义为

$$\nabla_\perp^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{13}$$

[2]对于 z 中的真正无界区域，若边界条件的衰减足够快，则表面通量为零，并可据此构造相应的守恒定律。

为了从已知向量场中唯一确定 ψ 和 χ，必须求解这些泊松方程的逆问题。通过与自由空间格林函数进行二维卷积即可得到解，$G(r,\theta) = \ln r/(2\pi)$。正如Lee 和 Marcus(2023年)所讨论的，只要向量分量在远场呈代数衰减或更快衰减，这种卷积在数学上就是良定义的（$r \to \infty$），其上界为：

$$A_r \sim \mathcal{O}\left(r^{-1-p_1}\right), \quad A_\theta \sim \mathcal{O}\left(r^{-1-p_2}\right), \quad A_z \sim \mathcal{O}\left(r^{-2-p_3}\right), \tag{14a,b,c}$$

对于常数 $p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0$。若 $\boldsymbol{A}$ 表示速度场，这些界保证其动能密度在无界区域上给出有限的总能量，从而自然满足我们对扰动场的物理假设。此外，由于该向量场完全由极向-环向势的空间导数构造而成，任何常数偏移在物理上都无关紧要。因此，与拉普拉斯算子求逆相关的剩余规范自由度可通过施加如下边界条件予以消除：

$$\lim_{r\to\infty} \psi(r,\theta,z) = 0, \tag{15a}$$

$$\lim_{r\to\infty} \chi(r,\theta,z) = 0, \tag{15b}$$

因此，可以在相容无散矢量场空间与其极向-环向分量之间定义一个严格线性且可逆的投影算子 $\mathbb{P}_{\text{sol}}$：

$$\mathbb{P}_{\text{sol}}[\boldsymbol{A}] \equiv \begin{bmatrix} \psi \\ \chi \end{bmatrix}. \tag{16}$$

在柱坐标中，空间旋度算子与完整的三维拉普拉斯算子（∇^2）和横向拉普拉斯算子（$\nabla_\perp^2$）均可对易。这意味着控制Boussinesq方程中的线性黏性扩散算子可以直接作用于标量势，而不必作用于原始速度变量。此外，借助亥姆霍兹分解，我们可以将投影算子推广为一般的投影滤波器 $\mathbb{P}$；该分解表明，任意向量场 $\boldsymbol{F}$ 都可写为一个严格无散场与一个无旋标量梯度（$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\Pi$）之和，因此扩展后的投影算子可分离出无散部分的极向-环向分量：

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{F}] \equiv \mathbb{P}_{\text{sol}}[\boldsymbol{A}]. \tag{17}$$

注意，虽然严格无散场的极向势 χ 可以直接由轴向分量A_z求得，但从一般的非无散场中分离出无散部分，则需要对 $\boldsymbol{F}$ 同时取轴向旋度以及旋度的轴向旋度，以消去无旋标量场（$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\Pi \equiv \boldsymbol{0}$）。利用算子的可交换性，由此定义了扩展投影算子的广义泊松方程：

$$-\nabla_\perp^2 \psi = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}), \tag{18a}$$

$$-\nabla_\perp^2(-\nabla^2\chi) = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}). \tag{18b}$$

通过求解（18），扩展投影算子有效滤除任何标量梯度（$\mathbb{P}[\boldsymbol{\nabla}\Pi] \equiv \boldsymbol{0}$），并仅提取 $\boldsymbol{F}$的无散分量。

因此，将扩展投影算子应用于动量方程（5b）即可立即消去压力梯度 $\boldsymbol{\nabla}\Pi$。在我们的数值框架中，$\mathbb{P}$的定义因而具有双重作用。对于传统的 IMEX 格式（例如 Adams-Bashforth–Crank-Nicolson格式），$\mathbb{P}$ 充当降维技术，使得关于 $\boldsymbol{u}'$ 的动量方程能够直接在降维后的 (ψ,χ) 空间中表示并演化，而无需显式施加无散条件。与此同时，在即将构造的半解析ETD格式中，在原始速度空间对刚性线性算子进行对角化的效率显著更高。在此情形下，扩展算子 $\mathbb{P}$ 发挥着精确无散投影滤波器的作用。我们不显式计算压力场来更新速度，而只需将一个中间的、可能非无散的速度场映射到极向-环向空间，再映射回来（$\boldsymbol{F}_{\text{sol}} = \mathbb{P}_{\text{sol}}^{-1}[\mathbb{P}[\boldsymbol{F}]]$）。由于这些投影逆变换完全通过谱空间中的代数运算求得，该操作能够干净地滤除隐式压力梯度，并满足质量守恒，而无需像传统分步求解器那样构造复杂的压力边界条件。

3. 数值方法

为便于构建数值格式，我们将连续的 Boussinesq 扰动方程写成紧凑的向量算子记法。将原始速度基中的状态向量定义为

$$\boldsymbol{v} = [u'_r, u'_\theta, u'_z, b']^{\mathsf{T}}, \tag{19}$$

控制方程可以抽象地写为：

$$\partial_t \boldsymbol{v} = \mathcal{L}_{\mathrm{wave}}\boldsymbol{v} + \mathcal{L}_{\mathrm{diff}}\boldsymbol{v} + \mathcal{L}_{\mathrm{cross}}\boldsymbol{v} + \mathcal{N}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\Pi}, \tag{20}$$

并服从无散约束 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}' = 0$。此处，列向量 $\boldsymbol{\Pi} = [\boldsymbol{\nabla}\Pi, 0]^{\mathsf{T}}$ 吸收了所有有效无旋势，包括压力扰动、离心势，以及由非线性项的涡量形式导出的标量梯度。控制背景旋转与层化（$\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$）以及黏性/热扩散（$\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}$）的常系数线性矩阵算子显式给出如下：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{wave}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega & 0 & 0 \\ -2\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \bar{N}^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}_{\mathrm{diff}} = \begin{bmatrix} \nu\nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu\nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu\nabla^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa\nabla^2 \end{bmatrix}. \tag{21a,b}$$

其余算子分别表示与稳态背景剪切流的线性相互作用（$\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}$）以及非线性自平流（$\mathcal{N}$），它们作用于状态向量，产生如下列向量：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -(\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla})\bar{\boldsymbol{U}} \\ -(\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{\nabla})b' \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}' \\ -(\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla})b' \end{bmatrix}. \tag{22a,b}$$

为了对系统（20）进行时间积分，我们采用分步法。需要说明的是，在本节给出的数值方案中，诸如 $t_{N+1/2}$ 之类的上标记号严格用于表示单个时间步内的中间计算阶段，而非流动场在实际半时间间隔处的取值。此外，积分时间步 Δt 是均匀的，不考虑主动的时间步调整机制。在本研究评估的所有数值格式中，对扩散和非线性项的数值处理始终严格一致：黏性与热扩散算子（$\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}$）采用无条件稳定的 Crank-Nicolson（CN）方法隐式积分，而非线性自平流（$\mathcal{N}$）则采用二阶 Adams-Bashforth（AB2）方法显式积分。本文所给出各格式之间的根本差异完全在于对线性波（$\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$）与交叉项（$\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}$）算子的具体数值处理。

为清晰地展示数值实现的路线图，本节安排如下。§3.1介绍谱展开。§3.2 详述标准 IMEX 方法所涉及的数值刚性。§3.3 阐述半解析 ETD 方法，并以基本 $\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$ 算子为例进行说明。我们还将详细介绍压力梯度的解析处理方法，以及零特征值奇点的消解方法。§3.4介绍完整的 ETD 格式，并明确推导线性交叉项的对角化。最后，§3.5 讨论数值稳定化方法，包括超黏性以及区域边界处的波吸收。

3.1. 谱展开

在无界圆柱形区域中，周期性方位向和轴向采用傅里叶级数展开，径向方向采用映射后的伴随勒让德多项式展开（Matsushima 和 Marcus，1997年）。具体而言，半无限径向区域（$0 \le r < \infty$）通过代数变换映射到有限区域 $\mu \in [-1, 1]$：

$$\mu(r) = \frac{r^2 - L^2}{r^2 + L^2}, \tag{23}$$

其中 $L > 0$ 是一个可调映射参数。径向基随后由标准缔合勒让德多项式 $P_n^m(\mu)$ 构造：

$$P_{Ln}^m(r) \equiv P_n^m(\mu(r)), \tag{24}$$

因此，任意标量场 ϕ （表示 $\boldsymbol{v}$ 的任意分量）均可展开为

$$\phi(r,\theta,z,t)=\sum_{m,k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\tilde{\phi}_{mnk}(t)\,P_{Ln}^{m}(r)\,e^{\mathrm{i}(m\theta+kz)}, \tag{25}$$

其中， m 和 k 分别为方位角波数和轴向波数， n 为缔合勒让德多项式的次数。对于任意实标量场 $\phi\in\mathbb{R}^3$，实数条件还要求 (m,k) 和$(-m,-k)$ 展开之间满足复共轭关系，因此我们只需保留一半的波数，例如 $m\geq 0$。

˜谱系数 $\phi_{mnk}(t)$的计算基于以下正交条件：

$$\int_0^{\infty}P_{Ln}^{m}(r)P_{Ln'}^{m}(r)w(r)\,\mathrm{d}r=\delta_{nn'}\left(N_n^m\right)^2, \tag{26}$$

其中， $\left(N_n^m\right)^2=2(n+|m|)!/((2n+1)(n-|m|)!)$ 为归一化常数， $w(r)=4L^2r/(r^2+L^2)^2$ 为映射后的权函数。利用这一正交关系，通过对物理场 $\hat{\phi}_{mk}(r,t)$、基函数 $P_{Ln}^{m}(r)$和权函数 $w(r)$ 的乘积在径向区域上积分，即可提取谱系数。实际计算中，由于这一关于 $[0,\infty)$ 的连续积分可以完美映射回有界区间 $\mu\in[-1,1]$，因此可采用定义在 μ 网格上的标准高斯-勒让德求积高效地进行数值积分。

对于无界柱形区域，由于若干理论和计算方面的原因，映射缔合勒让德基具有显著优势。首先，解析映射会将一半的径向配置点恰好分配到内区域 $0\leq r\leq L$，从而在涡旋动力学和剪切梯度通常最为显著的区域自然形成较高的数值分辨率。这种局部分辨率调节被 Lee 和 Marcus (2023年) 有效地应用于不可压柱状涡旋的线性稳定性分析中。此外，基函数在 C^{∞} 处表现为 $r=0$，从而保证了坐标奇点处所需的解析性条件。在远场（$r\to\infty$，对应于 $\mu\to 1$）中，映射多项式按 $\mathcal{O}\left(r^{-|m|}\right)$衰减，因此，对于任何在 $r\to\infty$按代数或指数规律衰减的 C^{∞} 函数，映射缔合勒让德多项式天然构成一个能够实现指数谱收敛的 Galerkin基组（Matsushima 和 Marcus，1997年；Lee 和 Marcus，2023年）。

需要特别指出的是，在进行极向-环向分解时，若直接将标量流函数（ψ 和 χ）展开到映射缔合勒让德基中，则必须加入补充对数项 $P_l(r)\equiv\ln\left((L^2+r^2)/(2L^2)\right)$，以描述 $\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$ 方位速度场的远场渐近行为（u_θ）以及速度场和涡量场的平均轴向分量（Matsushima 和 Marcus，1997年）。幸运的是，对该对数项求导后，它可以完美地映射回标准多项式空间： $r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}P_l=P_{L0}^{0}+P_{L1}^{0}$，因此原始速度（$\boldsymbol{u}'$）和涡量（$\boldsymbol{\omega}'$）场本身均可完全且精确地仅使用标准 $P_{Ln}^{m}(r)$基展开，无需任何对数修正。此外，正如附录C中所述，投影后的对数系数 ψ_l对于非线性项 $\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{\omega}'$和线性波项 $-(2\Omega\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}'+b'\hat{\boldsymbol{z}})$ 自然恰好为零，从而确保其不会在动力学上使时间演化方程变得复杂。

还需指出，密度扰动 b' 受到一项特殊的物理约束。由于¯按照定义，给定的背景分层 $b(z)$ 在水平方向上均匀且动力学上刚性，因此无法在动力学上重新分配或吸收净水平质量亏损。因此，任何物理上可实现的局域扰动都必须将其总质量异常限制为在无界区域内有限，这意味着其轴对称（$m=0$）模态必须快速衰减，至少以不慢于 $\mathcal{O}\left(r^{-4}\right)$的速度衰减，当 $r\to\infty$ 时。在映射域中，这意味着轴对称模态必须能够被 $(1-\mu)^2$ 整除，这在数学上可表示为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}'_{0nk}=0\quad\text{and}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}'_{0nk}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0\quad\text{for all }k. \tag{27}$$

由于控制方程和谱空间算子守恒整个区域积分的质量异常，上述谱约束只需由初始条件满足，而数值格式将保持这种渐近衰减，无需在时间积分过程中进行显式滤波。

采用完整的谱基，控制方程（20）按照伪谱方法进行积分，该方法需要在三个不同的计算空间之间进行转换：

- **FFF（函数-函数-函数）空间：**空间变量通过（25）展开的全谱域。具有常系数的线性算子（如扩散）在此处通过代数运算求值。

- **PPP（物理-物理-物理）空间：**在离散空间网格点上求值的全物理域。
- **PFF（物理-函数-函数）空间：**一种混合空间，其中方位维和轴向维仍采用傅里叶空间表示，而径向维则在物理配置点处求值，以适应 $\mathcal{L}_{\text{cross}}$的径向依赖。

为计算非线性对流乘积 $\mathcal{N}(\boldsymbol{v})$，我们将状态向量变换到 PPP 空间，并在其中进行逐点直接乘法，从而避免在谱空间中计算代价高昂的卷积积分。随后，在应用线性算子之前，再将结果变换回 FFF 空间。尽管这种方法效率很高，但在物理域中进行这种逐点求值并结合谱截断，会引入混叠误差；我们将在 §3.5中讨论这一问题。

除了计算非线性项之外，我们的谱表示还为线性物理过程带来了显著的计算优势，主要体现在所得矩阵的稀疏性和高度结构化特征上。例如，将横向拉普拉斯算子 $\nabla_\perp^2$ 作用于基函数P_{Ln}^m 可得到解析关系$\nabla_\perp^2|_{m,n} = (4n(n+1)L^2)/(L^2+r^2)^2$。这一性质以及 Matsushima 和 Marcus (1997年) 所记载的其他运算递推关系，确保径向微分算子可直接映射为窄带矩阵，从而大幅降低数值求解器的计算复杂度和内存占用。

此外，由于方位维和轴向维采用正交傅里叶基展开 $e^{\mathrm{i}(m\theta+kz)}$，三维线性算子（例如 $\mathcal{L}_{\text{wave}}$、$\mathcal{L}_{\text{cross}}$和 $\mathcal{L}_{\text{diff}}$）相对于 m 和 k完全解耦。因此，对于每一组 (m,k) 对，它们都可分解为一组相互独立的带状块矩阵，非常适合大规模并行化。在我们的实现中，谱 (m,k) 模态通过消息传递接口（MPI）采用二维铅笔分解的方式，分布到各个独立的计算处理器上（例如参见Dalcin、Mortensen 和 Keyes，2019年；Lee 和 Wang，2025年）。这种数据分布策略使线性算子能够在所有处理器上同时计算，而无需任何进程间通信。

事实上，处理器间通信仅发生在为计算非线性乘积而必须进行的 FFF 空间与 PPP 空间之间的计算空间转换过程中。由于快速傅里叶变换（FFT）要求沿给定空间维度对所有数据点进行连续内存访问，因此必须通过 MPI 全对全通信，沿两个铅笔分解方向转置并重新排列全局数据数组。虽然线性物理过程可实现完美扩展，但在大规模多节点部署中，这些全局内存转置会成为主要的带宽瓶颈。

3.2. 显式处理背景项所带来的刚性

一种标准且广泛采用的时间积分方法，是将线性算子 $\mathcal{L}_{\text{wave}}$ 和 $\mathcal{L}_{\text{cross}}$与非线性项一同显式处理。采用这种格式的主要动机在于，它能够主要在约化的极向-环向状态空间 $\boldsymbol{V} = [\psi, \chi, b']^{\mathrm{T}}$中运行。将原始速度分量转换为标量势后，演化变量的数量便从四个减少到三个。

值得注意的是，由于定义极向-环向分解的旋度算子与三维拉普拉斯算子 ($\mathbb{P}\nabla^2\boldsymbol{u}' = \nabla^2\mathbb{P}[\boldsymbol{u}']$) 完全可交换，因此可以直接在极向-环向基上计算隐式扩散算子 $\mathcal{L}_{\text{diff}}$。此外，直接应用正向极向-环向投影 ($\mathbb{P}$)，即可提取任意向量场的无散分量，从而自动消去无旋势场 ($\mathbb{P}[\nabla\Pi] \equiv \mathbf{0}$)，无需专门的压力泊松求解器。数值格式如下：

数值算法1（极向-环向空间中的显式AB2-CN格式）。

1. **显式强迫与投影：** 给定谱极向-环向状态 $\boldsymbol{V}^{t_N}$，重构原始变量：

$$\boldsymbol{v}^{t_N} = \mathbb{P}_{\text{sol}}^{-1}[\boldsymbol{V}^{t_N}]. \tag{28}$$

在物理（PPP）空间中计算显式强迫向量，并将其投影到谱（FFF）空间的极向-环向分量：

$$\boldsymbol{F}^{t_N} = \mathbb{P}\left[\mathcal{L}_{\text{wave}}\boldsymbol{v}^{t_N} + \mathcal{L}_{\text{cross}}\boldsymbol{v}^{t_N} + \mathcal{N}(\boldsymbol{v}^{t_N})\right]. \tag{29}$$

2. **AB2外推：**使用历史 Adams-Bashforth 权重推进投影后的显式强迫，得到未扩散的中间状态：

$$\boldsymbol{V}^{t_{N+1/2}} = \boldsymbol{V}^{t_N} + \Delta t\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{F}^{t_N} - \frac{1}{2}\boldsymbol{F}^{t_{N-1}}\right). \tag{30}$$

3. **采用 Crank–Nicolson（CN）进行隐式扩散：**求解由此得到的解耦隐式亥姆霍兹方程，得到扩散后的极向-环向状态，从而完成时间步：

$$\boldsymbol{V}^{t_{N+1}} = \left(\mathrm{diag}^{-1}(\nu,\nu,\kappa)\frac{2}{\Delta t} - \nabla^2\right)^{-1}\left(\mathrm{diag}^{-1}(\nu,\nu,\kappa)\frac{2}{\Delta t}\boldsymbol{V}^{t_{N+1/2}} + \nabla^2\boldsymbol{V}^{t_N}\right). \tag{31}$$

由于该方案原生运行于极向-环向空间，因此内存占用低，且每个时间步的计算效率高。扩散算子的可交换性确保隐式求解能够原生保持无散条件，这意味着压力处理完全局限于显式投影步骤，并通过极向-环向投影完成。该方案尤其稳健，适用于背景旋转和层化较弱、且背景态纯粹为静水平衡态的物理情形。

然而，对 $\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}$ 进行显式处理，会给快速旋转或强层化流带来严重的运行限制。通过观察可知，矩阵算子 $\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$ 如式（21a）所示，具有严格的 2×2 块对角结构，其特征值很容易确定：$\lambda_{\mathrm{wave}} = \pm\mathrm{i}2\Omega$ 和 $\pm\mathrm{i}N$。这些纯虚特征值恰好对应于惯性振荡（惯性振动）和内重力波的物理频率。使用 Adams-Bashforth方法显式处理这类回复性高频物理过程时，为了保证绝对数值稳定性，可允许的时间步会受到严格限制。具体而言，为使这些纯虚特征值勉强处于数值稳定区域内，积分时间步会受到最快线性波[3]的严重限制：$\Delta t \lesssim \mathcal{O}(1/\max(2\Omega, \bar{N}))$。

此外，当背景流具有强烈的方位剪切时，平流会主导交叉项算子 $\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}$，从而产生与局部角速度成比例的特征值，并对时间步施加额外的平流约束。尽管这些径向相关交叉项所产生的特殊刚性将在第3.4节中作形式化阐述并加以解决，但其在此处的存在使问题更加复杂。因此，对于背景旋转、层化或剪切的时间尺度显著快于非线性小尺度扰动时间尺度的流动，这种显式形式会迫使数值格式采用小得难以接受的时间步，从而使长期积分变得不可行。

我们必须强调，尽管将 $\mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$和 $\mathcal{L}_{\mathrm{cross}}$ 与扩散项一起吸收到隐式 Crank-Nicolson 求解中，以绕过这些显式稳定性极限似乎是直观的做法，但这样会引入严重的数值伪影。Crank-Nicolson 法使用 $(1,1)$ 帕德近似来逼近精确指数时间演化。对于纯虚特征值——它们完美刻画了惯性-重力波和回旋波的恢复性振荡特征——这种近似无条件稳定，其放大因子的模恰好为 1。然而，在较大的库朗数下，帕德近似会产生严重的相速度迟滞。这种数值色散会使高频波产生非物理的减速和陡化，进而生成虚假的“振铃”振荡。在旋转层化剪切流中，这些非物理的色散伪影在现象上会伪装成真实的涡旋不稳定性。因此，不能信赖对波项和交叉项采用隐式 CN 处理，这也促使我们需要一种半解析积分方法。

3.3. 采用指数时间差分的半解析时域积分

为解决数值刚性，同时避免人为降低相速度或引入数值色散，我们采用指数时间差分格式，将刚性线性算子指数化，并在一个时间步内对线性波动和平流过程进行解析积分。

与 AB2-CN格式不同，ETD公式主要在原始速度空间（$\boldsymbol{v}$）中运算。这是因为，将原始形式中的全耦合线性算子指数化后，可以直接而简便地进行对角化；而极向-环向形式则难以处理。为奠定我们方法的数学基础并给出通用方案，我们首先推导一种基本的 ETD 格式，该格式仅分离并指数化常系数波动算子[4]。

为保持层　　为确保矩阵指数和原始形式向量的符号表示一致，我们令　　：

$$\mathsf{L} \equiv \mathcal{L}_{\mathrm{wave}}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{L}_{\mathrm{cross}}\boldsymbol{v} + \mathcal{N}(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{L}_{\mathrm{diff}}\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{\Pi}(t). \tag{32a,b,c}$$

[3]在本次刚性分析中，我们假设背景处于稳定分层状态（$\bar{N}^2 > 0$），由此得到导致严苛振荡约束的纯虚特征值。不过值得注意的是，后续各节所建立的半解析指数时间差分格式在数学上仍适用于不稳定分层（$\bar{N}^2 < 0$），且具有严格的准确性，因为该格式能够自然且精确地积分由此产生的实指数增长因子。

[4]这种基本的指数时间差分格式也能充分处理静力背景。

将连续控制方程乘以矩阵积分因子 $e^{-\mathsf{L}t}$，得：

$$\partial_t \left(e^{-\mathsf{L}t}\boldsymbol{v}\right) = e^{-\mathsf{L}t}\left(\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t)\right), \tag{33}$$

它可以在单个时间步内从 t_N 到 t_{N+1}精确积分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{t_{N+1}} &= e^{\mathsf{L}\Delta t}\boldsymbol{v}^{t_N} + \int_0^{\Delta t} e^{\mathsf{L}(\Delta t-\tau)}\left(\boldsymbol{f}(t_N+\tau)+\boldsymbol{g}(t_N+\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \mathsf{E}\boldsymbol{v}^{t_N} + \mathsf{NL}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{f}^{t_N} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{t_{N-1}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{t_N} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{t_{N+1}}\right) + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right),\end{aligned} \tag{34}$$

其中，离散积分算子定义如下：

$$\mathsf{E} \equiv e^{\mathsf{L}\Delta t}, \quad \mathsf{NL} \equiv \int_0^{\Delta t} e^{\mathsf{L}(\Delta t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \mathsf{L}^{-1}\left(e^{\mathsf{L}\Delta t} - \mathbf{I}\right). \tag{35a,b}$$

需要注意的是，显式强迫、扩散项和无旋势在整个积分区间 $\tau \in [0, \Delta t]$内都持续演化，其积分被近似为常量，并提至积分算子之外。具体而言，显式项 $\boldsymbol{f}$ 使用历史二阶 Adams-Bashforth 权重进行外推，而隐式扩散和势场 $\boldsymbol{g}$则采用克兰克-尼科尔森时间平均进行近似。

(34)的右端包含未知的未来状态 $\boldsymbol{g}^{t_{N+1}}$。为在不损害二阶精度的情况下将其分离出来，我们利用两个指数时间差分算子的泰勒级数展开：

$$\mathsf{E} = \mathbf{I} + \Delta t\mathsf{L} + \frac{\Delta t^2}{2}\mathsf{L}^2 + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right), \tag{36a}$$

$$\mathsf{NL} = \Delta t\mathbf{I} + \frac{\Delta t^2}{2}\mathsf{L} + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right). \tag{36b}$$

展开(34)中的隐式项组合后可以证明，对克兰克-尼科尔森平均应用 NL算子，在数学上等价于直接对历史隐式状态应用指数算子，二者相差至多 $\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)$局部截断误差：

$$\mathsf{NL}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{t_N} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{t_{N+1}}\right) = \mathsf{E}\tilde{\boldsymbol{g}}^{t_N} + \tilde{\boldsymbol{g}}^{t_{N+1}} + \mathcal{O}\left(\Delta t^3\right), \tag{37}$$

其中，我们将时间缩放的隐式量定义为 $\tilde{\boldsymbol{g}} \equiv (\Delta t/2)\boldsymbol{g}$，并采用展开式 $\tilde{\boldsymbol{g}}^{t_{N+1}} = \tilde{\boldsymbol{g}}^{t_N} + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$。由于局部截断误差为 $\mathcal{O}\left(\Delta t^3\right)$，这一代换保持了二阶全局精度。将这一一致近似代回数值格式，并展开 $\tilde{\boldsymbol{g}}$，即可分离已知状态和未知状态：

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}\right)\boldsymbol{v}^{t_{N+1}} + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{t_{N+1}} = \mathsf{E}\left(\boldsymbol{v}^{t_N} + \frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}\boldsymbol{v}^{t_N} - \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{t_N}\right) + \mathsf{NL}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{f}^{t_N} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{t_{N-1}}\right), \tag{38}$$

~其中，$\boldsymbol{\Pi} \equiv (\Delta t/2)\boldsymbol{\Pi}$ 是缩放无旋势向量。方程（38）的右端严格由已知量构成，形成中间状态 $\boldsymbol{v}^{t_{N+1/2}}$。对等式两边应用连续的极向-环向投影 $\mathbb{P}$，即可自然消去更新后的势 $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{t_{N+1}}$。由于 $\mathbb{P}$ 与 $\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}$ 可交换，这一代数化简直接得到扩散极向-环向状态所满足的解耦隐式亥姆霍兹方程。

为计算精确的　　矩阵指数，4×4 常系数算子 $\mathsf{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{wave}}$ 被对角化　　as

$$\mathsf{L} = \mathsf{S}\mathsf{J}\mathsf{S}^{-1}, \tag{39}$$

其中，J 是由特征值构成的对角矩阵，表示惯性波与内重力波频率；S和 S^{-1} 分别是相应的特征向量矩阵及其解析逆矩阵：

$$\mathsf{J} = \mathrm{diag}\left(\mathrm{i}2\Omega,\ -\mathrm{i}2\Omega,\ \mathrm{i}\bar{N},\ -\mathrm{i}\bar{N}\right), \tag{40a}$$

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\bar{N} & \mathrm{i}\bar{N}\end{bmatrix}, \qquad \mathsf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i} & 0 & 0\\ 1 & \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i}/\bar{N}\\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i}/\bar{N}\end{bmatrix}. \tag{40b}$$

随后即可直接计算离散积分算子：

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}\Delta t}\mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{NL} = \mathbf{S}\mathbf{J}^{-1}\left(e^{\mathbf{J}\Delta t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{S}^{-1}, \tag{41a,b}$$

这些量在各个时间步之间保持不变，因此可以在初始化期间预先计算。

与 **NL** 算子的数值计算相关的一个重要技术细节是：当 **J**包含零特征值时（例如，当不存在背景旋转时，$\Omega = 0$，导致 $\mathbf{J}^{-1}$ 变得未定义），会出现奇点，必须加以处理。这种不定式严格来说只是数学上的，而非物理上的；对于相应的对角分量，记为 λ，可通过应用洛必达法则加以消除：

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{e^{\lambda \Delta t} - 1}{\lambda} = \Delta t. \tag{42}$$

因此，对角化线性算子的任何零特征值都会平滑地趋于 Δt，从而使该特定分量的指数时间差分积分有效地退化为标准的二阶 Adams–Bashforth 方法显式更新（对于非旋转情形，水平速度分量在时间积分中退化为二阶 Adams–Bashforth 方法）。

同样，对于 z-不变模态，还会出现一个关键的物理奇点。考虑扰动场的 $k = 0$波数：$\boldsymbol{u}'_{m0} \equiv \boldsymbol{u}'_{m0}(r, \theta)$。无散条件（5a）是线性的，这表明它可以由一组极向-环向势函数构造而成：$\boldsymbol{u}'_{m0} = (\partial_\theta \psi'_{m0}/r)\hat{\boldsymbol{r}} - \partial_r \psi'_{m0}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \nabla_\perp^2 \chi'_{m0}\hat{\boldsymbol{z}}$。将 $\mathcal{L}_{\text{wave}}$ 作用于$\boldsymbol{u}'_{m0}$ 所得的结果为 $2\Omega\partial_r\psi'_{m0}\hat{\boldsymbol{r}} + (2\Omega\partial_\theta\psi'_{m0}/r)\hat{\boldsymbol{\theta}} - b'_{m0}\hat{\boldsymbol{z}}$，其散度为 $2\Omega\nabla^2\psi_{m0}$。因此，它会立即由二维压力场（$\Pi_{m0} = 2\Omega\psi_{m0}$）平衡，仅留下轴向分量，所以科里奥利力对 $k = 0$ 模态的物理演化施加的净动力学效应恰好为零。如果对这些模态直接套用标准的 **E**和 **NL** 算子，数值格式将以非物理方式使其旋转，从而破坏流动的动能。为确保物理性质正确，所有 $k = 0$ 模态的离散水平指数时间差分算子都必须手动覆盖，使其与非旋转极限相匹配：$\mathbf{E}_{k=0} \to \mathbf{E}_{\Omega=0}$ 和 $\mathbf{NL}_{k=0} \to \mathbf{NL}_{\Omega=0}$。

在明确界定算子并满足约束条件后，基本的 ETD 时间步进算法如下[5]：

数值流程 2（原始变量空间中的指数时间差分格式）。

1. **显式强迫与滤波：** 给定原始变量状态 $\boldsymbol{v}^{t_N}$，在物理（PPP）空间中计算显式强迫 $\boldsymbol{f}^{t_N}$，并将显式项投影至极向-环向空间后再投影回来，以便在时间积分前严格满足不可压缩性，确保数值稳定性：

$$\boldsymbol{f}_{\text{sol}}^{t_N} = \mathbb{P}_{\text{sol}}^{-1}\left[\mathbb{P}[\mathcal{L}_{\text{cross}}\boldsymbol{v}^{t_N} + \mathcal{N}(\boldsymbol{v}^{t_N})]\right]. \tag{43}$$

2. **ETD 推进：** 对历史原始变量状态和经 AB2 外推的显式强迫应用精确矩阵指数，得到中间的未扩散状态：

$$\boldsymbol{v}^{t_{N+1/2}} = \mathbf{E}\left(\boldsymbol{v}^{t_N} + \frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_{\text{diff}}\boldsymbol{v}^{t_N} - \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{t_N}\right) + \mathbf{NL}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{f}_{\text{sol}}^{t_N} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_{\text{sol}}^{t_{N-1}}\right). \tag{44}$$

3. **隐式扩散：** 应用前向极向-环向投影 $\mathbb{P}$，以代数方式消去势梯度$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^{t_{N+1}}$。在谱（FFF）空间中求解由此得到的解耦隐式亥姆霍兹方程，得到扩散后的极向-环向状态，从而完成显式物理过程：

$$\boldsymbol{V}^{t_{N+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_{\text{diff}}\right)^{-1}\mathbb{P}[\boldsymbol{v}^{t_{N+1/2}}]. \tag{45}$$

随后，通过以下方式重构最终的原始速度

$$\boldsymbol{v}^{t_{N+1}} = \mathbb{P}_{\text{sol}}^{-1}[\boldsymbol{V}^{t_{N+1}}]. \tag{46}$$

[5]可采用理查森外推来启动时间步进，该方法由两个半步和一个整步组成，每一步都遵循一阶指数时间差分格式：使用前向欧拉方法提取非线性项和交叉项，并使用后向欧拉方法处理压力项和扩散项。

4. **压力提取：** 使用中间状态的残差计算更新后的无旋势，并将其存储以供后续时间步使用：

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}^{t_{N+1}} = \boldsymbol{v}^{t_{N+1/2}} - \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathcal{L}_{\text{diff}}\right)\boldsymbol{v}^{t_{N+1}}. \tag{47}$$

值得一提的是，在显式强迫项计算（43）中使用极向-环向投影是一种可选处理方式，可用于提高数值稳定性。从本质上说，它将压力项分解为两个不同的分量：第一部分即时处理由非线性相互作用引起的速度变化，第二部分则处理由线性项的显式时间积分引起的变化。虽然这一额外步骤既不会增加也不会降低数值格式的局部截断误差阶数，但它确保输入指数时间差分格式积分算子的任何场都是无散的，从而提高代码的整体稳定性。

3.4. 背景剪切的对角化

虽然上述基本指数时间差分格式能够稳定恢复性波力，但通过 Adams-Bashforth 方法显式计算背景剪切交叉项，对于强剪切流仍然会导致难以实际处理的刚性问题。为实现稳健的模拟速度，必须扩展解析积分，使其不仅涵盖波算子，还包括这些剪切相互作用。然而，要将交叉项纳入精确矩阵指数，必须谨慎选择其数学表达形式，因为这将直接决定所得数值格式的计算可行性。

如果将 $\mathcal{L}_{\text{cross}}$ 表示为涡量形式 $\mathcal{L}_{\text{cross}}(\boldsymbol{v}) = \bar{\boldsymbol{U}} \times \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{u}' \times \bar{\zeta}(r)\hat{\boldsymbol{z}}$，它便揭示了两种截然不同的物理机制：扰动涡量的宏观平流与拉伸（$\bar{\boldsymbol{U}} \times \boldsymbol{\omega}'$），以及由背景涡量（$\boldsymbol{u}' \times \bar{\zeta}\hat{\boldsymbol{z}}$）驱动的局部类科里奥利恢复力。尽管这种形式具有直观的物理意义，但为获得 $\boldsymbol{\omega}'$ 所需的旋度算子，会使不同速度分量在涡量拉伸项中不可避免地发生耦合。对这一微分算子进行指数化处理，需要求逆一个规模庞大的全局耦合矩阵系统，从而使精确积分在计算上难以承受。另一种选择是采用混合格式来规避这一结构性问题：将纯代数项 $-\bar{\zeta}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{u}'$ 与波算子一并进行解析性对角化，并将存在问题的微分项 $\bar{\boldsymbol{U}} \times \boldsymbol{\omega}'$ 吸收到显式计算的强迫向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$中。然而，我们的数值实验表明，这种部分ETD实现即使在中等时间步下也不可避免地会发生数值爆炸，这说明由于对剩余交叉项采用显式处理，该格式仍具有严重的刚性。

然而，将交叉项写成原始对流形式，就能克服这一结构性限制：$\mathcal{L}_{\text{cross}} = -(\bar{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}' - (\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\nabla})\bar{\boldsymbol{U}}$。由于背景流严格沿方位方向（$\bar{\boldsymbol{U}} = r\bar{\Omega}(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$），在柱坐标中计算扰动向量的这些方向导数时，会产生几何非对角项以及¯对流对角项 $-\mathrm{i}m\Omega(r)$，这些项均不含径向导数。因此，完全耦合的线性算子$\mathsf{L} = \mathcal{L}_{\text{wave}} + \mathcal{L}_{\text{cross}}$ 在 r中严格为代数形式。这保证了在混合 PFF 空间中，L 在每个径向配置点和每个方位波数处都构成一个独立的 4×4 块对角矩阵：

$$\begin{aligned}\mathsf{L}(r,m) &= \begin{bmatrix} \mathsf{L}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathsf{L}_V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathrm{i}m\bar{\Omega}(r) & 2\Omega + 2\bar{\Omega}(r) & 0 & 0 \\ -2\Omega - \bar{\zeta}(r) & -\mathrm{i}m\bar{\Omega}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}m\bar{\Omega}(r) & -1 \\ 0 & 0 & \bar{N}^2 & -\mathrm{i}m\bar{\Omega}(r) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{48}$$

因此，我们可以在每个 (r,m)对处独立地对该系统进行对角化并求幂，而不会耦合全局区域。

由于水平块（L_H）和垂直块（L_V）完全解耦，因此分别对它们进行对角化。对于水平块，特征值在数学上刻画了多普勒频移后的 эпicyclic 频率，从而得到以下对角矩阵和特征向量矩阵：

$$\mathsf{J}_H = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}(m\bar{\Omega} + \sqrt{\Delta}) & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}(m\bar{\Omega} - \sqrt{\Delta}) \end{bmatrix}, \tag{49a}$$

$$\mathsf{S}_H = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2\Omega+\bar{\zeta}} & -\frac{\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2\Omega+\bar{\zeta}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{S}_H^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\frac{2\Omega+\bar{\zeta}}{2\sqrt{\Delta}} & \frac{1}{2} \\ \mathrm{i}\frac{2\Omega+\bar{\zeta}}{2\sqrt{\Delta}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{49b}$$

其中，广义瑞利判据 $\Delta(r)$定义为

$$\Delta(r) \equiv 2(\bar{\zeta}(r) + 2\Omega)(\bar{\Omega}(r) + \Omega). \tag{50}$$

对于垂直块，其特征值对应于多普勒频移浮力频率，计算结果为：

$$\mathbf{J}_V = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}(m\bar{\Omega} + \bar{N}) & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}(m\bar{\Omega} - \bar{N}) \end{bmatrix}, \tag{51a}$$

$$\mathbf{S}_V = \begin{bmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{\bar{N}} & \frac{\mathrm{i}}{\bar{N}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{i}\bar{N}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}\bar{N}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{51b}$$

值得注意的是，这些垂直特征向量与基本无剪切 ETD 格式中的特征向量保持完全一致，因为平流交叉项在物理上会对相位累积速率施加多普勒频移，而不会改变基本的垂直特征结构。

这一完整的解析对角化揭示了 ETD 框架背后深刻的物理优雅性：流体的基本稳定性极限和共振特征内在地编码于积分算子的数学结构之中。当且仅当$\Delta(r) > 0$ 普遍成立时，矩阵 $\mathbf{J}_H$ 才产生纯虚（振荡）特征值。这保证了数值格式严格遵循背景流离心稳定性的物理要求，确保解析特征向量保持定义良好，并避免在 $\Delta(r) = 0$处出现数学奇点。类似地，当 $N = 0$时，垂直形式会变为奇异；然而，这一非分层极限超出了本研究所考察的分层状态范围。

此外，该公式能够自然地容纳临界层现象。由（49a）和（51a）可见，在局部多普勒频移频率为零的临界半径 r_c 处，将出现精确的零特征值：$\bar{\Omega}(r_c) = \pm\bar{N}/m$（斜压临界层）或 $\bar{\Omega}(r_c) = \pm\sqrt{\Delta(r_c)}/m$（正压临界层）。从物理上看，这些临界层对应于局部波共振、吸收和动量传递的区域（Booker 和 Bretherton，1967年；Maslowe，1986年），并且已有研究表明，它们会诱发僵尸涡旋不稳定性等不稳定性动力学（Marcus 等，2013年、2015年；Barranco、Pei 和 Marcus，2018年；Wang 和 Balmforth，2021年；Wohlever 等，2025年）。在我们的指数时间差分框架中，这些对动力学至关重要的区域会自然地表现为线性算子中的精确零特征值。由于 **NL** 算子通过此前在（42）中定义的解析洛必达极限处理这些共振极限，该数值格式能够在无需任何临时数值干预的情况下，内在地捕捉临界层动力学。

在实际操作中，这种先进的指数时间差分格式遵循 §3.3中详述的完全相同的算法流程，但有三项关键的实现差异。首先，由于线性交叉项现在已解析性地并入 $\mathbf{L}(r, m)$，显式计算的强迫向量严格来说仅包含非线性自平流：$\boldsymbol{f}^{t_N} = \mathcal{N}(\boldsymbol{v}^{t_N})$。其次，由于矩阵 **E** 和 **NL** 依赖于径向坐标，ETD 推进步骤必须在混合 PFF 空间中计算：在每个径向配点处应用显式更新，然后变换回全谱 FFF 空间，以进行扩散求解和压力提取。第三，通过将平流交叉项完全对角化，z-不变量（$k = 0$）模态的瞬时压力平衡自然融入控制特征值结构，从而完全消除了基本格式所需的手动非旋转覆盖设置。

最重要的是，这种先进的指数时间差分格式消除了背景流平流稳定性约束。由于恢复性波力和背景剪切相互作用均以解析方式积分，允许采用的显式时间步长不再受背景流、背景旋转或层结率的快速频率限制。相反，显式稳定性上限由完全非线性扰动平流的时间截断误差决定。这种范式转变使积分时间步长能够根据所关注的物理不稳定性的缓慢宏观演化来设定，而不必受快速背景运动学的制约，因此长期、高分辨率积分在计算上极为高效。

3.5. 数值稳定化、混叠与出射波

对于伪谱方法，在物理配置空间中计算非线性平流乘积会内在地产生高频谐波。在高雷诺数或无黏模拟中，物理扩散算子（$\mathcal{L}_{\mathrm{diff}}$）通常不足以耗散这一正向能量级联。为防止截断极限处出现人为能量堆积以及随后混叠误差的反向散射，该数值框架提供了两种不同的稳定化范式。

对于严格周期性的方位和轴向方向，由于采用均匀傅里叶级数进行离散，因此可以明确应用标准的 2/3去混叠规则，对未解析的高频谐波进行几何截断。

另一种方法专用于半无限径向方向，且是该方向所特别要求的；在这一方向上，非均匀高斯-勒让德求积网格使严格的几何截断效果较差，因此可以保留完整的谱容量，并完全依靠动态调整的、具有尺度选择性的超黏性和超扩散滤波器，在正向级联到达网格尺度之前将其指数抑制（Canuto 等人，2007年；Boyd，1998年；Barranco 和 Marcus，2006年）。

采用超黏性算子时，我们不使用计算上僵化的高阶微分算子（例如 ∇^p），而是在每个时间步结束时，将其作为精确积分因子作用于谱模态振幅。对于给定的标量变量 ϕ（表示状态向量的一个分量），广义谱滤波器的形式为：

$$\phi^{t^{N+1}}_{\text{filtered}} = \phi^{t^{N+1}} \exp\left(-\Delta t \sum_{j\in\{r,\theta,z\}} \nu_{\text{hyp},j}\,\mathcal{M}_j(w_{\text{op},j})\left(\frac{w_{\text{op},j}}{w^{\max}_{\text{op},j}}\right)^{p/2}\right), \tag{52}$$

其中 $\nu_{\text{hyp},\ j}$ 为方向耗散系数（超黏性和超扩散），而 $w_{\text{op},\ j}$ 表示相应谱基算子的特定方向特征值（即 $w_{\text{op},\ \theta} = m^2$、$w_{\text{op},\ z} = k^2$ 和 $w_{\text{op},\ r} = n(n+1)$，其中 n 为相应勒让德多项式的次数）。掩蔽函数 $\mathcal{M}_j(w_{\text{op},j})$ 是一条平滑的双曲正切阶跃曲线，经过设计后在较低波数处严格取零，从而确保大尺度惯性物理完全不受耗散。

为确保耗散率与动态变化的非线性级联完美匹配，同时避免对流动过度耗散，$\nu_{\text{hyp和}j}$ 这两个系数可通过比例-微分（PD）反馈控制回路，每隔数百个时间步进行动态调整。在诊断间隔，我们利用帕塞瓦尔定理评估周期性方位向和轴向上的一维动能谱与可用势能谱（详见附录 B）。我们将对数能谱 $\log_{10} E(x)$投影到第一和第二勒让德多项式上，以提取高波数尾部的谱形状（P_1 和 P_2），其中 $x \in [-1, 1]$ 在尾部波数范围内变化。这些投影分别量化局部谱斜率和曲率。曲率为正表示曲线向上凹（出现能量瓶颈），而谱斜率则反映整体耗散率。随后，根据实际状态与理想惯性区目标状态之间的偏差，主动更新耗散系数：

$$\nu^{t+\Delta t}_{\text{hyp},j} = \nu^{t}_{\text{hyp},j}\left[1 + K_p\left(C^t - C^{t-\Delta t}\right) + K_d\left(C^t - C_{\text{target}}\right)\right], \tag{53}$$

其中，C 是测得的谱度量（曲率或斜率），K_p 和 K_d 是比例增益和微分增益。对于方位和轴向方向，可以直接根据各自的一维谱计算相应的度量和阻尼系数。由于非周期映射径向基无法直接得到一维帕塞瓦尔谱密度，因此将径向度量 C_r 表示为方位和轴向度量的加权平均，并严格偏向谱堆积更严重的方向。该控制架构会在检测到谱阻塞时，准确地在相应的时间和位置动态增强超黏性和超扩散；待湍流级联得到充分解析后，再平滑地减弱二者。

最后，我们必须处理向区域边界辐射的出射波。对于无界径向，映射勒让德基天然会产生代数衰减，如 $r \to \infty$所示。我们有意避免实施径向海绵层，因为在强剪切背景流的径向方向应用空间变化的阻尼剖面，会人为注入局部伪涡量，从而可能触发非物理不稳定性。

另一方面，为了安全地吸收到达轴向人工周期边界的波，我们实现了一个物理一维轴向海绵层，该方法改编自 Mahdinia、Hassanzadeh、Marcus 和 Jiang (2017)。阻尼项 $-D(z)\phi$ 被附加到演化方程中，利用以下空间剖面：

$$D(z) = \frac{1 - T(z)}{\tau}, \tag{54}$$

其中 $T(z)$ 是一个光滑双曲正切顶帽函数，在整个内部计算域内保持 $T = 1$（零阻尼），而 τ 决定轴向边界附近的阻尼时间尺度。为在不破坏不可压缩性的前提下保持指数时间差分格式的全局二阶时间精度，该阻尼在每个分步结束时于混合 PFP 空间中进行积分：

$$\phi^{t^{N+1}}_{\text{sponged}} = \phi^{t^{N+1}} \exp\left(-D(z)\Delta t\right). \tag{55}$$

最重要的是，该指数缩放仅作用于标量势（ψ，χ）和浮力扰动（b'），从而保证重构得到的三维速度场严格保持无散。

4. 数值测试

4.1. 并行性能与可扩展性

本数值计算框架是在开源 MLEGS 库的基础上扩展开发而成。该库最初旨在求解不可压缩纳维-斯托克斯方程。针对具有背景剪切和层化的 Boussinesq方程，本指数时间差分模块（将在后续版本更新中发布）专门进行了定制，并引入跨平台兼容性（支持 Linux 和 macOS 环境），可部署于从本地工作站到大规模计算集群的各类平台。为将算法的可扩展性与多节点网络互连中常见的硬件延迟差异区分开来，此处的性能分析严格限定在普渡Anvil超级计算机的单个高性能计算节点上（Song、Smith、Kalyanam、Zhu、Adams、Colby、Finnegan、Gough、Hillery、Irvine、Maji 和 St. John，2022）。该计算节点配备双路 AMD EPYC 7763 处理器，主频为 2.45GHz，共有 128 个物理核心；其分层缓存架构包括 32KB 的 L1 数据缓存（L1d）和指令缓存（L1i）、512KB 的 L2 缓存，以及 32MB 的 L3 缓存。

计算域通过消息传递接口（MPI）采用二维铅笔分解策略进行划分。为计算不同的物理算子，算法会在多个数据空间之间切换。在物理空间（PPP）和中间空间（PFP）中，径向维和轴向维分布在处理器网格上，而方位维则在每个处理器上保持完整（局部）。反之，在 PFF 空间和 FFF 空间中，方位维和轴向维均进行分布，因此径向维保持完整。因此，显式非线性逐点计算（$\mathcal{N}$）在 PPP 空间中局部完成，而指数时间差分矩阵推进（$\mathbf{E}$，$\mathbf{NL}$）则在 PFF 空间中计算，无需任何进程间通信。极向-环向投影（$\mathbb{P}$）的功能与典型数值代码中用于实现不可压缩性的压力求解器相同，同样在谱空间中局部计算。主要的并行通信发生在空间转换期间，需要在 PFP 空间和 PFF 空间之间执行全局 MPI 全互换，以转置数据布局。

强可扩展性模拟采用 $256 \times 256 \times 128$ 的物理配点网格。由于方位角变换使用实-复快速傅里叶变换，256 个物理方位角点以 128 个复数傅里叶模态的形式存储。此外，为高阶径向求导预留谱容量，内部将有效谱分辨率截断至 $250 \times 128 \times 127$ 模态。该问题规模提供了大量计算负载，可用于评估内存带宽饱和情况，同时又能轻松容纳于共享系统内存中。

图 2 所示的强可扩展性结果揭示了实际的硬件与软件交互情况。对于显式非线性计算（$\mathcal{N}$），理论上应能实现理想线性扩展，因为逐点乘法不需要任何 MPI 通信。然而，由于其计算遍历整个物理网格，并涉及大量连续内存访问，内存控制器很快就会达到饱和。这一点反映在扩展性曲线上：非线性计算的加速比在 2 到 32 个处理器之间严重停滞。只有当核心数达到 64 至 128 时，性能才恢复至高效扩展区间；此时，分区后的局部子数组已足够小，可以完全驻留在 CPU 缓存中。

相比之下，ETD 推进（$\mathbf{E}$，$\mathbf{NL}$）和投影（$\mathbb{P}$）算子在较小的局部块上执行更密集的代数运算。因此，在核心数从 2 增至 8 时，它们仍能保持近乎理想的扩展性，之后才逐渐进入效率趋于平稳的阶段。中等核心数下性能的下降，归因于内存带宽饱和与轻微的计算负载不均衡共同作用；这种不均衡源于谱模态数量无法均分（例如，轴向模态的截断上限为奇数 127），导致这些模态在 MPI 处理器网格上的分配不均。随着核心数进一步增加，这两个算子的扩展性也都恢复了。局部径向变换（即径向谱展开及其逆变换）始终保持稳定的扩展性。同时，全空间转换（PPP $\leftrightarrow$ FFF）由于算法的伪谱特性而决定了主要的 MPI 通信开销；它在核心数从 2 增至 4 时受到初始延迟开销的影响，可能是因为跨越了内部非一致性内存访问或插槽边界，但在进程数较多时便能高效扩展。这些扩展性结果表明，在活跃的时间步进阶段，ETD 的线性矩阵推进不会造成显著的性能损失。由于这些算子通过谱空间中的局部块分块对角乘法执行，因此扩展效率很高，并能避免全局数据转置带来的严重通信开销。

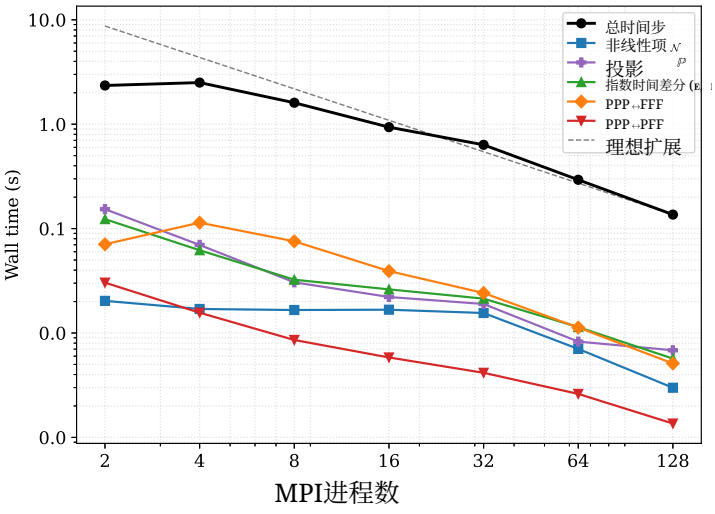


图 2： 在双路 AMD EPYC 7763 处理器（共 128 个核心）上，针对 $256 \times 256 \times 128$ 物理网格的单节点强扩展性能。图例标签分别表示总步长时间、逐点非线性计算（$\mathcal{N}$）、ETD 推进（**E**，**NL**）、全空间转换（PPP $\leftrightarrow$ FFF）、局部径向展开以及无散投影（$\mathbb{P}$）。请注意，图中空间转换与径向展开的计时表示单次操作的平均耗时，而一个完整积分步包含多次此类变换。虚线表示理想线性扩展。

为了全面评估 ETD 框架的计算开销，还必须说明其初始化开销。尽管该方案需要在模拟启动时预先计算积分算子，但这项相关开销在数学上可以忽略不计。完整的 ETD 框架需要针对每个径向配置点和方位波数进行对角化；然而，利用解析的符号表达式（49）和（51），可确保此初始化阶段的计算复杂度严格为 $\mathcal{O}(N_r \cdot M)$，其中 N_r 和 M 分别表示径向配置点数和方位波数数目。

最终，有限的初始化开销与高效的局部时间步进相结合，凸显了 ETD 框架相对于传统积分器的计算优势。鉴于逐点非线性计算即便在较低核心数下也会遭遇严重的内存瓶颈，若采用传统的混合IMEX格式（如 AB2-CN），则需要为多个历史右端项数组进行分配、存储并反复从内存中读取。这些额外的内存流量将显著加剧所观察到的扩展性下降。指数时间差分格式仅依赖当前状态向量，并通过局部代数更新进行计算，从而降低了这部分多余的内存延迟，在内存受限情形下表现出更优的计算性能。此外，在较高核心数下实现的稳健恢复与近乎理想的扩展表明，二维铅笔分解并行化策略非常成功。通过有效划分计算域，使局部子数组完全落入处理器的高速缓存架构之内，该数值框架展现出优异的并行效率，因而非常适合在大规模计算集群上实际投入生产部署。

4.2. 分层流体中的 Lamb-Oseen涡

为验证数值框架并评估指数时间差分（ETD）格式的性能，我们采用稳定分层的 Lamb-Oseen涡作为背景剪切流。不失一般性，考虑一个涡核半径为 $a = 1$ 、环量为 $\Gamma = 2\pi$ 的一般涡旋，其方位速度剖面为：

$$\bar{U}_\theta(r) = \frac{1 - e^{-r^2}}{r}. \tag{56}$$

对于下文详述的数值实验，布伦特–魏萨拉频率范围为 $N = 0.1$ 至 5。0。我们进一步考察非旋转环境中的涡旋（$\Omega = 0$）。虽然引入背景旋转会通过改变科里奥利恢复力、移动广义瑞利

判别式 $\Delta(r)$，并可能引入分层旋转不稳定性等依赖旋转的机制，但设定 $\Omega = 0$ 具有两个具体的验证目的。首先，这隔离了斜压剪切-层化相互作用，使我们的数值设置与 Le Dizès (2008) 所记载的基准案例严格一致，从而便于进行清晰的物理交叉验证。其次，从算法角度来看，背景旋转在线性化控制方程中仅作为水平变换矩阵内背景轴向涡量的加性常数出现（$\mathbf{S}_H$ 和 $\mathbf{S}_H^{-1}$）。因此，将背景旋转设为零并不会简化线性算子的代数结构、变量间耦合或数值刚性。因此，即使在系统旋转缺失的情况下，指数时间差分对角化的完整功能机制仍得到充分运用并获得验证。

4.2.1. 线性稳定性与空间验证

我们首先通过计算分层朗缪尔-奥辛涡旋的离散全局特征模态，验证线性空间算子（$\mathcal{L}_{\text{wave}} + \mathcal{L}_{\text{cross}}$）以及映射勒让德离散化的整体精度。需要强调的是，尽管此前的研究已使用映射缔合勒让德基对非线性算子 $\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{\omega}'$ 进行了全面验证（Matsushima 和 Marcus，1997年），本文的重点是线性算子，因为它们构成了指数时间差分格式的函数基础。

假设扰动具有正规模形式 $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{v}}(r) \exp[\mathrm{i}(m\theta + kz) + \sigma t]$，线性化的无黏 Boussinesq方程可化为广义特征值问题：

$$\sigma \tilde{\boldsymbol{v}} = \mathbf{L}(r, m)\tilde{\boldsymbol{v}} - \tilde{\boldsymbol{\Pi}}. \tag{57}$$

这里，$\sigma \equiv \lambda + \mathrm{i}\omega$ 是复特征值，其中 λ 表示增长率，ω 表示波频率。速度特征向量 $\tilde{\boldsymbol{u}} = [\tilde{u}_r, \tilde{u}_\theta, \tilde{u}_z]^{\mathrm{T}}$ 满足线性无散约束：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\tilde{u}_r) + \frac{\mathrm{i}m}{r}\tilde{u}_\theta + \mathrm{i}k\tilde{u}_z = 0. \tag{58}$$

$\tilde{}$ 为满足无散条件并同时消去压力扰动 $\boldsymbol{\Pi}$，我们采用极向-环向表述构造全局特征值矩阵。具体而言，我们在约化标量基 $(\tilde{\psi}, \tilde{\chi}, b)$ 中定义谱测试函数 $\tilde{}$，并在映射勒让德空间中展开这些势函数，以重构相应的原始变量。随后，在每个径向配置点处于 PFF 空间中应用线性算子。最后，将所得状态投影回 FFF 空间中的极向-环向形式，从而得到全局特征值矩阵中相应的列。

在每个配置点处，局部线性动力学由纯代数算子 $\mathbf{L}(r, m)$ 支配。利用我们在 §3.4 中为先进的指数时间差分格式推导出的解析对角化，可通过以下相似变换计算该算子：

$$\mathbf{L}(r, m) = \mathbf{S}(r)\mathbf{J}(r, m)\mathbf{S}^{-1}(r). \tag{59}$$

对角矩阵 $\mathbf{J}(r, m)$ 明确分解为一个在所有空间波数 (m, k) 下均保持不变的恢复分量，以及一个仅随方位波数 m 变化的平流多普勒频移：

$$\mathbf{J}(r, m) = \operatorname{diag}\left(\omega_H^{\pm}(r),\, \pm\mathrm{i}\bar{N}\right) - \mathrm{i}m\bar{\Omega}(r)\mathbf{I}, \tag{60}$$

其中水平回旋频率定义为 $\omega_H^{\pm}(r) = \pm\mathrm{i}\sqrt{\Delta(r)}$，其中 $\Delta(r)$ 为（50）给出的广义瑞利判别式，而 $\mathbf{I}$ 是 4×4 单位矩阵。这些回旋频率决定了在旋转背景剪切流中沿径向位移的流体质点的自然惯性恢复振荡，并完全由广义瑞利判别式支配。由于组成矩阵 $\mathbf{L}(r, m)$ 完全独立于轴向波数 k，我们的全局特征值求解器可以高效扫描大范围参数空间，而无需每次重新计算线性算子。

在讨论特征值结果之前，使用 WKBJ 框架分析该系统非常有启发性（Le Dizès，2008），这有助于对所得特征模态进行分类，并理解其空间结构。我们将 $\bar{}$ 多普勒频移复特征值定义为 $\Phi(r) \equiv \sigma + \mathrm{i}m\Omega(r)$。在大 k 渐近极限下，波的空间包络由局部径向波数 $\beta(r)$ 控制，其表达式为

$$\beta(r) = k\sqrt{\frac{\Phi^2(r) + \Delta(r)}{\Phi^2(r) + \bar{N}^2}}. \tag{61}$$

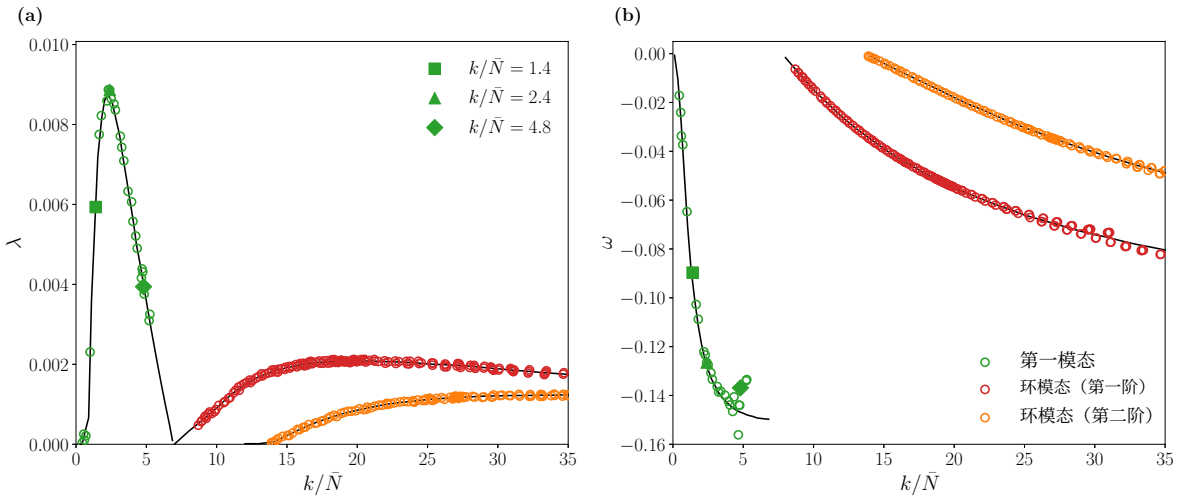


图3： 分层朗缪尔-奥辛涡旋的离散不稳定模态，参数为 $\bar{N} = 5$。（a）增长率 λ和（b）波频率 ω 随缩放轴向波数 $k/\bar{N}$ 的变化。空心圆表示使用本文的全局谱特征值求解器计算得到的特征值。第一模态分支（$k/\bar{N} = 1.4$，2.4，4.8）上的三个点以醒目标记，以便进一步进行结构分析。黑色实线表示 Le Dizès Le Dizès （2008）通过采用复轮廓变形的射击法得到的基准结果。数值空间离散采用 $N_r = 252$ 个径向配置点、径向谱截断值 $N = 244$以及映射参数 $L = 6.0$。图中仅绘出前三个不稳定分支。

最低阶 WKBJ 近似表明，在 $\beta^2 > 0$ 处，模态呈空间振荡；而在 $\beta^2 < 0$处，模态呈倏逝状态。分隔这些区域的空间边界即运动学转向点 r_t，由分子根定义：$\Phi^2(r_t)+\Delta(r_t) = 0$；等价地，$\Phi(r_t) = \omega_H^{\pm}(r_t)$与 ETD算子中编码的局部回旋频率相匹配。

此外，连续方程存在两个临界层奇点（详见附录D ）。正压临界层出现在 $\Phi^2(r_c) = \bar{N}^2$处，表明其与背景分层发生共振（$\beta \to \infty$）。正压临界层出现在波与局部背景流完全共转之处：

$$\Phi(r_c) = \omega + m\bar{\Omega}(r_c) = 0. \tag{62}$$

将上述方程与转向点的定义进行比较可知，正压临界层的频率曲线始终位于两个上旋频率（$\omega_H^{\pm}$）之间。正如 Le Dizès (2008) 的研究所示，对于强分层下 Lamb-Oseen涡的典型环模态，通常存在三个转向点，而正压临界层恰好位于其中两个转向点所夹的倏逝（负 β^2）区域内。这表明，转向点充当势垒，以指数方式屏蔽活跃波，使其不受奇异临界层的影响。

我们将特征值求解器与LeDizès(2008) 的数值结果进行对比。该研究采用射击¯方法，并通过复轮廓积分获得螺旋（$m = 1$）模态在 $N = 5$处的色散曲线。如图 3所示，我们的全局谱特征值求解器准确捕捉到了三个不稳定分支。对于第二环模态的所有波数，以及第一环模态波数不超过 $k/N = 25$ 的范围，误差均小于 1% 。在更高波数下，我们的实轴求解器得到的第一环模态波频率开始出现轻微的谱振荡（误差仍低于 2.5%）。这些微小偏差直接源于在线性临界层奇点处沿纯实配置轴进行求值。如下文将详细分析的那样，这种实轴求值也决定了第一主模态的谱行为；该模态经历了独特的结构演化，将这一数学奇点充分显现出来。

正如LeDizès（2008）指出的，第一模态（最不稳定的分支）具有独特的物理特征，使其有别于标准环形模态族。图4 追踪了该模态在三个不同阶段的结构演化：¯ ¯峰值增长率之前（$k/N = 1.4$）、达到峰值时（$k/N = 2.4$，以及明显偏离¯理论曲线之后（$k/N = 4.8$）。

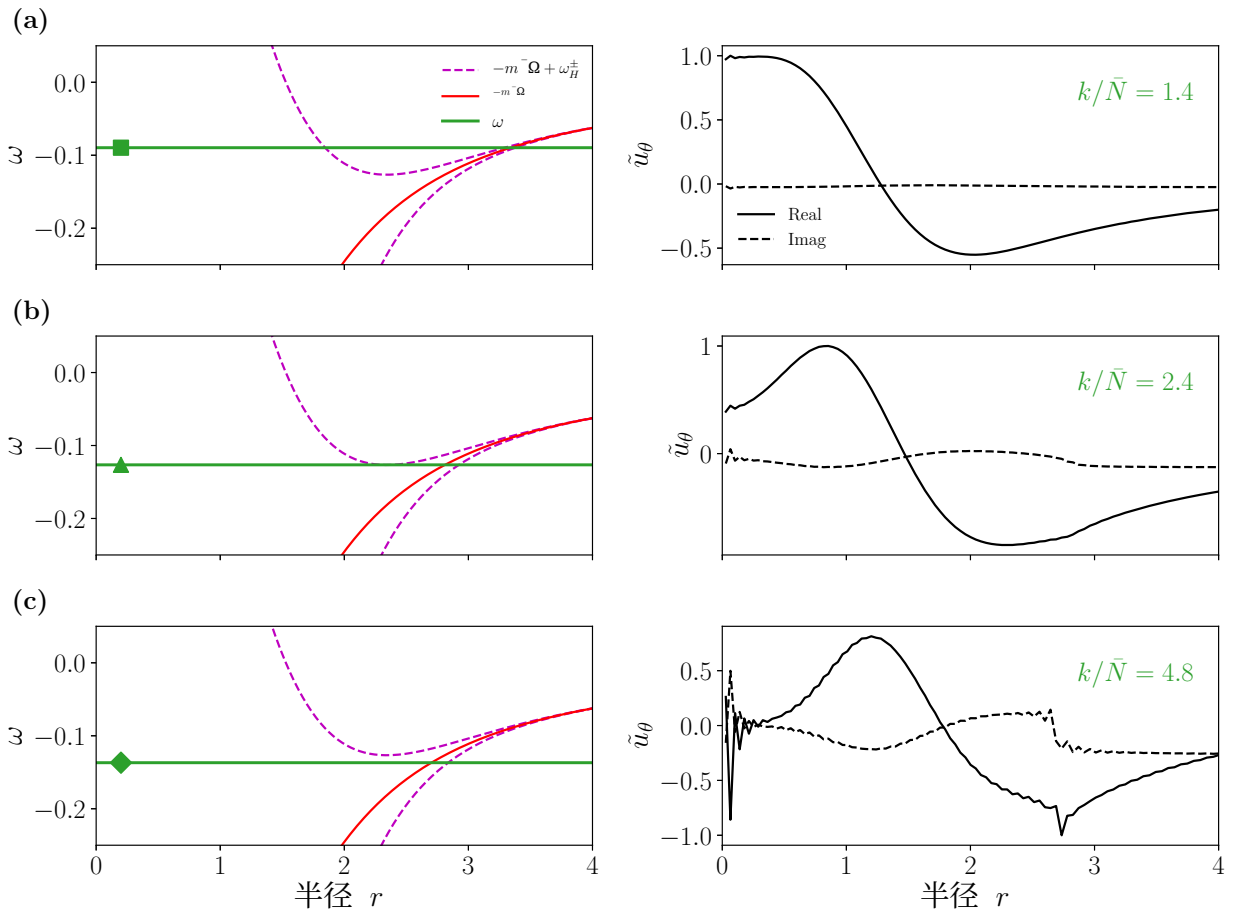


图4： 频率图（左列）和归一化空间本征模态分布 $\tilde{u}_\theta$（右列）展示了在三个不同缩放波数下第一模态的拓扑演化，具体标记于图 3中：（a） $k/\bar{N}=1.4$，（b） $k/\bar{N}=2.4$，以及（c） $k/\bar{N}=4.8$。左侧面板绘制了局部回旋频率的径向分布（洋红色虚线）和共转频率（红色实线），以及该模态的恒定波频率 ω（绿色水平线）。波频率水平线与这些相应曲线的交点定义了转向点和正压临界层的径向位置。在 $k/\bar{N}=4.8$处，内转向点的消失使该模态直接暴露于正压临界层，从而触发空间剖面中观测到的吉布斯式谱振铃。

最初（图4a），该模态的行为与标准环模态相似；其波频率在两个不同的内转向点处与ω_H^-曲线相交，并在一个外转向点处与 ω_H^+ 曲线相交。由于正压临界层（$\Phi=0$）位于 ω_H^+ 曲线和ω_H^- 曲线之间，因此处于由此形成的倏逝区（$\beta^2<0$）内。相应地，其模态廓线平滑且分辨良好。相比之下，随着波数增加，该模态达到峰值增长率时（图4b），其波频率 ω 降至ω_H^-曲线的局部最小值（谷值）。此时，两个内转向点相撞。最终，随着频率进一步下降（图4c），这两个内转向点完全消失。由于内侧倏逝势垒不复存在，振荡区一直延伸至涡旋中心（$r=0$），使扰动转变为核心模态。更重要的是，转向点的消失消除了空间屏蔽。正压临界层（$\Phi=0$）不再隐藏于倏逝区，而是直接显现在活跃的振荡区内，成为一个裸露的数学奇点。

虽然 Le Dizès (2008);Riedinger、Le Dizès 和 Meunier (2010年) 使用复轮廓或映射绕过临界层奇点，而 Lee 和 Marcus (2023年) 优化空间映射参数 L 以实现平滑解析；我们的谱离散则严格在实径向轴上进行评估，以服务于物理非线性ETD格式。试图用全局光滑多项式拟合这一未屏蔽临界层所产生的奇异对数相位跳跃，自然会触发吉布斯式谱振铃，这种现象可在 $\tilde{u}_\theta$ 中的剖面

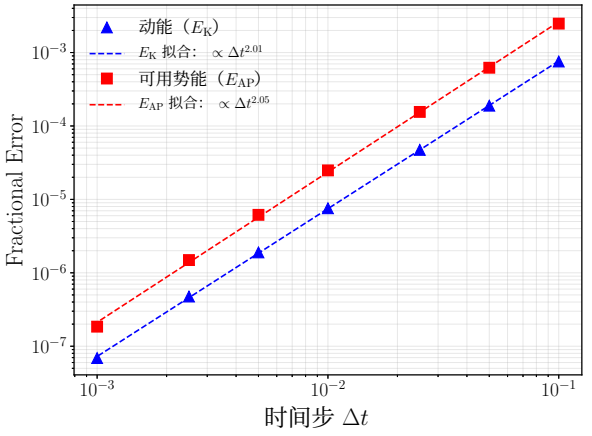


图5： 指数时间差分格式的时间收敛性。全局动能（E_K）和可用势能（E_{AP}）的相对误差遵循理论上的二阶标度关系（$\propto \Delta t^2$），随着 Δt 减小而变化。在 $t = 20$时评估误差，此时对应于背景兰姆–奥森涡约3.18个核心旋转周期（$T_{\text{core}} = 2\pi$），确保测量能够捕捉充分发展的非线性动力学。

图 4c。这种振铃直接解释了高波数下与 Le Dizès (2008) 的数值特征值之间的偏差。然而，临界层虽是物理上的共振现象，但这些位置出现的数学奇点仅存在线性无黏极限下。由于有限振幅非线性效应和黏度在完整的时间模拟中会自然地平滑并正则化此类共振，因此从物理角度而言，复映射并无必要。我们的特征值求解器旨在严格验证实轴空间算子，因此观察到的谱行为完全在预料之中，且实轴分辨率对于目标非线性物理过程仍然十分理想。

4.2.2. 时间收敛性与能量守恒

为确认指数时间差分格式的时间精度，我们进行了分数阶误差收敛性测试。按照（34）所示，结合采用二阶 Adams–Bashforth 方法进行非线性强迫外推，以及采用 Crank–Nicolson 进行扩散近似，可知整体指数时间差分格式的全局时间误差为 $\mathcal{O}(\Delta t^2)$。

为严格分离时间截断误差，避免空间混叠或边界不连续性的干扰，收敛性测试在带限流场上进行。我们使用空间分辨率 $(N_r, N_\theta, N_z) = (160, 256, 128)$ 对区域进行离散化，径向映射参数为 $L = 10.0$，轴向区域长度为 $L_z = 10\pi$。为防止非线性谱阻塞污染时间测量结果，使用截断 $(N, M, K) = (152, 84, 42)$对谱系数进行去混叠处理，并启用六阶超黏性6，以控制高阶径向模态中的能量堆积，具体讨论见第§3.5节。

流动以叠加在柱状背景流上的低振幅三维局域离轴高斯扰动作为初始状态。尽管该扰动的结构依据旋转地转与静力平衡框架构建（Mahdinia 等人，2017），但我们特意将高斯包络的轴向长度尺度加宽，使其大于准平衡状态下的尺度。这样的人为展宽可确保扰动由轴向网格平滑且完整地解析，从而避免垂直梯度解析不足所导致的吉布斯振荡和虚假能量注入。最后，暂时对初始条件应用超黏性滤波器，以去除残余的谱噪声。

我们在每次模拟过程中监测动能（E_K）和可用势能（E_{AP}），其数值计算详见附录B。如图5所示，积分时间超过三个涡旋周转时间后，E_K 和 E_{AP} 的相对误差在双对数坐标下以完美的2 斜率衰减。这证实，对线性算子进行精确矩阵指数运算能够保持全局二阶精度，且不会引入刚性瞬态。请注意，E_{AP} 的相对误差绝对值高于E_K；这符合物理预期，因为对强分层浮力场（$\mathbf{u}' \cdot \nabla b'$）进行显式非线性平流时，其绝对截断误差前因子大于动量平流。

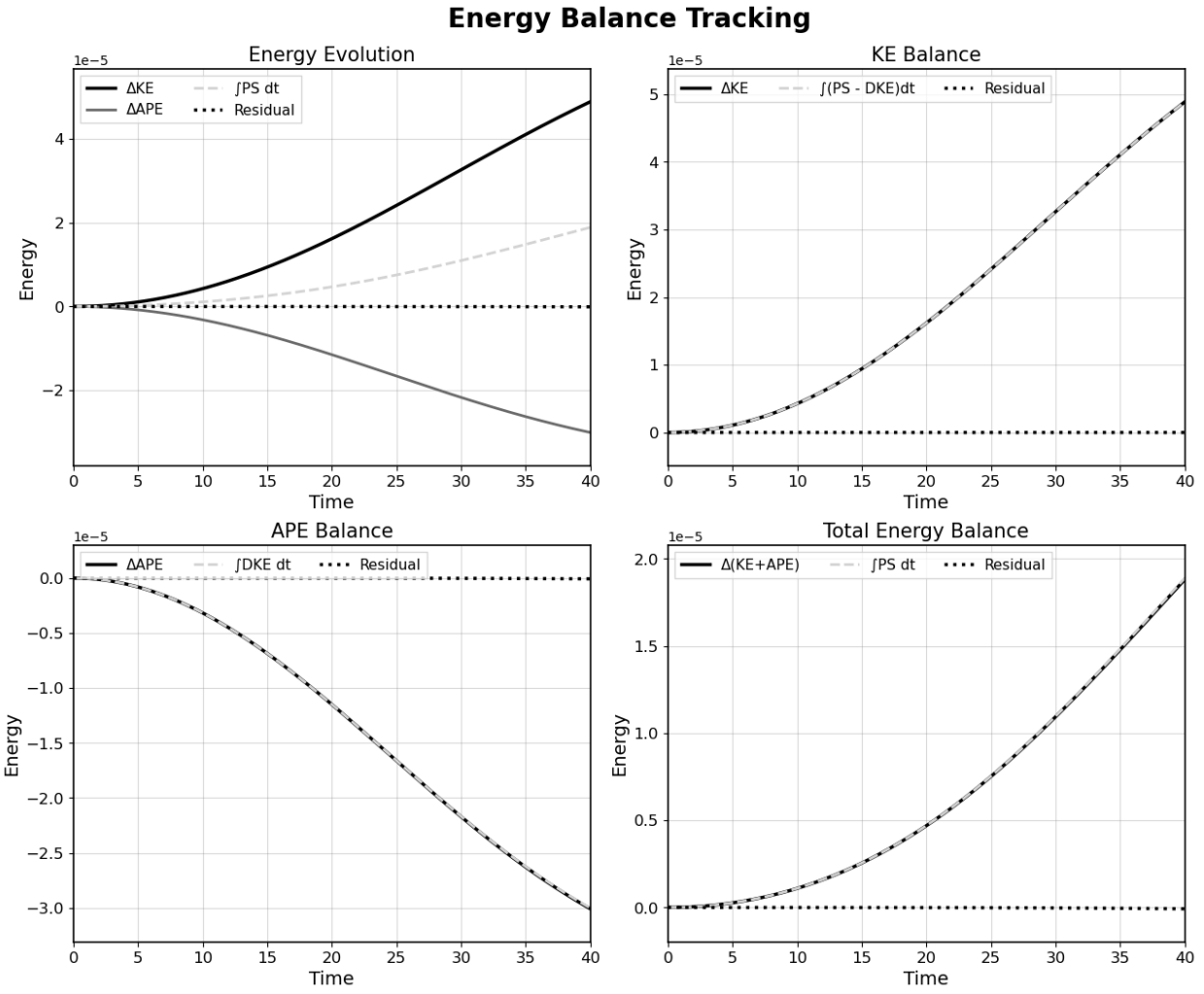


图6： 三维高斯扰动进行非线性积分时，完整指数时间差分格式的能量平衡跟踪。为维持无黏稳定性并吸收正向能量级联，采用六阶超黏性滤波器，并根据谱尾处的能量大小动态调整其幅度。图中包含四个面板：（左上） E_{K}、 E_{AP}及累积剪切产生的时间演化；（右上） E_{K}的内部收支，其中明确纳入了浮力能量交换；（左下） E_{AP}的内部收支，与浮力交换相匹配；（右下）总机械能平衡。请注意，控制方程将总能量演化定义为 $\mathrm{d}_t(E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{AP}}) = -\mathscr{E}_{\mathrm{shear}}$；此处我们记为 $\mathrm{PS} = -\mathscr{E}_{\mathrm{shear}}$。

除形式上的时间精度外，我们还通过检验指数时间差分格式是否符合式（9）给出的精确能量守恒定律，验证其非线性鲁棒性。我们通过监测高斯扰动的动能和可用势能相对于累积剪切产生及内部浮力能量交换的演变，跟踪其能量平衡。这些源项和交换项在每个诊断步进行计算，随后使用梯形法则对其进行时间积分。

如图6所示，该数值格式表现出极佳的运动学一致性。右下图表明，总机械能的净变化与累积的背景剪切产生（PS）完全一致，严格满足（9c）。此外，各项能量收支均得到了恰当维持：扰动动能的变化与剪切产生和浮力能量交换之和相平衡（右上图，符合（9a）），而可用势能的变化则与浮力能量交换相对应（左下图，符合（9b）。最终，这种对基本能量平衡的严格遵循证实了

完全对角化的谱ETD公式成功抑制了虚假的数值伪影，使得在较大时间步下仍能进行稳定且忠实于物理规律的非线性积分。

5. 结论

本研究提出了一套全面的伪谱数值框架，用于模拟无界全局柱坐标域内旋转稳定分层流的三维Boussinesq方程。为准确捕捉全局几何特征，并避免流体受到人工外边界反射的影响，空间离散采用映射关联勒让德多项式处理径向方向，并在方位和轴向方向上结合傅里叶级数。该特定基底能够自然地解析原点处的坐标奇点，并对局域扰动实现谱收敛。此外，通过采用极向-环向分解，该框架以解析方式施加无散不可压缩约束，并从控制动量方程中消去压力变量，从而简化计算状态空间。

本研究的一项主要贡献是提出了一种半解析指数时间差分（ETD）格式，以解决旋转剪切流固有的数值刚性。由于惯性重力波产生的高频恢复力，以及背景方位剪切的快速平流输运，标准隐式-显式混合方法会对时间步施加严格限制。通过转入原始速度空间，所提出的指数时间差分（ETD）格式以解析方式对完全耦合的线性算子进行对角化，该算子涵盖背景旋转、层化以及随径向变化的平流交叉项。这种精确积分跨越了快速线性时间尺度，并将包括临界层和离心稳定性界限在内的物理共振特征直接嵌入数值算子中。

该框架通过对嵌入稳定分层朗缪尔-奥辛涡旋中的局地扰动进行模拟而得到验证。完整的指数时间差分格式有效抑制了在对背景剪切进行标准显式处理时导致不稳定性的高频数值伪影。通过对线性交叉项进行解析性积分，时间步的稳定性约束与快速背景运动学解耦，转而仅由非线性扰动动力学缓慢的宏观演化所支配。该方法的热力学与运动学一致性通过对全域积分能量收支的持续监测得到验证，表明其遵循针对可用势能、扰动动能和剪切产生所导出的守恒定律。

最终，这一数值方法为研究局部笛卡尔模型无法充分刻画的复杂流体现象提供了数学上自洽且计算高效的基础。通过严格实施全局几何约束并规避平流稳定性限制，该框架非常适合在天体物理与地球物理环境中对有限振幅水动力机制（如僵尸涡旋不稳定性）进行长期、高分辨率模拟。

6. 致谢

我们感谢使用 NSF ACCESS 计算资源（ID：PHY220056）。

A. 守恒定律的推导

我们考虑一个在方位角方向（θ）和轴向方向（z）上具有周期性的圆柱域（$0 \le r < \infty$）。我们施加物理边界条件：所有局域扰动场，例如扰动速度 $\boldsymbol{u}'$ 和浮力 b'，均随 $r \to \infty$ 衰减至零。尽管理论上的背景剪切剖面（类似于局部剪切盒中的剖面，例如恒定涡量剖面）在无界径向域上积分时可能形式上具有无限总能量，但通过关注有界的扰动场，可以构造严格的守恒定律。为清晰起见，以下推导省略黏性与扩散项，不过最终的能量收支自然可以扩展到包含这些严格的耗散汇。

为建立理论框架，我们首先考虑一个广义的、完全有界且在无穷远处衰减的速度场 $\boldsymbol{u}$ 和浮力b。将无黏性动量方程与 $\boldsymbol{u}$ 取内积，可得动能密度的演化方程。注意到科里奥利力不做功（$\boldsymbol{u} \cdot (2\Omega\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{u}) = 0$），且动能的非线性平流

可以表示为散度，因此我们得到

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) &= -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right) - bu_z \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{p}{\rho_0}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)\boldsymbol{u}\right] - bu_z,\end{aligned} \tag{63}$$

其中我们利用了无散条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0$。在区域体积 V 上积分后，根据高斯定理，由于周期性和径向衰减边界条件，散度项的积分为零。

对于线性分层流体，总浮力为 $b=\bar{b}(z)+b'$，其中背景剖面为 $\bar{b}(z)=-\bar{N}^2z+C$。这一背景分层所做的功可以精确地改写为一个散度项：

$$\bar{b}u_z = (-\bar{N}^2z+C)u_z = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\bar{N}^2z^2+Cz\right)\boldsymbol{u}\right]. \tag{64}$$

由于该项是一个纯散度项，其体积积分也为零。因此，广义动能的时间变化率仅取决于浮力扰动：

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{K}}{\mathrm{d}t} = \partial_t\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2dV = -\int_V(b'u_z)\,\mathrm{d}V\,. \tag{65}$$

类似地，与浮力扰动相关的可用势能 (E_AP) 的时间变化率可通过热力学方程计算：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{AP}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\bar{N}^2}\int_V b'\partial_t b'\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{\bar{N}^2}\int_V b'\left(-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}b'+\bar{N}^2u_z\right)\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{\bar{N}^2}\int_V\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}b'^2\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}V+\int_V(b'u_z)\,\mathrm{d}V \\ &= \int_V(b'u_z)\,\mathrm{d}V\,.\end{aligned} \tag{66}$$

求和 这两个能量分量后，可得总可用能严格守恒，

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{K}+E_\mathrm{AP}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{67}$$

对于孤立波或广义衰减场。

分析叠加在稳态背景剪切 $\bar{\boldsymbol{U}}=r\bar{\Omega}(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 上的实际扰动场（$\boldsymbol{u}'$、 b'）时，由于扰动与基流之间持续交换动量，总扰动能量不再严格守恒。扰动动能的演化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E'_\mathrm{K}}{\mathrm{d}t} &= \int_V\left\{-u'_zb'-\boldsymbol{u}'\cdot\left((\bar{\boldsymbol{U}}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}'+(\boldsymbol{u}'\cdot\nabla)\bar{\boldsymbol{U}}\right)\right\}\mathrm{d}V \\ &= \int_V\left\{-u'_zb'-\boldsymbol{u}'\cdot\left(-\bar{\Omega}u'_\theta\hat{\boldsymbol{r}}+u'_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\bar{\Omega}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}\mathrm{d}V \\ &= \int_V\left\{-u'_zb'-\left(r\frac{\mathrm{d}\bar{\Omega}}{\mathrm{d}r}\right)u'_ru'_\theta\right\}\mathrm{d}V\,.\end{aligned} \tag{68}$$

最后一项表示雷诺应力产生，它决定了背景剪切与扰动之间的动能传递。由于背景场是纯二维的，$u_z=u'_z$，扰动可用势能的演化仍与（66）相同。

为完整起见，我们说明为何标准势能的定义 $E_{\mathrm{P}} = -\int_V zb\,\mathrm{d}V$ 在这种周期几何中不构成简单的守恒定律。将完整的浮力方程乘以 z，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} &= -\int_V z(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}b)\,\mathrm{d}V \\ &= -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(bz\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V + \int_V bu_z\,\mathrm{d}V\,.\end{aligned} \tag{69}$$

与动能推导不同，散度项积分后并不消失。虽然速度 $\boldsymbol{u}$和浮力 b 在 z中严格周期，但完整的通量向量 $bz\boldsymbol{u}$ 并非如此，因为其中显式包含坐标z。因此，由于非零边界通量的存在会使体积分无法相互抵消，周期域中必须改用可用势能。

最后，对于理想无黏流体，扰动的总轴向角动量 $\mathcal{L}_z$是严格守恒量。将方位角动量方程乘以 r 后积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = -\int_V r((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})_\theta\,\mathrm{d}V - \int_V 2\Omega r u_r\,\mathrm{d}V - \int_V \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial\theta}\,\mathrm{d}V\,. \tag{70}$$

右侧各项的积分均为零。压力梯度项消失，是因为它是单值函数对方位角的导数，而积分是在 2π周期域上进行的。平流项消失，是因为它可以改写为角动量通量 $-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(ru_\theta\boldsymbol{u}\right)$的散度，而该散度在边界上的积分为零。关键在于，科里奥利项因无散条件而在数学上直接消失。具体而言，在任意半径为 R的圆柱体积上对 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0$积分，必然有 $\int_0^{2\pi}\int_0^{L_z} u_r(R,\theta,z)R\,d\theta\,\mathrm{d}z = 0$。由于 u_r 的水平平均在每个半径处恒为零，体积分 $\int_V 2\Omega r u_r\,\mathrm{d}V$恰好为零，从而保证总轴向角动量守恒。

B. 利用谱分解计算能量和动量

在确立了扰动场的理论守恒定律后，我们现在详细说明如何在映射伪谱框架中对其进行实际数值计算。为计算整个区域积分量，必须使用离散谱表示对物理场进行求值。

我们首先考虑可用势能，它需要对浮力扰动的平方进行积分，$b'(r,\theta,z)$。在我们的谱框架中，该场表示为双重傅里叶级数：

$$b'(r,\theta,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\tilde{k}=-\infty}^{\infty} b'_{m\tilde{k}}(r)\exp\left\{\left[\mathrm{i}\left(m\theta + \frac{2\pi}{L_z}\tilde{k}z\right)\right]\right\}, \tag{71}$$

~ ~其中，m 和 k 是整数，分别表示方位和轴向波数。整数 k 用于显式施加沿长度为 L_z的轴向方向的周期边界条件。总可用势能定义为 $(b')^2$ 的体积分，并按背景分层进行缩放。利用周期性方位向和轴向上的正交性，可将三维积分化简为一维径向积分之和：

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{AP}} &\equiv \frac{1}{2\bar{N}^2}\int_0^{L_z}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(b')^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi L_z}{\bar{N}^2}\sum_{\tilde{k}}\left\{\sum_{m>0}\int_0^{\infty}|b'_{m\tilde{k}}(r)|^2 r\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}|b'_{0\tilde{k}}(r)|^2 r\mathrm{d}r\right\},\end{aligned} \tag{72}$$

其中，我们利用了实值场的共轭对称性，$b'_{-m,\ -\tilde{k}}(r) = b'^{*}_{m\tilde{k}}(r)$。

为了计算 r 上的连续积分，并严格在谱空间内进行，我们应用代数映射映射缔合勒让德多项式的代数映射，可将其 (23) 改写为：

$$r = L\sqrt{(1+\mu)/(1-\mu)}, \tag{73}$$

其中 $\mu \in [-1,1)$ 和 L 为映射尺度参数。微分面积元变换为

$$r\mathrm{d}r = \frac{L^2}{(1-\mu)^2}\mathrm{d}\mu, \tag{74}$$

从而能够利用高斯-勒让德求积精确计算径向积分。在配置点 μ_n 处取样，并使用相应的求积权重 W_n，即可数值计算总可用势能：

$$E_{\mathrm{AP}} = \frac{2\pi L_z L^2}{\tilde{N}^2}\sum_{\tilde{k}}\sum_{n}\left\{\sum_{m>0}\frac{|b'_{m\tilde{k}}(\mu_n)|^2}{(1-\mu_n)^2} + \frac{1}{2}\frac{|b'_{0\tilde{k}}(\mu_n)|^2}{(1-\mu_n)^2}\right\}W_n. \tag{75}$$

上述求积方法同样适用于扰动浮力与垂直速度之间的体积能量交换。将垂直速度 u_z 表示为与浮力类似的双重傅里叶级数，积分后的总能量交换可计算为

$$\int_V (b'u_z)\,\mathrm{d}V = 4\pi L_z L^2\sum_{\tilde{k}}\sum_{n}\left\{\sum_{m>0}\mathrm{Re}\left[\frac{b'_{m\tilde{k}}(\mu_n)u^*_{z,m\tilde{k}}(\mu_n)}{(1-\mu_n)^2}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{b'_{0\tilde{k}}(\mu_n)u^*_{z,0\tilde{k}}(\mu_n)}{(1-\mu_n)^2}\right]\right\}W_n. \tag{76}$$

虽然可用势能和能量交换只涉及简单的标量积分，但计算总动能需要处理完整的扰动速度矢量。利用极向-环向分解，可以高效地完成这一计算（11）。令

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}_\psi + \boldsymbol{u}_\chi. \tag{77}$$

总动能展开 为极向能量、环向能量及其交叉相互作用之和：

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{u}_\psi + \boldsymbol{u}_\chi)^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \left(\boldsymbol{u}_\psi^2 + \boldsymbol{u}_\chi^2 + 2\boldsymbol{u}_\psi\cdot\boldsymbol{u}_\chi\right)\mathrm{d}V\,. \tag{78}$$

对于衰减场和周期场，交叉相互作用的积分严格为零。利用标准向量恒等式和性质 $\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{z}} = 0$，交叉相互作用的被积函数可展开为 $\boldsymbol{u}_\chi\cdot\boldsymbol{u}_\psi = \boldsymbol{\nabla}\cdot[(\partial_z\psi)(\boldsymbol{\nabla}\chi\times\hat{\boldsymbol{z}})]$。由于这一相互作用是纯散度，其体积积分根据高斯定理为零。纯极向场和纯环向场的贡献可分别通过分部积分化简。环向贡献可化简为

$$\int_V \boldsymbol{u}_\chi^2\,\mathrm{d}V = -\int_V \chi\nabla_\perp^2\chi\,\mathrm{d}V\,, \tag{79}$$

而极向分量可简化为

$$\int_V \boldsymbol{u}_\psi^2\,\mathrm{d}V = \int_V \nabla_\perp^2\psi\nabla^2\psi\,\mathrm{d}V\,. \tag{80}$$

综合以上结果，以标量势表示的基准动能为

$$E_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\int_V \left(-\chi\nabla_\perp^2\chi + \nabla_\perp^2\psi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V\,. \tag{81}$$

如 §2.3 所述，并在 Matsushima 和 Marcus (1997年) 中讨论的那样，为了完整性，某些全局流的极向-环向分解需要包含对数分量。具体而言，流函数分解为局域分量和由结构所决定的对数尾部：$\chi \equiv \chi_o + \chi_l P_l(r)$，其中 $P_l(r) \sim \ln(r)$。将这一分解代入环向能量积分，会得到宏观尾部的自能项，表示为 $-\chi_l^2\int_V P_l(r^{-1}\partial_r(r\partial_r P_l))\,\mathrm{d}V$。在无界径向域上对该项积分会产生对数发散。为了获得能够表征不稳定性的、有物理意义的扰动能量度量，我们计算正则化动能。该正则化舍弃未受扰动的 $1/r$

尾部的发散自能，同时明确保留有限的交叉相互作用；该相互作用决定了局域扰动 χ_o 与渐近边界结构 $\chi_l P_l$之间的物理动量交换：

$$\widetilde{E_{\mathrm{K}}} = \frac{1}{2}\int_V \left\{-\chi_o \nabla_\perp^2(\chi_o + 2\chi_l P_l) + \nabla_\perp^2\psi\nabla^2\psi\right\}\mathrm{d}V\,. \tag{82}$$

除了能量收支之外，离散谱框架还便于精确计算整个区域积分后的动量。扰动的总垂直动量 $\mathcal{P}_z$ 完全由轴对称且˜垂直不变的 $m=0,\ k=0$ 傅里叶模态给出：

$$\mathcal{P}_z = \int_V u_z\,\mathrm{d}V = 2\pi L_z\int_0^\infty u_{z,00}(r) r\,\mathrm{d}r = 2\pi L_z L^2\sum_n u_{z,00}(\mu_n)\frac{W_n}{(1-\mu_n)^2}. \tag{83}$$

由于垂直速度通过 $u_z = \nabla_\perp^2\psi$ 与极向流函数相关，我们可以定义一个映射谱函数

$$h(\mu) \equiv \nabla_\perp^2\psi_{00}/(1-\mu)^2. \tag{84}$$

将 h 按标准勒让德基 $h(\mu) = \sum_n h_n P_n(\mu)$ 展开后，动量积分恰好简化为零阶勒让德系数，从而得到

$$\mathcal{P}_z = 4\pi L_z L^2 h_0. \tag{85}$$

类似地，总轴向角动量 $\mathcal{L}_z$ 严格仅由环向流函数径向导数的零阶模态构成：

$$\mathcal{L}_z = \int_V r u_\theta\,\mathrm{d}V = \int_V r\left(-\partial_r\chi + \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_z\psi\right)\mathrm{d}V = -2\pi L_z\int_0^\infty r^2 \mathrm{d}_r\chi_{00}(r)\,\mathrm{d}r\,. \tag{86}$$

最后，谱公式明确表明，正如理论预期，标准势能在周期域中并非守恒量。若直接计算，标准势能（K_{P}）仍显式依赖于区域边界：

$$K_{\mathrm{P}} = \int_0^{L_z}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty z b'(r,\theta,z) r\,\mathrm{d}r\,d\theta\,\mathrm{d}z = 2\pi\sum_{\tilde{k}}\left(\int_0^\infty b'_{0\tilde{k}}(r) r\,\mathrm{d}r\right)\int_0^{L_z} z\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{L_z}\tilde{k}z\right)\mathrm{d}z\,. \tag{87}$$

对轴向坐标进行分部积分，可得非零的边界项：

$$\int_0^{L_z} z\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{L_z}\tilde{k}z\right)\mathrm{d}z = \left[\frac{L_z}{\mathrm{i}2\pi\tilde{k}} z\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{L_z}\tilde{k}z\right)\right]_0^{L_z} - \int_0^{L_z}\frac{L_z}{\mathrm{i}2\pi\tilde{k}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{L_z}\tilde{k}z\right)\mathrm{d}z = \frac{L_z^2}{\mathrm{i}2\pi\tilde{k}}. \tag{88}$$

˜由于对于满足 $k\neq 0$ 的周期模态，该项严格非零，因此标准势能本质上取决于人工垂直域尺度，而非仅由内部物理决定。这进一步表明，在量化层化扰动的物理演化时，必须使用可用势能。

C. 谱基中的数学恒等式

本节将推导用于计算谱体积分的数学恒等式。具体而言，我们证明，对于满足适当边界条件的广义向量场，某些旋转算子的体积分恰好为零。

首先，考虑两个任意向量场 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应的 $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$ 体积分。利用标准的矢量分析恒等式，该算子的轴向分量可精确表示为两个纯散度项之差：

$$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A_z\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left((\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_z\boldsymbol{A}\right). \tag{89}$$

对该量在区域体积 V 上积分，并应用高斯定理，计算即可严格化简为表面边界通量。正如 Matsushima 和 Marcus (1997年)所指出的，只要向量场在原点处正则，且当 $r \to \infty$时衰减至零，净边界通量便完全消失，从而得到：

$$\int_V \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})\, \mathrm{d}V = 0. \tag{90}$$

此外，在 $\boldsymbol{A}$ 表示严格的方位背景流（$\boldsymbol{A} = A_\theta(r)\boldsymbol{\theta}$）这一特定情况下，轴向分量 A_z 为零，剩余的散度项可简化为 $-r^{-1}\partial_\theta((\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})_z A_\theta(r))$。对整个圆柱体积积分时，由于方位周期性，表达式（90）也恰好为零，无论 $A_\theta(r)$ 是否在远场衰减。

类似地，我们计算涉及背景旋转、剪切和浮力的区域积分。对于无散扰动速度 $\boldsymbol{u}'$ 和浮力扰动 b'，定义复合向量场

$$\boldsymbol{V} = (2\Omega + f(r))\, \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{u}' + b'\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{91}$$

利用恒等式 $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{V} \times \hat{\boldsymbol{z}})$ 并应用向量三重积，轴向旋度可解析性地化简为严格的水平散度：

$$\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[(2\Omega + f(r))\boldsymbol{u}'_\perp\right], \tag{92}$$

其中 $\boldsymbol{u}'_\perp = u'_r\hat{\boldsymbol{r}} + u'_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 表示水平速度。对区域体积内这一精确散度积分可得：

$$\int_V \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \left((2\Omega + f(r))\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{u}' + b'\hat{\boldsymbol{z}}\right) \mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[(2\Omega + f(r))\, \boldsymbol{u}'_\perp\right] \mathrm{d}V\,. \tag{93}$$

根据散度定理，该体积分完全化为在 $r = 0$ 和$r \to \infty$处计算的水平边界通量。由于物理速度场必须在原点处保持正则，并在远场衰减至零，径向边界通量恒为零。因此，无论轴向边界条件如何，该积分的值均为零。

D. 分层柱状涡旋的线性稳定性方程

线性化系统（ 57）的分层方位剪切流可用原始变量表示 s:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}}: &\quad \Phi\tilde{u}_r = 2(\bar{\Omega} + \Omega)\tilde{u}_\theta - \mathrm{d}_r\tilde{p},\\
\hat{\boldsymbol{\theta}}: &\quad \Phi\tilde{u}_\theta = -\left(\bar{\zeta} + 2\Omega\right)\tilde{u}_r - \frac{\mathrm{i}m}{r}\tilde{p},\\
\hat{\boldsymbol{z}}: &\quad \Phi\tilde{u}_z = -\tilde{b} - \mathrm{i}k\tilde{p},\\
\tilde{b}: &\quad \Phi\tilde{b} = \bar{N}^2\tilde{u}_z,
\end{aligned} \tag{94}$$

其中， Ω 和 ζ 分别为背景剪切的角速度和轴向涡度，而 $\Phi(r) \equiv \sigma + \mathrm{i}m\Omega$ 为多普勒频移复特征值。该方程组可简化为关于 $g(r) \equiv r\tilde{u}_r$的二阶特征值问题：

$$\begin{aligned}
0 = \quad & g'' + \left\{\frac{2\Phi\Phi'}{\Phi^2 + \bar{N}^2} + \frac{\mathrm{i}m(2\bar{\Omega} - \bar{\zeta})}{r\Phi} + \frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{1}{r} - \frac{S'}{S}\right\} g'\\
& - \left\{\frac{k^2 \cdot (\Phi^2 + \Delta(r))}{\Phi^2 + \bar{N}^2} + \frac{m^2}{r^2} + \frac{2\mathrm{i}m(\bar{\zeta} + 2\Omega)\Phi'}{r(\Phi^2 + \bar{N}^2)} + \frac{\mathrm{i}m[S\bar{\zeta}' - (\bar{\zeta} + 2\Omega)S']}{r\Phi S}\right\} g,
\end{aligned} \tag{95}$$

其中 $S(r) \equiv (k^2r^2 + m^2)\Phi^2 + m^2\bar{N}^2 (\geq 0)$。

快速查看方程（95）可知，除极点（$r = 0$）奇点外，还存在两类临界层奇点：

1. 斜压临界层，其中

$$\Phi^2(r_c) + \bar{N}^2 \equiv 0, \tag{96}$$

所以 $\sigma_c = -\mathrm{i}m\Omega(r_c) \pm \mathrm{i}N$；

2. 正压临界层，对应于这种情况

$$\Phi(r_c) \equiv 0, \tag{97}$$

所以 $\sigma_c = -\mathrm{i}m\Omega(r_c)$，这给出了特征值的连续谱。

CRediT 作者贡献声明

Jinge Wang： 概念构思、方法学、软件、验证、形式分析、调查研究、初稿撰写、审阅与编辑、可视化。**Philip S. Marcus：** 方法学、审阅与编辑、指导、经费获取。

参考文献

Armitage, P.J.，1998年。全局吸积盘模拟中的湍流与角动量输运。《天体物理学报》501，L189。URL：https://doi.org/10.1086/311463，doi:10.1086/311463。Armitage, P.J.，2011年。原行星盘的动力学。《天文学与天体物理学年度评论》49，195–236。URL：https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-astro-081710-102521，doi:https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081710-102521。Balbus, S.A.，Hawley, J.F.，1998年。吸积盘中的不稳定性、湍流与增强输运。《现代物理评论》70，1–53。URL：https: //link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.70.1，doi:10.1103/RevModPhys.70.1。Barranco, J.A.，Marcus, P.S.，2005年。分层原行星盘中的三维涡旋。《天体物理学报》623，1157。URL：https://doi.org/10.1086/428639，doi:10.1086/428639。Barranco, J.A.，Marcus, P.S.，2006年 219，21 3 46 0021999106001379，10 1016 。用于剪切分层流的三维谱和无弹性流体动力学代码。《计算物理学杂志》–。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S doi:https://doi.org/ 。 /j. jcp.2006.03.015。Barranco, J.A.，Pei, S.，Marcus, P.S.，2018年。僵尸涡旋不稳定性。III. 非均匀分层与辐射阻尼下的持续性。《天体物理学报》869，127。URL：https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaec80，doi:10.3847/1538-4357/aaec80。Booker, J.R.，Bretherton, F.P.，1967年。剪切流中内重力波的临界层。《流体力学杂志》27，513–539。doi:10.1017/S0022112067000515。Boyd, J.P.，1998年。关于切比雪夫和勒让德谱方法及谱元方法中过滤人工黏性的两点评论：保持边界条件，以及将滤波器解释为扩散。《计算物理学杂志》143，283–288。URL：https://www. sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999198959617，doi:https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5961。Boyd, J.P.，Yu, F.，2011年。比较七种用于圆盘插值和泊松方程求解的谱方法：泽尼克多项式、Logan–Shepp脊多项式、切比雪夫–傅里叶级数、柱面Robert函数、贝塞尔–傅里叶展开、正方形到圆盘的共形映射以及径向基函数。《计算物理学杂志》230，1408–1438。URL：https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0021999110006133，doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.011。Burns, K.J.，Vasil, G.M.，Oishi, J.S.，Lecoanet, D.，Brown, B.P.，2020年。Dedalus：一种采用谱方法进行数值模拟的灵活框架。《物理评论研究》2，023068。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023068，doi:10.1103/ PhysRevResearch.2.023068。Canuto, C.，Hussaini, M.Y.，Quarteroni, A.，Zang, T.A.，2007年。《谱方法》。施普林格科学与商业媒体。Chandrasekhar, S.，1981年。《流体动力学与磁流体动力学稳定性》。多佛物理学丛书，多佛出版社。URL：https: //books.google.com/books?id=oU_-6ikmidoC。Cox, S.，Matthews, P.，2002年。刚性系统的指数时间差分。《计算物理学杂志》176，430–455。URL：https: //www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999102969950，doi:https://doi.org/10.1006/jcph.2002.6995。Dalcin, L.，Mortensen, M.，Keyes, D.E.，2019年。使用高级消息传递接口的快速并行多维快速傅里叶变换。《并行与分布式计算杂志》128，137–150。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S074373151830306X，doi:https://doi.org/10. 1016/j.jpdc.2019.02.006。Dubrulle, B.，Marié, L.，Normand, Ch.，Richard, D.，Hersant, F.，Zahn, J.-P.，2005年 429，1 13 10 1051 0004 6361 200400065，10 1051 0004 6361 200400065。分层盘中的流体动力学剪切不稳定性。《天文学与天体物理学》–。URL：https://doi.org/ 。 / - : doi: 。 / - : 。Ebrahimi, F.，Blackman, E.G.，2016 年。全局柱面剪切流中径向依赖的大尺度发电机与局部笛卡尔极限。《皇家天文学会月报》459，1422–1431。URL：https://doi.org/10.1093/mnras/stw724，doi:10.1093/ mnras/stw724，arXiv:https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/459/2/1422/8040856/stw724.pdf。Garcia, F.，Bonaventura, L.，Net, M.，Sánchez, J.，2014年。旋转球壳中热对流的指数型与隐式-显式高阶时间积分器比较。《计算物理学杂志》264，41–54。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S0021999114000606，doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.01.033。

Garcia, F.，Net, M.，García-Archilla, B.，Sánchez, J.，2010年。旋转球壳中热对流高阶时间积分器的比较。《计算物理学杂志》229，7997–8010。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/ S0021999110003736，doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.07.004。Gardner, D.J.，Guerra, J.E.，Hamon, F.P.，Reynolds, D.R.，Ullrich, P.A.，Woodward, C.S.，2018年。非静力大气模式的隐式-显式（IMEX）龙格-库塔方法。《地球科学模式发展》11，1497–1515。URL：https://gmd.copernicus.org/articles/ 11/1497/2018/，doi:10.5194/gmd-11-1497-2018。Gopinath, V.，Fournier, A.，Gastine, T.，2022年。环域中布西涅斯克热对流伪谱近似的隐式-显式时间积分器评估。《计算物理学杂志》460，110965。URL：https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0021999122000274，doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.110965。Kassam, A.K.，Trefethen, L.N.，2005年。刚性偏微分方程的四阶时间步进。《SIAM计算科学杂志》26，1214–1233。URL：https://doi.org/10.1137/S1064827502410633，doi:10.1137/S1064827502410633，arXiv:https://doi.org/10.1137/S1064827502410633。Lan, R.，Leng, W.，Wang, Z.，Ju, L.，Gunzburger, M.，2021年。用于地球物理流动模拟的并行指数时间差分方法。《应用力学与工程中的计算机方法》387，114151。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0045782521004825，doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114151。Le Dizès, S.，2008年。旋转分层流体中兰姆-奥辛涡上的无粘波：对椭圆不稳定性的影响。《流体力学杂志》597，283–303。doi:10.1017/S0022112007009780。Lee, S.，Marcus, P.S.，2023年。使用映射勒让德函数的谱方法对尾涡进行线性稳定性分析。《流体力学杂志》967，A2。doi:10.1017/jfm.2023.455。Lee, S.，Wang, J.，2025年。MLEGS：现代化并行化的映射勒让德谱方法代码。URL：https://doi.org/10.5281/zenodo. 17095748，doi:10.5281/zenodo.17095748。Machida, M.，Hayashi, M.R.，Matsumoto, R.，2000年。较差自转磁化盘的全局模拟：低-β丝状结构与结构化冕的形成。《天体物理学报》532，L67。URL：https://doi.org/10.1086/312553，doi:10.1086/312553。Mahdinia, M.，Hassanzadeh, P.，Marcus, P.S.，Jiang, C.H.，2017年。无界旋转竖直分层布西涅斯克流中三维高斯涡旋的稳定性：线性分析。《流体力学杂志》824，97–134。doi:10.1017/jfm.2017.303。Marcus, P.S.，Pei, S.，Jiang, C.H.，Barranco, J.A.，Hassanzadeh, P.，Lecoanet, D.，2015年。僵尸涡旋不稳定性。I. 使原行星盘死区复苏的纯流体动力学不稳定性。《天体物理学报》808，87。URL：https://doi.org/10.1088/0004-637X/808/ 1/87，doi:10.1088/0004-637X/808/1/87。Marcus, P.S.，Pei, S.，Jiang, C.H.，Hassanzadeh, P.，2013年。稳定分层旋转剪切流中通过自复制产生的三维涡旋。《物理评论快报》111，084501。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.084501，doi:10.1103/ PhysRevLett.111.084501。Maslowe, S.，1986年。剪切流中的临界层。《流体力学年评》18，405–432。doi:https://doi.org/10.1146/annurev. fluid.18.1.405。Matsushima, T.，Marcus, P.，1997年。无界域的谱方法。《计算物理学杂志》137，321–345。URL：https: //www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999197958046，doi:https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5804。Molemaker, M.J.，McWilliams, J.C.，Yavneh, I.，2001年。离心稳定分层泰勒-库埃特流的不稳定性与平衡。《物理评论快报》86，5270–5273。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5270，doi:10.1103/PhysRevLett.86.5270。Moler, C.，Van Loan, C.，2003年。计算矩阵指数的十九种可疑方法：二十五年后。《SIAM评论》45，3–49。URL：https://doi.org/10.1137/S00361445024180，doi:10.1137/S00361445024180，arXiv:https://doi.org/10.1137/S00361445024180。Regev, O.，Umurhan, O.M.，2008年。剪切盒近似对吸积盘磁流体湍流数值研究的可行性。《天文学与天体物理学》481，21–32。doi:https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078413。Riedinger, X.，Le Dizès, S.，Meunier, P.，2010年。分层流体中兰姆-奥辛涡的粘性稳定性性质。《流体力学杂志》645，255–278。doi:10.1017/S002211200999262X。Schulze, J.C.，Schmid, P.J.，Sesterhenn, J.L.，2009年。利用克雷洛夫子空间进行指数时间积分。《流体数值方法国际期刊》60，591–609。URL：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fld.1902，doi:https://doi.org/10. 1002/fld.1902，arXiv:https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/fld.1902。Song, X.C.，Smith, P.，Kalyanam, R.，Zhu, X.，Adams, E.，Colby, K.，Finnegan, P.，Gough, E.，Hillery, E.，Irvine, R.，Maji, A.，St. John, J.，2022年。Anvil——系统架构以及部署和早期用户运行经验，载于：《先进研究计算的实践与经验2022：革命性计算、连接与您》，美国计算机协会，纽约，纽约州，美国。URL：https://doi.org/10.1145/3491418.3530766，doi:10.1145/3491418.3530766。Spiegel, E.A.，Veronis, G.，1960年。关于可压缩流体的Boussinesq近似。《天体物理学报》131，442。doi:10.1086/ 146849。Vogl, C.J.，Steyer, A.，Reynolds, D.R.，Ullrich, P.A.，Woodward, C.S.，2019年。HOMME-NH动力核的隐式-显式加性龙格-库塔积分器评估。《地球系统模拟进展期刊》11，4228–4244。URL：https: //agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019MS001700，doi:https://doi.org/10.1029/2019MS001700，arXiv:https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2019MS001700。Wang, C.，Balmforth, N.J.，2021年。强迫斜压临界层的非线性动力学II。《流体力学杂志》917，A48。doi:10.1017/ jfm.2021.297。Wang, J.，Lee, S.，Marcus, P.S.，2026年。柱状涡旋中三波共振的扰动分析：选择定则以及外部强迫和临界层的作用。URL：https://arxiv.org/abs/2402.05287，arXiv:2402.05287。Wohlever, H.Y.，Jiang, C.H.，Marcus, P.S.，2025年。旋转分层剪切流中的僵尸涡旋不稳定性。I. 无粘流动。准备中的手稿。

Yavneh, I., McWilliams, J.C., Molemaker, M.J., 2001. 离心稳定的分层泰勒-库埃特流的非轴对称不稳定性。《流体力学杂志》448, 1–21. doi:10.1017/S0022112001005109. Zhu, Z., Jiang, Y.F., Stone, J.M., 2020. FU Ori 吸积盘的全局三维辐射磁流体动力学模拟及磁场的观测特征。《皇家天文学会月报》495, 3494–3514. URL:https://doi.org/10.1093/mnras/staa952, doi:10.1093/mnras/staa952, arXiv:https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/495/3/3494/33344771/staa952.pdf.