arXiv:2603.07062v1 [math.NT] 7 Mar 2026

关于多项式计数簇的备注

Fernando Rodriguez Villegas

ICTP
villegas@ictp.it

Nicholas M. Katz

普林斯顿大学
nmk@math.princeton.edu

2026年3月10日

1

在这篇短文中，我们证明了关于多项式计数簇的几条事实，并回答了它们所引出的自然问题。一个多项式计数 X 簇本质上是指其在有限域上的点数 $\mathbb{F}_q$ 由多项式 $\#X(\mathbb{F}_q) = C(q)$ 给出。众所周知的例子包括仿射空间或射影空间（或更一般地，格拉斯曼流形）以及其他标准簇。关于“多项式计数”的一般定义，以及$C(q)$与X 的混合霍奇结构之间的联系，见 [1][附录，第617-618]页。在那里，我们从$X/\mathbb{C}$ 一个有限型的分离概形以及一个多项式 $C[t] \in \mathbb{Z}[t]$出发。我们说$X/\mathbb{C}$是“多项式计数”的，其多项式为$C(t)$，如果对于某个“扩张”X_R/R ，即$X/\mathbb{C}$ 到子环$R \subset \mathbb{C}$ 的扩张，而该子环作为 $\mathbb{Z}$-代数是有限生成的，我们有：

对于每一个有限域 $\mathbb{F}_q$ 以及每一个环同态 $\phi: R \to \mathbb{F}_q$,

$$\#X_R(\mathbb{F}_q) = C(q).$$

注意，即使我们的$X/\mathbb{C}$ 下降到 $\mathbb{Z}$ 且具有多项式计数，它也未必能以任何直观的意义在 $\mathbb{Z}$ 上具有多项式计数。最简单的例子：$x^2 + 1 = 0$ 在 $\mathbb{Z}[i、1/2]$, 上具有多项式计数，其中C 为常数多项式 2，但它在$\mathbb{Z}$上不具有多项式计数。

在本文中，我们将关注以下情形。给定一个 $\mathbb{Z}$上的有限型分离概形$X/\mathbb{Z}$ ，以及$C[t] \in \mathbb{Z}[t]$ 一个多项式。给定整数$D \geq 1$，我们

则称$X/\mathbb{Z}$在"D之外"是多项式计数的，如果对每一个使D 可逆的有限域 $\mathbb{F}_q$ ，我们有

$$\#X(\mathbb{F}_q) = C(q).$$

若存在这样的D，则称$X/\mathbb{Z}$ 具有多项式计数性质。

我们要探讨的两个问题如下：

- 1) 若X/C 光滑，且其多项式计数为$C(t) = t_n$ ，其中n为某个数，那么X 是否同构于仿射空间 $\mathbb{A}_n$?
- 2) 若X/C 具有多项式计数性质，那么在给定权的某个分次分量中，其霍奇数是否满足 $h_{p,q} = 0$ ，除非$p = q$?

我们证明这两种情况下的答案都是否定的。

2

设$H \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ 是一个具有$N \geq 1$的多项式。为陈述本节的主要结果，我们需要以下组合常数。对于子集$S \subseteq \{1, \ldots, N\}$，令 Δ_S为如下多项式的牛顿多面体：对每个$i \notin S$，将$x_i = 0$ 代入H 。若该特化非零，则如此定义；若该特化为零，则令 $\Delta_S = \emptyset$ 。然后定义

$$f_{r,n} := \#\{S \mid \#S = r, \dim \Delta_S = n - 1\}, \tag{1}$$

其中 $\dim \Delta_S = -1$ 若 $\Delta_S = \emptyset$。

Let

$$\mathcal{F}_\Delta(x, y) := \sum_{r,n=0}^{N} f_{r,n} x^r y^n$$

为这些常数的占位多项式。

为方便起见，我们令 $\sigma_n \subseteq \mathbb{Z}^n$ 为维数 $n - 1$ 的标准单纯形，即 $(1, 0, \ldots, 0)$、$(0, 1, 0, \ldots, 0)$、$\ldots$、$(0, .. . ,0, 1)$ 的凸包。若存在 $\mathbb{Z}$ 上的可逆仿射变换将其中一个映为另一个，则称 $\mathbb{Z}^n$ 中的两个格多面体为等价 。

定理 2.1. 设 $X \subseteq \mathbb{A}^N$ 为多项式 $H \in \mathbb{Z}[x_1, .. . , x_N]$ 在 $\mathbb{C}$ 上的零点集，该多项式带有 $N \geq 1$，其牛顿多面体 Δ 等价于 σ_N。设

$$X' := X \cap T,$$

其中

$$T := \mathit{Spec}(\mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_N, x_N^{-1}])$$

是环面。

则簇 X' 与 X 在 D 之外是多项式计数的，因为

$$D := \text{ the product of all nonzero coefficients of } H.$$

更精确地说，

$$\#X'(\mathbb{F}_q) = c_N(q), \tag{2}$$

and

$$\#X(\mathbb{F}_q) = \sum_{r=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} f_{r,n}c_n(q)(q-1)^{r-n}, \tag{3}$$

其中

$$c_n(q) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}q^i + (-1)^n & n \geq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases},$$

且 $f_{r,\ n}$ 定义于 （1） 中。

证明。 容易验证，对于 $N \geq 1$

$$\#\{(x_1,\ldots,x_N) \in (\mathbb{F}_q^{\times})^N \mid x_1 + \cdots + x_N = 0\} = c_N(q) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{N-n}\binom{N}{n}q^{n-1} + (-1)^N$$

通过莫比乌斯反演可得

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}c_n(q) = q^{N-1}, \qquad N \geq 1.$$

由于 Δ 等价于标准单纯形，故（2）成立。事实上，令 $y_i := x^{m_i}$，其中$m_1,.....m_N$是 Δ的顶点。鉴于 σ_N与 Δ等价，这给出了环面的一个自同构（$x_1,.....,\ x_N$） $\mapsto$（$y_1,.....,\ y_n$）。但随后这两个方程

$$x^{m_1} + \cdots + x^{m_N} = 0, \qquad y_1 + \cdots + y_N = 0$$

在 $\mathbb{F}_q^{\times}$中具有相同数量的解。

为证明 (3)，我们递归进行。注意，将 $H(x_1,\ldots,x_N)$ 中的 $x_i = 0$ （$i \notin S$，其中 $S \subseteq \{1,\ldots,N\}$）赋值后，得到一个多项式 $H_S(x_1,\ldots,x_N)$，其牛顿多项式 Δ_S 是 Δ 的一个面（或为空）。因此，对于某个 $n \geq 0$， Δ_S 也等价于 σ_n （若 H_S 完全消失，则为空）。特别地，若 Δ_S 非空，则满足 $H_S(x_1,\ldots,x_N)$ 且 $x_i \in \mathbb{F}_q^{\times}$的解的数目为 $c_n(q)(q-1)^{r-n}$，其中 $r := \#S$。另一方面，若 Δ_S 为空，则解的数目为 $(q-1)^r$。命题得证。□

Ex例 2.2。 设 $n_1,\ldots,n_r$ 是两两互素的正整数构成的一个元组，并且 $le \qquad t$

$$X: \quad x_1^{n_1} + \cdots + x_r^{n_r} = 0.$$

那么 $X/\mathbb{Z}$ 是关于 $D = 1$ 的多项式计数；更准确地说，

$$X(\mathbb{F}_q) = q^{r-1}. \tag{4}$$

证明。 注意到，互素条件保证牛顿多面体Δ与 σ_r等价。事实上，将多面体 Δ 平移 $-(n_1, 0, \ldots, 0)$ 后，它与顶点为以下各点的单纯形等价

$$(0, \ldots, 0), (-n_1, n_2, 0, \ldots, 0), \ldots (-n_1, 0, \ldots, 0, n_r).$$

Let

$$M := \begin{pmatrix} -n_1 & -n_1 & \cdots & & -n_1 \\ n_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & n_3 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & n_r \end{pmatrix}.$$

要证明该命题，只需证明可以找到一个列向量 $x := (x_1, \ldots, x_r)$，满足 $x_i \in \mathbb{Z}$，使得矩阵 $U := (x \mid M) \in \mathbb{Z}^{r \times r}$（将 x 作为第一列添加到 M 中）可逆。给定这样的 U，我们得到

$$M = UM',$$

其中

$$M' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

并且由于顶点为

$$(0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots (0, \ldots, 0, 1)$$

等价于 σ_r， Δ也同样如此。

为了求出 x，我们需要求解整数 x_i，使得

$$\det(U) = -d_r x_1 + \cdots (-1)^r d_1 x_r = \pm 1, \qquad d_i := n_1 \cdots \widehat{n_i} \cdots n_r.$$

根据互素假设，向量 $(d_1, \ldots, d_n)$ 是本原向量，因此这样的解存在。

显然， $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F}_{\sigma_r}$。结论现由定理 2.1 得出。 □

例 2.3。 考虑罗素三维簇 *[2]*

$$X: \quad x^2 y + x + z^2 + t^3 = 0.$$

其牛顿多面体是 $\mathbb{Z}^4$ 中的3维单纯形，其顶点为该矩阵的各列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

事实上，这等价于 σ_4。我们有

$$\mathcal{F}_\Delta(x,y) = x^4y^4 + 3x^3y^3 + x^3y^2 + 4x^2y^2 + 2x^2y + 3xy + x + 1.$$

于是公式(3)给出

$$X(\mathbb{F}_q) = q^3.$$

（罗素三维簇在 $\mathbb{Z}$ 上是多项式计数的，取 $D = 1$ 和 $C(t) = t^3$, ，这一点也可以直接验证，见下一个例子。）

众所周知，$X(\mathbb{C})$ 与 $\mathbb{R}^6$ 微分同胚，但X 不同构于 $\mathbb{A}^3$。（关于这类现象的更多详情，请参见 [2][§1] 中的讨论及其中引用的文献。）这回答了我们的第一个问题。

另一个例子是，众所周知，这个四维簇

$$x + x^2y + z^2 + t^3 + u^5 = 0$$

与 $\mathbb{R}^8$ 微分同胚，但不同构于 $\mathbb{C}^4$，这与罗素的情形相同（见 [2][注 11.1]）。

例 2.4。 一般而言，设 $n_1,\dots,n_r$ 是一个由两两互素的正整数组成的元组，并考虑仿射簇

$$X: \quad x^2y + x + \sum_{i=1}^{r} x_i^{n_i} = 0$$

在 $\mathbb{A}^{r+2}$ 中，坐标为(x、y、$x_1,\dots\dots$、x_r)。那么 X 在 $\mathbb{Z}$ 上是光滑的，并且

$$\#X(\mathbb{F}_q) = q^{r+1}.$$

证明。不难验证X 是光滑的。由前面的例子可直接得出，其牛顿多面体等价于 σ_{r+2}（这里互素假设同样至关重要）。

事实上，不难直接验证 $\#X(\mathbb{F}_q) = q^{r+1}$，而无需借助定理 2.1。确实，对于$x \neq 0$，固定 ($x_1,\dots\dots$、$x_r$) 并求解$y$，可得$q^r(q-1)$ 个点。相反，对于$x = 0$，根据 (4)，来自 $\sum^r{}_{i=1}x^{n_i}{}_i = 0$ 的点有q^{r-1} 个；再乘以q，因为y 可以任意取值，且独立于 ($x_1,\dots\dots$、x_r)。□

3

Supp因此 X 是多项式计数的。除非p =q，是否$h^{p,\,q;i} = 0$ 的权为i？ ？

事实并非如此。下面是最简单的例子。取一条椭圆曲线 E，并记 E_{aff} 为去掉原点后的仿射曲线。例如，E_{aff} 是 $\mathbb{A}^2$ 中由以下方程定义的曲线

$$E_{\text{aff}}: \quad y^2 = f(x),$$

其中f 是一个具有互异根的三次多项式。

现在考虑抽象概形X，它由仿射簇$Y := E_{\text{aff}} \subseteq \mathbb{A}^2$与由$z(y^2 - f(x)) = 1$定义的仿射簇$Z := \mathbb{A}^2 \setminus E_{\text{aff}} \subseteq \mathbb{A}^3$不交并而成。

根据整数环的切除长正合列

$$0 = H_c^1(\mathbb{A}^2) \to H_c^1(Y) \to H_c^2(Z) \to H_c^2(\mathbb{A}^2) = 0.$$

因此

$$H_c^1(Y) \cong H_c^2(Z).$$

由仿射勒夫谢茨定理的对偶可得$H_c^1(\text{整数环}) = 0$。

另一方面，关于Y作为$E \setminus 0$的切除长正合列表明$H_c^1(Y) \cong H^1(E)$且$H_c^2(Y) \cong H^2(E)$。由此我们得出

$$gr_W^1(H_c^2(Z)) \cong H^1(E),$$

因此整数环具有$h^{0,1;2} = h^{1,0,2} = 1$以及$h^{0,1;1} = h^{1,0;1} = 0$（因为整个$H_c^1$消失了）。与此同时，

$$gr_W^1(H_c^1(Y)) = H^1(E),$$

因此我们得出，Y 具有 $h^{0,1;1} = h^{1,0;1} = 1$，并且 Y 具有 $h^{0,1;2} = h^{1,0;2} = 0$（因为 $H_c^2 \cong H^2(E)$ 属于 (1, 1) 型）。因此对于 X，我们有 $h^{0,1;1} = h^{1,0;1} = 1$ 以及 $h^{0,1;2} = h^{1,0,2} = 1$。但这个不交并显然是多项式计数的，它有 q^2 个点。

取一点 $\alpha \in \mathbb{A}^2 \setminus E_{\text{aff}}$，再取一点 $\beta \in \mathbb{A}^3$。那么在 $\mathbb{A}^5 = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^3$ 中，我们有互不相交的闭集 $Y \times \beta$ 和 $\alpha \times Z$。换句话说，我们可以把这个例子看作一个闭集$W \subseteq \mathbb{A}^5$。再利用$M := \mathbb{A}^5 \setminus W$的切除长正合列，我们将得到

$$H_c^i(W) \cong H_c^{i+1}(M), \qquad i \leq 8,$$

特别是对于$i = 1$和$i = 2$。因此，我们发现M是光滑且不可约的，并且具有$h^{0,1;2} = h^{1,0;2} = 1$和$h^{0,1;3} = h^{1,0;3} = 1$；尽管它也显然具有多项式计数性质，但它有$q^5 - q^2$个点。

参考文献

[1] Hausel, T. 和 Rodriguez-Villegas, F.：《特征簇的混合霍奇多项式》，*Inv.Math.* **174**，第 3 期，（2008），555–624，arXiv:math.AG/0612668。

[2] Kaliman, Sh.；Makar-Limanov, L. 仿射整环在《仿射代数几何》中的 AK-不变量，231–255。大阪大学出版社，大阪，2007 ISBN:978-4-87259-226-9