arXiv:2603.07063v1 [math.DS] 7 Mar 2026

部分双曲动力系统的可微正规线性化

WEIJIE LU、YONGHUI XIA、WEINIAN ZHANG、WENMENG ZHANG

Abstract. 关于在双曲不动点处可微的 C^0 线性化，已有相关结果。本文进一步研究部分双曲微分同胚 F，以求得一个局部 C^0 共轭，该共轭在中心流形上 C^1，从而将双曲分量（即中心方向的法向分量）线性化，并得到其 Takens正规形。我们的结果是最优的，因为它不需要光滑共轭通常要求的非共振条件（例如 Takens定理中的条件），而且 $C^{1,\,\alpha}$ $(\alpha>0)$ 光滑性条件是尖锐的。在证明中，中心方向阻碍了 F的解耦，因为稳定与不稳定叶状结构彼此不相交。我们通过一种仅利用不稳定叶状结构的半解耦方法克服这一困难；该方法需要沿中心方向建立一个修正的 Lyapunov-Perron 方程。随后，分别运用 Whitney延拓理论和提升技巧，处理余循环约化以及扩张纤维保持映射的可微线性化问题。在局部情形下，我们的结果将 C. Pugh 和 M. Shub 在《数学发明》10 (1970): 187-198] 中关于正规线性化的结果提升为可微情形。

关键词： 部分双曲性；Takens正规形；中心流形；不变叶状结构；Lyapunov-Perron 方程
MSC2020： 37C15;37C86;37D30

1. Introduction

线性化是动力系统领域中最重要的理论之一。给定一个在不动点 0 附近的光滑（解析）微分同胚 F，我们期望找到一个光滑（解析）变换，使得 F 能够共轭于其线性部分 $\Lambda:=DF(0)$。1890年，庞加莱´（[28]）首次研究了解析微分同胚 F（x）$=\Lambda x+O$（$\|x\|^2$）在 $\mathbb{C}^d$上的解析线性化。他证明，若所有特征值 λ_1，...，λ_p属于 Λ 的单位圆内（或外），且满足所有阶的非共振条件，即:

$$\lambda_i \neq \lambda_1^{n_1}\cdots\lambda_d^{n_d}, \quad \forall i\in\{1,...,d\},$$

对所有 n_1，...，$n_d\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，其中 $\sum_{i=1}^d n_i\geq 2$，则存在一个解析微分同胚 $\Phi(x)$，使得 $\Phi\circ F\circ\Phi^{-1}=\Lambda$。后来，Siegel（[33]）在特征值满足丢番图条件的假设下研究了解析线性化

$$|\lambda_i-\lambda_1^{n_1}\cdots\lambda_d^{n_d}|\geq\frac{C}{|n|^{\nu}}, \quad \forall i\in\{1,...,d\},\sum_{i=1}^d n_i\geq 2,$$

对某些常数 $C,\nu>0$，证明存在一个解析微分同胚 $\Phi(x)$，可将F线性化。布鲁诺（[4]）进一步弱化了西格尔条件，并证明了同样的结果。庞加莱´与西格尔的解析线性化定理的证明，亦可分别参阅阿诺德（[1]）、莫泽（[25]）、岑德（[40]）等人的著作。

20世纪60年代，Hartman ([19]) 和格罗布曼 ([16]) 独立证明了超曲微分同胚在不动点附近可以线性化。Hartman-Grobman定理指出，对于 C^1 上的超曲微分同胚 F，存在一个同胚 Φ，使得 F

可以 C^0 线性化。人们也尝试将这一结果从不动点附近推广到不变流形附近。1970年，Pugh 和 Shub ([29]) 为黎曼流形上的正规双曲微分同胚沿紧致 C^1 不变子流形给出了正规线性化。与 Hartman-Grobman定理相比，Pugh-Shub 的 C^0 正规线性化定理不仅涉及纤维丛理论等更多技术，还λ-引理，而且在奇异摄动理论等问题上也有更多应用 ([13])。

关于 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑线性化，Sternberg（[35, 36]）在满足 N 阶非共振条件时，得到了双曲微分同胚的局部 C^r 线性化C^N，其中 $N = N(r)$ 是一个较大的整数。大量文献致力于寻找不动点附近光滑线性化的更优条件。一些经典结果可见 Belickiĭ（[2]）、ElBialy（[11]）、Hartman（[18]）、Li 和卢（[22]）、Rodrigues 和 Sol`a-Morales（[31]）、Zhang、Zhang 和 Jarczyk（[41]）。

另一方面，作为 Sternberg 定理的推广，Takens（[37]）证明，在满足 N 阶强非共振条件时，即

$$|\lambda_i| \neq |\lambda_1|^{n_1} \cdots |\lambda_d|^{n_d}, \quad \forall i \in \{1, ..., d\},$$

满足 $2 \leq \sum_{i=1}^{d} n_i \leq N$时，部分双曲微分同胚的双曲部分（即法向） C^N F 在其中心流形附近可以被 C^k 线性化，从而得到其 Takens正规形（见下文（2.5））。关于这一问题的最新进展，可参见（[6, 23]）。

请注意，在上述结果中， C^0 线性化不需要非共振条件，而解析或光滑线性化则需要该条件。尽管一些已知结果（例如 [30, 38]）表明，在没有非共振条件的情况下， C^0 线性化可以提升为 H¨lder 线性化，但 H¨lder 线性化无法区分动力系统的重要性质，例如特征方向。

因此，人们期望在不要求非共振条件的情况下，尽可能提高 Hartman-格罗布曼 C^0 线性化的正则性。然而，Hartman反例（[18]）表明，存在共振时，即使是 C^∞ 微分同胚也不允许 C^1 线性化。因此，人们努力证明共轭在不动点处可微，即共轭 Φ 具有如下形式

$$\Phi(x) = x + o(\|x\|) \quad \text{as } x \to 0,$$

这是因为它在半线性椭圆方程（[15, 第 342] 页）、非双曲奇点（[3]）、粗粒化熵（[27]）、Onsager-Machlup泛函（[9]）等研究中有重要应用。

不需要任何非共振条件的可微线性化结果，最早可见于 [39] van Strein 于 1990年发表的研究，随后 [30] 和 [17], 也提出，光滑双曲微分同胚在 $\mathbb{R}^d$ 上存在局部 C^0 线性化，且该线性化在不动点处可微。最近，Zhang、卢和 Zhang（[42]）研究了一个 $C^{1,\alpha}$ （$\alpha > 0$）微分同胚 F，并采用基于稳定与不稳定叶状结构的解耦方法，证明了在谱带宽条件下巴拿赫空间中的可微线性化

$$\lambda_i^+/\lambda_i^- < (\lambda_k^+)^{-\alpha}, \forall i = 1, ..., k, \quad \lambda_j^+/\lambda_j^- < (\lambda_{k+1}^-)^{\alpha}, \forall j = k+1, ..., d,$$

其中 Λ 的谱满足

$$\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \cdots < \lambda_k^- \leq \lambda_k^+ < 1 < \lambda_{k+1}^- \leq \lambda_{k+1}^+ < \cdots < \lambda_d^- \leq \lambda_d^+.$$

由于谱条件在 $\mathbb{R}^d$ 中可以自动满足，因此这一结果推广了 van Strein 等人此前的结果，将光滑性条件降低至 $C^{1,\alpha}$；反例（即 C^1 微分同胚）表明这一界限是尖锐的，该反例见 [42]。此外，后来还证明共轭具有如下形式

$$\Phi(x) = x + O(\|x\|^{1+\beta}) \quad \text{as } x \to 0,$$

与 $\beta > 0$。这一结果后来被用于研究 Onsager-Machlup泛函（[9]），从而证明其极小化序列的导数在临界点邻域内有界变差，这依赖于对 Φ 的非线性项所作的关键估计 $O(\|x\|^{1+\beta})$。

最近，Lu、Xia 和 Zhang（[24]）在较弱的谱带宽条件下，给出了巴拿赫空间中的可微线性化结果

$$\lambda_i^+/\lambda_i^- < (\lambda_i^+)^{-\alpha}, \forall i = 1, ..., k, \quad \lambda_j^+/\lambda_j^- < (\lambda_j^-)^{\alpha}, \forall j = k+1, ..., d,$$

而 [32] 给出的一个反例表明，该结果是（几乎）最优的。此外，Dragi˘cevi´c、Zhang 和 Zhang（[8]）证明，在存在非一致双曲性的情况下，可微线性化结果仍然成立。

本文在部分双曲性的框架下，不要求任何非共振条件，建立了可微正规线性化，从而得到Takens正规形（见下文（2.5））。更具体地说，我们有如下结果：

- 一个 $C^{1,\alpha}$（$\alpha \in (0, 1]$）部分双曲微分同胚存在正规线性化，其中共轭在中心流形上可微，且导数连续。

该共轭在中心流形上具有 C^1阶光滑性，而这通常需要某些非共振条件（例如 Takens定理中的条件），但我们并不需要这些条件。此外，如前所述，$C^{1,\alpha}$ 光滑性条件是尖锐的，这一点可由 [42],中给出的一个反例说明，下一节将对此作详细阐述（见注 4）。由于中心流形可视为正规双曲不变流形的局部版本，因此在局部情形下，我们的结果将 Pugh 和 Shub 在 C^0 中的正规线性化 [29] 提升到了可微的层次。

与双曲情形相比，中心方向带来了一个关键困难。具体而言，在双曲情形下，稳定与不稳定叶状结构横截相交，从而可以将系统解耦为收缩和膨胀；然而，在部分双曲情形下，中心方向阻碍了叶状结构相交。为克服这一困难，受[29], 启发，我们引入半解耦方法。也就是说，我们只拉直不稳定叶状结构，以获得一个扩张纤维保持映射，并通过提升技巧利用 [42] 中的可微线性化结果。在构造不稳定叶状结构时，为了证明其在中心流形上的正则性，需要沿中心方向建立一个修正的 Lyapunov-Perron 方程。

针对半解耦所带来的余循环约化中的后续困难，我们将借助Whitney延拓理论加以解决。更确切地说，对于一个基点位于中心稳定子空间上的扩张纤维保持映射，其线性部分实际上是一个依赖于中心稳定变量的线性余循环。由于Takens正规形中的线性部分（见下文（2.5））仅依赖于中心变量，因此需要将该线性余循环约化为一个仅依赖于中心变量的更简单余循环。为此，我们首先在这两类余循环之间建立一个 β-H¨older共轭，然后利用Whitney延拓定理找到一个 $C^{1,\beta}$ 变换

使其在中心稳定子空间上的导数恰好等于该 β-H¨older共轭。这样的 $C^{1,\beta}$ 变换有助于我们实现约化。

本文将按如下方式组织。在第2节中，我们首先陈述主定理，然后给出由 DF 在中心流形上生成的线性丛循环的分块对角化作为预备知识。第3 节致力于构造不稳定叶状结构，并证明其在中心流形上的正则性。随后，利用半解耦方法，我们在第4 节中通过运用线性余循环的约化以及扩张纤维保持映射的可微线性化来证明主定理，这两部分将分别在第5 节和第6节中补充证明。

2. Main result and preliminaries

2.1. 主要结果。在本小节中，我们陈述主要结果。考虑一个 $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \in (0,1]$)微分同胚 $F: U \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$)，其定义为

$$F(x) := Ax + f(x), \quad \forall x \in U, \tag{2.1}$$

其中 $U \subset \mathbb{R}^d$是原点0的小邻域， $A \in GL(\mathbb{R}, d)$， $f(0) = 0$且 $Df(0) = 0$。由于 U 足够小，可见 f 可视为一个 $C^{1,\alpha/2}$ 微分同胚，使得

$$\|Df(x)\| \le \delta_f, \quad \|Df(x) - Df(y)\| \le \delta_f \|x - y\|^{\alpha/2}, \quad \forall x, y \in U,$$

其中 $\delta_f > 0$ 是一个依赖于 U的小常数。然后，利用一个光滑截断函数——它在 U 上等于 1，在另一个包含 U的原点小邻域 $V \subset \mathbb{R}^d$ 之外等于 0——我们可以将 F 延拓为一个全局微分同胚，使得

$$\|Df(x)\| \le \delta_f, \quad \|Df(x) - Df(y)\| \le \delta_f \|x - y\|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

这里，不失一般性，我们仍用 δ_f 和 α 代替 $C\delta_f$ （其中常数为 C）和 $\alpha/2$，因为它们都可以任意小。

接下来，假设 A 按块对角化，即

$$A := \operatorname{diag}(A_s, A_c, A_u),$$

其中，对于所有 $1 \le k < p < d$， $A_s := \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$，且 $A_u := \operatorname{diag}(A_{k+1}, \dots, A_p)$。此外，假设 A_c的所有特征值的模均为 1，且 A_i的所有特征值（$i = 1,\dots,p$）的模均为 λ_i，满足

$$0 < \lambda_s^- < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \lambda_s^+ < 1 < \lambda_u^- < \lambda_{k+1} < \cdots < \lambda_p < \lambda_u^+, \tag{2.3}$$

其中 $\lambda_s^-, \lambda_s^+, \lambda_u^-, \lambda_u^+$是常数。上述 A 的分块对角形式对应于分解

$$\mathbb{R}^d = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k \oplus X_c \oplus X_{k+1} \oplus \cdots \oplus X_p. \tag{2.4}$$

在下文中，对于 $x_i \in X_i$ ($i = 1,\dots,p$)，我们记

$$\begin{aligned}
&X_s := X_1 \oplus \cdots \oplus X_k, \quad X_u := X_{k+1} \oplus \cdots \oplus X_p,\\
&X_{su} := X_s \oplus X_u, \quad X_{cs} := X_c \oplus X_s, \quad X_{cu} := X_c \oplus X_u,\\
&x_s := x_1 + \cdots + x_k \in X_s, \quad x_u := x_{k+1} + \cdots + x_p \in X_u,
\end{aligned}$$

并且，对于 $x = x_s + x_c + x_u \in X_s \oplus X_c \oplus X_u$，我们记

$$x_{su} := x_s + x_u, \quad x_{cs} := x_c + x_s, \quad x_{cu} := x_c + x_u,$$
$$\pi_i x := x_i, \quad \pi_s x := x_s, \quad \pi_c x := x_c, \quad \pi_u x := x_u,$$
$$\pi_{su} := \pi_s + \pi_u, \quad \pi_{cs} := \pi_c + \pi_s, \quad \pi_{cu} := \pi_c + \pi_u.$$

为便于表述，我们有时用笛卡尔积代替直和。例如，我们可以将（2.4）改写为 $\mathbb{R}^d = X_1 \times \cdots \times X_k \times X_c \times X_{k+1} \times \cdots \times X_p$因为它们是同构的。

于是我们得到关于中心流形的以下结果。

引理 1. ([14]) 由 F 给出的映射(2.1)满足(2.2) 和(2.3)，且具有 $C^{1,\alpha}$ 中心流形

$$\mathcal{M}_c := \{x_c + \varpi_c(x_c) : x_c \in X_c\},$$

其中 $\varpi_c : X_c \to X_{su}$ 是一个 $C^{1,\alpha}$ 映射，满足 $\varpi_c(0) = 0$ 和 $D\varpi_c(0) = 0$。

根据引理1，我们可以使用 $C^{1,\alpha}$ 变换 $(\tilde{x}_c, \tilde{x}_{su}) \mapsto (x_c, x_{su} - \varpi_c(x_c))$ 将 F变为一个新的微分同胚，其中心流形恰好是子空间 X_c。我们仍将这个新的微分同胚记为 F，并再次使用光滑截断函数，假设（2.2）成立。注意， X_c 现在是 F 的中心流形。

我们现在可以陈述本文的主要结果。

定理2。设 F 是一个 $C^{1,\alpha}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上满足 (2.2) 和 (2.3)的微分同胚。那么 F 在局部上C^0 共轭于其*Takens*正规形

$$\begin{pmatrix} x_s \\ x_c \\ x_u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_s(x_c)x_s \\ A_c x_c + f_c(x_c) \\ A_u(x_c)x_u \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

通过共轭 $\mathcal{H}$： $U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，其中 $A_*(x_c)$: $X_* \to X_*$ $(* := s, u)$ 是线性算子，关于 $x_c \in X_c$ 为α-*Hölder*连续的，并且 $A_*(0) = A_*$；此外， f_c： $X_c \to X_c$ 是一个 $C^{1,\alpha}$ 映射。进一步地，对于任意 $\tilde{x}_c \in U \cap X_c$， C^0 共轭 $\mathcal{H}$ 满足 $\mathcal{H}^{\pm 1}(\tilde{x}_c) = \tilde{x}_c$ 并且

$$\mathcal{H}^{\pm 1}(x) = \tilde{x}_c + \Delta(\tilde{x}_c)^{\pm 1}(x - \tilde{x}_c) + O(\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}) \quad \text{as } x \to \tilde{x}_c \tag{2.6}$$

对于某个 $\beta \in (0, \alpha)$，其中 $\Delta(\tilde{x}_c)$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个依赖于 $\tilde{x}_c$ 且连续的可逆有界线性算子，并满足 $\Delta(0) = id$。

注3. 由（2.6）可知， $\mathcal{H}$ 在 $\tilde{x}_c \in \mathcal{M}_c$ 处可微，使得 $D\mathcal{H}^{\pm 1}(\tilde{x}_c) = \Delta(\tilde{x}_c)^{\pm 1}$，且它们关于 $\tilde{x}_c$ 连续。这意味着共轭在 C^0 中具有 $\mathbb{R}^d$，并呈现出 C^1-光滑性。也就是说，定理2 表明，对于部分双曲系统，我们实现了在中心流形上可微的正规线性化。请注意，与Takens定理相比，我们的结果不需要任何非共振条件。

注 4。当中心方向不存在（即 $\tilde{x}_c \equiv 0$）时，我们看到（2.5）变为 $(x_s, x_u) \mapsto (A_s x_s, A_u x_u)$，并且 $\Delta(0) = id$，这意味着

$$\mathcal{H}^{\pm 1}(x) = x + O(\|x\|^{1+\beta}) \quad \text{as } x \to 0.$$

这一结果与 [42, 定理 7。1] 在双曲情形下相一致。另一方面，一般而言，不可能将 $C^{1,\alpha}$ 的光滑性条件弱化为 C^1 。事实上，即使在双曲情形下，我们也可以定义一个映射

$$F_*(x) := \begin{cases} \mu \int_0^x (1 - \frac{1}{\log \tau})\, d\tau, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在其不动点 0 附近，且 $\mu \in (0, 1)$。于是，显然 F_* 是一个 C^1 收缩，且 $DF_*(0) = \mu$，但对于任意 $\alpha > 0$，它在 0 附近都不是 $C^{1,\alpha}$ 。如 [42, 第 4998-4999] 页所示， F_* 在 0 处不具有可微线性化，这说明了 $C^{1,\alpha}$ 光滑性条件的尖锐性。

2.2. **一些引理**。 在本小节中，我们考虑由 DF 在中心流形 X_c 上生成的线性余循环，并证明存在能够将这些线性余循环化为块对角形式的变换。由于中心变量 x_c 的重要性，在下文中，我们有时使用以下记号

$$(x_c, x_s, x_u) := x_s + x_c + x_u \in \mathbb{R}^d.$$

回顾 t hat， F 的中心流形已被拉直，即 $\pi_{su} F(x_c) = 0$，这意味着

$$\partial_{x_c}(\pi_{su} F)(x_c) = 0, \quad \forall x_c \in X_c, \tag{2.7}$$

其中我们使用了如下事实：当 $h(x, 0) = 0$ 时，对于任意 C^1 映射 $h(x, y)$， $\partial_x h(x, 0) = 0$。然后，我们给出以下引理。

引理 5。 存在一个 $C^{1,\alpha}$ ($\alpha > 0$ 较小) 变换 Υ： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 满足 $D\Upsilon(0) = id$ ，可将 F 变为一个新的微分同胚 $\Upsilon \circ F \circ \Upsilon^{-1}$ (仍记作 F) ，使得

$$\partial_{x_s}(\pi_c F)(x_c) = 0, \quad \partial_{x_u}(\pi_c F)(x_c) = 0, \quad \forall x_c \in X_c. \tag{2.8}$$

与此同时，新的 F 仍满足 (2.2) 和 (2.7)。

该引理的证明主要分为两部分：1. 使用经典的 Lyapunov-Perron 方法证明，在任意 $x_c \in X_c$ 处，稳定与不稳定叶状结构的叶的切空间分别是 X_s 和 X_u的小扰动；2. 使用惠特尼延拓定理找到一个 $C^{1,\alpha}$ 变换，使沿着 X_c的这些切空间变直。由于第一部分的思路较为初等，而第二部分的思路将在第5节关于余循环约化的讨论中详细给出，我们将引理 5 的证明推迟到附录 B。

接下来，由于谱条件 $\lambda_s^+ < 1^{1+\alpha}$ 和 $1^{1+\alpha} < \lambda_u^-$ 成立，我们得到关于 F 的经典光滑中心稳定/中心不稳定流形结果（参见例如 [21,定理4。1]）。

引理6。假设 F 是一个 $C^{1,\alpha}$ 满足 (2.2) 和(2.3)的微分同胚。则存在$C^{1,\alpha}$ 中心稳定和中心不稳定不变流形 $\mathcal{M}_{cs}$ 和 $\mathcal{M}_{cu}$ ，它们属于 F；也就是说，存在两个$C^{1,\alpha}$ 映射 $\varpi_{cs} : X_{cs} \to X_u$ 和 $\varpi_{cu} : X_{cu} \to X_s$ ，使得

$$\mathcal{M}_{cs} = \{x_{cs} + \varpi_{cs}(x_{cs}) : x_{cs} \in X_{cs}\}, \quad \mathcal{M}_{cu} = \{x_{cu} + \varpi_{cu}(x_{cu}) : x_{cu} \in X_{cu}\},$$

其中 $\varpi_{cs}(x_c) = \varpi_{cu}(x_c) = 0$ 和 $D\varpi_{cs}(x_{cs})$ $D\varpi_{cu}(x_{cu})$ 均为全局小量，且 $D\varpi_{cs}(0) = D\varpi_{cu}(0) = 0$。

根据引理 1 下方所给出的相同论证，我们看到 $C^{1,\alpha}$ 变换

$$\mathcal{G} : (x_c, x_s, x_u) \mapsto (x_c,\, x_s - \varpi_{cu}(x_{cu}),\, x_u - \varpi_{cs}(x_{cs})) \tag{2.9}$$

可以将中心稳定流形和中心不稳定流形拉直。此外，$\varpi_{cs}(x_c) = \varpi_{cu}(x_c) = 0$ 意味着 $\partial_{x_c}\varpi_{cs}(x_c) = \partial_{x_c}\varpi_{cu}(x_c) = 0$, 这表明 $\mathcal{G}(x_c) = x_c$ 且

$$D\mathcal{G}(x_c) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 表示可能非零的元素，而 $D\mathcal{G}(x) - id$ 在全局上足够小，使得 $D\mathcal{G}(0) = id$。因此，变换 $D\mathcal{G}$ 不会改变（2.7）和（2.8），但可能会稍微改变（2.2），使得

$$\|Df(x)\| \le \delta_f, \quad \|Df(x) - Df(y)\| \le M\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{2.10}$$

其中 $M > 0$ 是一个常数。注意，（$\delta_f > 0$）第二个不等式中的小系数仅用于证明引理 5，而后续推导中（2.10）已足够。经过变换 $\mathcal{G}$后，我们可以假设 $\mathcal{M}_{cs} = X_{cs}$ 且 $\mathcal{M}_{cu} = X_{cu}$，从而有 $\pi_u F(x_c, x_s, 0) = 0$ 且 $\pi_s F(x_c, 0, x_u) = 0$.因此，

$$\partial_{x_s}(\pi_u F)(x_c) = 0, \quad \partial_{x_u}(\pi_s F)(x_c) = 0, \quad \forall x_c \in X_c, \tag{2.11}$$

因为 $\partial_{x_{cs}}(\pi_u F)(x_c, x_s, 0) = 0$ 且 $\partial_{x_{cu}}(\pi_s F)(x_c, 0, x_u) = 0$ 根据下文（2.7）所述事实。

将（2.7）、（2.8）与（2.11）结合起来，我们得到

$$DF(x_c) = \begin{pmatrix} \partial_{x_c}(\pi_c F)(x_c) & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_s}(\pi_s F)(x_c) & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{x_u}(\pi_u F)(x_c) \end{pmatrix}, \quad \forall x_c \in X_c. \tag{2.12}$$

现在，我们定义 $g(x_c) := F(x_c) = \pi_c F(x_c)$ 和 $A(x_c) := DF(x_c)$，并考虑以下线性余循环

$$\mathcal{A}(m, n; x_c) := \begin{cases} A(g^{m-1}(x_c)) \cdots A(g^n(x_c)), & m \ge n+1, \\ id, & m = n, \\ A(g^m(x_c))^{-1} \cdots A(g^{n-1}(x_c))^{-1}, & m \le n-1. \end{cases} \tag{2.13}$$

由（2.10）和（2.12），可知 $A(x_c$ 是 A（见（2.1））的一个小扰动。因此，应用指数二分性的粗糙性理论（例如参见 [20, 43]），$\Sigma(A(x_c))$ 的二分谱满足 $\mathcal{A}(m, n; x_c)$

$$\Sigma(A(x_c)) \subset \bigcup_{i=1}^{p} [\lambda_i - \varsigma, \lambda_i + \varsigma] \cup [1 - \varsigma, 1 + \varsigma] \subset [\lambda_s^-, \lambda_s^+] \cup [\lambda_u^-, \lambda_u^+] \cup [1 - \varsigma, 1 + \varsigma] \tag{2.14}$$

对于一个较小的常数 $\varsigma \ge 0$，其中 λ_s^-，λ_s^+，λ_u^-，λ_u^+由（2.3）给出。然后，由（2.12）-（2.14），存在一个 $K \ge 1$ 使得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_s\| &\le K(\lambda_s^+)^{m-n}, \quad \forall m \ge n, \\ \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_u\| &\le K(\lambda_u^-)^{m-n}, \quad \forall m \le n, \end{aligned} \tag{2.15}$$

and

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_s\| &\le K(\lambda_s^-)^{m-n}, \quad \forall m \le n, \\ \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_u\| &\le K(\lambda_u^+)^{m-n}, \quad \forall m \ge n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

此外，我们还看到

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_c\| &\le K(1 + \varsigma)^{m-n}, \quad \forall m \ge n, \\ \|\mathcal{A}(m, n; x_c)\pi_c\| &\le K(1 - \varsigma)^{m-n}, \quad \forall m \le n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

注意，在上述三分法（2.15）-（2.17）中，投影 π_s、π_u、π_c 均与 x_c 无关，这是因为余循环 $\mathcal{A}(m,\ n;\ x_c)$ 已被分块对角化，如（2.12）所示。

接下来，我们给出 $g(x_{cs})$的稳定叶状结构的如下结果：$=\pi_{cs}F(x_{cs})$在中心稳定流形X_{cs}上，该结果将在第3节末证明。

引理 7. 假设 F 是一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚，使得(2.10)、(2.12)、(2.15)-(2.17) 成立。则存在 g 的稳定叶状结构：$=\pi_{cs}F|_{X_{cs}}$ 在 X_{cs} 上，其叶为

$$\mathcal{W}_s(x_{cs})=\{z_s+h_s(x_{cs},z_s):z_s\in X_s\},\quad \forall x_{cs}\in X_{cs},$$

其中 $h_s:\ X_{cs}\times X_s\to X_c$ 是 $C^{1,\beta}$-光滑的，并带有一个小常数 $\beta>0$，使得

$$h_s(x_c,0)=x_c\quad\text{and}\quad Dh_s(x_c,0)=\Pi_c,\quad \forall x_c\in X_c, \tag{2.18}$$

其中 $\Pi_c:\ X_{cs}\times X_s\to X_c$ 是一个满足 $\Pi_c(x_{cs},z_s)=x_c$的投影。

注意，$C^{1,\beta}$-光滑性之于 h_s，基本上由束条件（λ_s^+）$^{\alpha}$（$1+\varsigma$）$<1-\varsigma$在较小的 $\varsigma>0$ 下对稳定叶状结构所保证（见 [41, 引理 2-3]），我们只需证明（2.18）成立，该结论将在第3节末证明。

引理 7 使我们能够定义一个 $C^{1,\beta}$ 变换 ϕ: $X_{cs}\to X_{cs}$，其定义如下

$$\phi(x_{cs}):=x_{cs}+\rho(x_{cs})(h_s(x_c,x_s)-x_c),\quad \forall x_{cs}=(x_c,x_s)\in X_{cs}, \tag{2.19}$$

其中 $\rho:\ X_{cs}\to\mathbb{R}$ 是一个光滑截断函数，在原点的某个小邻域 $\tilde{U}\subset X_{cs}$ 内恒等于 1，在原点的另一个小邻域 $V\subset X_{cs}$（包含$\tilde{U}$）之外恒等于 0。由 (2.18) 可知，对于所有 $x_c\in X_c$，$\phi(x_c)=x_c$，且 $D\phi(x_c)=id_{cs}$，即在 X_{cs} 上的恒等映射。因此，新的微分同胚 $(\phi+id_u)^{-1}\circ F\circ(\phi+id_u)$（仍记为 F，并假定其具有 $C^{1,\alpha}$-光滑性，因为 α 和 β 都很小）可以验证满足 (2.10) 和 (2.12)。此外，由于变换 ϕ 实际上将 $U\subset X_{cs}$中的稳定叶状结构展平了，现在我们可以假设

$$h_s(x_{cs},z_s)=x_c,\quad \forall x_{cs},z_s\in\tilde{U}. \tag{2.20}$$

最后，鉴于引理 5、(2.9) 和 (2.19)，我们可以定义 $\mathcal{T}:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 如下：

$$\mathcal{T}(x):=(\phi+id_u)\circ\mathcal{G}^{-1}\circ\Upsilon^{-1}(x) \tag{2.21}$$

并验证 $\mathcal{T}$是一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚，满足 $\mathcal{T}(x_c)=x_c$，$D\mathcal{T}(0)=id$，且 $D\mathcal{T}(x_c)=D\mathcal{G}^{-1}(x_c)D\Upsilon^{-1}(x_c)$，其中 $x_c\in X_c$。然后，对于任意 $\tilde{x}_c\in X_c$，

$$\|\mathcal{T}(x)-\tilde{x}_c-D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)(x-\tilde{x}_c)\|\le L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha},\quad \forall x\in\mathbb{R}^d, \tag{2.22}$$

其中常数为 $L>0$。令 $\Delta(\tilde{x}_c):=D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)$，它是一个依赖于 $\tilde{x}_c$、连续变化的可逆有界线性算子，且满足 $\Delta(0)=id$，由 (2.22) 可知

$$\mathcal{T}(x)=\tilde{x}_c+\Delta(\tilde{x}_c)(x-\tilde{x}_c)+O(\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha}). \tag{2.23}$$

类似地，可以得到

$$\mathcal{T}^{-1}(x)=\tilde{x}_c+\Delta(\tilde{x}_c)^{-1}(x-\tilde{x}_c)+O(\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha}).$$

总之，在本文以下内容中，除非另有说明，我们总是假设 F 满足（2.10）、（2.12）和（2.20）。（只有第 3 节不需要（2.20）。）

3. Regularity of unstable foliation

本节中，我们假设 F 满足（2.10）和（2.12），但不需要（2.20）。我们研究 $\{\mathcal{W}_u(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ 的不稳定叶状结构 F，其叶可以表示为

$$\mathcal{W}_u(x)=\Big\{z\in\mathbb{R}^d:\sup_{n\le 0}\{\varrho^{-n}\|F^n(z)-F^n(x)\|\}<\infty\Big\},\quad \forall x\in\mathbb{R}^d, \tag{3.1}$$

对于一个常数 $\varrho\in(1+\varsigma,\ \lambda_u^-)$（例如参见 [5]）。于是我们得到以下结果。

命题 8。 假设 F 是一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚，且 (2.15)-(2.17) 成立。那么存在 F 的不稳定叶状结构，其叶为

$$\mathcal{W}_u(x)=\{z_u+h_u(x,z_u):z_u\in X_u\},\quad \forall x\in\mathbb{R}^d, \tag{3.2}$$

其中 $h_u:\ \mathbb{R}^d\times X_u\to X_{cs}$ 关于两个变量连续，且在 z_u 上为 $C^{1,\alpha}$-光滑，导数全局有界。此外，h_u 满足 $h_u(x,\pi_u x)=\pi_{cs}x$，并且

$$\|h_u(x,z_u)-\pi_{cs}x\|\le L\|(\pi_{su}x,z_u)\|^{1+\beta},\quad \forall x\in\mathbb{R}^d,\ \forall z_u\in X_u, \tag{3.3}$$

其中 $0<\beta<(\log(1+\varsigma)-\log\lambda_u^-)/\log\lambda_s^-$。

在证明中，我们用 C，K，L，M 表示某些表达式上界所对应的任意正常数，而不对不同常数使用更精确的编号，如 C_i，K_i，L_i，M_i。此外，为简化记号，我们用 x_* 代替 $\pi_* x$，其中 $*=c,\ s,\ u,\ cs,\ su$。

命题 8 的证明。首先，我们为 F 沿中心流形建立 Lyapunov-Perron 方程。令 $\mathfrak{U}_\varrho$ 由所有满足以下条件的序列 $(q_n)_{n\le 0}\subset\mathbb{R}^d$ 组成：$\sup_{n\le 0}\varrho^{-n}\|q_n\|<\infty$，其中常数

$$\varrho\in(1+\varsigma,\lambda_u^-(\lambda_s^-)^\beta)\subset(1+\varsigma,\lambda_u^-). \tag{3.4}$$

之所以可以选择 ϱ，是因为 $\beta<(\log(1+\varsigma)-\log\lambda_u^-)/\log\lambda_s^-$。它是一个巴拿赫空间，其范数 $\|\cdot\|_\varrho$ 定义为 $\|\mathbf{q}\|_\varrho:=\sup_{n\le 0}\varrho^{-n}\|q_n\|$，其中 $\mathbf{q}:=(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$。于是，(3.1) 可改写为

$$\mathcal{W}_u(x)=\Big\{z\in\mathbb{R}^d:(F^n(z)-F^n(x))_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho\Big\}. \tag{3.5}$$

接下来，回顾一下 g 已在上文定义（2.13），我们给出以下引理。

引理 9。 给定任意 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $z_u\in X_u$，假设 $(q_n)_{n\le 0}\subset\mathbb{R}^d$ 是一个满足$\pi_u q_0=z_u-x_u$且满足 $(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$的序列。那么，对于所有 $n\le 0$，$q_n=F^n(x+q_0)-F^n(x)$ 当且仅当$(q_n)^{n\le 0}$ 满足沿中心流形的 *Lyapunov-Perron* 方程，即

$$\begin{aligned}q_n=&\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\\&+\sum_{k=n}^{-1}\mathcal{A}(n,k+1;x_c)\pi_u\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k)-f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}\\&-\sum_{k=-\infty}^{n-1}\mathcal{A}(n,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k)-f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

对所有 $n\le 0$，其中 $f_{g^k(x_c)}(y):=f(y)-Df(g^k(x_c))y$对所有 $y\in\mathbb{R}^d$，项 $\sum_{k=0}^{-1}$定义为0。

我们将在本证明完成后证明这个引理。随后，我们声称，如果方程（3.6）有唯一解$(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$，那么

$$h_u(x,z_u):=x_{cs}+\pi_{cs}q_0 \tag{3.7}$$

通过 F （3.2）定义其唯一不稳定叶状结构。事实上，$(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$ 是（3.6）的一个解，这意味着 $\pi_u q_0=z_u-x_u$，因此，

$$z_u+h_u(x,z_u)=\pi_u q_0+x_u+x_{cs}+\pi_{cs}q_0=x+q_0\in\mathcal{W}_u(x) \tag{3.8}$$

根据（3.5），因为引理9蕴含$(F^n(x+q_0)-F^n(x))_{n\le 0}=(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$.另一方面，对于满足 $z\in\mathcal{W}_u(x)$ 的点 $\pi_u z=z_u$，我们定义

$$\tilde{q}_n=F^n(z)-F^n(x),\quad \forall n\le 0,$$

这意味着$(\tilde{q}_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$ 由（3.5）及 $\pi_u\tilde{q}_0=z_u-x_u$可得。然后，引理9 表明$(\tilde{q}_n)_{n\le 0}$ 是方程（3.6）在 $\mathfrak{U}_\varrho$中的唯一解，即 $\tilde{q}_n=q_n$。这意味着

$$\pi_{cs}z=x_{cs}+\pi_{cs}\tilde{q}_0=x_{cs}+\pi_{cs}q_0=h_u(x,z_u),$$

也就是说，点 z 具有唯一形式 $z_u+h_u(x,z_u)$。将这一事实与（3.8）结合起来，即可证明所述结果。

根据上述讨论，接下来我们需要证明方程（3.6）的解 $\{q_n\}_{n\le 0}$ 的唯一性，并证明其关于 x 和 z_u的正则性。为此，回顾 $f_{g^k(x_c)}(y)=f(y)-Df(g^k(x_c))y$对所有 $y\in\mathbb{R}^d$均成立，由（2.10）可得，对于所有 $n\le 0$, $Df_{g^n(x_c)}(g^n(x_c))=0$ 以及

$$\begin{aligned}&\|Df_{g^n(x_c)}(y)\|=\|Df(y)-Df(g^n(x_c))\|\le 2\delta_f,\\&\|Df_{g^n(x_c)}(y)-Df_{g^n(x_c)}(\tilde{y})\|=\|Df(y)-Df(\tilde{y})\|\le M\|y-\tilde{y}\|^\alpha\end{aligned} \tag{3.9}$$

对所有 y, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^d$。然后，类似于 [5, 定理 2.1 和 2.2], ，我们可以证明方程（3.6）具有唯一解$(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$，这使我们能够将所有 q_n's 视为(x,z_u)的函数，并且所有 q_n：$\mathbb{R}^d\times X_u\to\mathbb{R}^d$ 都是连续的，满足

$$q_n(x,x_u)=0,\quad \forall n\le 0,$$

且 $q_n(x,\cdot):X_u\to\mathbb{R}^d$ 是 $C^{1,\alpha}$ 具有全局有界导数。

接下来，为了证明（3.3），只需研究 $q_0(x,z_u)$ 的正则性，这由（3.7）可知。然后，我们断言

$$\sup_{(x,z_u)\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_c\}}\frac{\|q_0(x,z_u)-(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\le L. \tag{3.10}$$

事实上，给定一个常数 $\sigma \geq 0$，由（2.15）、（2.17）和（3.9），从（3.6）可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\leq 0}\frac{\varrho^{-n}\|q_n(x,z_u)-\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}\\
&\leq \frac{1}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}\sup_{n\leq 0}\Bigg\{\sum_{k=n}^{-1}K(\lambda_u^-/\varrho)^{n-k-1}\varrho^{-k-1}\left\|f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k(x,z_u))-f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\right\|\\
&\quad+\sum_{k=-\infty}^{n-1}K((1+\varsigma)/\varrho)^{n-k-1}\varrho^{-k-1}\left\|f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k(x,z_u))-f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\right\|\Bigg\}\\
&\leq \frac{C}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}\sup_{k\leq 0}\left\{\sup_{t\in[0,1]}\varrho^{-k}\|Df_{g^k(x_c)}(F^k(x)+tq_k(x,z_u))\|\,\|q_k(x,z_u)\|\right\}\\
&=C\sup_{k\leq 0}\Bigg\{\sup_{t\in[0,1]}\varrho^{-k}\left\|Df_{g^k(x_c)}(F^k(x)+tq_k(x,z_u))\right\|\\
&\quad\cdot\left(\frac{\|q_k(x,z_u)-\mathcal{A}(k,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}+\frac{\|\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}\right)\Bigg\}\\
&\leq 2\delta_f C\sup_{k\leq 0}\frac{\varrho^{-k}\|q_k(x,z_u)-\mathcal{A}(k,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\sigma}}\\
&\quad+C\sup_{k\leq 0}\frac{(\lambda_u^-/\varrho)^k\sup_{t\in[0,1]}\left\|Df_{g^k(x_c)}(F^n(x)+tq_n(x,z_u))\right\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{\sigma}}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

对所有（x，z_u）$\in\mathbb{R}^d\backslash\{x_c\}$（即，$\|(x_{su},\ z_u)\|\neq 0$）。然后，关于 $\sigma=0$的情形，（3.11）给出

$$
\sup_{n\leq 0}\frac{\varrho^{-n}\|q_n(x,z_u)-\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|}\leq\frac{2\delta_f C}{1-2\delta_f C},
$$

从而，

$$
\begin{aligned}
\|q_n(x,z_u)\|&\leq L\varrho^n\|(x_{su},z_u)\|+\|\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|\\
&\leq L\varrho^n\|(x_{su},z_u)\|+K(\lambda_u^-)^n\|(z_u-x_u)\|\leq 2L\varrho^n\|(x_{su},z_u)\|
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

对所有 $n\leq 0$。

考虑如下情形：$\sigma=\beta\in(0,\{\log(1+\varsigma)-\log\lambda_u^-\}/\log\lambda_s^-)$。由（3.11）可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\leq 0}\frac{\varrho^{-n}\|q_n(x,z_u)-\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\\
&\leq L\sup_{n\leq 0}\frac{(\lambda_u^-/\varrho)^n\sup_{t\in[0,1]}\left\|Df_{g^n(x_c)}(F^n(x)+tq_n)\right\|^{(1-\beta/\alpha)+\beta/\alpha}}{\|(x_{su},z_u)\|^{\beta}}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

对所有 $n\leq 0$。注意，与（2.16）类似，我们有

$$
\begin{aligned}
\|F^n(x)-g^n(x_c)\|=\|F^n(x)-F^n(x_c)\|&\leq\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\|DF^n(\xi)\|\|x_{su}\|\\
&\leq(\lambda_s^-)^n\|x_{su}\|,\quad\forall n\leq 0.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

于是，根据（3.9）、（3.12）和（3.14），由（3.13）可知

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\le 0}\frac{\varrho^{-n}\|q_n(x,z_u)-\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\\
&\le 2\delta_f^{1-\beta/\alpha}L\sup_{n\le 0}\sup_{t\in[0,1]}\left\{(\lambda_u^-/\varrho)^n\frac{\left\|Df_{g^n(x_c)}(F^n(x)+tq_n(x,z_u))-Df_{g^n(x_c)}(g^n(x_c))\right\|^{\beta/\alpha}}{\left\|F^n(x)+tq_n(x,z_u)-g^n(x_c)\right\|^{\beta}}\right.\\
&\quad\left.\cdot\frac{\left\|F^n(x)-g^n(x_c)+tq_n(x,z_u)\right\|^{\beta}}{\|(x_{su},z_u)\|^{\beta}}\right\}\\
&\le 2\delta_f^{1-\beta/\alpha}LM^{\beta/\alpha}\sup_{n\le 0}\left\{(\lambda_u^-/\varrho)^n\left(\frac{\|F^n(x)-g^n(x_c)\|+\|q_n(x,z_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|}\right)^{\beta}\right\}\\
&\le 2\delta_f^{1-\beta/\alpha}LM^{\beta/\alpha}\sup_{n\le 0}\{(\lambda_u^-/\varrho)^n((\lambda_s^-)^n+2L\varrho^n)^{\beta}\}\\
&\le L\sup_{n\le 0}\{(\lambda_u^-(\lambda_s^-)^{\beta}/\varrho)^n\}\le L,\quad \forall n\le 0,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

其中 $\lambda_u^-(\lambda_s^-)^{\beta}/\varrho>1$ 由于 (3.4)。因此，对任意 $(x_{cs},z_u)\in\mathbb{R}^d\backslash\{x_c\}$（即，$\|(x_{su},z_u)\|\neq 0$），

$$
\frac{\|q_0(x,z_u)-(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\le\sup_{n\le 0}\frac{\varrho^{-n}\|q_n(x,z_u)-\mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\le L,
$$

这证明了所声称的结果 (3.10)。

最后，由 (3.7) 和 (3.10) 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\|h_u(x,z_u)-x_{cs}\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}&=\frac{\|q_0(x,z_u)-\pi_u q_0(x,z_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\\
&=\frac{\|q_0(x,z_u)-(z_u-x_u)\|}{\|(x_{su},z_u)\|^{1+\beta}}\le L.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

证明完毕。 □

注意，在上述证明中，我们建立 Lyapunov-Perron 方程 (3.6) 沿中心流形，因为我们需要非线性项 $f_{g^n(x_c)}$ 在 (3.6) 中满足 $Df_{g^n(x_c)}(g^n(x_c))=0$（见 (3.9)）。这一事实使我们能够利用 (3.14) 得到估计

$$
\|F^n(x)-g^n(x_c)\|/\|(x_{su},z_u)\|\le(\lambda_s^-)^n
$$

在 (3.15) 的第三个不等式中。否则，如果我们使用非线性项 f 来自经典 Lyapunov-Perron 方程，则事实 $Df(0)=0$ 意味着项 $\|F^n(x)-g^n(x_c)\|$ 在 (3.15) 的第二个不等式中应替换为 $\|F^n(x)\|$，从而 (3.14) 应替换为

$$
\|F^n(x)\|\le\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\|DF^n(\xi)\|\|x\|\le(\lambda_s^-)^n\|x\|,\quad\forall n\le 0.
$$

由此产生了一个问题：估计 $\|F^n(x)\|/\|(x_{su},\ z_u)\|\le(\lambda_s^-)^n$ 不再成立。

现在，我们补充证明引理 9。

引理的证明 9。 回想引理 $f_{g^n(x_c)}$ 的表述中给出的定义9，我们有

$$
F(y)=DF(g^n(x_c))y+f_{g^n(x_c)}(y)
\tag{3.17}
$$

对于所有 $n \le 0$ 以及所有 $y \in \mathbb{R}^d$。那么，当 $q_n = F^n(x+q_0) - F^n(x)$ 时，由（3.17）可知

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= F^{n+1}(x+q_0) - F^{n+1}(x) = F(F^n(x+q_0)) - F(F^n(x)) \\ &= DF(g^n(x_c))q_n + f_{g^n(x_c)}(F^n(x)+q_n) - f_{g^n(x_c)}(F^n(x)). \end{aligned} \tag{3.18}$$

这使我们能够应用离散的常数变易公式（例如参见 [10, 定理 3。17]），从而得到

$$q_n = \mathcal{A}(n,0;x_c)q_0 + \sum_{k=n}^{-1} \mathcal{A}(n,k+1;x_c)\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}$$

对于所有 $n \le 0$。将该等式投影到 X_u 和 X_{cs}上，我们得到

$$\begin{aligned} \pi_u q_n &= \mathcal{A}(n,0;x_c)(z_u - x_u) \\ &\quad + \sum_{k=n}^{-1} \mathcal{A}(n,k+1;x_c)\pi_u\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

and

$$\begin{aligned} \pi_{cs} q_n &= \mathcal{A}(n,0;x_c)\pi_{cs} q_0 \\ &\quad + \sum_{k=n}^{-1} \mathcal{A}(n,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中第二个等价于

$$\begin{aligned} \pi_{cs} q_0 &= \mathcal{A}(0,n;x_c)\pi_{cs} q_n \\ &\quad - \sum_{k=n}^{-1} \mathcal{A}(0,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

由于 $\mathbf{q}:=(q_n)_{n\le 0} \in \mathfrak{U}_\varrho$，由（2.15）和（2.17）可知

$$\|\mathcal{A}(0,n;x_c)\pi_{cs} q_n\| \le K\{(1+\varsigma)/\varrho\}^{-n}\|\mathbf{q}\|_\varrho, \quad \forall n \le 0,$$

由（3.9）可知

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{-1} \|\mathcal{A}(0,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}\| \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{-1} K(1+\varsigma)^{-(k+1)} 2\delta_f \varrho^k \|\mathbf{q}\|_\varrho \le \delta_f C \|\mathbf{q}\|_\varrho, \quad \forall n \le 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

作为 $\varrho > 1+\varsigma$。因此，令 $n \to -\infty$ 在（3.21）中，可得

$$\pi_{cs} q_0 = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \mathcal{A}(0,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}, \tag{3.23}$$

结合（3.20）可得

$$\pi_{cs} q_n = -\sum_{k=-\infty}^{n-1} \mathcal{A}(n,k+1;x_c)\pi_{cs}\{f_{g^k(x_c)}(F^k(x)+q_k) - f_{g^k(x_c)}(F^k(x))\}.$$

将此等式与（3.19）相结合，我们得到（3.6）对每个 $n \le 0$成立。

反之，若 $(q_n)_{n\le 0}\in\mathfrak{U}_\varrho$ 满足（3.6），且由（3.22）知其一致收敛，则我们得到

$$\begin{aligned} q_{n+1}-DF(g^n(x_c))q_n &= q_{n+1}-A(g^n(x_c))q_n \\ &= f_{g^n(x_c)}(F^n(x)+q_n)-f_{g^n(x_c)}(F^n(x)). \end{aligned}$$

这意味着 $q_n=F^n(x+q_0)-F^n(x)$ 对所有 $n\le 0$ 均成立，这是由 (3.18) 的第二个等式得出的。证明完成。□

我们进一步证明引理 7。

引理 7 的证明。令 $\mathfrak{U}_{\tilde\varrho}$ 由所有满足以下条件的序列组成： $\mathbf{p}:=(p_n)_{n\ge 0}\subset X_{cs}$ 使得 $\sup_{n\ge 0}\tilde\varrho^{-n}\|p_n\|<\infty$ 其中常数 $\tilde\varrho\in(\lambda_s^+,\ 1-\varsigma)$。那么， $\mathfrak{U}_{\tilde\varrho}$ 在范数 $\|\mathbf{p}\|_{\tilde\varrho}:=\sup_{n\ge 0}\tilde\varrho^{-n}\|p_n\|$下构成一个巴拿赫空间。类似于引理 9，可得如下事实：

- 设 $(p_n)_{n\ge 0}\subset X_{cs}$ 是一个满足 $\pi_s p_0=z_s-x_s$ 和 $(p_n)_{n\ge 0}\in\mathfrak{U}_{\tilde\varrho}$ 的序列。那么，对于所有 $n\ge 0$， $p_n=g^n(x_{cs}+p_0)-g^n(x_{cs})$ 成立，当且仅当 $(p_n)_{n\ge 0}$ 满足沿中心流形的 Lyapunov-Perron 方程，即，

$$\begin{aligned} p_n=&\mathcal{A}_{cs}(n,0;x_c)(z_s-x_s)\\ &+\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_{cs}(n,k+1;x_c)\pi_s\{\tilde f_{g^k(x_c)}(g^k(x_{cs})+p_k)-\tilde f_{g^k(x_c)}(g^k(x_{cs}))\}\\ &-\sum_{k=n}^{\infty}\mathcal{A}_{cs}(n,k+1;x_c)\pi_c\{\tilde f_{g^k(x_c)}(g^k(x_{cs})+p_k)-\tilde f_{g^k(x_c)}(g^k(x_{cs}))\}, \end{aligned}\tag{3.24}$$

  其中 $\mathcal{A}_{cs}(n,0;x_c):=\pi_{cs}\mathcal{A}(n,0;x_c)$， $\tilde f_{g^k(x_c)}(y_{cs}):=g(y_{cs})-\pi_{cs}Df(g^k(x_c))$，对所有$y_{cs}\in X_{cs}$均成立。

由于方程（3.24）仅仅是稳定叶状结构的经典 Lyapunov-Perron 方程的一个变换（并非沿中心流形构造，见 [41, （3.2）]），所以 $(p_n)_{n\ge 0}\in\mathfrak{U}_{\tilde\varrho}$ 是（3.24）的唯一解，同时也是经典 Lyapunov-Perron 方程的唯一解。因此，我们可以利用 [41, 引理 2-3] 证明， $C^{1,\,1}$-光滑性的 g 加上束条件 $\lambda_s^+(1+\varsigma)$ 能够保证 p_n 的 $C^{1,\,\beta}$- 光滑性；随后，对其证明作一个非本质的修改可进一步表明， $C^{1,\,\alpha}$-光滑性加上不等式 $(\lambda_s^+)^\alpha(1+\varsigma)$ 也能保证 p_n 的 $C^{1,\,\beta}$-光滑性。

另一方面，采用与命题 8 的证明相同的策略，我们可以证明方程（3.24）有唯一解 $(p_n(x_{cs},z_s))_{n\ge 0}\in\mathfrak{U}_{\tilde\varrho}$ 使得

$$p_n(x_{cs},x_s)=0,\quad \sup_{n\ge 0}\tilde\varrho^{-n}\frac{\|p_n(x_{cs},z_s)-\mathcal{A}_{cs}(n,0;x_c)(z_s-x_s)\|}{\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}\le L\tag{3.25}$$

当 $\|(x_s,\ z_s)\|\neq 0$ 时， $\beta>0$ 足够小。此外， g 的稳定叶状结构由下式定义

$$h_s(x_{cs},z_s):=x_c+\pi_c p_0(x_{cs},z_s).\tag{3.26}$$

因此，由（3.25）和（3.26）可得

$$h_s(x_{cs},x_s)=x_c+\pi_c p_0(x_{cs},x_s)=x_c\tag{3.27}$$

and

$$\frac{\|h_s(x_{cs},z_s)-x_c\|}{\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}=\frac{\|p_0(x_{cs},z_s)-\pi_s p_0(x_{cs},z_s)\|}{\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}=\frac{\|p_0(x_{cs},z_s)-(z_s-x_s)\|}{\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}$$
$$\leq \sup_{n\geq 0}\tilde{\varrho}^{-n}\frac{\|p_n(x_{cs},z_s)-\mathcal{A}_{cs}(n,0;x_c)(z_s-x_s)\|}{\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}\leq L \tag{3.28}$$

当 $\|(x_s,\ z_s)\|\neq 0$。于是，对于任意 $\tilde{x}_c\in X_c$，由（3.27）和（3.28）可知 $h_s(\tilde{x}_c,\ 0)=\tilde{x}_c$ 以及

$$\frac{\|h_s(x_{cs},z_s)-h_s(\tilde{x}_c,0)-\Pi_c\{(x_{cs},z_s)-(\tilde{x}_c,0)\}\|}{\|(x_{cs},z_s)-(\tilde{x}_c,0)\|}$$
$$=\frac{\|h_s(x_{cs},z_s)-x_c\|}{\|(x_{cs}-\tilde{x}_c,z_s)\|}\leq\frac{L\|(x_s,z_s)\|^{1+\beta}}{\|(x_s,z_s)\|}=L\|(x_s,z_s)\|^{\beta}\to 0,$$

当 $(x_{cs},z_s)\ \to(\tilde{x}_c,0)$ 时，由于 $\|x_s\|\leq\max\{\|x_s\|,\|x_c-\tilde{x}_c\|\}=\|x_{cs}-\tilde{x}_c\|$。由此可知，$h_s$: $X_{cs}\times X_s\to X_c$ 在 $(\tilde{x}_c,0)$ 处可微，且 $Dh_s(\tilde{x}_c,0)=\Pi_{c^\circ}$ 证毕。□

4. Proof of main result

为了证明定理 2，在本节中，我们首先引入一种半解耦方法，仅通过拉直不稳定叶状结构来得到一个新系统，该系统是一个扩张纤维保持映射。为此，我们定义一个连续映射 $H:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 如下

$$H(x):=x_u+h_u(x_{cs},x_u),\quad \forall x=(x_{cs},x_u)\in\mathbb{R}^d, \tag{4.1}$$

并给出如下引理。

引理10. 假设命题 8的所有条件成立。则 H 的逆存在，使得

$$H^{-1}(x)=x_u+h_u(x,0),\quad \forall x\in\mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

二者均满足 $H^{\pm 1}(x_{cs})\ =x_{cs}$ 且

$$\|H^{\pm 1}(x)-x\|\leq L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta},\quad \forall\tilde{x}_c\in X_c. \tag{4.3}$$

此外，$\hat{}F(x)$：$=H^{-1}\circ F\circ H(x)$ 是一个连续映射，满足

$$\begin{aligned}&\pi_{cs}\hat{F}(x)=F(x_{cs}),\quad \|\partial_{x_u}(\pi_u\hat{F})(x)-A_u\|\leq\delta,\\&\|\partial_{x_u}(\pi_u\hat{F})(x_{cs},x_u)-\partial_{x_u}(\pi_u\hat{F})(x_{cs},\tilde{x}_u)\|\leq M\|x_u-\tilde{x}_u\|^{\beta}\end{aligned} \tag{4.4}$$

对所有的 $x_{cs}\in X_{cs}$ 和 x_u、$\tilde{x}_u\in X_u$，其中 $\delta>0$ 是一个小常数，$M>0$ 是一个常数。

注意，（4.3）意味着 $H^{\pm 1}$ 在 $\tilde{x}_c\in\mathcal{M}_c$ 处可微，且 $DH^{\pm 1}(\tilde{x}_c)=id$，因为这意味着

$$\frac{\|H^{\pm 1}(x)-H^{\pm 1}(\tilde{x}_c)-(x-\tilde{x}_c)\|}{\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}}=\frac{\|H^{\pm 1}(x)-x\|}{\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}}\leq L \tag{4.5}$$

当 $\|x-\tilde{x}_c\|\neq 0$时。

引理 10 的证明。为了证明 $H^{-1}\circ H=H\circ H^{-1}=id$，由（4.1）可知$\pi_u H(x)\ =x_u$ 以及 $H(x)\in\mathcal{W}_u(x_{cs})$，从而 $H(x)$ 和 x_{cs} 属于同一个叶，即

$$h_u(H(x),z_u)=h_u(x_{cs},z_u), \tag{4.6}$$

并由命题 8 可知 $h_u(x,x_u)\ =x_{cs^\circ}$ 然后，由 (4.2) 我们有

$$H^{-1}(H(x))=\pi_u H(x)+h_u(H(x),0)=x_u+h_u(x_{cs},0)=x_u+x_{cs}=x.$$

此外，注意到 $\pi_{cs}H^{-1}(x) = h_u(x,0)$ 与 $x = x_u + h_u(x, x_u)$ 属于同一叶，我们有

$$H(H^{-1}(x)) = x_u + h_u(\pi_{cs}H^{-1}(x), x_u) = x_u + h_u(x, x_u) = x.$$

因此，$H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个同胚。

为了证明 (4.3)，由 (4.1)-(4.2)，可知 $H^{\pm 1}(x_{cs}) = h_u(x_{cs},0) = x_{cs}$。此外，由 (4.1) 和 (3.3)（取 $x = x_{cs}$）可得

$$\begin{aligned}\frac{\|H(x) - x\|}{\|x - x_c\|^{1+\beta}} &= \frac{\|x_u + h_u(x_{cs}, x_u) - x\|}{\|x_{su}\|^{1+\beta}} \\ &= \frac{\|h_u(x_{cs}, x_u) - x_{cs}\|}{\|(x_s, x_u)\|^{1+\beta}} \le L \quad \text{for } x \neq x_c. \end{aligned} \tag{4.7}$$

那么，对于任意 $\tilde{x}_c \in X_c$，由 (4.7) 可知

$$\frac{\|H(x) - x\|}{\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}} \le \frac{\|H(x) - x\|}{\|x - x_c\|^{1+\beta}} \le L \quad \text{for } x \neq \tilde{x}_c \text{ and } x \neq x_c \tag{4.8}$$

因为 $\|x - x_c\| = \|x_{su}\| \le \|(x_{su}, x_c - \tilde{x}_c)\| = \|x - \tilde{x}_c\|$。类似地，对于 H^{-1}，由 (4.2) 和 (3.3)（取 $z_u = 0$）可知

$$\begin{aligned}\frac{\|H^{-1}(x) - x\|}{\|x - x_c\|^{1+\beta}} &= \frac{\|x_u + h_u(x, 0) - x\|}{\|x_{su}\|^{1+\beta}} \\ &= \frac{\|h_u(x, 0) - x_{cs}\|}{\|(x_{su}, 0)\|^{1+\beta}} \le L \quad \text{for } x \neq x_c, \end{aligned}$$

于是 (4.3) 成立。

此外，由于不稳定叶状结构的不变性以及 (4.6)，我们知道 $F \circ H(x)$ 和 $F(x_{cs})$ 属于同一叶，即 $h_u(F \circ H(x)\ z_u) = h_u(F(x_{cs})\ z_u)$。因此，

$$\begin{aligned}\pi_{cs}\hat{F}(x) &= \pi_{cs}H^{-1} \circ F \circ H(x) = h_u(F \circ H(x), 0) \\ &= h_u(F(x_{cs}), 0) = F(x_{cs}).\end{aligned}$$

此外，由于（4.1）-（4.2）给出 $\pi_u \hat{F}(x) = \pi_u F \circ H(x) = \pi_u F(x_u + h_u(x_{cs}, x_u))$，我们计算得

$$\begin{aligned}\partial_{x_u}(\pi_u \hat{F})(x) = \Big(&\partial_{x_{cs}}(\pi_u F)(x_u + h_u(x_{cs}, x_u))\partial_{x_u} h_u(x_{cs}, x_u), \\ &\partial_{x_u}(\pi_u F)(x_u + h_u(x_{cs}, x_u))\Big),\end{aligned}$$

结合（2.10）可推出（4.4）。证毕。 □

注意，由引理 10，我们可以定义 $g : X_{cs} \to X_{cs}$ 以及 $G_{x_{cs}} : X_u \to X_u$ 如下

$$g(x_{cs}) := \pi_{cs}\hat{F}(x) = F(x_{cs}) \quad \text{and} \quad G_{x_{cs}}(x_u) := \pi_u \hat{F}(x), \tag{4.9}$$

并由（4.4）可知，$\hat{F}(x) = (\pi_{cs}\hat{F}(x)\ \pi_u \hat{F}(x)) = (g(x_{cs})\ G_{x_{cs}}(x_u))$ 可视为纤维丛 $X_{cs} \times X_u$ 的一个 C^1，α保纤维映射（覆盖 g）。此外，令

$$A_u(x_{cs}) := \partial_{x_u}(\pi_u \hat{F})(x_{cs}) = DG_{x_{cs}}(0), \tag{4.10}$$

由（4.4）的第一个不等式可得 $A_u(x_{cs})$ 通过指数二分性的粗糙性理论（例如参见 [20, 43]）生成一个扩张线性余循环（在 g上）。这意味着可视为一个扩张的，β 保纤维映射（覆盖 g）。

接下来，设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 为原点的小邻域，使得 $\pi_{cs}U \subset \tilde{U}$，其中 $\tilde{U} \subset X_{cs}$由（2.20）给出。我们给出以下两个引理，它们将在第5节和

6节中分别证明。为简化记号，我们将使用 β 代替更精确的 β_i ，用于不同的赫¨尔德指数，除非另有说明。

引理 11. 存在一个 $C^{1,\beta}(\beta \in (0,\ \alpha))$ 微分同胚 $\Theta\colon U \to \mathbb{R}^d$ 使得 $\tilde{F} := \Theta \circ \hat{F} \circ \Theta^{-1}$是一个 $C^{1,\beta}$ 微分同胚，满足 (4.4) 其中 $\hat{F}$ 代替 $\tilde{F}$ ，并且满足

$$\partial_{x_u}(\pi_u \tilde{F})(x_{cs}) = A_u(x_c), \quad \forall (x_c, x_s) \in \tilde{U}. \tag{4.11}$$

此外，

$$\Theta(x_{cs}) = x_{cs}, \quad D\Theta(x_{cs}) = \mathrm{diag}(id_{cs}, P_u(x_{cs})), \quad \forall x_{cs} \in \tilde{U}. \tag{4.12}$$

˜并且，对于任意 $\tilde{x}_c \in U$，

$$\|\Theta^{\pm 1}(x) - x\| \le L\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}, \quad \forall x \in U. \tag{4.13}$$

通过与 (4.5) 类似的讨论，我们从 (4.13) 得知 $D\Theta^{\pm 1}(\tilde{x}_c) = id$。然后，我们可以验证，上述 $\tilde{F}$ 是一个 $C^{1,\beta}$ 微分同胚，满足命题 8 的所有条件，因此得到˜的 不稳定叶状结构。可以不失一般性地假设， F 的不稳定叶状结构˜仍然已被展平；否则，我们可以再次使用引理10来展平˜不稳定叶状结构。注意，(4.12) 意味着 F 的不稳定叶状结构的叶在每个点 x_{cs} 处都与子空间 X_u 相切，因为 $D\Theta$ 在 x_{cs}处不会改变 X_u 方向。因此，将不稳定叶状结构展平的变换的导数在x_{cs}处为 id ，即它不会改变 (4.11)。

因此，我们仍使用（4.9）中给出的记号来表示

$$\tilde{F}(x) = (g(x_{cs}), G_{x_{cs}}(x_u)), \tag{4.14}$$

˜其中 $G_{x_{cs}}(0) = 0$ 因为 X_{cs} 仍然是 F的不变流形，并给出以下引理。

引理 12。 存在一个同胚 $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^d$ ，使得 $\pi_{cs}\Phi(x) = x_{cs}$ 一个 d

$$\Phi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \Phi(x) = (g(x_{cs}), A_u(x_c)x_u), \quad \forall x = (x_c, x_s, x_u) \in U. \tag{4.15}$$

˜此外，对于任意 $\tilde{x}_c \in U$，

$$\|\Phi^{\pm 1}(x) - x\| \le L\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}, \quad \forall x \in U. \tag{4.16}$$

具有 上述引理 10-12，我们可以定义 $\Psi := \Phi \circ \Theta^{-1} \circ H$，并由（4.15）得到

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi(x) = (g(x_{cs}), A_u(x_c)x_u), \quad \forall x = (x_c, x_s, x_u) \in U, \tag{4.17}$$

其满足

$$\begin{aligned}\|\Psi(x)-x\| &\le \|\Phi\circ\Theta^{-1}\circ H(x)-\Theta^{-1}\circ H(x)\| \\ &\quad+\|\Theta^{-1}\circ H(x)-H(x)\|+\|H(x)-x\| \\ &\le L\|\Theta^{-1}\circ H(x)-\tilde{x}_c\|^{1+\beta} \\ &\quad+L\|H(x)-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}+L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta} \\ &\le L\Big(\|\Theta^{-1}\circ H(x)-H(x)\|+\|H(x)-x\|+\|x-\tilde{x}_c\|\Big)^{1+\beta} \\ &\quad+L\Big(\|H(x)-x\|+\|x-\tilde{x}_c\|\Big)^{1+\beta}+L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta} \\ &\le L\Big(\|H(x)-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}+\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}+\|x-\tilde{x}_c\|\Big)^{1+\beta} \\ &\quad+L\Big(\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}+\|x-\tilde{x}_c\|\Big)^{1+\beta}+L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta} \\ &\le 21L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}, \\ \|\Psi^{-1}(x)-x\| &\le 21L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}\end{aligned} \tag{4.18}$$

~对任意 $\tilde{x}_c\in U$ 对所有 $x\in U$ 附近 $\tilde{x}_c$ 由（4.3）、（4.13）和（4.16）。这里，我们用到了如下事实：$\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}\le\|x-\tilde{x}_c\|$ 当 $\|x-\tilde{x}_c\|<1$时。

接下来，我们类似地讨论中心稳定流形 X_{cs} 上的 $g(x_{cs})=F(x_{cs})$。注意，通过引理 7 下方的讨论，g 在 U 中的~稳定叶状结构已经被拉直，并且 $\partial_{x_s}(\pi_s g)(x_c)=A_s(x_c)$。因此，我们可以省略对应于引理 11 和 12 中 g 的结果，并直接应用类似于引理 12 中的论证，得到一个同胚~ $\psi:U\to X_{cs}$，它沿稳定方向将 g 线性化，即

$$\psi^{-1}\circ g\circ\psi(x_{cs})=(g(x_c),A_s(x_c)x_s),\quad \forall x_{cs}=(x_c,x_s)\in\tilde{U}, \tag{4.19}$$

并且满足

$$\pi_c\psi(x_{cs})=x_c,\quad \|\psi^{\pm1}(x_{cs})-x_{cs}\|\le 5L\|x_{cs}-\tilde{x}_c\|^{1+\beta} \tag{4.20}$$

~对于任意 $\tilde{x}_c\in U$ 以及对所有 $x_{cs}\in U$ 邻近于 $\tilde{x}_c$ 通过使用与（4.18）类似的论证。

现在我们准备证明主要结果。

定理 2 的证明。定义 $\tilde{\Psi}:\ U\to\mathbb{R}^d$ 为 $\tilde{\Psi}:=\Psi\circ(\psi,\ id_u)$，由（4.17）、（4.19）以及（4.20）的第一个等式可验证得到

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^{-1}\circ F\circ\tilde{\Psi}(x)&=(\psi,id_u)^{-1}\circ\Psi^{-1}\circ F\circ\Psi\circ(\psi,id_u)(x)\\ &=(\psi^{-1},id_u)\circ\Big(g\circ\psi(x_{cs}),\ A_u(\pi_c\psi(x_{cs}))x_u\Big)\\ &=\Big(\psi^{-1}\circ g\circ\psi(x_{cs}),\ A_u(x_c)x_u\Big)\\ &=\Big(g(x_c),\ A_s(x_c)x_s,\ A_u(x_c)x_u\Big),\quad \forall x\in U,\end{aligned}$$

并由（4.18）和（4.20）的第二个不等式可验证得到

$$\|\tilde{\Psi}^{\pm1}(x)-x\|\le 110L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}.$$

此外，回想一下，$\mathcal{T}$在（2.21）中给出的 $C^{1,\ \alpha}$ 映射满足 $\mathcal{T}(x_c)=x_c$ 且（2.22）成立，我们定义

$$\mathcal{H}:=\tilde{\Psi}\circ\mathcal{T}.$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{H}(x)-\tilde{x}_c-D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)(x-\tilde{x}_c)\|\\
&\le\|\tilde{\Psi}\circ\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(x)\|+\|\mathcal{T}(x)-\tilde{x}_c-D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)(x-\tilde{x}_c)\|\\
&\le 110L\|\mathcal{T}(x)-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}+L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha}\\
&\le 110L\Big(L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha}+\|D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)\|\,\|x-\tilde{x}_c\|\Big)^{1+\beta}+L\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\alpha}\\
&\le M\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta},\quad \forall x,\tilde{x}_c\in U.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

类似于（2.23），由（4.21）可知 $\mathcal{H}(\tilde{x}_c)=\tilde{x}_c$ 以及

$$\mathcal{H}(x)=\tilde{x}_c+\Delta(\tilde{x}_c)(x-\tilde{x}_c)+O(\|x-\tilde{x}_c\|^{1+\beta}),\quad \forall x,\tilde{x}_c\in U,$$

其中 $\Delta(\tilde{x}_c):=D\mathcal{T}(\tilde{x}_c)$。对于 $\mathcal{H}^{-1}$ 也有类似的结论，从而完成证明。 □

5. Reduction of cocycles

本节证明引理11。主要思路是首先证明，由˜通过 $A_u(x_{cs})$ 和 $A_u(x_c)$ 生成的余循环可通过一个 β-H¨older 传递映射 $P_u: U\subset X_{cs}\to Gl(d_u,\mathbb{R})$ 彼此上同调，其中 $d_u\in\mathbb{N}$ 是 X_u 的维数，即

$$P_u(g(x_{cs}))A_u(x_{cs})=A_u(x_c)P_u(x_{cs}).\tag{5.1}$$

这里，$x\mapsto(x_{cs},\ P_u(x_{cs})x_u)$ 被称为两个余循环之间的共轭。然后，我们使用惠特尼延拓定理（见附录 A 中的引理 14 ）来寻找一个 $C^{1,\beta}$ 微分同胚 Θ，使得 $D\Theta(x_{cs})=\mathrm{diag}(id_{cs},\ P_u(x_{cs}))$，其中 id_{cs} 是 X_{cs} 上的恒等映射。

引理 11 的证明。我们将该引理的证明分为三个步骤。

步骤 *1.* 找到一个 $P_1(x_{cs})\in Gl(d_u,\mathbb{R})$，它相对于 x_{cs} 是 β_E-*H¨oder* 的，其中 $\beta_E>0$ 足够小，从而将由 $A_u(x_{cs})$ 生成的线性余循环对角化。

考虑由 $A_u(x_{cs}):\ X_u\to X_u$ 定义在 (4.10) 中的线性余循环，即

$$\mathcal{A}_u(m,n;x_{cs}):=\begin{cases}A_u(g^{m-1}(x_{cs}))\cdots A_u(g^n(x_{cs})), & m\ge n+1,\\ id, & m=n,\\ A_u(g^m(x_{cs}))^{-1}\cdots A_u(g^{n-1}(x_{cs}))^{-1}, & m\le n-1.\end{cases}\tag{5.2}$$

与 (2.13) 下文给出的讨论类似，应用指数二分性的粗糙性理论可知，对所有 $\Pi_i(x_{cs}):\mathbb{R}^d\to X_i$，都存在投影 $i=k+1,\dots,p$，它们对应于分解 $X_u=E_{k+1}(x_{cs})\oplus\cdots\oplus E_p(x_{cs})$，其中每个 $E_i(x_{cs})$ 都是在 $A_u(x_{cs})$ 作用下的不变子空间，满足

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}_u(m,n;x_{cs})\Pi_i(x_{cs})\|\le K(\lambda_i+\varsigma)^{m-n},\quad \forall m\ge n,\\
&\|\mathcal{A}_u(m,n;x_{cs})\Pi_i(x_{cs})\|\le K(\lambda_i-\varsigma)^{m-n},\quad \forall m\le n,
\end{aligned}\tag{5.3}$$

对所有 $i=k+1,\dots,p$。根据 [26, 命题 3。9], 我们可知，(4.4) 和 (5.3) 保证了

$$\mathrm{dist}(E_i(x_{cs}),E_i(\tilde{x}_{cs}))\le L\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E},\quad \forall x_{cs},\tilde{x}_{cs}\in X_{cs},\tag{5.4}$$

对所有 $i=k+1,\dots,p$，取一个较小的常数 $\beta_E>0$，其中两个子空间 E_1和 E_2 之间的距离定义为

$$\mathrm{dist}(E_1,E_2):=\max\Big(\max_{v_1\in E_1,\|v_1\|=1}\mathrm{dist}(v_1,E_2),\max_{v_2\in E_2,\|v_2\|=1}\mathrm{dist}(v_2,E_1)\Big)\tag{5.5}$$

其中 $\mathrm{dist}(v,E):=\min_{u\in E}\|u-v\|$。这意味着每个 $E_i(x_{cs})$ 关于 x_{cs} 都是 β_E-Hölder 连续的。

于是，可以找到一个 $P_1(x_{cs})\in Gl(d_u,\ \mathbb{R})$，满足

$$\|P_1(x_{cs})^{\pm1}-P_1(\tilde{x}_{cs})^{\pm1}\|\le L\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E},\quad \forall x_{cs},\tilde{x}_{cs}\in X_{cs}, \tag{5.6}$$

使得

$$P_1(g(x_{cs}))A_u(x_{cs})P_1(x_{cs})^{-1}=\mathrm{diag}(A_{k+1}(x_{cs}),...,A_p(x_{cs})). \tag{5.7}$$

这里，每个 $A_i(x_{cs}):X_i\to X_i$ 在 x_{cs} 上都是 β_E-Hölder 连续的，即

$$\|A_i(x_{cs})-A_i(\tilde{x}_{cs})\|\le L\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E},\quad \forall x_{cs},\tilde{x}_{cs}\in X_{cs}, \tag{5.8}$$

使得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_i(m,n;x_{cs})\|&\le K(\lambda_i+\varsigma)^{m-n},\quad \forall m\ge n,\\ \|\mathcal{A}_i(m,n;x_{cs})\|&\le K(\lambda_i-\varsigma)^{m-n},\quad \forall m\le n,\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中 $\mathcal{A}_i(m,\ n;\ x_{cs})$ 是由 $A_i(x_{cs})$ 按照相同方式生成的线性余循环，如5.2)所示。

步骤 2。找到一个 β-*Hölder* 传递映射 P_u:\ $\tilde{U}\subset X_{cs}\to Gl(d_u,\ \mathbb{R})$ 使得 (5.1) 成立。

对所有的 $i=k+1,...,p$ 以及 $x_{cs}=(x_c,\ x_s)\in U\subset X_{cs}$，定义

$$B_i(x_{cs}):=\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}_i(0,n;x_c)\mathcal{A}_i(n,0;x_{cs}). \tag{5.10}$$

如果极限 (5.10) 存在，则可以验证

$$\begin{aligned}B_i(g(x_{cs}))A_i(x_{cs})&=\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}_i(0,n;g(x_c))\mathcal{A}_i(n,0;g(x_{cs}))A_i(x_{cs})\\&=A_i(x_c)\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}_i(0,n+1;x_c)\mathcal{A}_i(n+1,0;x_{cs})\\&=A_i(x_c)B_i(x_{cs}),\end{aligned} \tag{5.11}$$

其中 $\pi_c g(x_{cs})=g(x_c)$，因为稳定叶状结构在 U 中被拉直，如 (2.20) 所示。

为了证明极限 (5.10) 的存在，我们注意到

$$\begin{aligned}B_i(x_{cs})&=\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}_i(0,n;x_c)\mathcal{A}_i(n,0;x_{cs})\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\mathcal{A}_i(k+1,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(0,k;x_c)\mathcal{A}_i(k,0;x_{cs})\Big\}\\&\quad+id_i,\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 id_i 是 X_i上的恒等映射。于是，由 (5.8)-(5.9) 可得

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\mathcal{A}_i(k+1,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(0,k;x_c)\mathcal{A}_i(k,0;x_{cs})\|\\&\le\|\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\|\|A_i(g^k(x_{cs}))-A_i(g^k(x_c))\|\|\mathcal{A}_i(k,0;x_{cs})\|\\&\le K(\lambda_i-\varsigma)^{-(k+1)}L\|g^k(x_{cs})-g^k(x_c)\|^{\beta_E}K(\lambda_i+\varsigma)^k\\&\le C\{(\lambda_i+\varsigma)(\lambda_i-\varsigma)^{-1}(\lambda_s^+)^{\beta_E}\}^k,\quad \forall x_{cs}\in\tilde{U},\end{aligned} \tag{5.13}$$

具有一个常数 $C>0$，其中 x_{cs} 且 x_c 在 U 位于稳定叶状结构的同一叶上，这表明 $\|g^k(x_{cs})-g^k(x_c)\|\le K(\lambda_s^+)^k$ 对所有 $k\ge0$ 都成立，这是由类似于 (3.1) 的稳定叶状结构定义得出的。因此，$B_i(x_{cs})$ 是良定义的，使得

$$B_i(x_c)=id_i,\quad \forall x_c\in\tilde{U}, \tag{5.14}$$

因为 $(\lambda_i+\varsigma)(\lambda_i-\varsigma)^{-1}(\lambda_s^+)^{\beta_E}<1$，且 $\varsigma>0$ 足够小。

接下来，我们证明 $B_i(x_{cs})$ 是 H¨older 在 x_{cs} 上连续。对于任意 $x_{cs}=(x_c,\ x_s)$ $\tilde{x}_{cs}=(\tilde{x}_c,\ \tilde{x}_s)\in U$，由 (5.12) 可得

$$\begin{aligned}B_i(x_{cs})-B_i(\tilde{x}_{cs})=&\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\mathcal{A}_i(k+1,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(0,k;x_c)\mathcal{A}_i(k,0;x_{cs})\\&-\mathcal{A}_i(0,k+1;\tilde{x}_c)\mathcal{A}_i(k+1,0;\tilde{x}_{cs})+\mathcal{A}_i(0,k;\tilde{x}_c)\mathcal{A}_i(k,0;\tilde{x}_{cs})\Big\}\\=&\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma_k(x_{cs})-\Gamma_k(\tilde{x}_{cs}),\end{aligned}$$

w这里 $\Gamma_k(x_{cs}):=\mathcal{A}_i(0,\ k+1;\ x_c)\mathcal{A}_i(k+1,\ 0;x_{cs})\ -\mathcal{A}_i(0,\ k;\ x_c)\mathcal{A}_i(k,\ 0;\ x_{cs})$ 满足

$$\|\Gamma_k(x_{cs})\|\le C\{(\lambda_i+\varsigma)(\lambda_i-\varsigma)^{-1}(\lambda_s^+)^{\beta_E}\}^k,\quad \forall x_{cs}\in\tilde{U},$$

由（5.13）可知。此外，我们注意到

$$\begin{aligned}\Gamma_k(x_{cs})-\Gamma_k(\tilde{x}_{cs})=&\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\big(\mathcal{A}_i(k+1,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(k+1,0;\tilde{x}_{cs})\big)\\&+\big(\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)-\mathcal{A}_i(0,k+1;\tilde{x}_c)\big)\mathcal{A}_i(k+1,0;\tilde{x}_{cs})\\&+\mathcal{A}_i(0,k;x_c)\big(\mathcal{A}_i(k,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(k,0;\tilde{x}_{cs})\big)\\&+\big(\mathcal{A}_i(0,k;x_c)-\mathcal{A}_i(0,k;\tilde{x}_c)\big)\mathcal{A}_i(k,0;\tilde{x}_{cs})\\=:&\ \Gamma_{k,1}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})+\Gamma_{k,2}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})+\Gamma_{k,3}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})+\Gamma_{k,4}(x_{cs},\tilde{x}_{cs}).\end{aligned}$$

于是，（5.8）–（5.9）给出

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{k,1}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})\|=&\|\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\big(\mathcal{A}_i(k+1,0;x_{cs})-\mathcal{A}_i(k+1,0;\tilde{x}_{cs})\big)\|\\\le&\|\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\|\|A_i(g^k(x_{cs}))\circ\cdots\circ A_i(x_{cs})\\&-A_i(g^k(\tilde{x}_{cs}))\circ\cdots\circ A_i(\tilde{x}_{cs})\|\\\le&\|\mathcal{A}_i(0,k+1;x_c)\|\sum_{i=0}^{k}\|A_i(g^k(x_{cs}))\cdots A_i(g^{i+1}(x_{cs}))\\&\cdot\big(A_i(g^i(x_{cs}))-A_i(g^i(\tilde{x}_{cs}))\big)A_i(g^{i-1}(\tilde{x}_{cs}))\cdots A_i(\tilde{x}_{cs})\|\\\le&K(\lambda_i-\varsigma)^{-k-1}\sum_{i=0}^{k}K(\lambda_i+\varsigma)^kL\|g^i(x_{cs})-g^i(\tilde{x}_{cs})\|^{\beta_E}\\\le&K^3L(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k\sum_{i=0}^{k}(1+\varsigma)^{i\beta_E}\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E}\\\le&C(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k(1+2\varsigma)^{k\beta_E}\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E},\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{k,2}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})\|\le&C(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k(1+2\varsigma)^{k\beta_E}\|x_c-\tilde{x}_c\|^{\beta_E},\\\|\Gamma_{k,3}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})\|\le&C(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k(1+2\varsigma)^{k\beta_E}\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E},\\\|\Gamma_{k,4}(x_{cs},\tilde{x}_{cs})\|\le&C(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k(1+2\varsigma)^{k\beta_E}\|x_c-\tilde{x}_c\|^{\beta_E}.\end{aligned}$$

因此，鉴于上述不等式，我们有

$$\|\Gamma_k(x_{cs})-\Gamma_k(\tilde{x}_{cs})\|\le 4C(\lambda_i-\varsigma)^{-k}(\lambda_i+\varsigma)^k(1+2\varsigma)^{k\beta_E}\|x_{cs}-\tilde{x}_{cs}\|^{\beta_E}.$$

接下来，令

$$\tau_1:=\left(\frac{\lambda_i+\varsigma}{\lambda_i-\varsigma}\right)(\lambda_s^+)^{\beta_E}<1,\quad \tau_2:=\left(\frac{\lambda_i+\varsigma}{\lambda_i-\varsigma}\right)(1+2\varsigma)^{\beta_E},\quad \rho=1.$$

于是，由于 $\rho\tau_1 < 1$，应用引理15 于附录A，我们得到

$$\|B_i(x_{cs}) - B_i(\tilde{x}_{cs})\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|\Gamma_k(x_{cs}) - \Gamma_k(\tilde{x}_{cs})\| \le C\|x_{cs} - \tilde{x}_{cs}\|^{\beta_i}, \tag{5.15}$$

˜对任意 x_{cs}， $\tilde{x}_{cs} \in U$，带有小常数 $\beta_i > 0$，对所有 $i = k+1$，...， p。现在，我们定义 B(x_{cs})：=(B_{k+1}(x_{cs}) ...， B_p(x_{cs}))以及

$$P_u(x_{cs}) := B(x_{cs})P_1(x_{cs})P_1(x_c)^{-1}, \quad \forall x_{cs} \in \tilde{U}.$$

由（5.7）与（5.11），可见 P_u(x_{cs})满足（5.1），并由（5.6），（5.14）与（5.15），可见P_u(x_{cs})是 β-H¨尔德的，关于 x_{cs}，对一个小常数 $\beta > 0$，并且 $P_u(x_c) = id_u$。

步骤*3.* 应用惠特尼延拓定理以得到 Θ。

在这一步中，不失一般性，我们假设 X_{cs} 与 X_u 是一维空间，并且 x_{cs} 与 x_u 分别对应于 z_1 与 z_2，即附录A开头处所给出的。

˜定义 θ_{00}(x_{cs})：= x_{cs}， θ_{10}(x_{cs})：= 1 （即 id_{cs}）以及 θ_{01}(x_{cs})：= 0，对所有 $x_{cs} \in U \subset X_{cs}$，我们˜由附录 A 中的(A.1)（其中Ω = U， $r = 1$，j、k =(0, 0)、(1, 0)、(0, 1)）验证

$$\begin{aligned} R_{00}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) &= \theta_{00}(x_{cs}) - \theta_{00}(\tilde{x}_{cs}) - \theta_{10}(\tilde{x}_{cs})(x_{cs} - \tilde{x}_{cs}) = 0, \\ R_{10}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) &= \theta_{10}(x_{cs}) - \theta_{10}(\tilde{x}_{cs}) = 0, \quad R_{01}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) = 0, \end{aligned}$$

这意味着附录 A 中的 A .2） $w_{\mathbf{j}} = \theta_{\mathbf{j}}$ 成立。此外，定义 ϑ_{00}(x_{cs})：= 0，ϑ_{10}(x_{cs})：= 0 以及 ϑ_{01} (x_{cs})：= P_u(x_{cs})，对所有 $x_{cs} \in U \subset X_{cs}$，我们验证

$$\begin{aligned} &R_{00}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) = 0, \quad R_{10}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) = 0, \\ &R_{01}(x_{cs}, \tilde{x}_{cs}) = \vartheta_{01}(x_{cs}) - \vartheta_{01}(\tilde{x}_{cs}) = P_u(x_{cs}) - P_u(\tilde{x}_{cs}), \end{aligned}$$

这意味着当 $\alpha = \beta$ 且 $w_{\mathbf{j}} = \vartheta_{\mathbf{j}}$ 时，附录 A.2 中的（A ）成立，因为 P_u(x_{cs}) 关于 x_{cs} 是 β-H¨older，正如步骤 2 末尾所见。因此，根据附录 A 中给出的引理 14（惠特尼延拓定理），我们得到一个 $C^{1,\,\beta}$ 映射 $\Theta : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得

$$\begin{aligned} &\pi_{cs}\Theta(x_{cs}) = x_{cs}, \quad \pi_u\Theta(x_{cs}) = 0, \\ &D(\pi_{cs}\Theta)(x_{cs}) = (id_{cs}, 0), \quad D(\pi_u\Theta)(x_{cs}) = (0, P_u(x_{cs})), \end{aligned}$$

即，（4.12）成立。此外，由于 P_u(x_c) = id_u （即， $D\Theta$(x_c) = id），正如步骤 2 末尾所见，我们得出 Θ: $U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个 $C^{1,\,\beta}$ 微分同胚，使得

$$\begin{aligned} \|\Theta^{\pm 1}(x) - x\| &= \|\Theta^{\pm 1}(x) - \Theta^{\pm 1}(\tilde{x}_c) - (x - \tilde{x}_c)\| \\ &\le \|D\Theta^{\pm 1}(\xi) - D\Theta^{\pm 1}(\tilde{x}_c)\|\,\|x - \tilde{x}_c\| \le L\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}, \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 $\tilde{x}_c$ 之间。这就证明了（4.13）。对于 X_{cs} 与 X_u 为更高维数空间的一般情形，讨论几乎相同。

最后，由（4.9）-（4.10），我们得到

$$D\hat{F}(x_{cs}) = \begin{pmatrix} Dg(x_{cs}) & 0 \\ * & A_u(x_{cs}) \end{pmatrix}$$

因此， （4.12）给出

$$\begin{aligned} D\tilde{F}(x_{cs}) &= D\Theta(\hat{F}\circ\Theta^{-1}(x_{cs}))D\hat{F}(\Theta^{-1}(x_{cs}))D\Theta^{-1}(x_{cs}) \\ &= \begin{pmatrix} id_{cs} & 0 \\ 0 & P_u(g(x_{cs})) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Dg(x_{cs}) & 0 \\ * & A_u(x_{cs}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} id_{cs} & 0 \\ 0 & P_u(x_{cs})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Dg(x_{cs}) & 0 \\ * & P_u(g(x_{cs}))A_u(x_{cs})P_u(x_{cs})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Dg(x_{cs}) & 0 \\ * & A_u(x_c) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

这就证明了（4.11）。证明完毕。 □

请注意， A_u（x_{cs}）不能完全化简为 A_u，因为一旦将 A_u（x_c）替换为A_u，估计式（ $\lambda_s^+ < 1$（5.13）中的项就会被替换为 $1+\varsigma > 1$，这样我们便无法保证式（5.12）中所定义极限的收敛性。

6. Linearization of expansive fiber-preserving mapping

本节中，我们准备证明引理12。回顾一下，昂贵的纤维-˜保持映射 F 具有（4.14）的形式。

引理12的证明。我们将此引理的证明分为三个步骤。

˜步骤 *1.* 将 F 提升为定义在有界连续映射空间中的映射 $\mathbb{G}_u$ ， 然后证明 $\mathbb{G}_u$的可微线性化。

令 $\mathcal{X}_\infty := C_b^0(X_{cs},\ X_u)$ 表示满足下述条件的所有有界连续映射的集合

$$\|\eta\|_\infty := \sup_{x_{cs}\in X_{cs}}\|\eta(x_{cs})\| < \infty, \quad \forall \eta \in \mathcal{X}_\infty.$$

于是，$(\mathcal{X}_\infty,\ \|\cdot\|_\infty)$ 是一个巴拿赫空间。定义线性算子 $\mathbb{A}_u$: $\mathcal{X}_\infty \to \mathcal{X}_\infty$，其定义为

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_u\eta)(x_{cs}) &:= \partial_{x_u}(\pi_u\tilde{F})(g^{-1}(x_{cs}))\eta(g^{-1}(x_{cs})) \\ &= A_u(\pi_c g^{-1}(x_{cs}))\eta(g^{-1}(x_{cs})) = A_u(g^{-1}(x_c))\eta(g^{-1}(x_{cs})) \end{aligned} \tag{6.1}$$

由（4.11），其中 $\pi_c g^{-1}$（x_{cs}） $= g^{-1}$（x_c），如下所述（5.11）。由（2.15）和（2.16）可知，$\mathbb{A}_u$ 是良定义的有界线性算子。此外，我们可以验证： （i）零映射 $\mathbf{0} \in \mathcal{X}_\infty$ 是 $\mathbb{A}_u\eta$的不动点；（ii） $\mathbb{A}_u\eta$ 可逆，并且

$$(\mathbb{A}_u^{-1}\eta)(x_{cs}) := A_u(x_c)^{-1}\eta(g(x_{cs})), \quad \forall \eta \in \mathcal{X}_\infty.$$

对 [7, 第 3], 节中给出的二分谱进行类似讨论，我们可以由（2.14）推出，谱 Σ（$\mathbb{A}_u$）满足

$$\Sigma(\mathbb{A}_u) \subset \bigcup_{i=k+1}^{p}[\lambda_i - \varsigma, \lambda_i + \varsigma]. \tag{6.2}$$

接下来，令

$$\tilde{f}_{x_{cs}}(x_u) := G_{x_{cs}}(x_u) - A_u(x_{cs})x_u = \pi_u\tilde{F}(x) - \partial_{x_u}(\pi_u\tilde{F})(x_{cs})x_u,$$

˜我们验证 $f_{x_{cs}}(0) = G_{x_{cs}}(0) = 0$ 并且

$$D\tilde{f}_{x_{cs}}(0) = \partial_{x_u}(\pi_u\tilde{F})(x_{cs}) - \partial_{x_u}(\pi_u\tilde{F})(x_{cs}) = 0, \tag{6.3}$$

由（4.14）可见。这使我们能够定义映射 $\mathbb{G}_u:\ \mathcal{X}_\infty \to \mathcal{X}_\infty$ 为

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_u(\eta)(x_{cs}) &:= G_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\\ &= A_u(g^{-1}(x_{cs}))\eta(g^{-1}(x_{cs})) + \tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs}))).\end{aligned} \tag{6.4}$$

对于任意 $\eta \in \mathcal{X}_\infty$，由（4.4）（以 $\hat{}F$ 代替 $\tilde{F}$）以及（6.2）-（6.3）可得

$$\begin{aligned}\sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \|\mathbb{G}_u(\eta)(x_{cs})\| &= \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \left\|A_u(g^{-1}(x_{cs}))\eta(g^{-1}(x_{cs})) + \tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\right\|\\ &\le (\lambda_p + \varsigma + \delta)\|\eta\|_\infty,\end{aligned}$$

这意味着 $\mathbb{G}_u : \mathcal{X}_\infty \to \mathcal{X}_\infty$ 是良定义的，使得 $\mathbb{G}_u\mathbf{(0)} = \mathbf{0}$。

关于 $\mathbb{G}_u$的可微性，我们断言

$$(D\mathbb{G}_u(\eta)\sigma)(x_{cs}) = A_u(g^{-1}(x_{cs}))\sigma(g^{-1}(x_{cs})) + D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))$$

对于任意 $\eta,\ \sigma \in \mathcal{X}_\infty$。事实上，由（6.4）可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{G}_u(\eta+\sigma)(x_{cs}) - \mathbb{G}_u(\eta)(x_{cs}) - (D\mathbb{G}_u(\eta)\sigma)(x_{cs})\\ &= \tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}((\eta+\sigma)(g^{-1}(x_{cs}))) - \tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\\ &\quad - D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\\ &= \int_0^1 \Big(D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}((\eta+t\sigma)(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\\ &\quad - D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\Big)\,dt.\end{aligned}$$

于是由（4.4）进一步可得

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{G}_u(\eta+\sigma) - \mathbb{G}_u(\eta) - D(\mathbb{G}_u(\eta))\sigma\|_\infty\\ &\le \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \int_0^1 \left\|D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}((\eta+t\sigma)(g^{-1}(x_{cs})))\right.\\ &\quad \left. - D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\right\|\|\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\|\,dt\\ &\le \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \int_0^1 M\|t\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\|^\beta\|\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\|\,dt \le M\|\sigma\|_\infty^{1+\beta},\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{\sigma\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbb{G}_u(\eta+\sigma) - \mathbb{G}_u(\eta) - D(\mathbb{G}_u(\eta))\sigma\|_\infty}{\|\sigma\|_\infty} = 0.$$

这证明了 $\mathbb{G}_u$ 的可微性，使得

$$\begin{aligned}(D\mathbb{G}_u(\mathbf{0})\sigma)(x_{cs}) &= A_u(g^{-1}(x_{cs}))\sigma(g^{-1}(x_{cs})) + D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(0)\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\\ &= \partial_{x_u}(\pi_u\tilde{F})(g^{-1}(x_{cs}))\sigma(g^{-1}(x_{cs})) = (\mathbb{A}_u\sigma)(x_{cs}),\end{aligned}$$

这意味着 $D\mathbb{G}_u(\mathbf{0}) = \mathbb{A}_u$，由于（6.1）和（6.3）。

此外，由（4.4）再次可得

$$\begin{aligned}\|D\mathbb{G}_u(\eta_1)\sigma - D\mathbb{G}_u(\eta_2)\sigma\|_\infty &= \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \left\|D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta_1(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\right.\\ &\qquad \left. - D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta_2(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\right\|\\ &\le M \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \|\eta_1(g^{-1}(x_{cs})) - \eta_2(g^{-1}(x_{cs}))\|^\beta\|\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\|\\ &\le M\|\eta_1 - \eta_2\|_\infty^\beta\|\sigma\|_\infty, \quad \forall \eta_1,\eta_2,\sigma \in \mathcal{X}_\infty,\end{aligned}$$

and

$$\|D\mathbb{G}_u(\eta)\sigma - \mathbb{A}_u\sigma\|_\infty = \sup_{x_{cs}\in X_{cs}} \left\|D\tilde{f}_{g^{-1}(x_{cs})}(\eta(g^{-1}(x_{cs})))\sigma(g^{-1}(x_{cs}))\right\| \le \delta\|\sigma\|_\infty.$$

因此， $\mathbb{G}_u$ 是 $C^{1,\,\beta}$ 其非线性项在全局范围内有一个较小的界。

现在，我们得到了关于 $\mathbb{G}_u$ 的可微线性化结果。

引理 13. 设 $\mathbb{G}_u$ 和 $\mathbb{A}_u$ 如上所述。则存在一个定义在 $\mathcal{X}_\infty$ 上的局部同胚 $\mathbb{H}_u$ ， 使得 $\mathbb{H}_u(0) = 0$ 并且

$$\mathbb{H}_u^{-1} \circ \mathbb{G}_u \circ \mathbb{H}_u = \mathbb{A}_u. \tag{6.5}$$

此外，对于原点附近的任意 $\eta \in \mathcal{X}_\infty$ ，

$$\|\mathbb{H}_u^{\pm 1}(\eta) - \eta\|_\infty \le L\|\eta\|_\infty^{1+\beta} \tag{6.6}$$

其中常数 $\beta > 0$ 足够小。

引理 13 的证明。 注意，谱带宽条件

$$(\lambda_i + \varsigma)/(\lambda_i - \varsigma) < (\lambda_{k+1} - \varsigma)^\beta$$

对每个 $i = k+1, \cdots, p$都自动成立。因此，可以应用 [42, 引理 6。1] 得到 C^0 的局部线性化 $\mathbb{G}_u$，其中共轭映射 $\mathbb{H}_u$ 及其逆 $\mathbb{H}_u^{-1}$满足（6.6）。证明完毕。□

步骤 *2.* 通过 $\mathbb{H}_u$ 构造变换 Φ ， 并验证其可逆性。

任意固定一点 $x = (x_{cs},\ x_u) \in \mathbb{R}^d$ 以及一个映射 $\zeta_x \in \mathcal{X}_\infty$ ， 使得 $\zeta_x(x_{cs}) = x_u$，我们定义 $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 如下:

$$\Phi(x) := (x_{cs}, \mathbb{H}_u(\zeta_x)(x_{cs})), \tag{6.7}$$

它是连续的，因为 $\mathbb{H}_u$ 和 ζ_x 都是连续的。然后，根据 (6.1)、(6.4)、(6.5) 和 (6.7)，可以验证

$$\begin{aligned}
\tilde{F} \circ \Phi(x) &= \tilde{F}(x_{cs}, \mathbb{H}_u(\zeta_x)(x_{cs})) = (g(x_{cs}), G_{x_{cs}}(\mathbb{H}_u(\zeta_x)(x_{cs}))) \\
&= (g(x_{cs}), \mathbb{G}_u \circ \mathbb{H}_u(\zeta_x)(g(x_{cs}))) = (g(x_{cs}), \mathbb{H}_u(\mathbb{A}_u\zeta_x)(g(x_{cs}))) \\
&= \Phi(g(x_{cs}), (\mathbb{A}_u\zeta_x)(g(x_{cs}))) = \Phi(g(x_{cs}), A_u(g^{-1}(\pi_c g(x_{cs})))x_u) \\
&= \Phi(g(x_{cs}), A_u(x_c)x_u), \quad \forall x \in U,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

其中 $\pi_c g(x_{cs}) = g(x_c)$，如下文 (5.11) 所示。这就证明了 (4.15)。

接下来，我们证明 $\Phi(x)$ 的定义不依赖于 $\zeta_x \in \mathcal{X}_\infty$，即，若 ζ_1，$\zeta_2 \in \mathcal{X}_\infty$ 满足 $\zeta_1(x_{cs}) = \zeta_2(x_{cs}) = x_u$，则

$$\mathbb{H}_u(\zeta_1)(x_{cs}) = \mathbb{H}_u(\zeta_2)(x_{cs}). \tag{6.9}$$

为此，我们回顾 [42, 引理 6。2] 的证明，其中 $\mathbb{G}_u$ 可以通过 $(p-k)$ 步骤线性化，每一步都将 $\mathbb{G}_u$ 的第 个分量 (根据谱分解) 通过以下变换进行线性化

$$\phi_\ell \quad \text{and} \quad \varphi_\ell := \lim_{n\to\infty} \mathbb{A}_\ell^n \pi_\ell \mathbb{G}_u^{-n}, \quad \forall \ell = k+1, ..., p,$$

其中， ϕ_ℓ 将与谱 $\bigcup_{i=k+1}^{\ell-1}[\lambda_i - \varsigma, \lambda_i + \varsigma]$ 相对应的子空间相切的 $\mathbb{G}_u$ 的弱不稳定流形 $\mathcal{M}_\ell$ 展平，而 $\mathbb{A}_\ell$ 和 $\pi_\ell\mathbb{G}_\ell$ 分别是 $\mathbb{A}_u$ 和 $\mathbb{G}_u$ 的第 ℓ 个分量（每一步均作了某些修改）。

那么，我们可以看到，将 $\mathcal{M}_\ell$ 限制在不稳定叶 $\mathcal{W}_u(x_{cs})$ 上（即，以˜基点 x_{cs} 为基的纤维）实际上是经过x_{cs}的 F 的弱不稳定叶层的叶 $\mathcal{W}_\ell(x_{cs})$，即

$$(\mathcal{M}_\ell)_{x_{cs}} := \mathcal{M}_\ell|_{\mathcal{W}_u(x_{cs})} = \mathcal{W}_\ell(x_{cs}). \tag{6.10}$$

事实上，（4.14）、（6.4）以及事实 ζ_x（x_{cs}）$= x_u$ 给出

$$\mathbb{G}_u^n(\zeta_x)(g^n(x_{cs})) = G_{g^{n-1}(x_{cs})} \circ G_{g^{n-2}(x_{cs})} \circ \cdots \circ G_{x_{cs}}(x_u) = \tilde{F}^n(x) - g^n(x_{cs})$$

˜对所有 $n \geq 0$，这意味着 $\varrho_\ell^{-n}\|F^n(x) - g^n(x_{cs})\| \leq \varrho_\ell^{-n}\|\mathbb{G}_u^n(\zeta_x)\|_\infty$，其中 $\varrho_\ell \in (\lambda_\ell + \varsigma, \lambda_{\ell+1} - \varsigma)$。根据类似于（3.1）的弱不稳定叶层定义，我们知道 $\mathcal{W}_\ell(x_{cs}) \subset (\mathcal{M}_\ell)_{x_{cs}}$，因此（6.10）成立，因为 $\mathcal{W}_\ell(x_{cs})$是一个唯一的映射的图。因此，将 ϕ_ℓ 限制在 $\mathcal{W}_u(x_{cs})$上时，完全由 $\mathcal{W}_\ell(x_{cs})$决定，这意味着

$$\phi_\ell(\zeta_1)(x_{cs}) = \phi_\ell(\zeta_2)(x_{cs})$$

对于任意 ζ_1，$\zeta_2 \in \mathcal{X}_\infty$ 使得 $\zeta_1(x_{cs}) = \zeta_2(x_{cs})$。

此外，对于 φ_ℓ，我们注意到

$$\varphi_\ell(\zeta_x)(x_{cs}) = \lim_{n\to\infty} A_\ell(x_c)\cdots A_\ell(g^{-n+1}(x_c))\pi_\ell G^{-1}_{g^{-n+1}(x_{cs})} \circ \cdots \circ G^{-1}_{x_{cs}}(x_u).$$

这表明，对任意满足 $\zeta_1(x_{cs}) = \zeta_2(x_{cs}) = x_u$ 的 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{X}_\infty$，我们有

$$\varphi_\ell(\zeta_1)(x_{cs}) = \varphi_\ell(\zeta_2)(x_{cs}).$$

上述所有讨论表明 (6.9) 成立，因为 $\mathbb{H}_u$ 是 ϕ_ℓ 与 φ_ℓ的复合。现在，我们定义 $\Phi^{-1}(x) := (x_{cs}, \mathbb{H}_u^{-1}(\zeta_x)(x_{cs}))$，并由 (6.7) 验证

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Phi^{-1}(x) &= \Phi(x_{cs}, \mathbb{H}_u^{-1}(\zeta_x)(x_{cs})) = (x_{cs}, \mathbb{H}_u \circ \mathbb{H}_u^{-1}(\zeta_x)(x_{cs}))\\ &= (x_{cs}, x_u) = x,\end{aligned}$$

这表明 Φ 是一个同胚。

步骤*3.* 验证 Φ的正则性。

对固定的 $x = (x_{cs}, x_u) \in \mathbb{R}^d$，我们定义映射 $i_x \in \mathcal{X}_\infty$ 为

$$i_x(y_{cs}) := e^{-\|y_{cs} - x_{cs}\|}x_u, \quad \forall y_{cs} \in X_{cs},$$

其满足 $\|i_x\|_\infty = \|x_u\|$。定义

$$\Phi(x) := (x_{cs}, \mathbb{H}_u(i_x)(x_{cs})), \tag{6.11}$$

这与 Φ 在（6.7）中定义的相同，因为 i_x（x_{cs}）$= \zeta_x$（x_{cs}）$= x_u$ 根据（6.9）。然后，由（6.6）和（6.11），我们可以验证

$$\begin{aligned}\frac{\|\Phi(x) - x\|}{\|x - x_{cs}\|^{1+\beta}} &= \frac{\|(x_{cs}, \mathbb{H}_u(i_x)(x_{cs})) - (x_{cs}, x_u)\|}{\|x_u\|^{1+\beta}}\\ &= \frac{\|\mathbb{H}_u(i_x)(x_{cs}) - i_x(x_{cs})\|}{\|x_u\|^{1+\beta}} \leq \frac{\|\mathbb{H}_u(i_x) - i_x\|_\infty}{\|i_x\|_\infty^{1+\beta}} \leq L\end{aligned}$$

当 $x \neq x_{cs}$ 接近原点时。

最后，对于任意 $\tilde{x}_c \in X_c$，由于 $\|x - x_{cs}\| \leq \|x - x_c\| \leq \|x - \tilde{x}_c\|$，我们可知

$$\frac{\|\Phi(x) - x\|}{\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}} \leq \frac{L\|x - x_{cs}\|^{1+\beta}}{\|x - \tilde{x}_c\|^{1+\beta}} \leq L,$$

这就证明了（4.16）对 Φ成立。类似地，可以证明（4.16）对 Φ^{-1} 也成立，从而完成证明。□

请注意，通过（6.1），引理4.11中得到的等式11在（6.8）中起着关键作用。否则，没有（4.11），我们只能验证

$$\tilde{F} \circ \Phi(x) = \Phi(g(x_{cs}), A_u(x_{cs})x_u)$$

成立。这与 Takens正规形（2.5）不一致，因为其线性部分仅依赖于 x_c。

Appendix A.

在本附录中，我们将介绍 Whitney延拓定理，以及一个用于估计函数级数 H¨older 指数的引理。

对于 $\mathbf{j} := (j_1, ..., j_d)$、$\mathbf{k} := (k_1, ..., k_d)$，令 $\mathbf{j}! := j_1! \cdots j_d!$，$|\mathbf{j}| := j_1 + \cdots + j_d$ 且 $z^{\mathbf{j}} := z_1^{j_1} \cdots z_d^{j_d}$，其中 $d \in \mathbb{N}$, $j_i, k_i \geq 0$ 对所有 $i = 1, ..., d$ 都是整数，且 $z := (z_1, ..., z_d) \in \mathbb{R}^d$。对于一个常数 $r \in \mathbb{N}$ 和一个函数 $w : \Omega \to \mathbb{R}$，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个闭集，假设存在一族函数 $w_{\mathbf{j}} : \Omega \to \mathbb{R}$，$0 < |\mathbf{j}| \leq r$，使得

$$w_{\mathbf{0}} = w, \quad w_{\mathbf{j}}(x) = \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{k}| \leq r} \frac{w_{\mathbf{j}+\mathbf{k}}(y)}{\mathbf{k}!}(x-y)^{\mathbf{k}} + R_{\mathbf{j}}(x, y) \tag{A.1}$$

and

$$|w_{\mathbf{j}}(x)| \leq N, \quad |R_{\mathbf{j}}(x, y)| \leq N\|x-y\|^{r+\alpha-\mathbf{j}}, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{A.2}$$

满足 $\alpha \in (0, 1]$。因此，根据 [34, 定理 4]，，我们有以下引理。

引理14. 设上文给出的函数 $w : \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $w_{\mathbf{j}} : \Omega \to \mathbb{R}$, $0 \leq |\mathbf{j}| \leq r$, 满足(A.1) 和 (A.2) 。那么存在一个 $C^{r,\alpha}$ 函数 $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得

$$W|_\Omega = w, \quad D^{\mathbf{j}}W|_\Omega = w_{\mathbf{j}}, \quad 0 < |\mathbf{j}| \leq r,$$

其中 $D^{\mathbf{j}}W := \partial^{\mathbf{j}}W(x_1, ..., x_d)/\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_d}$。

引理15. [41, 引理 4] 设 $(Y, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，且$\Omega \subset Y$是原点 $O \in Y$的小邻域。假设，对于所有整数 $k \geq 0$， $\Gamma_k : \Omega \to Y$ 都是 $C^{0,\alpha}$ 映射，其中$\alpha \in (0, 1]$，，并且 τ_1, τ_2 是正的常数，使得

$$\|\Gamma_k(y)\| \leq C\tau_1^k, \quad \|\Gamma_k(y) - \Gamma_k(\tilde{y})\| \leq C\tau_2^k\|y - \tilde{y}\|^\alpha, \quad \forall y, \tilde{y} \in \Omega.$$

如果存在一个 $\rho > 0$ 使得 $\rho\tau_1 < 1$，那么

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \|\Gamma_k(y) - \Gamma_k(\tilde{y})\| \leq C\|y - \tilde{y}\|^{\bar{\beta}}$$

在 O附近，其中

$$\bar{\beta} := \begin{cases} \alpha, & \rho\tau_2 < 1, \\ \alpha - \epsilon, & \rho\tau_2 = 1, \\ (\log\tau_1 + \log\rho)(\log\tau_1 - \log\tau_2)^{-1}\alpha, & \rho\tau_2 > 1, \end{cases}$$

对任意给定的任意小的 $\epsilon > 0$ 所定义，是一个正常数。

Appendix B。

引理 5 的证明。 我们将引理的证明分为三个步骤。

步骤 *1.* 回顾 $\mathbb{R}^d$上的经典光滑稳定(相应的) 叶状结构。

设 F 是一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚，使得 (2.2) 和 (2.3) 成立。我们只讨论 F 在 $\mathbb{R}^d$ 上的稳定叶状结构，因为不稳定叶状结构的讨论类似。可以看到，存在一个 C^0映射 $h_s:\mathbb{R}^d\times X_s\to X_{cu}$ 使得其叶可表示为

$$\mathcal{W}_s(x)=\{z_s+h_s(x,z_s):z_s\in X_s\},\quad \forall x\in\mathbb{R}^d.$$

事实上，考虑与 $\mathbb{R}^d$ 上稳定叶状结构相关联的经典 Lyapunov-Perron 方程（参见 [5]）：

$$\begin{aligned}p_n(x,z_s)=&A_s^n(z_s-\pi_s x)+\sum_{k=0}^{n-1}A_s^{n-k-1}\{\pi_s f(F^k(x)+p_k(x,z_s))-\pi_s f(F^k(x))\}\\&-\sum_{k=n}^{\infty}A_{cu}^{n-k-1}\{\pi_{cu} f(F^k(x)+p_k(x,z_s))-\pi_{cu} f(F^k(x))\},\quad \forall n\geq 0.\end{aligned}\tag{B.1}$$

使用 [5, 节 2], 中的相同论证，我们可以得到，(B.1) 有唯一解 $(p_n(x,z_s))_{n\geq 0}$，满足 $p_n(x,x_s)=0$ 且

$$\sup_{n\geq 0}\{\gamma_1^{-n}\|p_n(x,z_s)\|\}\leq M,\quad \sup_{n\geq 0}\{\gamma_1^{-n}\|\partial_{z_s}p_n(x,z_s)\|\}\leq M,\tag{B.2}$$

其中 $M>0$ 是一个常数，且 $\gamma_1\in(\lambda_s^+,1-\varsigma)$ 具有较小的 $\varsigma>0$。然后，应用 [5, 定理 3.1(v)], ，C^0 的稳定叶状结构 g 可定义为

$$h_s(x,z_s):=x_{cu}+\pi_{cu}p_0(x,z_s),\tag{B.3}$$

这是 C^1 中的 z_s，由（B.2）可得。

接下来，我们证明

$$\|\partial_{z_s}p_0(x_c,0)-id_s\|\leq\delta_p,\quad \|\partial_{z_s}p_0(x_c,0)-\partial_{z_s}p_0(\tilde{x}_c,0)\|\leq\delta_p\|x_c-\tilde{x}_c\|^\alpha\tag{B.4}$$

对所有 x_c，$\tilde{x}_c\in X_c$，其中 id_s 表示 X_s 中的恒等映射，且 $\delta_p>0$ 充分小。事实上，对（B.1）两边关于 z_s求偏导，得到

$$\begin{aligned}\partial_{z_s}p_n(x,z_s)=&A_s^n+\sum_{k=0}^{n-1}A_s^{n-k-1}D(\pi_s f)(F^k(x)+p_k(x,z_s))\partial_{z_s}p_k(x,z_s)\\&-\sum_{k=n}^{\infty}A_{cu}^{n-k-1}D(\pi_{cu}f)(F^k(x)+p_k(x,z_s))\partial_{z_s}p_k(x,z_s),\quad \forall n\geq 0.\end{aligned}\tag{B.5}$$

于是，根据（B.5）以及事实 p_k（x_{cu}，0）$=0$ 可知

$$\begin{aligned}\partial_{z_s}p_n(x_c,0)=&A_s^n+\sum_{k=0}^{n-1}A_s^{n-k-1}D(\pi_s f)(F^k(x_c))\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\\&-\sum_{k=n}^{\infty}A_{cu}^{n-k-1}D(\pi_{cu}f)(F^k(x_c))\partial_{z_s}p_k(x_c,0),\quad \forall n\geq 0,\end{aligned}\tag{B.6}$$

w这里，项 $\sum_{k=0}^{n-1}$ 在 $n=0$时消失。由（2.2）、（2.17）和（B.2）可得

$$\begin{aligned}\|\partial_{z_s}p_0(x_c,0)-id_s\| &\le \sum_{k=0}^{\infty}K(1-\varsigma)^{-k-1}\delta_f\|\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\|\\ &\le \delta_f KM/(1-\varsigma)\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma_1/(1-\varsigma))^k\le\delta_p,\end{aligned}$$

其中 $\delta_p>0$ 足够小，因为 δ_f 足够小。这证明了（B.4）中的第一个不等式。注意，此处预先使用了（2.17），因为 $A(x_c)$ 是 A的一个小扰动，因此我们可以合理地假设，在此证明中，A 也满足（2.15）-（2.17）。

此外，对于任意 x_c，$\tilde{x}_c\in X_c$，由（B.6）可知，对所有 $n\ge 0$，

$$\begin{aligned}&\partial_{z_s}p_n(x_c,0)-\partial_{z_s}p_n(\tilde{x}_c,0)\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}A_s^{n-k-1}\Big\{D(\pi_s f)(F^k(x_c))\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-D(\pi_s f)(F^k(\tilde{x}_c))\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\Big\}\\ &\quad-\sum_{k=n}^{\infty}A_{cu}^{n-k-1}\Big\{D(\pi_{cu}f)(F^k(x_c))\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-D(\pi_{cu}f)(F^k(\tilde{x}_c))\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\Big\}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

取一个 $\gamma_2\in(\gamma_1,\ 1-\varsigma)$，由（B.2），得到

$$\sup_{n\ge0}\{\gamma_2^{-n}\|\partial_{z_s}p_n(x_c,0)-\partial_{z_s}p_n(\tilde{x}_c,0)\|\}<\infty,$$

并注意到

$$\|F^k(x_c)-F^k(\tilde{x}_c)\|\le\sup_{\xi\in X_c}\|DF^k(\xi)\|\,\|x_c-\tilde{x}_c\|\le(\lambda_u^+ +\delta_f)^k\|x_c-\tilde{x}_c\|,\quad\forall k\ge0.$$

因此，由（B.7）连同（2.2）、（2.15）-（2.17）以及（B.2）可得

$$\begin{aligned}&\gamma_2^{-n}\|\partial_{z_s}p_n(x_c,0)-\partial_{z_s}p_n(\tilde{x}_c,0)\|\\ &\le\gamma_2^{-n}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}\|A_s^{n-k-1}\{D(\pi_s f)(F^k(x_c))-D(\pi_s f)(F^k(\tilde{x}_c))\}\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\|\\ &\quad+\sum_{k=0}^{n-1}\|A_s^{n-k-1}D(\pi_s f)(F^k(\tilde{x}_c))\{\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\}\|\\ &\quad+\sum_{k=n}^{\infty}\|A_{cu}^{n-k-1}\{D(\pi_{cu}f)(F^k(x_c))-D(\pi_{cu}f)(F^k(\tilde{x}_c))\}\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\|\\ &\quad+\sum_{k=n}^{\infty}\|A_{cu}^{n-k-1}D(\pi_{cu}f)(F^k(\tilde{x}_c))\{\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\}\|\Bigg\}\\ &\le\gamma_2^{-1}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}K\left(\frac{\lambda_s^+}{\gamma_2}\right)^{n-k-1}\delta_f\|F^k(x_c)-F^k(\tilde{x}_c)\|^\alpha(\gamma_1/\gamma_2)^k\gamma_1^{-k}\|\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\|\\ &\quad+\sum_{k=0}^{n-1}K\left(\frac{\lambda_s^+}{\gamma_2}\right)^{n-k-1}\delta_f\gamma_2^{-k}\|\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\|\\ &\quad+\sum_{k=n}^{\infty}K\left(\frac{1-\varsigma}{\gamma_2}\right)^{n-k-1}\delta_f\|F^k(x_c)-F^k(\tilde{x}_c)\|^\alpha(\gamma_1/\gamma_2)^k\gamma_1^{-k}\|\partial_{z_s}p_k(x_c,0)\|\\ &\quad+\sum_{k=n}^{\infty}K\left(\frac{1-\varsigma}{\gamma_2}\right)^{n-k-1}\delta_f\gamma_2^{-k}\|\partial_{z_s}p_k(x_c,0)-\partial_{z_s}p_k(\tilde{x}_c,0)\|\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\leq C\delta_f \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_u^+ + \delta_f)^\alpha \gamma_1}{\gamma_2} \right)^k \|x_c - \tilde{x}_c\|^\alpha + C\delta_f \sup_{n\geq 0}\{\gamma_2^{-n}\|\partial_{z_s} p_n(x_c,0) - \partial_{z_s} p_n(\tilde{x}_c,0)\|\}, \quad \text{(B.8)}$$

其中 $C>0$ 是一个常数，并且 $(\lambda_u^+ + \delta_f)^\alpha \gamma_1 < \gamma_2$ 因为 $\gamma_1 < \gamma_2$ 且 $(\lambda_u^+ + \delta_f)^\alpha$ 在 $\alpha > 0$ 较小时接近于 1。因此，由（B.8）可得

$$\sup_{n\geq 0}\{\gamma_2^{-n}\|\partial_{z_s} p_n(x_c,0) - \partial_{z_s} p_n(\tilde{x}_c,0)\|\} \leq \delta_p \|x_c - \tilde{x}_c\|^\alpha, \quad \forall n \geq 0,$$

这意味着

$$\|\partial_{z_s} p_0(x_c,0) - \partial_{z_s} p_0(\tilde{x}_c,0)\| \leq \delta_p \|x_c - \tilde{x}_c\|^\alpha.$$

这证明了（B.4）中的第二个不等式。

步骤 2. 研究叶在 $x_c \in X_c$ 处的切空间。

令 $E_s(x_c) := \{y_s + \partial_{z_s} h_s(x_c,0) y_s \in \mathbb{R}^d : y_s \in X_s\}$ 为稳定叶状结构 $W_s(x)$ 在 $x_c \in X_c$ 处的切空间。由（B.1）和（B.3）可知

$$id_s + \partial_{z_s} h_s(x_c,0) = \partial_{z_s}(\pi_s p_0)(x_c,0) + \partial_{z_s}(\pi_{cu} p_0)(x_c,0) = \partial_{z_s} p_0(x_c,0),$$

这与（B.4）结合起来意味着 $E_s(x_c)$ 与 X_s 一致地接近。另一方面，众所周知，稳定叶状结构的叶的切空间是稳定分布的纤维（例如参见 [26]），这意味着 $E_s(x_c)$ 在 $DF(x_c)$ 的作用下保持不变。类似地，我们可以定义不稳定分布的纤维 $E_u(x_c)$，它与 X_u 一致地接近，且在 $DF(x_c)$ 下保持不变。

于是，存在一个过渡矩阵 $P(x_c) \in Gl(d,\mathbb{R})$，将 $E_s(x_c)$ 和 $E_u(x_c)$ 分别映射到 X_s 和 X_u，使得 $P(0) = id$，

$$\|P(x_c) - id\| \leq \delta_E, \quad \|P(x_c) - P(\tilde{x}_c)\| \leq \delta_E \|x_c - \tilde{x}_c\|^\alpha, \quad \forall x_c, \tilde{x}_c \in X_c, \quad \text{(B.9)}$$

其中 $\delta_E > 0$ 足够小。此外，我们看到 X_s 和 X_u 在 $P(F(x_c))DF(x_c)P(x_c)^{-1}$ 下保持不变，这意味着

$$P(F(x_c))DF(x_c)P(x_c)^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \text{(B.10)}$$

其中矩阵的三行分别对应子空间 X_c、X_s 和 X_u，并且 $*$ 表示可能非零的元素。

步骤 3. 通过惠特尼延拓定理延拓 $P(x_c)$。

与第5节中的步骤3类似，我们可以应用惠特尼延拓定理（见附录A中的引理14）得到一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚 $\Upsilon: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得

$$\Upsilon(x_c) = x_c, \quad D\Upsilon(x_c) = P(x_c), \quad \|D\Upsilon(x) - id\| \leq \delta_\Upsilon \quad \text{(B.11)}$$

对所有 $x_c \in X_c$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$，其中 $\delta_\Upsilon > 0$ 是一个较小的常数。

最后，我们只需补充一些细节来证明B.11中的第三个不等式。更确切地说，由B.9可知，$C^{1,\alpha}$ 范数在 $\Upsilon - id$ 上 X_c 很小。于是，通过应用 [34, 第177页，定理 4]（或 [12, 定理 2]），将 $\Upsilon - id$ 延拓到 $\mathbb{R}^d$ 后，可得

$$\|\Upsilon - id\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq C\delta_E,$$

其中 $C>0$ 是一个常数，$\|\cdot\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)}$ 表示 $C^{1,\alpha}$ 中的范数。因此，Υ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 $C^{1,\alpha}$ 微分同胚，使得

$$\|\Upsilon(x) - x\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq C\delta_E, \qquad \|\Upsilon^{-1}(x) - x\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leq C\delta_E, \quad \text{(B.12)}$$

by t反函数定理。因此，新的微分同胚 $\Upsilon \circ F \circ \Upsilon^{-1}$ 满足 t

$$\begin{aligned} D(\Upsilon \circ F \circ \Upsilon^{-1})(x_c) &= D\Upsilon(F \circ \Upsilon^{-1}(x_c))DF(\Upsilon^{-1}(x_c))D\Upsilon^{-1}(x_c) \\ &= D\Upsilon(F(x_c))DF(x_c)D\Upsilon^{-1}(x_c) = P(F(x_c))DF(x_c)P(x_c)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由（B.11）和（B.10）。这里，我们仍将 $\Upsilon \circ F \circ \Upsilon^{-1}$ 记为 F，并由上述等式可知（2.8）成立。此外，（B.12）意味着（2.2）保持不变，并且 X_c 仍是中心流形，因为 Υ（x_c）$= x_c$。由此可得（2.7）保持不变。证毕。□

Acknowledgement

我们声明，作者按姓名字母顺序排列，且所有作者对本文的贡献相同。

W. M. Zhang为通讯作者，获得了 NSF-CQ #CSTB2023NSCQ- JQX0020 和国家自然科学基金 #12271070 的资助；Y. H. Xia 获得了国家自然科学基金 #12571165 和 NSF-ZJ # LZ24A010006 的资助；W. N. Zhang 获得了国家自然科学基金 #12571180、#12171336 以及国家重点研发计划 #2022YFA1005900 的资助。

References

[1] V. I. Arnold. 常微分方程理论中的几何方法，Springer，纽约-柏林，1983年。[2] G. Belickiĭ，光滑映射芽的等价性与标准形， *Russian Math. Surveys*，33 (1978) 107–177。[3] P. Bonckaert, F. Dumortier, S. van Strien，向量场的奇点由其首个非零喷射决定， *Ergodic Theory Dynam. Systems*，9 (1989) 281–308。[4] A. Brjuno，微分方程的解析形式 I、II， *Trans. Mosc. Math. Soc.*，25 (1971) 119–262， *Trans.Mosc. Math. Soc.*，26 (1972) 199–239。[5] X. Chen, J. K. Hale, B. Tan，巴拿赫空间中半群的不变叶状结构， *J. Differential Equations*，139 (1997) 283–318。[6] D. Dragiˇcevi´c, X. Tang, W. M. Zhang，非自治部分双曲动力系统的 Takens定理， *Sci. China Math.*，68 (2025) 1393–1418。[7] D. Dragiˇcevi´c, W. N. Zhang, W. M. Zhang，具有非一致二分性的非自治差分方程的光滑线性化， *Math. Z.*，292 (2019) 1175–1193。[8] D. Dragiˇcevi´c, W. N. Zhang, W. M. Zhang，具有非一致二分性的非自治微分方程的光滑线性化， *Proc. London Math. Soc.*，121 (2020) 32–50。[9] Q. Du, T. Li, X. Li, W. Ren, Onsager-Machlup泛函极小化子的图极限及其计算， *Sci. China Math.*，64 (2021) 239–280。[10] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*，第3版，Springer，纽约，2005年。[11] M. ElBialy，巴拿赫空间的局部压缩与谱隙条件， *J. Funct. Anal.*，182 (2001) 108–150。[12] C. Fefferman，利用线性算子延拓 $C^{m\omega}$-光滑函数， *Rev. Mat. Iberoamericana*，25 (2009) 1–48。[13] N. Fenichel，常微分方程的几何奇异摄动理论， *J. Differential Equa-tions*，31 (1979) 53–98。[14] T. Gallay，巴拿赫空间中微分方程的中心稳定流形定理， *Comm. Math. Phys.*，152 (1993) 249–268。

[15] F. Gazzola, H. Grunau, G. Sweers，多调和边值问题：有界区域中保正性与非线性高阶椭圆方程，《数学讲义》，第1991卷，Springer，柏林，2010年。[16] D. Grobman，微分方程组的同胚， *Dokl. Akad. Nauk SSSR*，128 (1959) 880–881。[17] M. Guysinsky, B. Hasselblatt, V. Rayskin，Hartman-Grobman线性化的可微性， *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，9 (2003) 979–984。[18] P. Hartman，欧氏空间局部同胚， *Bol. Soc. Mat. Mexicana*，5 (1960) 220–241。[19] P. Hartman，微分方程结构稳定性理论中的一个引理， *Proc. Amer. Math. Soc.*，11 (1960) 610–620。[20] D. Henry， *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*，《数学讲义》，第840卷，Springer，柏林，1981年。[21] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub， *Invariant Manifolds*，《数学讲义》第583卷，Springer，纽约，1977年。[22] W. Li, K. Lu，随机动力系统的 Sternberg定理， *Comm. Pure Appl. Math.*，58 (2005) 941–988。[23] W. Li, K. Lu，随机动力系统的 Takens定理， *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*，21 (2016) 3191–3207。[24] W. Lu, Y. Xia, W. M. Zhang，双曲系统可微线性化的尖锐谱带宽条件， *J. Dynam. Differential Equations*，https://doi.org/10.1007/s10884-025-10439-1[25] J. Moser，一种快速收敛的迭代方法与非线性微分方程 II， *Ann. Sc. Norm.Super. Pisa， Cl. Sci.*，20 (1966) 499–535。[26] Y. Pesin，《部分双曲性与稳定遍历性讲义》。第34卷。欧洲数学会，2004年。[27] G. Piftankin, D. Treschev，动力系统中的粗粒化熵， *Regul. Chaotic Dyn.*，15 (2010) 575–597。[28] H. Poincar´e，关于三体问题与动力学方程， *Acta Math.*，13 (1890年) 1–270。[29] C. Pugh, M. Shub，正规双曲微分同胚与流的线性化， *Invent. Math.*，10 (1970) 187–198。[30] V. Rayskin， α-H¨older线性化， *J. Differential Equations*，147 (1998) 271–284。[31] H. Rodrigues, J. Sol` a-Morales，巴拿赫空间中鞍点的光滑线性化， *J. Dynam. DifferentialEquations*，16 (2004) 767–793。[32] H. Rodrigues, J. Sol`a-Morales，巴拿赫空间中线性化的已知结果与未决问题， *SãoPaulo J. Math. Sci.*，6 (2012) 375–384。[33] C. Siegel，解析函数的迭代， *Ann. Math.*，43 (1942) 607–612。[34] E. Stein，《奇异积分与函数的可微性性质》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。[35] S. Sternberg，局部压缩与 Poincar´e 定理， *Amer. J. Math.*，79 (1957) 809–824。[36] S. Sternberg，欧氏 n-空间局部同胚的结构， *Amer. J. Math.*，80 (1958) 623–631。[37] F. Takens，部分双曲不动点， *Topology*，10 (1971) 133–147。[38] B. Tan， σ-H¨older 连续线性化： $\mathbb{R}^n$中双曲不动点附近， *J. Differential Equations*，162 (2000) 251–269。[39] S. van Strien，无共振条件下双曲不动点的光滑线性化， *J. DifferentialEquations*，85 (1990) 66–90。[40] E. Zehnder，C. L. Siegel定理推广的一个简单证明，《数学讲义》，第597卷，Springer，1977年，第855–866页。[41] W. M. Zhang, W. N. Zhang, W. Jarczyk， C^1,1 双曲微分同胚线性化的尖锐正则性，*Math. Ann.*，358 (2014) 69–113。[42] W. M. Zhang, K. Lu, W. N. Zhang，Hartman-Grobman定理中共轭的可微性，*Trans. Amer. Math. Soc.*，369 (2017) 4995–5030。[43] L. Zhou, K. Lu, W. N. Zhang}无限维差分方程中调和指数二分性的粗糙性， *J. Differential Equations*，254 (2013) 4024–4046。

Weijie Lu, School of Mathematics Science, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China
Email address: luwj@zjnu.edu.cn

Yonghui Xia, School of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China
Email address: xiadoc@163.com

Weinian Zhang, School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China
Email address: matzwn@126.com

Wenmeng Zhang, School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*Email address*: wmzhang@cqnu.edu.cn. Author for correspondence