arXiv:2603.07088v1 [math.CO] 7 Mar 2026

关于直径为 2 的点集的距离乘积最大值

Stijn Cambie * Arne Decadt † Yanni Dong ‡ Tao Hu § Quanyu Tang ¶2026年3月10日

摘要

我们研究 Erdős、Herzog 和 Piranian 提出的问题：对于直径给定且阶为 n 的点集，如何使距离乘积达到最大。我们证明，只需考虑凸多边形，并给出关于直径图结构的结果。我们还给出了一些构造，其结果远优于正 n边形，并勾勒出极值多边形可能具有的形态；同时，我们也展示了一些结果，表明对于偶数阶的情形，一般而言，或许无法刻画极值多边形。

1 引言

1.1 研究动机

设$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 为平面中点的一个构形，并令

$$\Delta(\mathbf{z}) = \prod_{i \neq j} |z_i - z_j| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j|^2.$$

通过多项式判别式来看待这一泛函是一种方便的方式。若

$$p(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

是以$\{z_k\}_{k=1}^n$为零点的首一多项式，则其判别式满足

$$\operatorname{disc}(p) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (z_i - z_j)^2, \qquad \text{hence} \qquad |\operatorname{disc}(p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |z_i - z_j|^2 = \Delta(z_1, \dots, z_n).$$

换言之，在根的几何约束下最大化 Δ，恰好等同于最大化首一多项式的绝对判别式。这个视角可追溯至 Erdős、Herzog 和 Piranian [9]，以及 Pommerenke 随后关于复多项式度量性质的研究 [14]。对于有限点集 $X \subset \mathbb{C}$，我们记 $\operatorname{diam}(X) = \max\{|x - y| \colon x, y \in X\}$。遵循 Erdős 问题 #1045 [5], ，我们采用标准直径约束

$$|z_i - z_j| \leqslant 2 \qquad \text{for all } i, j.$$

*计算机科学系，鲁汶大学 Kulak-Kortrijk 校区，8500 科特赖克，比利时。由项目编号为 1225224N 的 FWO 资助支持。电子邮箱：stijn.cambie@hotmail.com。

†电子与信息系统系，根特大学，9000 根特，比利时。电子邮箱： arne.decadt@gmail.com。

‡中国科学院软件研究所系统软件重点实验室，北京 100190，中华人民共和国。电子邮箱： yannidong@outlook.com。

§数学与统计学院，西安交通大学，西安 710049，中华人民共和国。电子邮箱： hu_tao@stu.xjtu.edu.cn。

¶西安交通大学数学与统计学院，西安710049，中华人民共和国。电子邮箱： tang_quanyu@163.com。

等价地，设 P 表示顶点集为$\{z_1,\ldots,z_n\}$的构形，我们假设 diam(P) $=2$（若不满足，则将其重新缩放至直径为 2 ）。这种重新缩放至关重要：若将所有点乘以因子 $s>0$，则每个距离 $|z_i-z_j|$ 都会按 s 缩放，因此

$$\Delta(sz_1,\ldots,sz_n)=s^{n(n-1)}\Delta(z_1,\ldots,z_n),$$

因此，任何极大化构型都必须使直径约束取等。我们将使用“极大化构型”、“极值多边形”（极大化构型最终会被证明是凸多边形，见命题 7）和“极值构形”这些术语，指在这一标准直径约束下使 Δ 达到最大值的顶点集合。

1.2 归一化与基准构形

对于直径为 2 的多边形 P（否则我们进行缩放），令 $\Delta(P)\overline{}=\Delta_{(P)}\,n^{\underline{n}}$ 表示该多边形 P 的归一化判别式。我们还定义 $\Delta_{\max}(n)=\Delta_{\max(n)}\,n^{\overline{n}}$，其中

$$\Delta_{\max}(n)=\sup\Big\{\Delta(z_1,\ldots,z_n):\ \max_{i,j}|z_i-z_j|\leqslant 2\Big\}^1.$$

以 n^n 为除数是一个自然的基准，因为对于直径为 2 的正偶数 n 边形，它与 Δ 的精确值相符，同时也能刻画奇数情形下的首项渐近结果。具体而言，正如埃尔德什问题中对问题 #1045 [5]，的说明所总结的，当 z_i 是正 n 边形的顶点（缩放至直径为 2）时，有

$$\Delta(\text{regular } n\text{-gon})=n^n \quad \text{if } n \text{ is even},$$

而对于奇数 n，

$$\Delta(\text{regular } n\text{-gon})=\cos(\pi/2n)^{-n(n-1)}\,n^n\sim e^{\pi^2/8}n^n.$$

归一化后，这意味着偶数 n 时，$\overline{}=1$ （正 n 边形）的 Δ，而奇数 n 时，$\sim e^{\pi^2/8}$ （正 n 边形）的 Δ。源自 [9] 的猜想图景预言，至少对于奇数 $\underline{n}$，正多边形应当是极值构形；更一般地，它还表明 $\Delta(P)\leqslant\exp(\pi^2/8)$ 可能普遍成立。另一方面，即便是为一般构形求得阶数正确的紧确界也并非易事：Pommerenke [14] 证明，在直径约束 $|z_i-z_j|\leqslant 2$ 下有 $\Delta\leqslant 2^{O(n)}n^n$，这表明以 n^n 归一化，能够剥离出问题中真正具有几何性质（且微妙）的部分。

1.3 背景与挑战

我们的目标将所有 $\binom{n}{2}$ 个两两距离以乘法方式耦合在一起。与许多经典的等周直径问题和极值多边形问题相比，这造成了一个刚性更强、起伏更大的优化景观：微小的局部扰动可能改善某些距离，却使许多其他距离变差；而目标函数的对数则成为两两相互作用项的稠密求和。这通常会同时带来（i）强组合约束（极值处哪些距离等于直径）以及（ii）高维空间中真正的非凸解析优化（例如，参见关于非凸性和全局优化障碍的标准讨论，见 [12]）。

值得注意的是，即使是优化比 Δ 更简单的泛函的问题，也仍然只得到了部分理解。例如，涉及周长、宽度或面积的离散等周问题和小多边形问题，往往需要大量的几何分类；对于特定的 n，还需要繁重的计算或符号辅助。Audet、Hansen 和 Messine [2] 将几何推理与基于区间算术的全局优化相结合，解决了最大周长凸小八边形问题。Audet 等人 [1] 通过非凸规划和精细的全局分析，研究了以距离和目标函数为目标的小六边形和七边形。Audet、Hansen 和

[1]由平移不变性，我们可以假设 $z_1=0$，从而对所有 j 有 $|z_j|\leqslant 2$ ，且可行集是紧的。由于 Δ 连续，上确界可以达到；此外，任何极大化构型都必须通过缩放满足 diam(P) $=2$ 。

Svrtan [3] 采用符号消元，在八边形面积情形下得到了精确代数刻画，但他们的方法明确依赖轴对称猜想，才能使这一问题变得可处理。Bingane [4] 构造了若干凸小 n边形族，其 $n = 2^s$ 的周长和宽度与（未知的）最优值仅相差高阶误差；在此过程中，他们还推翻了一个关于 $s \geqslant 4$的自然直径图猜想。这些研究凸显了一个共同主题：即使目标函数仅涉及部分距离或低阶泛函，完整的解也很快会因情形而异；一些最精确的结论仍以对称性假设为条件，或只能为无穷多个 n给出近似最优构造。

在我们的设定中，这些困难非但没有减轻，反而更加突出：最大化 Δ 要求同时控制所有两两距离，而极值构型似乎还敏感地取决于直径对的整体组合结构。正因如此，从概念层面来看，以下几点至关重要：(a) 确定任何极值构型都必须满足的结构约束；(b) 开发展示猜想图景丰富且尤其具有可证伪性的渐近构造；(c) 提出同时与组合结构和分析相容的精细猜想。我们的结果正是针对这些目标，并且表明，要完整解决最初的猜想图景确实十分困难，而不仅仅是技术上尚未完善。

1.4 主要贡献

我们的第一项贡献是一个限制极值构型直径图的结构定理。这里，直径图是定义在顶点集上的图，其中边对应于距离等于直径的点对。多边形的直径图有着丰富的研究历史；例如，Foster 和 Szabó [10] 通过将几何极值性转化为关于直径图的强组合约束，证明了 Graham 的一个猜想。在本文中，我们证明 Δ的极值构型必然具有受约束的直径图形状。

定理 1. 设 $P = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$满足 直径$(P) \leqslant 2$，并达到 $\Delta(P) = \Delta_{\max}(n)$。那么，顶点集为 P 的直径图要么是单圈图，要么是毛毛虫图。

其次，我们给出小规模 n 的明确极值构造和猜想的极值构造，并提取有关 $\Delta(P)$ 取值以及最优时可能出现的组合类型的数值证据。在第 3 节中，我们展示一些针对 $3 \leqslant n \leqslant 12$的极值多边形和猜想的极值多边形，并列出小（偶数）阶 n下 $\Delta(P)$ 的预期取值。

第三，受 Erdős 问题论坛中关于 #1045 [5], 的讨论启发，我们探讨一个渐近子问题，它刻画了偶数阶的一个自然无限子序列上的行为。虽然精确的偶数阶 n 极值构型似乎过于复杂，难以统一刻画，但仍可得到稳健的渐近下界，从而排除过于简单的猜想图景。

鉴于这些构造的复杂性，我们确信，要用现有技术确定一般情况下偶数 n 对应的极值多边形，似乎遥不可及。不过，以下定理回答了 Thomas Bloom 提出的一项子问题[2], ，并可能为偶数 n 上Δ 的上极限提供一个良好近似。

定理 2. 对于每个可被 6 整除的 n，都存在一个集合 $P = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$，满足 直径$(P) \leqslant 2$，使得当 $n \to \infty$ 沿着 6 的倍数趋于无穷时，

$$\overline{\Delta}(P) \to C_* = \frac{3^{9/4}}{2^3} \exp\left(\frac{\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi}{8}\right) \approx 1.304457.$$

我们还有 下极限$\varliminf_{n\to\infty} \overline{\Delta_{\max}}(n) \geqslant C_*^{1/9} > 1$。

Sothanaphan [15] 同时（受到我们研究进展的启发）首次给出了偶数 n 上 $\liminf_{n\to\infty} \Delta_{\max}(n)$ 的显式常数因子改进。在第 5 节中，我们进一步完善并扩展了 [15] 的方法，从而得到以下统一下界。

[2]这个子问题由 Thomas Bloom 在 Erdős 问题论坛帖子 https://www.erdosproblems.com/forum/thread/1045 13 57 03 2025 的评论中提出（: 于 Oct ;forumtimestamp）。

定理 3. 对于偶整数 $n \to \infty$，有

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ even}}} \overline{\Delta}_{\max}(n) \geqslant \exp\left(\frac{7}{24}\zeta(3) - \frac{\pi^4}{864}\right) \approx 1.26853.$$

我们预计这个下极限的真实值会更大，但要确定它似乎很困难，这可能是因为有限 n 情形下极值构型的复杂性。

最后，我们提出对极值构型的一种更精细的猜想性描述，它与上述结构约束以及观测到的小 n 情形的行为相容。解读我们结果时，一个重要的元层面观点是，围绕 Δ 的原始猜想图景是可证伪的：即使尚未解决主要猜想，只要证明结构约束，并给出显著优于正则偶数 n 边形的构造，就足以排除大类天真的猜想，并有助于明确最终解决方案必须具备的形式。这与前文讨论的相关等直径多边形问题中的经验相呼应：研究进展往往来自结构图限制、对称性启发以及经过谨慎验证的极值构造的结合，而非适用于所有 n 的单一闭式刻画。

1.5 论文结构与开放猜想

我们现在概述本文的结构，并陈述研究结果所启发的主要猜想性质。第 2 节证明定理 1，并探讨极值构形的一般约束。第 3 节给出针对 $3 \leqslant n \leqslant 12$ 的显式构造和数值证据。第 4 节沿子序列 $6 \mid n$ 给出显式渐近构造，从而证明定理 2。第 5 节则提出一种独立方法，在所有偶数阶上得到改进的统一渐近下界，从而证明定理 3。

最后，我们记录一个关于极大化构型的猜想性描述，这是根据我们的结果以及对较小 n 值的计算提出的。

猜想 4. 固定 $n \geqslant 3$。令 $P = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ 为一个 n 边形，其直径$(P) \leqslant 2$ 达到 $\Delta(P) = \Delta_{\max}(n)$。则：

(i) 若 n 为奇数，则 P 是正 n 边形。

(ii) 若 n 为偶数，则 P 具有对称轴。此外，若 $6 \mid n$，则 P 在旋转 $2\pi/3$ 后保持不变（因此具有与此 120° 旋转对称性相容的二面体对称性）。

(iii) 若 n 为偶数，则 P 的直径图由一个圈 C_{n-3} 加上三条连接到圈上顶点的悬挂边构成。

尤其是，猜想 4(i)，或者证明 $\Delta(P) \leqslant \exp(\pi^2/8)$，是目前主要的未解难题。

1.6 渐近记号

设 f，g：$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 对于所有充分大的 n，都有 $g(n) > 0$。若存在常数 $C > 0$ 和 n_0，使得对于所有 $n \geqslant n_0$，都有 $|f(n)| \leqslant Cg(n)$，则我们记 $f(n) = O(g(n))$ 为 $n \to \infty$；若 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$，则记 $f(n) = o(g(n))$；若 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$，则记 $f(n) \sim g(n)$。

1.7 人工智能使用声明

我们在头脑风暴过程中（仅限于此）使用了人工智能助手（ChatGPT，模型：GPT-5.2 Pro）来讨论第 5 节。

2 极值构型的结构

本节讨论任何极值构形都必须满足的若干结构性质。我们首先考察与之相关的直径图。Hopf 和 Pannwitz [11] 的经典定理给出了该图中边数的一个先验上界；另见 Pach 的阐述 [13, 定理 2]。

引理5 ([11])**.** 对于每个 $n \geqslant 3$， $\mathbb{R}^2$ 中的任意 n 个点至多确定 n 对最大距离点对。

接下来，我们来看一些能够推出直径图边数下界的结果。

引理6。 在任意极大化构型中，对于每个 k，都存在 $j \neq k$ 使得 $|z_k - z_j| = 2$。

证明。 由于直径为 2 的正 n 边形具有 $\Delta > 0$，任意极大化构型（$z_1, \dots, z_n$）都必须满足$\Delta(P) > 0$，因此所有点互不相同。固定除 z_k之外的所有点。 z_k 的可行集是闭圆盘 $\bigcap_{j \neq k} D(z_j, 2)$ 的交集，是一个紧凸集。若对所有 $j \neq k$ 都有 $|z_k - z_j| < 2$，则 z_k 是该集合的内点。函数 $z \mapsto \sum_{j \neq k} \log |z - z_j|$ 在$\{z_j\}_{j \neq k}$之外调和，因此不可能在内点取得局部最大值。这就产生了矛盾。 □

这使我们能够证明，极值构形必定是具有 n 个顶点的凸多边形。这大大简化了优化过程。

命题 7. 设 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ 是一个极大化构型，并令 $K = \text{凸包}\{z_1, \dots, z_n\}$。那么每个 z_i 都是 K的一个极点。

证明. 由引理6可知，对每个 i，都存在 $j \neq i$ 使得 $|z_i - z_j| = 2$。
我们先证明 $\operatorname{diam}(K) = 2$。由于对所有 r, s，都有 $|z_r - z_s| \leqslant 2$，只需证明该不等式对所有 $x, y \in K$也成立。设 $x = \sum_r \alpha_r z_r$和 $y = \sum_s \beta_s z_s$满足 $\alpha_r, \beta_s \geqslant 0$且 $\sum_r \alpha_r = \sum_s \beta_s = 1$。那么 $x - y = \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s (z_r - z_s)$，因此根据三角不等式，

$$|x - y| \leqslant \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s \, |z_r - z_s| \leqslant 2 \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s = 2.$$

因此 $\operatorname{diam}(K) \leqslant 2$。另一方面，对每个 i，我们可以选取满足 $|z_i - z_j| = 2$ 的 j，故 $\operatorname{diam}(K) \geqslant 2$。因此 $\operatorname{diam}(K) = 2$，并且每一对这样的 (z_i, z_j) 都是 K 的直径点对。
众所周知，在紧凸集 $K \subset \mathbb{R}^2$ 中，每个直径点对都由暴露点（因而也是极点）组成；见 [6, 命题 1.1(a)]。因此 z_i 和 z_j 是 K 的极点。
将此应用于每个直径点对 (z_i, z_j)，可知每个 z_i 都是 K 的极点。 □

下面两个引理将使我们能够利用交叉图理论，显著减少可能的直径图。这里，（线性）交叉图是画在平面上的图，其边用直线表示，并且每对边恰好相交一次。

Lemma 8. 设 G 为极值构形的直径图。则 G 是连通的 .

证明。 反设 G 是不连通的。那么存在一个划分$\{1, \dots, n\} = I_1 \sqcup I_2$，其中 $I_1, I_2 \neq \varnothing$，使得对所有 $i \in I_1$、 $j \in I_2$ 都有 $|z_i - z_j| < 2$ （否则一条长度为 2 的边就会连接这两个部分）。令

$$S_1 = \{z_i : \ i \in I_1\}, \qquad S_2 = \{z_j : \ j \in I_2\}.$$

固定 $s_1 \in S_1$。对于 $x \in \mathbb{C}$，考虑平移集

$$S_1(x) = S_1 - s_1 + x = \{a - s_1 + x : \ a \in S_1\},$$

以及组合构形 $\mathcal{Z}(x) = S_2 \cup S_1(x)$。 S_1 内部和 S_2 内部的距离保持不变；只有跨集距离随 x变化。

定义

$$\Omega = \bigcap_{a\in S_1,\ b\in S_2} \overline{D(b+s_1-a,2)}.$$

则$\mathcal{Z}(x)$对所有交叉点对$(u,v)\in S_1(x)\times S_2$满足 $|u-v|\leqslant 2$，当且仅当 $x\in\Omega$。特别地$s_1\in\Omega$，因此Ω非空、紧且凸。

Let

$$\Phi(x) = \sum_{a\in S_1,\ b\in S_2} \log|x-(b+s_1-a)|.$$

Up 相差一个与 x 无关的加性常数（来自组内距离），我们有 e

$$\log\Delta(\mathcal{Z}(x)) = 2\,\Phi(x) + \text{const}.$$

由于原始构形是 Δ 在 $|z_i - z_j|\leqslant 2$下的全局最大值点，点 $x = s_1$在Ω上极大化 Φ 。

设 $C = \{\, b+s_1-a :\ a\in S_1,\ b\in S_2\,\}$。由于极值构形中的点两两不同，对 $a\in S_1$, $b\in S_2$有 $a\neq b$，从而 $s_1\notin C$。此外，由于对所有 $a\in S_1$,$b\in S_2$有 $|a-b|<2$，我们有

$$|s_1-(b+s_1-a)| = |a-b| < 2,$$

因此 s_1 位于每个开圆盘 $D(b+s_1-a,2)$ 中，从而 $s_1\in\in\text{Int}(\Omega)$。

因此， s_1 是开集 $U = \text{Int}(\Omega)\setminus C$ 的内点，且 Φ 在 U上调和。令 U_0为包含 s_1的 U 的连通分支。于是 Φ 在 U_0 上于内点 s_1处取得其最大值。根据强极大值原理， Φ 必须在 U_0上为常数。另一方面，写成

$$P(z) = \prod_{a\in S_1,\ b\in S_2} (z-(b+s_1-a)),$$

我们有 $\Phi(z) = \log|P(z)|$ 在 U_0上成立，并且 P 是非常数多项式。因此， P 在 U_0上全纯且非常数，于是根据开映射定理，其像是开集，这意味着 $|P|$ （从而 Φ）不可能在 U_0上为常数。这一矛盾表明， G必须是连通的。

□

作为三角不等式的推论，可以得到以下初等引理。

引理 9 （引理 2(a) 的改写，见 [8]）。 在任意极大化构型的直径图中，所有直径都相交。

如前所述，这使我们能够利用关于交叉图的结果，将可能的直径图缩减为毛毛虫图及类似的单圈图，具体内容如下述定理 1 的更精确版本所示。

定理 10。 极大化构型的直径图是毛毛虫图，或者由一个含奇数个顶点的圈以及一些附加顶点组成，其中所有附加顶点都通过边与该奇圈的顶点相连（因此，图中的每条边都至少与一个奇圈顶点关联）。

证明。 考虑 G 的直线绘图，其顶点为 z_1、.....、 z_n，边为连接直径对的线段。根据引理 9，任意两条边都相交。此外，由于每个 z_i 都是凸包 conv$\{z_1$、.....、 $z_n\}$ 的顶点，根据命题 7，不会有一条边的内部包含第三个顶点，且两条边不能重叠；因此任意两条边恰好相交一次。所以， G构成一个直线穿刺图。

根据 [16, 定理 2]， G 要么是不相交的毛毛虫图的并，要么由一个奇圈以及可能附加的顶点组成，每个附加顶点均与该奇圈的一个顶点相邻。最后，引理 8 表明 G 是连通的，因此在第一种情形下 G是毛毛虫图。

□

引理 11 （引理 3 的改写，见 [8]）。极大化构型的直径图不包含偶圈。

最后，非线性规划理论还为我们提供了一组任何极值构形都应满足的方程。我们可以将优化问题改述如下。

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n}{\text{maximize}} \quad & f(\mathbf{z}) = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \log\left(|z_k - z_j|^2\right), \\ \text{subject to} \quad & g_{j,k}(\mathbf{z}) = |z_k - z_j|^2 - 4 \leqslant 0, \quad \forall\, 1 \leqslant j < k \leqslant n. \end{aligned} \tag{NLP}$$

对于方程 $\mathbf{z}$ （NLP）的任意可行解，我们定义活跃集

$$\mathcal{A}(\mathbf{z}) = \{\{a,b\} \subseteq \{1,\dots,n\} :\ 1 \leqslant a < b \leqslant n,\ g_{a,b}(\mathbf{z}) = 0\}.$$

定理 12。 对于方程 $\mathbf{z} = (z_1、\ .....、\ z_n)$ （NLP）的任意局部极大点，存在拉格朗日乘子$\lambda_{j,\ k} \geqslant 0$ 使得对于所有 $1 \leqslant j < k \leqslant n$

$$\lambda_{j,k}\, g_{j,k}(\mathbf{z}) = 0 \qquad (1 \leqslant j < k \leqslant n),$$

并且对于每个 $k \in \{1、\ .....、\ n\}$，

$$\sum_{j\neq k} \frac{1}{z_j - z_k} = \sum_{j<k} \lambda_{j,k}\,(\overline{z_j} - \overline{z_k}) + \sum_{j>k} \lambda_{k,j}\,(\overline{z_j} - \overline{z_k}). \tag{1}$$

证明。 通过写成 $z_k = x_k + iy_k$，将 $\mathbb{C}^n$ 与 $\mathbb{R}^{2n}$ 对应起来。在最优解处，各点两两不同（否则 $f = -\infty$），因此在最优点的某个邻域内， f 是 C^1 。
我们希望使用 [12, 定理 12.1、定义 12.6以及], MFCQ约束资格条件。现在将方程（NLP）重新表述为在 $(x_1, y_1、\ .....、\ x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$上的非线性最小化问题：

$$\begin{aligned} \underset{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{2n}}{\text{minimize}} \quad & -f(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) = -\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \log\left((x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2\right), \\ \text{subject to} \quad & -g_{j,k}(x_1,\dots,y_n) = 4 - (x_k - x_j)^2 - (y_k - y_j)^2 \geqslant 0, \quad \forall\, 1 \leqslant j < k \leqslant n. \end{aligned}$$

f 的偏导数对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$均为：

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j\neq k} \frac{2(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_{j\neq k} \frac{2(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}.$$

对于约束$g_{j,\ k}$，其中 $1 \leqslant j < k \leqslant n$，其偏导数为

$$\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_m} = \begin{cases} 2(x_k - x_j), & m = k, \\ 2(x_j - x_k), & m = j, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \frac{\partial g_{j,k}}{\partial y_m} = \begin{cases} 2(y_k - y_j), & m = k, \\ 2(y_j - y_k), & m = j, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

对于 MFCQ，我们需要找到一个方向 w，使得对所有$\{j,\ k\} \in \mathcal{A}(\mathbf{z})$，均有 $\nabla(-g_{j,\ k}) \cdot w > 0$。定义$w = (-x_1, -y_1, \dots, -x_n, -y_n)$，并考虑任意$\{j,\ k\} \in \mathcal{A}(\mathbf{z})$。那么

$$\nabla(-g_{j,k}) \cdot w = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 = 4 > 0.$$

因此，根据 [12, 定理 12.1、定义 12.6 以及约在], 处，存在乘子 $\lambda_{j,\ k} \geqslant 0$ 使得对所有$1 \leqslant j < k \leqslant n$ 均有

$$\lambda_{j,k}\,(-g_{j,k})(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) = 0 \qquad (1 \leqslant j < k \leqslant n),$$

and

$$-\nabla f(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \lambda_{j,k}\,\nabla g_{j,k}(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) = 0.$$

等价地,

$$\nabla f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \lambda_{j,k} \nabla g_{j,k}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n).$$

现在固定 k。取 x_k分量减去 i倍的 y_k分量，得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_{j<k} \lambda_{j,k} \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_k} - i\frac{\partial g_{j,k}}{\partial y_k} \right) + \sum_{j>k} \lambda_{k,j} \left(\frac{\partial g_{k,j}}{\partial x_k} - i\frac{\partial g_{k,j}}{\partial y_k} \right).$$

代入导数可得

$$\sum_{j \neq k} \frac{2(\overline{z_k - z_j})}{|z_k - z_j|^2} = \sum_{j<k} \lambda_{j,k} \cdot 2(\overline{z_k} - \overline{z_j}) + \sum_{j>k} \lambda_{k,j} \cdot 2(\overline{z_k} - \overline{z_j}).$$

利用 $\overline{z_k - z_j}/|z_k - z_j|^2 = 1/(z_k - z_j)$ 并重新整理,

$$\sum_{j \neq k} \frac{1}{z_j - z_k} = \sum_{j<k} \lambda_{j,k} (\overline{z_j} - \overline{z_k}) + \sum_{j>k} \lambda_{k,j} (\overline{z_j} - \overline{z_k}),$$

如所述。 □

由于定理 12 要求 $\lambda_{j,k} g_{j,k}(\mathbf{z}) = 0$ 对所有 j 和 k都成立，我们知道，可能非零的拉格朗日乘子 $\lambda_{j,k}$ 仅限于满足 $\{j, k\} \in \mathcal{A}(\mathbf{z})$ 的那些乘子。
这些约束充分简化了问题，因此对于较小的 n值，我们可以明确确定极值构型；下一节将对此进行说明。

3 小型极值构造 n

3.1 至多 4 个点

对于较小的整数 $n \leqslant 3$，构造简单而直接。为求完整起见，我们将它们列于此处。约定空积等于一。

命题 13. $\Delta_{\max}(0) = 1$, $\Delta_{\max}(1) = 1$, $\Delta_{\max}(2) = 1$, 以及 $\Delta_{\max}(3) = \frac{64}{27}$。

证明。对于 $n = 0$ 和 $n = 1$, Δ 是空积，按约定取值为 1；因此依约定有 $\Delta_{\max}(0) = \Delta_{\max}(1) = 1$。

对于 $n = 2$，有 $\Delta = |z_1 - z_2||z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|^2 \leqslant 2^2$，等号在 $|z_1 - z_2| = 2$ 时成立。因此$\Delta_{\max}(2) = 2^2/2^2 = 1$。

对于 $n = 3$，每个因子 $|z_i - z_j| \leqslant 2$，因此 $\Delta = \prod_{i \neq j} |z_i - z_j| \leqslant 2^6$。边长为 2 的等边三角形可取到等号，因此 $\Delta_{\max}(3) = 2^6/3^3 = 64/27$。 □

第一个有趣的情形是 $n = 4$，此时圆上直径为 2 的正方形（例如 $z_1 = 1$、$z_2 = i$、$z_3 = -1$、$z_4 = -i$）并非最优。对于这个正方形，我们有 $\Delta(z_1, z_2, z_3, z_4) = (2^2(\sqrt{2}^4)^2)^{\frac{1}{4^4}} = 1$。事实上，最优值由一种风筝形构型取得（见图 1），其中 $\Delta_{\max}(4) = 16(7 - 4\sqrt{3}) \approx 1.1487\ldots$。这个正方形不可能是极值构型，因为它的直径图仅由两条对角线组成，因此是不连通的，这与引理 8 矛盾。

我们以两种方式证明下述命题：一种是基于图像的简短证明，另一种是使用定理 12 的严格证明。

命题 14. $\Delta_{\max}(4) = 16(7 - 4\sqrt{3})$。此外，任意极大化构型都与顶点集为 $\{0, 2, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i\}$ 的风筝形全等（相差平移、旋转以及对点的重新标记）。

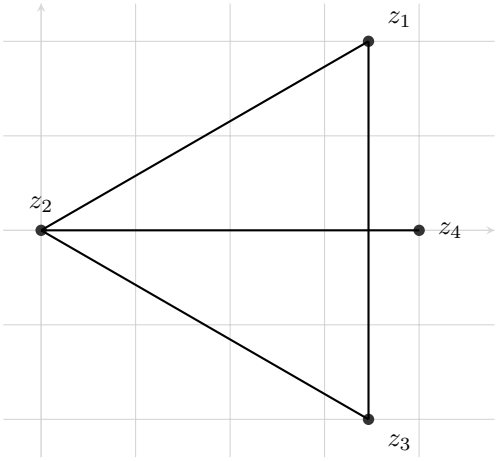


图1： $n = 4$的构造。

我们首先给出一个简短的非正式证明，以说明几何直观并确定候选极大化构型。完整证明将在附录A中给出。

非正式证明。 由于直径图是连通的且没有孤立顶点，它包含一棵生成树，该生成树要么是 P_4 ，要么是$K_{1,\ 3}$。对于前一种情况，不失一般性，我们可以令 $z_1 = 0$、$z_2 = 2$、 $z_3 = (2 - x) + i\sqrt{4x - x^2}$, 并令 $z_4 = y + i\sqrt{4y - y^2}$ 表示尚待确定的参数 $0 < x,\ y \leqslant 1$。因此,

$$\Delta(z_1, ..., z_4) = (2^3)^2 \cdot 4x \cdot 4y \cdot \left((2 - x - y)^2 + (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{4y - y^2})^2\right)$$

当最大值为 $\max\{x,\ y\} = 1$时取得最大值，见 [7, Computation_P4_n4]，这意味着直径图包含一个 K_3. 。在$K_{1,\ 3}$ 的情况下，很容易看出，距离最远的两个叶顶点之间的距离必须为2。因此，在这两种情况下，直径图都必须是单圈图，即一个 K_3 加一条悬挂边。通过三角学论证可知，这条悬挂边是该三角形的一条对角线。

□

3.2 $n \in \{5,6\}$

$n = 5$ 情形可以视为等周不等式的一个推论。

命题15. $\Delta_{\max}(5) = (\frac{4}{5})^5(\sqrt{5} - 1)^{10}$, 后者（仅）由正五边形达到。

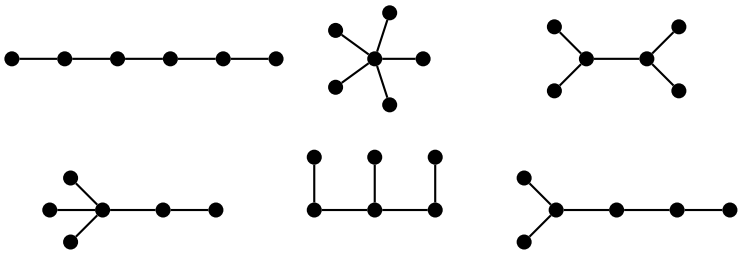
证明。 设$\{z_1,\ .....,\ z_5\}$为一个极大化构型。由引理6可知，$\max_{i \neq j}|z_i - z_j| = 2$。由命题7可知，该极大化构型处于凸位置。将顶点按循环顺序标记为 $z_0,\ .....,\ z_4$。则

$$\Delta(z_0, \ldots, z_4) = \Big(\prod_{k=0}^{4}|z_{k+1} - z_k| \cdot \prod_{k=0}^{4}|z_{k+2} - z_k|\Big)^2.$$

由于所有两两距离均为 $\leqslant 2$，我们有 $|z_{k+2} - z_k| \leqslant 2$ 对所有 k，因此 $\prod_{k=0}^{4}|z_{k+2} - z_k| \leqslant 2^5$。接下来，我们对边长的乘积进行界定。Datta [8] 证明，任意直径为 1 的凸n边形的周长满足 $\text{per} \leqslant 2n\sin(\pi/2n)$；缩放至直径 2 后，得到

$$\sum_{k=0}^{4}|z_{k+1} - z_k| \leqslant 4 \cdot 5\sin\Big(\frac{\pi}{10}\Big) = 20\sin\Big(\frac{\pi}{10}\Big).$$

毛毛虫图



单圈（奇圈）

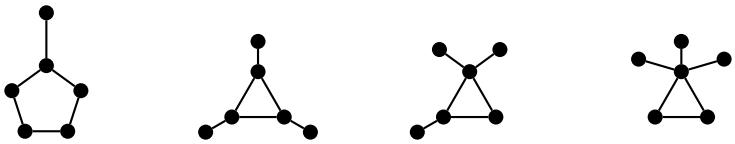


图 2：定理 10 所允许的 $n = 6$ 的所有直径图。

根据算术-几何平均不等式，

$$\prod_{k=0}^{4}|z_{k+1}-z_k| \leqslant \left(\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}|z_{k+1}-z_k|\right)^5 \leqslant (4\sin(\pi/10))^5.$$

利用 $\sin(\pi/10) = (\sqrt{5}-1)/4$，我们得到 $\prod|z_{k+1}-z_k| \leqslant (\sqrt{5}-1)^5$。结合这两个界可得

$$\Delta \leqslant (2^5(\sqrt{5}-1)^5)^2 = 2^{10}(\sqrt{5}-1)^{10},$$

因此

$$\overline{\Delta} = \frac{\Delta}{5^5} \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^5 (\sqrt{5}-1)^{10}.$$

等号成立时，对于所有 k，必须有 $|z_{k+2}-z_k| = 2$，且 $|z_{k+1}-z_k|$ 在 k 中为常数（由均值—几何平均不等式的严格性可知）。将这个公共边长记为 $s = 4\sin(\pi/10) = \sqrt{5}-1$。于是每个三角形（$z_k$，$z_{k+1}$，$z_{k+2}$）的边长均为（$s$，$s$，2），故这些三角形全等。特别地，$z_{k+1}$ 处的内角（等价地，转角）对所有 k 都相同。由于转角之和为 2π，每个转角均为 $2\pi/5$，因此该五边形是等角的。它同时也是等边的，故为正五边形，并且是唯一的等号情形。 □

对于更高的 n，我们通过枚举允许的直径图类型，并在每种类型中搜索局部极大点，对 $\Delta_{\max}(n)$ 进行了数值估算。具体做法是列出所有允许的毛毛虫图和单圈图，并分别计算每种图的局部极大值。我们通过梯度下降算法以及求解定理 12 中的方程来寻找这些局部极大值。对于 n 的各种取值，我们研究了可能的直径图，但无法排除还存在其他局部极大值的可能性。对于 $n = 6$ 的情形，列表见图 2。这里我们发现

$$\overline{\Delta}_{\max}(6) = \left(\frac{2^4(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{3}\right)^6 = \frac{(2\sqrt{3}-2)^{18}}{3^6}$$

与 $n = 4$ 情形中的相同点集取得该值，即 $z_1 = \sqrt{3}+i$、$z_2 = 0$、$z_3 = \sqrt{3}-i$ 和 $z_4 = 2$，此外还有 $z_5 = (\sqrt{3}-1)(1+i)$ 和 $z_6 = (\sqrt{3}-1)(1-i)$。当 $n \leqslant 11$ 为奇数时，正则 n 边形是极值构型。对于偶数值 $n \leqslant 12$，我们将在以下小节中给出构造。

3.3 极值八边形与十边形（$n \in \{8,10\}$）

8 阶毛毛虫图共有 20 个。对于每个用作直径图的毛毛虫图，计算机程序都可以搜索 Δ 的（近似）局部极大点。通过这种方式，我们发现，即使底层毛毛虫图固定，也可能出现多个局部极大值。只有三个毛毛虫图取得了超过 $_{5\,4}$ 的 Δ。这三个毛毛虫图恰好都可以通过从一个单圈图中删去一条边得到，因为在每种情形下，当八个距离都达到直径约束时，最大值便可取得。对其中一个毛毛虫图进行精确分析，得到了一种可据此推断对称性的构形。最后，在相同的对称性假设下，我们以高精度计算出了猜想最优值。

使用 Julia 中借助 JuMP 的非线性优化库 IPopt 得到了相同的结果。这一替代方法仅限于 Float64 精度（约 15–17 位有效十进制数字），因此进一步细化需要其他方法或优化器。

两种方法都指向唯一的全局最优构造（不计平移与旋转）。对于 $n = 10$，共有 72 个毛毛虫图，可采用类似的方法。同样，由此得到一个被猜想为全局最优的唯一构造。

我们所找到的最优构型如图 3 所示。左侧呈现的是猜想最优的八边形，右侧则展示了猜想最优的十边形。特别地，我们注意到这些 n 边形的边长并非全部相等；它们比人们原本所期望的更加不规则。

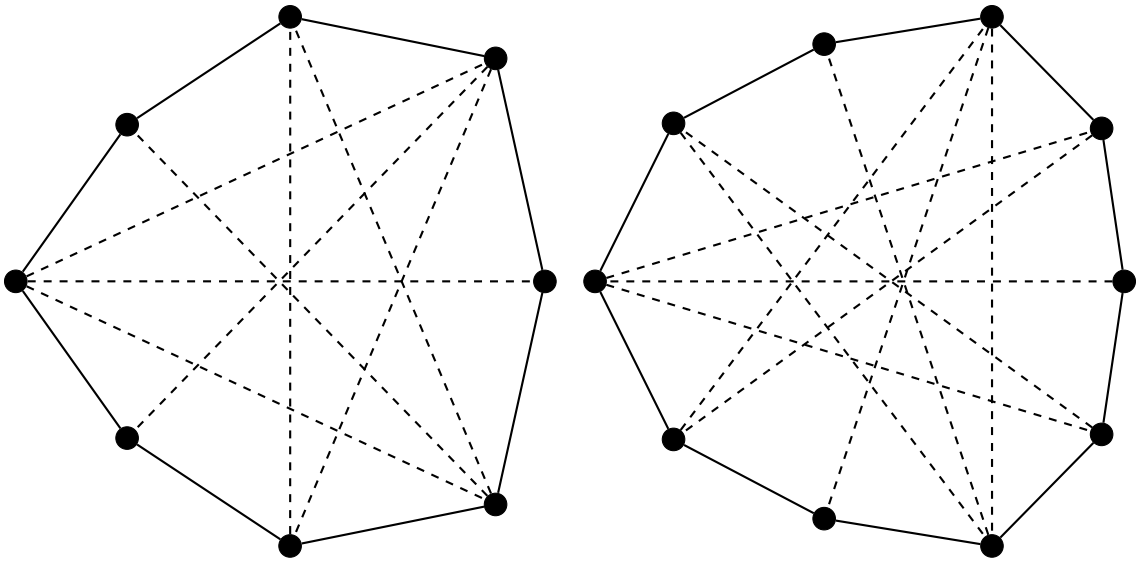


图 3： $n = 8$ 与 $n = 10$ 的极值构造示意图

3.4 极值十二边形

根据数值优化的结果，似乎对于 $n = 6m$，最优构形具有 D_3 二面体对称性（阶数为 6）。此外，直径图似乎由一个圈 C_{n-3} 以及每条反射轴上的一条悬挂边构成。在这些假设下，最大化 Δ 变得更容易处理。由于 Δ 在旋转和平移下保持不变，我们可以假设一条悬挂边位于实轴上，且旋转中心位于原点。

每条悬挂边由两个点组成，因此三条悬挂边上总共有六个点。为方便起见，我们将两个点 z_0 和 $z_1 = z_0 + 2$ 放在实轴上。群作用由此生成其余四个点： $e^{2\pi i/3} z_0$、 $e^{2\pi i/3} z_1$、 $e^{4\pi i/3} z_0$ 和 $e^{4\pi i/3} z_1$。

其余每个 $6m-6$ 点在 D_3 作用下都属于一个大小为 6 的轨道。因此，只需选取 $m-1$ 个额外的点，记作 z_2、.....、 z_m，并要求

$$|z_{k+1}-z_k|=2 \qquad \text{for all } k<m.$$

应用群作用后，这些要求已经在直径图中产生了三个连通分量。

为了连接这些连通分量，我们施加一个额外的约束，将 z_m 与群作用下 z_m 的一个像相连。由于二面体群通过等距变换作用，这会连接所有连通分量。有两种自然的选择；这里我们规定

$$|e^{-2\pi i/3}z_m - e^{2\pi i/3}\overline{z_m}| = 2,$$

或者等价地,

$$|z_m - e^{4\pi i/3}\overline{z_m}| = 2.$$

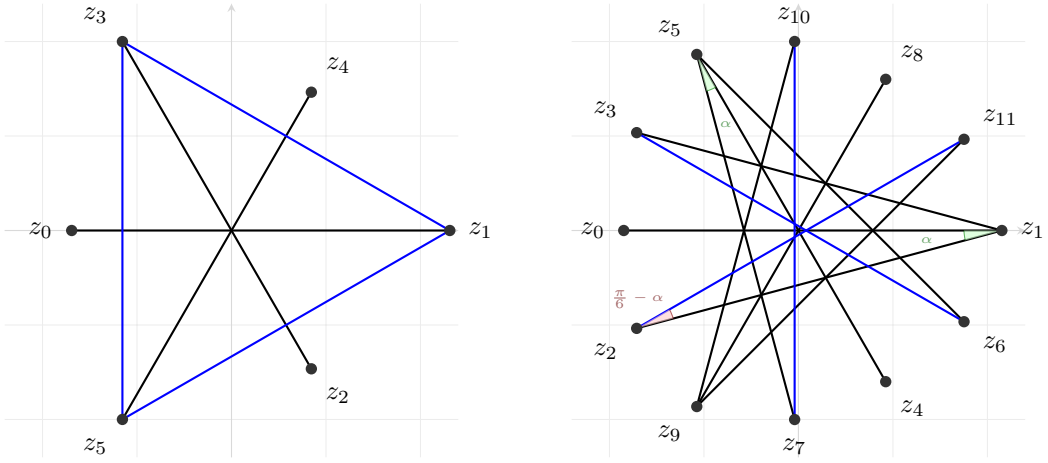
这些边在图4中以蓝色绘出。由于 $e^{-2\pi i/3}z_m$ 和 $e^{2\pi i/3}z_m$ 互为复共轭，这些边垂直于一条反射轴（因而也垂直于相应的悬挂边）。在图4中，我们展示了针对 $n=6$ 和 $n=12$ 得到的构造，稍后将对其进行更详细的考察。

定义 $A_m=\{z_k\colon\ k\in\{0,\dots,m\}\}\ \cup\{z_k\colon\ k\in\{2,\dots,m\}\}$， $\omega=e^{2\pi i/3}$ 以及 $\widetilde{P}=\{\omega^t z\colon\ z\in_{\sim}A_m,\ t\in\{0,1,2\}\}$。我们假设这些顶点彼此不同，因此 $|A_m|=2m$ 和 $|P|=6m$，且每个$_{\sim}u\in P$ 都有唯一表示式 $u=\omega^t z$，其中 $z\in A_m$。回忆一下，两点 z_0 和 z_1 位于$^{\sim}$实轴上。对于 $\Delta(P)$，这意味着

$$\begin{aligned}
\Delta(\widetilde{P}) &= \prod_{\substack{u,v\in\widetilde{P}\\ u\neq v}} |u-v| \\
&= \left(\prod_{z\in A_m}\prod_{\substack{a,b\in\{1,\omega,\omega^2\}\\ a\neq b}}|az-bz|\right)\left(\prod_{z\in A_m}\prod_{\substack{y\in A_m\\ y\neq z}}\prod_{a\in\{1,\omega,\omega^2\}}\prod_{b\in\{1,\omega,\omega^2\}}|az-by|\right) \\
&= \left(\prod_{z\in A_m}27\,|z|^6\right)\prod_{z\in A_m}\prod_{\substack{y\in A_m\\ y\neq z}}|z^3-y^3|^3 \\
&= \left(|z_0|^6|z_1|^6\prod_{k=2}^{m}|z_k|^{12}\right)3^{6m}|z_0^3-z_1^3|^6\left(\prod_{k=2}^{m}|z_0^3-z_k^3|^{12}|z_1^3-z_k^3|^{12}\right) \\
&\quad \prod_{k=2}^{m}|z_k^3-\overline{z_k}^3|^6\prod_{\substack{j\in\{2,\dots,m\}\\ j\neq k}}|z_k^3-z_j^3|^6|z_k^3-\overline{z_j}^3|^6 \\
&= \left(3^m|z_0||z_1||z_0^3-z_1^3|\prod_{k=2}^{m}|z_k|^2|z_0^3-z_k^3|^2|z_1^3-z_k^3|^2|z_k^3-\overline{z_k}^3|\prod_{j=2}^{k-1}|z_k^3-z_j^3|^2|z_k^3-\overline{z_j}^3|^2\right)^6.
\end{aligned} \tag{2}$$

对于 $n=6$ 和 $m=1$，无需进行优化，因为这些假设只导致一种构造。仅有 z_0 和 z_1，且条件 $|z_1-z_1e^{\frac{4\pi}{3}i}|=2$ 意味着，由于 z_1 为正实数，故 $z_1=\frac{2}{|1-e^{\frac{4\pi}{3}i}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。在图4的(a)中，$z_0=z_1-2$、 $z_2=z_0e^{\frac{2\pi}{3}i}$、$z_3=z_1e^{\frac{2\pi}{3}i}$、$z_4=z_0e^{\frac{4\pi}{3}i}$和 $z_5=z_1e^{\frac{4\pi}{3}i}$。

对于 $n=12$ 和 $m=2$，我们需要确定 z_0、 z_1 和 z_2。我们知道 z_0 和 z_1是实数。此外，已知 $z_0=z_1-2$，并且由于 $|z_1-z_2|=2$，我们可以写出 $z_2=z_1-2e^{i\alpha}$。



(a) $n = 6$ **(b)** $n = 12$

图4：假设具有二面体对称性且对称轴上有3条悬挂边时， $n = 6$ 和 $n = 12$ 的构造。

~ ~由于 $\omega z_1, \omega z_2 \in P$且 $\mathrm{diam}(P) \leqslant 2$，我们有

$$|z_1 - \omega z_1| = \sqrt{3}\, z_1 \leqslant 2, \qquad |z_2 - \omega z_2| = \sqrt{3}\, |z_2| \leqslant 2,$$

因此 $0 < z_1 \leqslant 2/\sqrt{3}$和 $|z_2| \leqslant 2/\sqrt{3}$。令 $z_2 = z_1 - 2e^{i\alpha}$，可得

$$|z_2|^2 = z_1^2 - 4z_1 \cos\alpha + 4 \leqslant \frac{4}{3},$$

so

$$\cos\alpha \geqslant \frac{z_1^2 + \frac{8}{3}}{4z_1} = \frac{z_1}{4} + \frac{2}{3z_1} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

其中最后一个不等式利用了 $0 < z_1 \leqslant 2/\sqrt{3}$。因此 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/6$，且由于顶点互不相同， $\alpha \neq 0$ 。

由 $|z_2 - e^{\frac{4\pi}{3} i} z_2| = 2$可得

$$\begin{aligned} 2 &= \left| z_1 - 2e^{i\alpha} - z_1 e^{\frac{4\pi}{3} i} + 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \alpha\right)} \right| = \left| z_1 e^{\frac{\pi}{3} i} - 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} - z_1 e^{-\frac{\pi}{3} i} + 2e^{-i\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} \right| \\ &= \left| z_1 2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \right| = \left| 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - 2z_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|. \end{aligned}$$

因此

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - 2z_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pm 2. \tag{3}$$

由式 (3) 解出 z_1 ，得

$$z_1(\alpha) = \frac{2\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \mp 1}{\sin(\pi/3)} = \frac{4\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \mp 2}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

现在确定正确的符号。根据构造， $z_1 > 0$ ，对点对 $\{z_1,\ \omega z_1\}$ 应用直径约束可得

$$|z_1 - \omega z_1| = |1 - \omega|\, z_1 = \sqrt{3}\, z_1 \leqslant 2,$$

因此 $z_1 \leqslant 2/\sqrt{3}$。如果在 (4) 中选择“–”（即 (3) 的右侧等于 -2），那么

$$z_1(\alpha) = \frac{4\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) + 2}{\sqrt{3}}.$$

在我们的设定中 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/6$，且可行构型满足 $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha) > 0$；因此，“−”这一选择将导致 $z_1(\alpha) > 2/\sqrt{3}$，与 $z_1 \leqslant 2/\sqrt{3}$ 矛盾。因此，(3) 中的符号必须是“+2”，于是我们得到

$$z_1(\alpha) = \frac{2\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)-1}{\sin(\pi/3)} = \frac{4\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)-2}{\sqrt{3}}. \tag{5}$$

图4(b)中给出了可视化结果。因此，将 z_1 视为 α的函数，

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sqrt{3}}.$$

由于 $0 < \alpha \leqslant \pi/6$，我们有 $\cos\alpha \geqslant \sqrt{3}/2$和 $0 < z_1 \leqslant 2/\sqrt{3}$。将 $z_2 = z_1 - 2e^{i\alpha} = x + iy$ 写成$x = z_1 - 2\cos\alpha$ 和 $y = -2\sin\alpha < 0$，得到 $x \leqslant 2/\sqrt{3} - \sqrt{3} = -1/\sqrt{3}$，因此 $x^2 \geqslant 1/3$，并且还有$y^2 \leqslant 1$。所以

$$\mathrm{Im}(z_2^3) = y(3x^2 - y^2) \leqslant 0, \qquad \text{so} \qquad |z_2^3 - \overline{z_2}^3| = i\,(z_2^3 - \overline{z_2}^3).$$

将 $m = 2$ 代入式（2），得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{\frac{1}{6}}}{3^2} =& |z_0||z_1||z_0^3 - z_1^3||z_2|^2|z_0^3 - z_2^3|^2|z_1^3 - z_2^3|^2|z_2^3 - \overline{z_2}^3| \\
=& (-z_0)z_1(z_1^3 - z_0^3)z_2\overline{z_2}(i)(z_2^3 - \overline{z_2}^3)(z_0^3 - z_2^3)(z_0^3 - \overline{z_2}^3)(z_1^3 - z_2^3)(z_1^3 - \overline{z_2}^3) \\
=& (2 - z_1)z_1(6z_1^2 - 12z_1 + 8)(z_1^2 - 4z_1\cos(\alpha) + 4)4(3z_1^2\sin(\alpha) - 6z_1\sin(2\alpha) + 4\sin(3\alpha)) \\
& ((z_1 - 2)^3 - (z_1 - 2e^{i\alpha})^3)((z_1 - 2)^3 - (z_1 - 2e^{-i\alpha})^3) \\
& (z_1^3 - (z_1 - 2e^{i\alpha})^3)(z_1^3 - (z_1 - 2e^{-i\alpha})^3).
\end{aligned}$$

使用 Maple [7, `n=12-calculation.mw`]，我们对该表达式关于 α 求导，并令导数为零。令 $c = \cos(\alpha) \in [\sqrt{3}/2, 1)$，可得

$$\begin{aligned}
&((-61440\sqrt{3} - 61440)c^{13} + (598016\sqrt{3} + 942080)c^{12} + (-1358848\sqrt{3} - 2945024)c^{11} \\
&+ (-1702912\sqrt{3} - 2994176)c^{10} + (12447488\sqrt{3} + 23366400)c^9 + (-14598912\sqrt{3} - 23974400)c^8 \\
&+ (-14583936\sqrt{3} - 27066368)c^7 + (41161600\sqrt{3} + 68952832)c^6 + (-14880848\sqrt{3} - 25631840)c^5 \\
&+ (-26352512\sqrt{3} - 44362112)c^4 + (24621148\sqrt{3} + 43141088)c^3 + (-1331604\sqrt{3} - 2403864)c^2 \\
&+ (-5793933\sqrt{3} - 10124442)c + 1834665\sqrt{3} + 3164778)\sin(\alpha) \\
&+ (61440\sqrt{3} + 61440)c^{14} + (32768\sqrt{3} - 139264)c^{13} + (-1781760\sqrt{3} - 2925568)c^{12} \\
&+ (5654528\sqrt{3} + 11060224)c^{11} + (-2075392\sqrt{3} - 3122432)c^{10} + (-20319744\sqrt{3} - 37831424)c^9 \\
&+ (31883136\sqrt{3} + 52888576)c^8 + (9866240\sqrt{3} + 19010304)c^7 + (-54395584\sqrt{3} - 91238480)c^6 \\
&+ (26467744\sqrt{3} + 45939072)c^5 + (25917056\sqrt{3} + 43554644)c^4 + (-27518584\sqrt{3} - 48203492)c^3 \\
&+ (2249010\sqrt{3} + 3986631)c^2 + (5793930\sqrt{3} + 10124325)c - 3164769 - 1834665\sqrt{3} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

利用 $\sin(\alpha)^2 = 1 - c^2$ 这一事实，我们可以得到关于 c 的以下 26次多项式方程:

$$\begin{aligned}
&3774873600c^{26} + \left(-12079595520\sqrt{3} - 18874368000\right)c^{25} + \left(57780731904\sqrt{3} + 72746008576\right)c^{24} + \\
&\left(-100931731456\sqrt{3} - 186466172928\right)c^{23} + \left(31461474304\sqrt{3} + 143637086208\right)c^{22} + \\
&\left(209656479744\sqrt{3} + 389073076224\right)c^{21} + \left(-458848468992\sqrt{3} - 967476510720\right)c^{20} + \\
&\left(293161140224\sqrt{3} + 484148248576\right)c^{19} + \left(422923927552\sqrt{3} + 953012977664\right)c^{18} +
\end{aligned}$$

$$\left(-912719085568\sqrt{3}-1588930084864\right)c^{17}+\left(380269395968\sqrt{3}+464902488064\right)c^{16}+$$
$$\left(573757374464\sqrt{3}+1038482817024\right)c^{15}+\left(-740008067072\sqrt{3}-1163467247616\right)c^{14}+$$
$$\left(118737051648\sqrt{3}+151783239680\right)c^{13}+\left(335886705664\sqrt{3}+532904293376\right)c^{12}+$$
$$\left(-241433358336\sqrt{3}-381667765248\right)c^{11}+\left(-3581119488\sqrt{3}+6257104128\right)c^{10}$$
$$+\left(76148838656\sqrt{3}+116278888704\right)c^{9}+\left(-32570889408\sqrt{3}-57731247296\right)c^{8}$$
$$+\left(-1798975744\sqrt{3}+1147734336\right)c^{7}+\left(6487432128\sqrt{3}+11016204480\right)c^{6}$$
$$+\left(-2864017968\sqrt{3}-5670981840\right)c^{5}+\left(457206888\sqrt{3}+880893600\right)c^{4}$$
$$+\left(251077056\sqrt{3}+498830580\right)c^{3}+\left(-183696321\sqrt{3}-327921552\right)c^{2}$$
$$+\left(43182972\sqrt{3}+72512874\right)c-4953312-3027339\sqrt{3}=0. \quad (7)$$

数值上，这得到

$$c=0.9659364725201318915\ldots, \qquad \alpha=0.26175825\ldots=14.99764302\ldots^{\circ},$$

and

$$\frac{\Delta}{12^{12}}\approx 1.2901383629057280854\ldots.$$

3.5 取更小值时得到的数值

n	$\log(\Delta_{\max\ 找到(n)})$	$\overline{\Delta}_{\max\ 找到(n)}$	$\overline{\Delta}(P_{\text{Section 4}})$
4	5.683852	1.148748	
6	11.021240	1.310854	1.310854
8	16.859060	1.250472	
10	23.250608	1.252004	
12	30.073629	1.290138	1.290138
14	37.182717	1.266036	
16	44.597546	1.266296	
18	52.276202	1.283347	1.283184
20	60.154953	1.271579	
22	68.243701	1.272150	
24	76.521876	1.282119	1.281941
26	84.953812	1.275350	
28	93.545549	1.275996	
30	102.284943	1.282629	1.282470
32	111.149205	1.278300	
34	120.142414	1.278918	
36	129.256574	1.283683	1.283547
38	138.475863	1.280706	
40	147.803223	1.281265	
42	157.232997	1.284867	1.284753
44	166.753557	1.282710	
46	176.367127	1.283206	
48	186.069494	1.286031	1.285934

50	195.851764	1.284400	
52	205.715643	1.284841	
54	215.657906	1.287120	1.287038
56	225.671505	1.285852	
58	235.757835	1.286239	
60	245.914305	1.288116	1.288048
62	256.135206	1.287106	
64	266.421697	1.287447	
66	276.771641	1.289026	1.288966
68	287.180354	1.288199	

表 1: $\overline{\Delta}_{\max\text{ found}}(n)$ 和 $\overline{\Delta}_{\max\text{ found}}(n)$ 分别是 $\log(\Delta_{\max}(n))$ 和 $\Delta_{\max}(n)$ 的下界，此处针对各种偶数 n 给出。当 n 是 6 的倍数时，我们还将第 4 节构造所得的估计记为 $\Delta(P_{\text{Section 4}})$。

$n \in \{8,10,12\}$ 的构造已经很难描述，更大的构造也同样如此。下面我们给出表 1，其中列出了对更多偶数 n 所得到的 $\Delta_{\max}$ 和 $\Delta_{\max}$ 的最佳下界（我们认为它们接近真实值）。对于 $6 \mid n$，我们还将这些结果与第 4 节的近似构造进行比较。

4 $6 \mid n$ 的一个构造

在本节中，我们证明定理 2。

我们首先给出针对 $n = 6k$ 的多边形 Y 的构造。设 $X = A_1A_2 \dots A_{6k}$ 是一个具有单位直径的正n边形。由于 n 为偶数，直径对应于对顶点之间的距离。因此， X 内接于半径为 $1/2$ 的圆，这意味着其边长为 $\ell = |A_1A_2| = \sin(\frac{\pi}{n})$。设 $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n}$ 为其内角。

多边形 $Y = B_1B_2 \dots B_{6k}$ 被构造为边长为 ℓ 的等边多边形，由取自 X 的六条全等弧拼接而成。具体而言，对于每个 $j \in \{0,\dots,5\}$，顶点序列 $B_{jk} \dots B_{(j+1)k}$ 与正多边形的弧 $A_{jk} \dots A_{(j+1)k}$ 全等。全文中，下标均取模 $n = 6k$，并且我们令 $A_0 = A_n$、 $B_0 = B_n$。因此，位于 B_i 处的所有内角都等于 α，但“接合”顶点 $B_k, B_{2k}, \dots, B_{6k}$ 处除外。虽然多边形 $B_kB_{2k}B_{3k}B_{4k}B_{5k}B_{6k}$ 是具有六条相等边的六边形，$\angle B_{6k}B_kB_{2k} = \angle B_{2k}B_{3k}B_{4k} = \angle B_{4k}B_{5k}B_{6k} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{n}$ 与 $\angle B_kB_{2k}B_{3k} = \angle B_{3k}B_{4k}B_{5k} = \angle B_{5k}B_{6k}B_k = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}$。因此，在 B_{rk} 处，当 $r \in \{1,3,5\}$ 时，我们有 $\angle B_{rk-1}B_{rk}B_{rk+1} = \alpha + \pi/n$；而在 B_{rk} 处，当 $r \in \{2,4,6\}$ 时，我们有 $\angle B_{rk-1}B_{rk}B_{rk+1} = \alpha - \pi/n$。

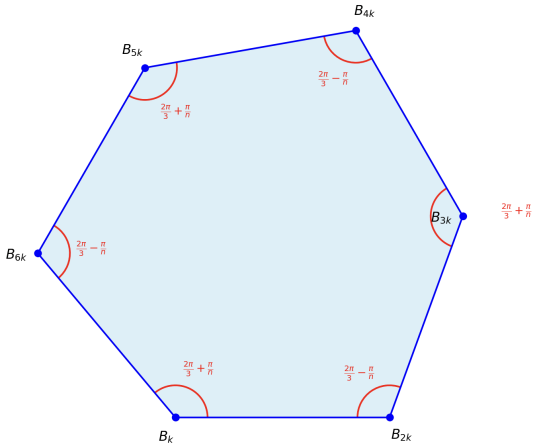


图5：多边形的形状 $B_kB_{2k}B_{3k}B_{4k}B_{5k}B_{6k}$。

最后，我们 通过对 Y 按因子 $2/\cos(\pi/2n)$进行重新缩放，得到我们的多边形 P（从而使得$\operatorname{diam}(P) = 2$ ）.

引理16. $\operatorname{diam}(Y) = \cos(\pi/2n)$.

证明. 注意，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant 6$，由于 $A_kA_{2k}A_{3k}\dots A_{6k}$是直径为1的正六边形，并且弧 $B_{ik}B_{ik+1}\dots B_{(i+1)k}$与每个 i. 对应的 $A_{ik}A_{ik+1}\dots A_{(i+1)k}$全等。由于 $\angle B_kB_{2k}B_{3k} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{n}$ 和 $\angle B_{2k}B_{3k}B_{4k} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{n}$，并且

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{n}\right)+1\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

我们得出 $|B_kB_{4k}| = \cos(\pi/2n)$。因此，$\operatorname{diam}(Y) \geqslant \cos(\pi/2n)$。

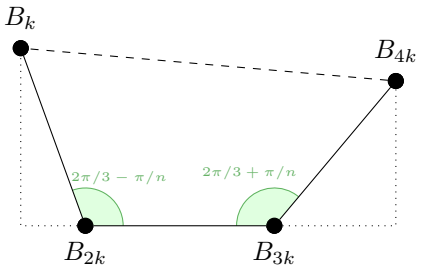


图6：四边形 $B_kB_{2k}B_{3k}B_{4k}$ 以及用于计算 $|B_kB_{4k}|^2$的投影

剩下需要证明 $\operatorname{diam}(Y) \leqslant \cos(\pi/2n)$。

我们先简述一种得出该结论的方法。设 $\delta := \pi/n$。在三角形 $B_kB_{4k}B_{k\pm1}$ 中，$|B_kB_{k\pm1}| = \sin\delta$, $|B_kB_{4k}| = \cos(\delta/2) = \sin(\pi/2-\delta/2)$，并且 $\angle B_{4k}B_kB_{k\pm1} = \pi/2-\delta/2$. 根据正弦定理，我们得出 $|B_{k\pm1}B_{4k}| = |B_kB_{4k}|$. 三角形 $\triangle B_{k+1}B_{4k}B_{4k-1}$ 与$\triangle B_kB_{4k}B_{k\pm1}$ 全等（根据边角边（SAS））， 因此也有 $|B_{k+1}B_{4k-1}| = \cos(\delta/2)$。重复这一过程，可以注意到$n$ 距离等于 $\cos(\pi/2n)$。 其中包括所有线段 B_iB_{i+3k} （对于每个$1 \leqslant i \leqslant 6k$）。

设 P 是一个正 $2n$ 边形，其中心为 B_i，半径为 $\cos(\delta/2)$，且其中一个顶点为 B_{i+3k}。那么， Y 和 P 的所有边长都等于 $\sin\delta$.。 P 的所有内角都等于 $\pi-\pi/n$，而 Y 的内角则不超过 $\pi-\pi/n$。由此可得， Y 完全位于 P 内。

由于上述结论对每个 $1 \leqslant i \leqslant 6k$ 都成立，且凸多边形的直径可以从其顶点之间的距离中得到，因此我们得出 $\operatorname{diam} Y = \cos(\pi/2n)$。详细证明见附录 B。 □

引理 17. 比值 $\prod_{1\leqslant i,\ j\leqslant k} \frac{|B_{k-i}B_{k+j}|^2|B_{2k-i}B_{2k+j}|^2}{|A_{k-i}A_{k+j}|^2|A_{2k-i}A_{2k+j}|^2}$ 收敛于

$$C_1 = \exp\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{24} - \frac{\ln(3)}{8}\right)$$

当 $k \to \infty$. 时

证明。在本引理中，始终假设 $n = 6k$，并令 $\delta := \pi/n$。对于 $1 \leqslant i,\ j \leqslant k$，定义 e

$$X_{i,j} := 1 - \frac{|B_{k-i}B_{k+j}|^2\,|B_{2k-i}B_{2k+j}|^2}{|A_{k-i}A_{k+j}|^2\,|A_{2k-i}A_{2k+j}|^2}.$$

在此情形下，我们有 $|A_{2k-i}A_{2k+j}| = |A_{k-i}A_{k+j}|$，因此

$$1 - X_{i,j} = \frac{|B_{k-i}B_{k+j}|^2\,|B_{2k-i}B_{2k+j}|^2}{|A_{k-i}A_{k+j}|^4}, \qquad P_k := \prod_{1\leqslant i,j\leqslant k}(1 - X_{i,j})$$

恰好是陈述中出现的乘积。
设 $x_i := \pi i/n$ 和 $y_j := \pi j/n$。由于 $k = n/6$，我们有 $x_i,\ y_j \in (0,\ \pi/6]$ 以及 $x_i + y_j \in (0,\ \pi/3]$。此外，$|A_kA_{k-i}| = |B_kB_{k-i}| = \sin(x_i)$，同理 $|A_kA_{k+j}| = |B_kB_{k+j}| = \sin(y_j)$。
考虑三角形 $\triangle A_{k-i}A_kA_{k+j}$。$A_k$ 处的角等于 $\pi - (x_i + y_j)$，因此根据余弦定理以及 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\ \theta$,

$$|A_{k-i}A_{k+j}|^2 = \sin^2(x_i) + \sin^2(y_j) - 2\sin(x_i)\sin(y_j)\cos(\pi - (x_i + y_j)) = \sin^2(x_i + y_j).$$

对于相应的 B-三角形，在 B_k 和 B_{2k}处，同一个角分别发生了 $\mp\delta$ 的扰动，因此

$$|B_{k-i}B_{k+j}|^2 = \sin^2(x_i) + \sin^2(y_j) + 2\sin(x_i)\sin(y_j)\cos((x_i + y_j) - \delta),$$
$$|B_{2k-i}B_{2k+j}|^2 = \sin^2(x_i) + \sin^2(y_j) + 2\sin(x_i)\sin(y_j)\cos((x_i + y_j) + \delta).$$

使用.....进行直接的代数展开

$$\cos(\alpha - \delta) + \cos(\alpha + \delta) = 2\cos\alpha\cos\delta, \qquad \cos(\alpha - \delta)\cos(\alpha + \delta) = \cos^2\alpha - \sin^2\delta$$

表明了

$$|A_{k-i}A_{k+j}|^4 - |B_{k-i}B_{k+j}|^2\,|B_{2k-i}B_{2k+j}|^2 = 4(\sin^2 x_i + \sin^2 y_j)\sin x_i \sin y_j \cos(x_i + y_j)\,(1 - \cos\delta) + 2\sin^2 x_i \sin^2 y_j\,(1 - \cos 2\delta).$$

除以 $|A_{k-i}A_{k+j}|^4 = \sin^4(x_i + y_j)$，得到精确公式

$$X_{i,j} = \frac{4(\sin^2 x_i + \sin^2 y_j)\sin x_i \sin y_j \cos(x_i + y_j)\,(1 - \cos\delta) + 2\sin^2 x_i \sin^2 y_j\,(1 - \cos 2\delta)}{\sin^4(x_i + y_j)}.$$

现在我们按 δ 展开。根据带余项的泰勒定理，存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对所有充分小的 δ,

$$\left|1 - \cos\delta - \frac{\delta^2}{2}\right| \leqslant C\delta^4, \qquad \left|1 - \cos(2\delta) - 2\delta^2\right| \leqslant C\delta^4.$$

将这些代入精确表达式可得

$$X_{i,j} = \delta^2\, H(x_i, y_j) + \delta^4\, E(x_i, y_j; \delta),$$

其中

$$H(x,y) = \frac{2(\sin^2 x + \sin^2 y)\sin x \sin y \cos(x+y) + 4\sin^2 x \sin^2 y}{\sin^4(x+y)},$$

且 $E(\cdot,\ \cdot;\ \delta)$ 是一个由泰勒余项产生的函数。
我们声称， H 在 $(0,\ \pi/6]^2$ 上有界，并且对于所有充分小的 δ， E 在该区间上一致有界。事实上，对于 $t \in [0, \pi/3]$，有 $\sin\ t \geqslant \frac{2}{\pi} t$ 和 $\sin\ t \leqslant t$， $|\cos t| \leqslant 1$。因此，对于 $x,\ y \in (0,\ \pi/6]$，

$$\sin^4(x+y) \geqslant \left(\frac{2}{\pi}(x+y)\right)^4,$$

而 H 的分子绝对值可由 $(x^2+y^2)xy + x^2y^2 \leqslant (x+y)^4$ 的某个常数倍控制。因此，对于某个绝对常数 M_1，有 $|H(x,\ y)| \leqslant M_1$。泰勒余项各项前的系数也满足同样的估计，因此，对于某个与 $i,\ j,\ k$ 无关的绝对常数 M_2（当 k 足够大时），有 $|E(x,\ y;\ \delta)| \leqslant M_2$。因此，

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant k} |X_{i,j}| \leqslant \delta^2 M_1 + \delta^4 M_2 = O(\delta^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

将展开式求和可得

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} X_{i,j} = \delta^2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} H(x_i, y_j) + \delta^4 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} E(x_i, y_j; \delta).$$

第二项为 $O(k^2\delta^4) = O(k^2/n^4) = O(1/k^2) \to 0$，因为 $n = 6k$。
对于第一项， $\delta^2 \sum_{1 \leqslant i,\ j \leqslant k} H(x_i,\ y_j)$ 是 $[\delta, \pi/6]^2$ 上网格尺寸为 δ 的（右端点）黎曼和。由于 H 在 $(0,\ \pi/6]^2$ 上有界，缺失带 $[0, \pi/6]^2 \setminus [\delta, \pi/6]^2$ 的面积为 $O(\delta)$，因此对 $\iint_{[0,\pi/6]^2} H$ 的贡献至多为 $O(\delta)$。因此

$$\lim_{k\to\infty} \delta^2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} H(x_i, y_j) = \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/6} H(x,y)\, dx\, dy.$$

因此，

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} X_{i,j} = \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/6} H(x,y)\, dx\, dy.$$

根据 C.1节中的计算或 [7, `EP1045_1stregime`]，该积分等于

$$-\frac{1}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{24} + \frac{\ln 3}{8} = -\ln C_1.$$

最后，我们将求和转化为乘积 $P_k = \prod_{1 \leqslant i,\ j \leqslant k} (1 - X_{i,\ j})$。由于 $\max_{i,\ j} |X_{i,\ j}| \to 0$，对于所有充分大的 k，我们都有 $|X_{i,\ j}| \leqslant \frac{1}{2}$ 对每个 $i,\ j$ 都成立。在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上，我们有 $|\ln(1-u) + u| \leqslant u^2$。因此，

$$\ln P_k = \sum_{i,j} \ln(1 - X_{i,j}) = -\sum_{i,j} X_{i,j} + O\left(\sum_{i,j} X_{i,j}^2\right).$$

利用一致界 $X_{i,j} = O(\delta^2)$，我们得到

$$\sum_{i,j} X_{i,j}^2 \leqslant k^2 \cdot O(\delta^4) = O(k^2\delta^4) = O(1/k^2) \to 0,$$

因此

$$\ln P_k = -\sum_{i,j} X_{i,j} + o(1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \ln C_1.$$

两边取指数，得到 $P_k \to C_1$，证毕。 □

下面两个引理可以用类似的方法证明。为求完整起见，C节还给出了 Maple 中计算的详细过程。

引理18。 比值 $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant k} \frac{|B_{k-i}B_{2k+j}|^2|B_{2k-i}B_{3k+j}|^2}{|A_{k-i}A_{2k+j}|^2|A_{2k-i}A_{3k+j}|^2}$ 收敛于

$$C_2 = \exp\left(-\frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{24} + \frac{5\ln(3)}{8}\right)$$

当 $k \to \infty$.

证明。 证明过程与引理 17 类似，只需更新相应公式。参见 C.2节或 [7, EP1045_2ndregime]。在此情形下，对于 $x_i := \pi i/n$ 和 $y_j := \pi j/n$，有

$$\begin{aligned}
|B_{k-i}B_{2k+j}|^2 &= \left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x_i - \delta\right)\sin x_i + \cos\left(\frac{\pi}{6} + y_j + \delta\right)\sin y_j\right)^2 \\
&\quad + \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} + x_i - \delta\right)\sin x_i - \sin\left(\frac{\pi}{6} + y_j + \delta\right)\sin y_j\right)^2. \\
|B_{2k-i}B_{3k+j}|^2 &= \left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x_i + \delta\right)\sin x_i + \cos\left(\frac{\pi}{6} + y_j - \delta\right)\sin y_j\right)^2 \\
&\quad + \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} + x_i + \delta\right)\sin x_i - \sin\left(\frac{\pi}{6} + y_j - \delta\right)\sin y_j\right)^2.
\end{aligned}$$

□

引理 19。 比值 $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant k} \frac{|B_{k-i}B_{4k-j}|^4}{|A_{k-i}A_{4k-j}|^4}$ 收敛于 $C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 当 $k \to \infty$.

证明。 与引理 17的证明类似，只需更新相应的公式。参见C.3节或 [7, EP1045_3rdregime]。在这种情况下，对于 $x_i := \pi i/n$ 和 $y_j := \pi j/n$，我们有

$$|B_{k-i}B_{4k-j}|^2 = \cos^2\left(x_i - y_j - \frac{\delta}{2}\right).$$

□

最后，回顾 $X = A_1 \cdots A_n$ 表示单位直径的正 n边形， $Y = B_1 \cdots B_n$ 是通过修改连接角由 X 构造的等边多边形，而 P 是将 Y按因子 $2/\cos(\pi/2n)$重新缩放，使得$\operatorname{diam}(P) = 2$ （由引理16保证）。利用 $\Delta(P) = \Delta(P)/n^n$，我们写出

$$\overline{\Delta}(P) = \frac{\Delta(P)}{\Delta(Y)} \cdot \frac{\Delta(Y)}{\Delta(X)} \cdot \frac{\Delta(X)}{n^n}.$$

由于 $P = \frac{2}{\cos(\pi/2n)} Y$，我们有 $\Delta(P)/\Delta(Y) = \left(\frac{2}{\cos(\pi/2n)}\right)^{n(n-1)}$。此外，将正的单位直径构形 X 按因子2缩放，得到直径为2的正 n边形，其判别式等于n^n （对于偶数 n）；因此 $\Delta(X) = 2^{-n(n-1)}n^n$，从而

$$\frac{\Delta(P)}{\Delta(Y)} \cdot \frac{\Delta(X)}{n^n} = \frac{1}{\cos(\pi/2n)^{n(n-1)}} \sim \exp(\pi^2/8).$$

结合引理 17–19，它们给出了 $\Delta(Y)/\Delta(X) \to C_1^3 C_2^3 C_3^{3/2}$，我们得出结论 t

$$\overline{\Delta}(P) \to \exp(\pi^2/8)\, C_1^3 C_2^3 C_3^{3/2} = \frac{3^{9/4}}{2^3} \exp\left(\frac{\pi^2 - 2\sqrt{3}\,\pi}{8}\right),$$

证明定理 2。
关于最后一条评论，当 n 为偶数时，我们可以从上述构造 $P' = V_1V_2 \quad V_{3n}\cdots$ 出发，其中有 $3n$ 个顶点，然后每隔两个顶点取一个，得到一个有 n 个顶点的多边形 $P = V_3V_6V_9\cdots V_{3n}$。$P$ 的直径图是不连通的，因此预计该构造并非最优。尽管如此，它仍给出 $\Delta(\widehat{P}) \longrightarrow C_*^{1/9}$。事实上，分析过程与上文完全类似。唯一的变化是，从 P' 过渡到 P 时，角网格尺寸被替换为 $\delta/3$；而最后将直径归一化为 2 时，则使用缩放因子 $\frac{2}{\cos(\pi/6n)}$，而非 $\frac{2}{\cos(\pi/2n)}$。由于 $\log\Delta(\cdot)$ 中的首项由双重求和（等价地说，二重积分）决定，这些改动会使指数中的极限常数缩放为原来的 $1/9$ 倍，这也解释了九次方根关系。

5 偶数 n的一个统一下界

本节证明定理 3。对于每个充分大的偶整数 n（即 $n \geqslant 8$），我们构造一个直径为 2 的显式构形，使得归一化判别式 $\Delta = \Delta/n^n$ 在 $n \to \infty$时收敛到一个严格大于 1 的常数。该构造是正则 n–边形的一个小径向扰动。它经过精心设计，使对径点对之间的距离保持为 2，同时 π–反周期对称性确保当 n为偶数时，$\log\Delta$ 展开式中的一阶项消失。

5.1 构造与直径控制

5.1.1 三角波。

令 $\mathrm{tri}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为以下函数的 2π–周期延拓：

$$x \mapsto 1 - \frac{2}{\pi}|x| \qquad (x \in [-\pi, \pi]).$$

等价地，$\mathrm{tri}(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\cos x)$。令 $g(\theta) = \mathrm{tri}(3\theta)$。对于 $x,\ y \in \mathbb{R}$ 记圆周距离为

$$d(x, y) = \min_{k\in\mathbb{Z}}|x - y - 2\pi k| \in [0, \pi].$$

引理 20。 函数 $g(\theta) =$三角波(3θ)满足：

(1) $|g(\theta)| \leqslant 1$ 对所有 $\theta \in \mathbb{R}$均成立；*(2)* g 是偶函数：$g(-\theta) = g(\theta)$；*(3)* g 是 π– 反周期的：$g(\theta + \pi) = -g(\theta)$；*(4)* g 在圆上满足利普希茨条件：对所有 θ、$\varphi \in \mathbb{R}$，

$$|g(\theta) - g(\varphi)| \leqslant L\, d(\theta, \varphi), \qquad L = \frac{6}{\pi}.$$

证明。(1)–(3)项由三角波的定义可立即得出。对于(4)，注意到三角波在 $[-\pi, \pi]$ 上是分段线性的，且斜率的绝对值不超过 $2/\pi$，因此它在 $\mathbb{R}$ 上是全局利普希茨的（相对于 $|\cdot|$），常数为 $2/\pi$。因此 $g(\theta) =$三角波(3θ) 是全局利普希茨的，常数为 $3\cdot(2/\pi) = 6/\pi$：

$$|g(u) - g(v)| \leqslant \frac{6}{\pi}|u - v| \qquad (u, v \in \mathbb{R}).$$

给定 $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$，选择 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $|\theta - (\varphi + 2\pi k)| = d(\theta, \varphi)$。利用 g 的 2π 周期性，

$$|g(\theta) - g(\varphi)| = |g(\theta) - g(\varphi + 2\pi k)| \leqslant \frac{6}{\pi}\,|\theta - (\varphi + 2\pi k)| = \frac{6}{\pi}\,d(\theta, \varphi). \qquad \square$$

5.1.2 偶数 n 的扰动 n 边形

固定一个偶整数 $n = 2m$。令

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad \zeta_k = e^{i\theta_k}.$$

定义振幅

$$t_n = \frac{\pi^2}{12n}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

并令

$$z_k = (1 + t_n g(\theta_k))\,\zeta_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

因此，这些点是单位根的径向扰动，扰动大小为 $t_n = O(1/n)$。

引理 21. 对于每个偶数 $n \geqslant 8$，构形 $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ 满足

$$\max_{i,j} |z_i - z_j| \leqslant 2.$$

此外，对于每个 k，都有 $|z_k - z_{k+m}| = 2$。

证明。令 $r_k = 1 + t_n g(\theta_k)$，使得 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$。

对径点对。由于根据引理 20(3)，$\zeta_{k+m} = -\zeta_k$ 和 $g(\theta_{k+m}) = -g(\theta_k)$，

$$z_{k+m} = (1 - t_n g(\theta_k)) e^{i(\theta_k + \pi)} = -(1 - t_n g(\theta_k)) e^{i\theta_k},$$

因此 $z_k - z_{k+m} = 2e^{i\theta_k}$，进而 $|z_k - z_{k+m}| = 2$。

其余点对。取 $i \neq j$ 和 $d(\theta_i, \theta_j) \in (0, \pi)$。于是

$$|z_i - z_j|^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(d(\theta_i, \theta_j)).$$

若 $d(\theta_i, \theta_j) \leqslant \pi/2$，则 $\cos(d(\theta_i, \theta_j)) \geqslant 0$，因此由引理 20(1)可得 $|z_i - z_j|^2 \leqslant r_i^2 + r_j^2 \leqslant 2(1 + t_n)^2 < 4$（因为 $t_n \leqslant \pi^2/24 < \sqrt{2} - 1$）。故 $|z_i - z_j| < 2$。

现在假设 $d(\theta_i, \theta_j) \in (\pi/2, \pi)$，并令 $d(\theta_i, \theta_j) = \pi - \alpha$，其中 $\alpha \in (0, \pi/2)$。那么 $\cos(d(\theta_i, \theta_j)) = -\cos\alpha$，且

$$|z_i - z_j|^2 = r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos\alpha.$$

存在 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ 使得

$$\theta_j \equiv \theta_i + \pi - \varepsilon\alpha \pmod{2\pi}, \qquad \alpha = \frac{2\pi\ell}{n} \quad \text{for some } \ell \in \left\{1, \ldots, \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor\right\}.$$

由引理 20(3)，$g(\theta_j) = g(\theta_i + \pi - \varepsilon\alpha) = -g(\theta_i - \varepsilon\alpha)$。令

$$a = g(\theta_i), \qquad b = g(\theta_i - \varepsilon\alpha).$$

那么 $r_i = 1 + t_n a$ 且 $r_j = 1 - t_n b$。直接展开可得

$$|z_i - z_j|^2 - 4 = -4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2t_n(a-b)(1+\cos\alpha) + t_n^2\Big[(a-b)^2 + 2(1-\cos\alpha)\,ab\Big]. \tag{8}$$

我们对右端进行上界估计。由引理 20(4)，$|a - b| \leqslant L\alpha$ with $L = 6/\pi$。此外，$|ab| \leqslant 1$and $1 - \cos\alpha \leqslant \alpha^2/2$，因此

$$(a-b)^2 + 2(1-\cos\alpha)ab \leqslant (L^2 + 1)\alpha^2.$$

此外，对于所有 $\alpha \geqslant 0$，都有 $-4\sin^2(\alpha/2) \leqslant -\alpha^2 + \alpha^4/12$，且 $1+\cos\alpha \leqslant 2$ 给出 $2t_n(a-b)(1+\cos\alpha) \leqslant 4t_n L\alpha$。将这些估计代入 (8) 得

$$|z_i - z_j|^2 - 4 \leqslant -\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{12} + 4t_n L\alpha + (L^2+1)t_n^2\alpha^2. \tag{9}$$

现在代入 $\alpha = \frac{2\pi\ell}{n}$ 和 $t_n = \frac{\pi^2}{12n}(1-\frac{1}{n})$。利用 $t_n \leqslant \pi^2/(12n)$ 和 $L^2+1 = (\pi^2+36)/\pi^2$，(9) 推出显式界

$$|z_i - z_j|^2 - 4 \leqslant -\frac{4\pi^2}{n^2}\Big(\ell(\ell-1) + \frac{\ell}{n}\Big) + \frac{\pi^4}{n^4}\Big(\frac{4}{3}\ell^4 + \frac{\pi^2+36}{36}\ell^2\Big) =: E_{n,\ell}. \tag{10}$$

我们断言，对于每个偶数 $n \geqslant 8$ 和 $1 \leqslant \ell \leqslant n/4$，都有 $E_{n,\ell} \leqslant 0$。对于 $\ell = 1$，

$$E_{n,1} \leqslant -\frac{4\pi^2}{n^3} + \frac{\pi^4}{n^4}\Big(\frac{7}{3} + \frac{\pi^2}{36}\Big) \leqslant 0 \qquad (n \geqslant 8).$$

对于 $\ell \geqslant 2$，在 (10) 中使用 $\ell(\ell-1) \geqslant \ell^2/2$ 和 $\ell \leqslant n/4$，得到

$$E_{n,\ell} \leqslant -\frac{2\pi^2\ell^2}{n^2} + \frac{\pi^4}{n^4}\Big(\frac{4}{3}\ell^4 + \frac{\pi^2+36}{36}\ell^2\Big) \leqslant \frac{\ell^2}{n^4}\Big(n^2\Big(-2\pi^2 + \frac{\pi^4}{12}\Big) + \frac{\pi^4(\pi^2+36)}{36}\Big).$$

当 $n \geqslant 8$时，括号内的量为负，因此 $E_{n,\ell} \leqslant 0$。因此，在所有情况下都有 $|z_i - z_j|^2 \leqslant 4$，即 $|z_i - z_j| \leqslant 2$。□

5.2 因式分解与二阶展开

接下来，我们将 $\Delta(z_0, \dots, z_{n-1})$ 与正则构形 $\{\zeta_k\}$ 进行比较。对于 $i \neq j$，定义

$$\rho_{ij} := \frac{g(\theta_i)\zeta_i - g(\theta_j)\zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}.$$

Then

$$z_i - z_j = (\zeta_i - \zeta_j)(1 + t_n\rho_{ij}),$$

因此

$$\frac{\Delta(z_0, \dots, z_{n-1})}{\prod_{i\neq j}|\zeta_i - \zeta_j|} = \prod_{i\neq j}|1 + t_n\rho_{ij}|. \tag{11}$$

引理 22. 对于 $\zeta_k = e^{2\pi ik/n}$，有 $\prod_{i\neq j}|\zeta_i - \zeta_j| = n^n$。

证明. 令 $p_n(z) = z^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(z - \zeta_j)$。对于每个根 ζ_i，$p_n'(\zeta_i) = n\zeta_i^{n-1} = \prod_{j\neq i}(\zeta_i - \zeta_j)$. 取绝对值并对 i 求积，得到

$$\prod_i \prod_{j\neq i}|\zeta_i - \zeta_j| = \prod_i |p'(\zeta_i)| = \prod_i n = n^n. \qquad \square$$

将引理 22 与 (11) 结合，得到

$$\frac{\Delta(z_0, \dots, z_{n-1})}{n^n} = \prod_{i\neq j}|1 + t_n\rho_{ij}|. \tag{12}$$

引理 23. 对所有 $i \neq j$，有 $|\rho_{ij}| \leqslant 4$。

证明. 记 $g_i = g(\theta_i)$。则 $g_i\zeta_i - g_j\zeta_j = g_i(\zeta_i - \zeta_j) + (g_i - g_j)\zeta_j$，因此

$$\rho_{ij} = g_i + (g_i - g_j)\frac{\zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}.$$

由于 $|g_i| \leqslant 1$ 与 $|g_i - g_j| \leqslant Ld(\theta_i, \theta_j)$（引理 20(4)），而 $|\zeta_i - \zeta_j| = 2\sin(d(\theta_i, \theta_j)/2)$，我们得到 n

$$|\rho_{ij}| \leqslant 1 + \frac{Ld(\theta_i, \theta_j)}{2\sin(d(\theta_i, \theta_j)/2)}.$$

由于 sin 在 $[0, \pi/2]$ 上是凹的，对于 $t \in [0, \pi/2]$ 我们有 $\sin t \geqslant 2t/\pi$；将其应用于 $t = d(\theta_i, \theta_j)/2$得到 $\sin(d(\theta_i, \theta_j)/2) \geqslant d(\theta_i, \theta_j)/\pi$ 从而

$$|\rho_{ij}| \leqslant 1 + \frac{L\pi}{2} = 1 + \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 4. \qquad \square$$

对 (12) 取对数得到

$$\log \frac{\Delta(z_0, \ldots, z_{n-1})}{n^n} = \sum_{i \neq j} \log|1 + t_n\rho_{ij}|. \tag{13}$$

令 Rz 表示复数 z 的实部。接下来我们用二阶展开来逼近 (13) 中的每一求和项。

引理 24. 若 $|u| \leqslant \frac{1}{2}$，则

$$\log|1 + u| = \Re\left(u - \frac{u^2}{2}\right) + R(u), \qquad |R(u)| \leqslant \frac{2}{3}|u|^3.$$

证明。对于 $|u| < 1$，我们有 $\log(1 + u) = \sum_{k \geqslant 1}(-1)^{k+1}u^k/k$。取实部得到 $\log|1 + u| = R\log(1 + u)$。尾项由下式界定:

$$\left|\sum_{k \geqslant 3} \frac{(-1)^{k+1}}{k}u^k\right| \leqslant \sum_{k \geqslant 3} \frac{|u|^k}{k} \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k \geqslant 3}|u|^k = \frac{|u|^3}{3(1 - |u|)} \leqslant \frac{2}{3}|u|^3,$$

对于 $|u| \leqslant 1/2$。 $\square$

当 n 为偶数时，扰动的 π–反周期性导致线性项完全抵消。

引理 25。设 $n = 2m$ 为偶数。则 $\sum_{i \neq j} \rho_{ij} = 0$。

证明。我们有 $\zeta_{k+m} = -\zeta_k$，并且根据引理 20(3)，$g(\theta_{k+m}) = -g(\theta_k)$。因此 $g(\theta_{k+m})\zeta_{k+m} = g(\theta_k)\zeta_k$。所以对于任意 $i \neq j$,

$$\rho_{i+m,\, j+m} = \frac{g(\theta_{i+m})\zeta_{i+m} - g(\theta_{j+m})\zeta_{j+m}}{\zeta_{i+m} - \zeta_{j+m}} = \frac{g(\theta_i)\zeta_i - g(\theta_j)\zeta_j}{-(\zeta_i - \zeta_j)} = -\rho_{ij}.$$

映射 $(i, j) \mapsto (i + m, j + m)$ 是有序对 $i \neq j$ 上的双射，因此总和抵消。 $\square$

结合引理24和引理25，即可得到所需的渐近结果。

引理26。沿偶数 $n \to \infty$,

$$\log \frac{\Delta(z_0, \ldots, z_{n-1})}{n^n} = -\frac{t_n^2}{2}\sum_{i \neq j} \Re(\rho_{ij}^2) + o(1).$$

证明。根据引理 23 和 $t_n \leqslant \pi^2/(12n)$，对于所有充分大的 n，我们有 $|t_n\rho_{ij}|\leqslant 1/2$。对 (13) 逐项应用引理 24：

$$\log\frac{\Delta(z_0,\dots,z_{n-1})}{n^n} = \sum_{i\neq j}\Re\left(t_n\rho_{ij} - \frac{t_n^2}{2}\rho_{ij}^2\right) + \sum_{i\neq j} R(t_n\rho_{ij}).$$

根据引理 25，线性项消失。对于余项，利用 $|R(u)|\leqslant \frac{2}{3}|u|^3$ 和 $|\rho_{ij}|\leqslant 4$，

$$\left|\sum_{i\neq j} R(t_n\rho_{ij})\right| \leqslant \frac{2}{3}\,n(n-1)\,(4t_n)^3 = O(n^2t_n^3) = O(1/n)\to 0. \qquad \square$$

5.3 二次项的极限及 J 的求值

为求 引理26右端的值，我们取连续极限。对 $x,\ y\in[0,2\pi]$，定义 ，

$$\xi(x)=e^{ix},\qquad f(x)=g(x)e^{ix},\qquad \rho(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{\xi(x)-\xi(y)}, & d(x,y)>0,\\ 0, & d(x,y)=0,\end{cases} \tag{14}$$

并令

$$F(x,y)=\Re(\rho(x,y)^2)\qquad (x,y\in[0,2\pi]).$$

对于 $i\neq j$，有 $F(\theta_i,\ \theta_j)=R(\rho_{ij}^2)$。

引理27。 函数 F 在 $[0,2\pi]^2$ 上有界，并且在每个满足 $d(x,y)>0$ 的点 (x,y) 处连续。特别地，F 在 $[0,2\pi]^2$ 上黎曼可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\Re(\rho_{ij}^2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x,y)\,dx\,dy =: J.$$

证明。有界性可由与引理 23 相同的估计得出（其中将 θ_i,θ_j 替换为 x,y）。当 $d(x,y)>0$ 时，函数连续，因为 $e^{ix}-e^{iy}\neq 0$ 在该处成立。满足 $d(x,y)=0$ 的点集为

$$D=\{(x,y)\in[0,2\pi]^2:\ e^{ix}=e^{iy}\}=\{(x,y)\in[0,2\pi]^2:\ x=y\}\cup\{(0,2\pi),(2\pi,0)\},$$

其勒贝格测度为 0。我们已证明，F 在 $[0,2\pi]^2\setminus D$ 上有界且连续。根据黎曼可积的勒贝格判别准则，可得 F 在 $[0,2\pi]^2$ 上黎曼可积。最后，我们将离散和与积分联系起来。回顾一下，对于 $i=0,1,\dots,n-1$，有 $\theta_i=2\pi i/n$。考虑将 $[0,2\pi]$ 划分为长度为 $h=2\pi/n$ 的子区间所得到的均匀分割，以及相应的二维黎曼和。由于 F 黎曼可积，我们有

$$h^2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}F(\theta_i,\theta_j)\ \longrightarrow\ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x,y)\,dx\,dy\qquad (n\to\infty).$$

由于 $h^2=(2\pi/n)^2=4\pi^2/n^2$，将两边除以 $4\pi^2$ 得

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}F(\theta_i,\theta_j)\ \longrightarrow\ \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x,y)\,dx\,dy.$$

此外，根据我们的约定，对于每个 i，$F(\theta_i,\ \theta_i)=0$，因此

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}F(\theta_i,\theta_j)=\sum_{i\neq j}F(\theta_i,\theta_j)=\sum_{i\neq j}\Re(\rho_{ij}^2).$$

结合前两个公式即可证明所述极限，从而完成证明。 $\square$

现在， J 是一个可计算的积分，参见 D节，随后即可完成证明。

定理 *3* 的证明。 由引理26和引理27,

$$\log \frac{\Delta(z_0,\dots,z_{n-1})}{n^n} = -\frac{t_n^2}{2}\Big(n^2 J + o(n^2)\Big) + o(1) = -\frac{(nt_n)^2}{2}\,J + o(1).$$

由于 $nt_n \to \pi^2/12$,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ even}}} \log \frac{\Delta(z_0,\dots,z_{n-1})}{n^n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{12}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{84\zeta(3)}{\pi^4}\right) = \frac{7}{24}\zeta(3) - \frac{\pi^4}{864}.$$

取指数,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ even}}} \frac{\Delta(z_0,\dots,z_{n-1})}{n^n} = \exp\left(\frac{7}{24}\zeta(3) - \frac{\pi^4}{864}\right).$$

由引理 21，对所有偶数 $n \geqslant 8$ ，该构形是可行的（直径 $\leqslant 2$），因此 $\Delta_{\max}(n) \geqslant \Delta(z_0, \dots, z_{n-1})$, 从而

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ even}}} \overline{\Delta}_{\max}(n) = \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ even}}} \frac{\Delta_{\max}(n)}{n^n} \geqslant \exp\left(\frac{7}{24}\zeta(3) - \frac{\pi^4}{864}\right). \qquad \square$$

注释28（其他奇数频率）。 可以将 $g(\theta) = $ 三角波（3θ） 替换为三角波（$m\theta$），其中 m 为奇数，并重复同样的展开与取极限策略，选择足够小的扰动振幅以保持直径 $\leqslant 2$。在该“三角波扰动”族的数值实验中，选取 $m = 3$ 似乎能给出最佳常数，而 $m = 1$ 则恢复了 *[15]*中*Sothanaphan*的构造；我们将此视为对猜想*4(iii)*的进一步证据。

参考文献

[1] C. Audet、A. Guillou、P. Hansen、S. Perron 和 F. Messine。《顶点间距离和最大的凸小六边形与七边形》。《全球优化杂志》，49(3):467–480，2011年3月。[2] C. Audet、P. Hansen 和 F. Messine。《周长最长的凸小八边形》。《组合理论杂志》*A*辑，114(1):135–150，2007年。[3] C. Audet、P. Hansen 和 D. Svrtan。《利用符号计算确定最大的凸小多边形》。《全球优化杂志》，81(1):261–268，2021年。2020年5月4日在线发表。[4] C. Bingane。《凸小多边形的最大周长和最大宽度》。技术报告（GERAD 工作论文）G–2021–33，GERAD，蒙特利尔高等商学院，2021年5月。另可从 Optimization Online 获取：https://optimization-online.org/2021/05/8430/。[5] T. F. Bloom。Erdős 问题 #1045。 `https://www.erdosproblems.com/1045`。[6] R. Brandenberg 和 B. González Merino。《完整的三维布拉施克 – 桑塔洛图》。《数学不等式与应用》，20(2):301–348，2017年。[7] S. Cambie、A. Decadt、Y. Dong、T. Hu 和 Q. Tang。《与 Erdős 问题 1045 相关的代码和数据》。 `https://github.com/StijnCambie/EP1045`，2026年。GitHub 代码库。[8] B. Datta。《一个离散等周问题》。《奉献几何学》，64:55–68，1997年。[9] P. Erdős、F. Herzog 和 G. Piranian。《多项式的度量性质》。《数学分析杂志》，6:125–148，1958年12月。

[10] J. Foster 和 T. Szabó。《多边形的直径图及 Graham 猜想的证明》。《组合理论杂志 *A*》，114:1515–1525，2007年。[11] H. Hopf 和 E. Pannwitz。第167题。《德国数学家协会年报》，43:114，1933年。[12] J. Nocedal 和 S. J. Wright。《数值优化》。施普林格运筹学与金融工程丛书。纽约州纽约市：施普林格，第2版，2006年。[13] J. Pach。《几何图论的开端》。载于《厄尔多斯百年纪念文集》，第25卷《博尧伊学会数学研究》，第465–484页。施普林格，柏林、海德堡，2013年。[14] C. Pommerenke。《关于复多项式的度量性质》。《密歇根数学杂志》，8(2):97–115，1961年。[15] N. Sothanaphan。《固定直径下关于距离乘积的厄尔多斯问题的改进下界》。*arXiv* 预印本，页码 arXiv:2512.14251，2025年12月。[16]D. R. Woodall。《交错图与僵局》。《组合数学及其应用》，348:335–348，1971年。

命题 14 的证明

最大化 Δ 等价于最大化 $f = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\log(|z_k - z_j|^2)$。设$\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ 是满足直径约束 $\max_{i,j}|z_i - z_j|\leqslant 2$ 的极大化构型。通过缩放，不妨设直径等于 2。令 G为直径图（等价地，活跃约束$|z_i - z_j| = 2$的图）。

根据引理5， G 至多有 4 条边。根据引理8和引理6， G 是连通的，且最小度至少为 1。根据引理 11， G 不含偶圈（特别地，它不是 C_4）。因此，经过重新标记后，G是以下之一：

(i) K_1,3，边为 {1, 2}, {2, 3}, {2, 4}；(ii) 一个带悬挂边的三角形，边为 {1, 2}, {1, 3}, {2,3}, {2, 4}；(iii) P_4，边为 {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}。

在这三种情况下，我们都可以假设{2，4} 和{2，3} 是直径边。通过平移和旋转，我们将其规范化

$$z_2 = 0, \qquad z_4 = 2, \qquad z_3 = 2e^{i\beta}.$$

由于$\mathbf{z}$ 是一个（全局，因而也是局部）极大化构型，定理 12 适用。

定理 $k = 4$ 驻定方程。在上述三种情况中，与 4 相接的唯一活跃边是{2，4}。因此，由定理 12 和 $k = 4$ 可得

$$\frac{1}{z_1 - 2} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{2e^{i\beta} - 2} = -2\lambda_{2,4}, \tag{15}$$

其中 $\lambda_{2,\,4}\geqslant 0$。特别地，左边是实数。

情形 *(i)*：星图 $K_{1,\,3}$ 不可能出现。这里{1，2} 是活跃的，因此 $z_1 = 2e^{i\alpha}$。对 (15) 取虚部，并利用

$$\frac{1}{e^{it} - 1} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\cot\Big(\frac{t}{2}\Big) \qquad (t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}),$$

我们得到

$$0 = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2(e^{i\alpha} - 1)} + \frac{1}{2(e^{i\beta} - 1)}\right) = -\frac{1}{4}\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right),$$

因此 $\cot(\alpha/2) = -\cot(\beta/2)$，即 $\beta \equiv -\alpha$（模 2π）。将 $\beta = -\alpha$ 代入 (15) 得到 $\lambda_{2,4} = \frac{1}{2}$。现在应用定理 12，其中 $k = 2$。由于与 2 相接的活跃边为 $\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，我们有

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \lambda_{1,2}(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) + \lambda_{2,3}(\overline{z}_3 - \overline{z}_2) + \lambda_{2,4}(\overline{z}_4 - \overline{z}_2).$$

由 $z_1 = 2e^{i\alpha}$，$z_3 = 2e^{-i\alpha}$，$z_4 = 2$ 和 $\lambda_{2,4} = \dfrac{1}{2}$，虚部迫使 $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,3} =: \lambda$。将 $k = 1$ 应用于定理 12（与 1 相邻的唯一活跃边是 $\{1,2\}$），得到

$$\frac{1}{-2e^{i\alpha}} + \frac{1}{2e^{-i\alpha} - 2e^{i\alpha}} + \frac{1}{2 - 2e^{i\alpha}} = -2\lambda\, e^{-i\alpha}.$$

乘以 $2e^{i\alpha}$ 后，右侧变为 $-4\lambda \in \mathbb{R}$，因此左侧的虚部必须为零。直接计算可得

$$0 = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \right) = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

由于 $\sin\alpha \neq 0$（否则点会重合或违反直径界），我们得到 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$。于是

$$|z_1 - z_4| = |2e^{i\alpha} - 2| = 2|e^{i\alpha} - 1| = 2\sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sqrt{3} > 2,$$

这与可行性矛盾。因此，情形 (i) 不可能是极大化构型。

情形 *(ii)*：带有一条悬挂边的三角形。这里 $\{1,2\}$、$\{2,3\}$、$\{1,3\}$ 均为活跃边，因此 $z_1 = 2e^{i\alpha}$ 和 $|z_1 - z_3| = 2$，即

$$|2e^{i\alpha} - 2e^{i\beta}| = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad 4\left|\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right| = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha - \beta \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

另一方面，由（15）中的虚部论证（如上所述）再次得到 $\beta \equiv -\alpha$（模 2π）。结合这两个关系，得到 $2\alpha \equiv \pm\frac{\pi}{3}$（模 2π），因此 $\alpha \equiv \pm\frac{\pi}{6}$，$\pm\frac{5\pi}{6}$（模 2π）。剩余的可行性约束 $|z_1 - z_4| \leqslant 2$ 为

$$|2e^{i\alpha} - 2| = 4\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| \leqslant 2 \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

这排除了 $\alpha \equiv \pm\frac{5\pi}{6}$。因此 $\alpha \equiv \pm\frac{\pi}{6}$，并且（在复共轭及对 $z_1 \leftrightarrow z_3$ 重新标记的意义下）我们可以取 $\alpha = \frac{\pi}{6}$。因此

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \qquad z_2 = 0, \qquad z_3 = \sqrt{3} - i, \qquad z_4 = 2.$$

对于这个构形，

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_2 - z_4| = |z_1 - z_3| = 2, \qquad |z_1 - z_4|^2 = |z_3 - z_4|^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3}.$$

因此

$$\overline{\Delta} = \frac{\Delta}{4^4} = \frac{4^4(8 - 4\sqrt{3})^2}{4^4} = (8 - 4\sqrt{3})^2 = 16(7 - 4\sqrt{3}).$$

情形（*iii*）：路径 P_4 给出 $\overline{\Delta} \leqslant 1$。设直径图为 P_4，其活跃集为 $\{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$。按前述方式归一化：

$$z_2 = 0, \qquad z_4 = 2, \qquad z_3 = 2e^{i\beta}, \qquad z_1 = z_3 + 2e^{i\alpha} = 2e^{i\beta} + 2e^{i\alpha}.$$

令 $\lambda_{1,3}, \lambda_{2,3}, \lambda_{2,4} \geqslant 0$ 为相应的乘子。将 $k = 4, 2, 1, 3$ 代入定理 12，得到

$$\frac{1}{z_1 - 2} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{z_3 - 2} = -2\lambda_{2,4}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{2}=2\lambda_{2,3}e^{-i\beta}+2\lambda_{2,4}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{-z_1}+\frac{1}{z_3-z_1}+\frac{1}{2-z_1}=-2\lambda_{1,3}e^{-i\alpha}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{z_1-z_3}+\frac{1}{-z_3}+\frac{1}{2-z_3}=2\lambda_{1,3}e^{-i\alpha}-2\lambda_{2,3}e^{-i\beta}. \tag{19}$$

命题29. 求解 (16)–(19) 可唯一确定（相差一个复共轭）

$$e^{i\beta}=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i,\qquad e^{i\alpha}=-\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{7}}{8}i,\qquad \lambda_{2,4}=\lambda_{1,3}=\frac{3}{4},\qquad \lambda_{2,3}=0.$$

命题*29*的证明。令集合 $A:=e^{i\alpha}$ 和 $B:=e^{i\beta}$，使得 $z_3=2B$ 且 $z_1=2(A+B)$。由（16）可得 $\lambda_{2,\,4}$ 的显式表达式:

$$4\lambda_{2,4}=1-\frac{1}{A+B-1}-\frac{1}{B-1}. \tag{20}$$

由（18）同理可得

$$4\lambda_{1,3}=1+\frac{A}{A+B}+\frac{A}{A+B-1}. \tag{21}$$

将（20）代入（17）并化简可得

$$4\lambda_{2,3}=\frac{(A+2B-1)(A(2B-1)+2B(B-1))}{(A+B)(B-1)(A+B-1)}. \tag{22}$$

由于 KKT乘子为实数，必有 $\lambda_{2,\,4}$，$\lambda_{2,\,3}\in\mathbb{R}$。利用 $A=A^{-1}$、$B=B^{-1}$（因为$|A|=|B|=1$），条件 $\lambda_{2,\,4}=\lambda_{2,\,4}$（消去分母，并利用 $\overline{B}\neq 1$，因为 $z_3\neq z_4$）等价于

$$2A^2B^2-A^2B-A^2+2AB^3-3AB^2-3AB+2A-B^3-B^2+2B=0. \tag{23}$$

同样，$\lambda_{2,\,3}=\overline{\lambda_{2,\,3}}$和（22）给出

$$(A+B^2)(3A^2B-3A^2+3AB^2-8AB+3A-3B^2+3B)=0, \tag{24}$$

同样是在消去分母之后。
反设 (24) 中的第二因子为零，即

$$3A^2B-3A^2+3AB^2-8AB+3A-3B^2+3B=0. \tag{25}$$

将 (25) 和 (23) 改写为关于 A 的二次方程:

$$3(B-1)A^2+(3B^2-8B+3)A-3B(B-1)=0,$$

and

$$(B-1)(2B+1)A^2+(2B^3-3B^2-3B+2)A-B(B-1)(B+2)=0.$$

由于 $B\neq 1$，将第一个方程乘以 $(2B+1)$，再减去第二个方程的 3 倍。A^2 项相消，经过简单化简可得

$$(B-1)((4B-3)A+3B(B-1))=0,$$

因此

$$A=-\frac{3B(B-1)}{4B-3}. \tag{26}$$

取绝对值并利用 $|A|=|B|=1$，得到

$$|4B-3|=3|B-1|.$$

现在 $|B-1|^2=2-2\cos\beta$ 且 $|4B-3|^2=25-24\cos\beta$，因此

$$25-24\cos\beta=9(2-2\cos\beta)\quad\Rightarrow\quad\cos\beta=\frac{7}{6},$$

矛盾。因此 (24) 中的第二因子不能为零，从而

$$A=-B^2. \tag{27}$$

将 (27) 代入 (23)，得到因式分解

$$0=B(B+1)(B^2-B+1)(2B^2-3B+2).$$

现在 $B\neq 0$。此外，$B=-1$ 是不可能的，因为那样会有 $|z_3-z_4|=|-2-2|=4>2$。最后，$B^2-B+1=0$蕴含 $B=e^{\pm i\pi/3}$，从而 $|z_3-z_4|=|2B-2|=2$，即边 $\{3,4\}$ 也会是活动的，这与路径假设矛盾。因此

$$2B^2-3B+2=0. \tag{28}$$

求解 (28) 得到 $B=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i$，然后由 (27) 得到 $A=-B^2=-\frac{1}{8}\mp\frac{3\sqrt{7}}{8}i$。将这些值代入 (20)–(22)，得到

$$\lambda_{2,4}=\lambda_{1,3}=\frac{3}{4},\qquad\lambda_{2,3}=0,$$

而符号的两种选择对应于复共轭。
上面得到的 $A,B,\lambda_{1,3},\lambda_{2,3},\lambda_{2,4}$ 的取值，是由 (16)、(17)、(18) 以及乘子的实数约束推导得出的。将它们代入 (19) 可知，(19) 也成立。至此证明完毕。

□

因此，根据命题29，经过归一化（平移和旋转）后，KKT 系统在复共轭意义下有唯一解。因此，我们可以假设

$$z_2=0,\quad z_4=2,\quad z_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i,\quad z_1=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i.$$

对于此构形，

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2},\quad|z_3-z_4|=\sqrt{2},\quad|z_1-z_4|=1,$$

而活跃约束满足 $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=|z_2-z_4|=2$。因此

$$\Delta=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|z_i-z_j|^2=2\cdot4\cdot1\cdot4\cdot4\cdot2=256,\qquad\overline{\Delta}=\frac{\Delta}{4^4}=1.$$

因此，情形 (iii) 不可能达到全局最大值，因为 $16(7-4\sqrt{3})>1$；而路径情形中的任何极大化构型，要么满足 KKT 条件（从而得到 $\Delta(4)=1$），要么位于边界上，此时又有一个距离约束变为活跃约束，因而归结为情形 (ii)。

综合这三种情形，唯一的极大化构型（在全等和重新标记意义下）恰好是情形 (ii) 中的风筝形，且最大值为 $16(7-4\sqrt{3})$。

□

B 引理16的详细证明

我们只证明 $\operatorname{diam}(Y) \leqslant \cos(\pi/2n)$，因为反向不等式已在正文中证明。设 $\delta := \pi/n$。由于 Y 是边长为 $\ell = \sin\delta$ 的等边图形，令

$$e_r = \overrightarrow{B_r B_{r+1}}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant n,$$

从而对所有 r， $|e_r| = \ell$ 成立。由构造， Y 是一条闭合多边形链，故 $\sum_{r=1}^{n} e_r = 0$。此外，由构造， Y 的外角等于：

$$\delta \text{ at } B_k, B_{3k}, B_{5k}, \qquad 3\delta \text{ at } B_{2k}, B_{4k}, B_{6k}, \qquad 2\delta \text{ otherwise.}$$

断言 30。 取$\arg(e_1) \equiv 0$ (模 π)， Y的边的方向模 π 恰好为$\{0, \delta, 2\delta, \ldots, (n-1)\delta\}$。

断言 *30* 的证明。 Y的边界分成六个各含 k 条连续边的块。在每个块内，所有外角均等于 2δ，因此块中的 k 个边的方向构成公差为 2δ、模 π的等差数列。由于$(k-1)\cdot 2\delta = \pi/3 - 2\delta$，且连接处外角在 δ 与 3δ之间交替，相继各块的起始方向交替相差$(2k-1)\delta$ 与$(2k+1)\delta$ 。从$\arg(e_1) \equiv 0$ (模 π)出发，得到如下方向集合：

$$\begin{aligned} A =& \{2j\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(2k-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \\ & \cup \{(4k+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(6k-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \\ & \cup \{(8k+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(10k-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\}. \end{aligned}$$

由于 $n\delta = \pi$，模 π 运算等价于将整数系数对 $n = 6k$取模。因此$6k \equiv 0$、 $8k \equiv 2k$和 $10k \equiv 4k$ 对 n取模，于是

$$\begin{aligned} A \equiv& \{2j\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(2k-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \\ & \cup \{(4k+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \\ & \cup \{(2k+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \cup \{(4k-1+2j)\delta : 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

三个偶系数等差数列覆盖模 n 的所有偶剩余类（每个数列的大小为 k，且两两不相交），三个奇系数等差数列则覆盖模 n的所有奇剩余类。因此，它们的并集恰为 $\{0、1、\ldots、n-1\}\delta$模 π，如所述。 □

根据断言 30，对于每个 $m \in \{0、\ldots、n-1\}$，两个相反向量中恰有一个

$$u_m = \ell\, e^{im\delta}, \qquad -u_m$$

出现在 $\{e_1、\ldots、e_n\}$中。
任取顶点 B_i、 B_j。令 $I \subset \{1、\ldots、n\}$ 为沿着从 B_i 到 B_j的边界弧上的边的指标集。于是

$$B_j - B_i = \sum_{r \in I} e_r.$$

利用 $\sum_{r=1}^{n} e_r = 0$，我们可以写成

$$B_j - B_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{r \in I} e_r - \sum_{r \notin I} e_r \right).$$

因此存在符号 $\varepsilon_m \in \{\pm 1\}$ 使得

$$B_j - B_i = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m u_m.$$

从而，

$$|B_j - B_i| \leqslant \frac{1}{2} \max_{\varepsilon_m \in \{\pm 1\}} \left| \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m u_m \right|.$$

对于任意方向 e^{it}，$\sum \varepsilon_m u_m$ 在该方向上的投影等于

$$\ell \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m \cos(t - m\delta).$$

取 $\varepsilon_m = \operatorname{sgn}(\cos(t - m\delta))$ 时可得到最大值。因此

$$\max_{\varepsilon_m} \left| \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m u_m \right| = \ell \max_{t \in \mathbb{R}} \sum_{m=0}^{n-1} |\cos(t - m\delta)|.$$

我们声称

$$\max_{t} \sum_{m=0}^{n-1} |\cos(t - m\delta)| \leqslant \frac{1}{\sin(\delta/2)}.$$

事实上，令 $S(t) = \sum_{m=0}^{n-1} |\cos(t - m\delta)|$。注意到 $S(t+\delta) = S(t)$。由于 $|\cos x|$ 的周期为 π，不妨假设 $t \in [-\pi/2, \pi/2)$。取唯一的整数 $M \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 使得

$$t \in \Big[M\delta - \frac{\pi}{2},\ (M+1)\delta - \frac{\pi}{2} \Big).$$

那么对于 $m \leqslant M$，有 $t - m\delta \in [-\pi/2, \pi/2)$，因此 $\cos(t - m\delta) \geqslant 0$；而对于 $m \geqslant M+1$，有 $t - m\delta \in (-3\pi/2,\ -\pi/2)$，因此 $\cos(t - m\delta) \leqslant 0$。因此

$$S(t) = \sum_{m=0}^{M} \cos(t - m\delta) - \sum_{m=M+1}^{n-1} \cos(t - m\delta) = \Re \left(e^{it} \Big(\sum_{m=0}^{M} e^{-im\delta} - \sum_{m=M+1}^{n-1} e^{-im\delta} \Big) \right),$$

其中 $\Re(z)$ 表示复数 z 的实部。利用几何级数和 $n\delta = \pi$（因此$e^{-in\delta} = e^{-i\pi} = -1$），我们计算得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M} e^{-im\delta} - \sum_{m=M+1}^{n-1} e^{-im\delta} &= 2 \sum_{m=0}^{M} e^{-im\delta} - \sum_{m=0}^{n-1} e^{-im\delta} \\ &= \frac{2(1 - e^{-i(M+1)\delta}) - (1 - e^{-in\delta})}{1 - e^{-i\delta}} \\ &= \frac{-2e^{-i(M+1)\delta}}{1 - e^{-i\delta}} = \frac{i\, e^{-i(M+\frac{1}{2})\delta}}{\sin(\delta/2)}, \end{aligned}$$

因为 $1 - e^{-i\delta} = e^{-i\delta/2}\, 2i\sin(\delta/2)$。因此

$$S(t) = \frac{1}{\sin(\delta/2)} \Re(i\, e^{i(t - (M+\frac{1}{2})\delta)}) = -\frac{\sin(t - (M+\tfrac{1}{2})\delta)}{\sin(\delta/2)} \leqslant \frac{1}{\sin(\delta/2)}.$$

因此 $\max_{t \in \mathbb{R}} \sum_{m=0}^{n-1} |\cos(t - m\delta)| \leqslant \frac{1}{\sin(\delta/2)}$。所以

$$\max_{\varepsilon_m} \left| \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_m u_m \right| \leqslant \frac{\ell}{\sin(\delta/2)} = \frac{\sin\delta}{\sin(\delta/2)} = 2\cos(\delta/2).$$

由此可得，对所有 i, j，$|B_i B_j| \leqslant \cos(\delta/2) = \cos(\pi/2n)$ 均成立。因此，$\operatorname{diam}(Y) \leqslant \cos(\pi/2n)$。证明至此完成。 □

C 第 4 节中积分的计算

本节补充了 Maple 中对第 4 节引理所涉及积分的计算。

C.1 引理 17 中积分的计算

> $f(b,c,r) := 正弦^2(b) + 正弦^2(c) + 2\cdot 正弦(b)\cdot 正弦(c)\cdot 余弦(b+c+r)$

$$f := (b,c,r) \mapsto \sin(b)^2 + \sin(c)^2 + 2\cdot\sin(b)\cdot\sin(c)\cdot\cos(b+c+r) \tag{29}$$

> $g(b,c,r) := 化简(展开(f(b,c,0)^2 - f(b,c,r)\cdot f(b,c,-r)))$

$$g := (b,c,r) \mapsto simplify\Big(expand\Big(f(b,c,0)^2 - f(b,c,r)\cdot f(b,c,-r)\Big)\Big) \tag{30}$$

> 收集(展开($g(b,c,r)$),余弦(r))

$$\begin{aligned} &-4\sin(c)^2\sin(b)^2\cos(r)^2 \\ &+\Big(4\cos(b)^3\cos(c)\sin(c)\sin(b) - 4\cos(b)^2\sin(c)^2\sin(b)^2 + 4\cos(b)\cos(c)^3\sin(c)\sin(b) \\ &-4\cos(c)^2\sin(c)^2\sin(b)^2 - 8\cos(b)\cos(c)\sin(c)\sin(b) + 8\sin(c)^2\sin(b)^2\Big)\cos(r) \\ &-4\cos(b)^3\cos(c)\sin(c)\sin(b) + 4\cos(b)^2\sin(c)^2\sin(b)^2 \\ &-4\cos(b)\cos(c)^3\sin(c)\sin(b) - 4\sin(c)^4\sin(b)^2 + 8\cos(b)\cos(c)\sin(c)\sin(b) \end{aligned} \tag{31}$$

> $simplify\Bigg(\frac{1}{r^2}\Big(-4\sin^2(b)\sin^2(c)(1-r^2)$
$+(-4\sin^2(b)\sin^2(c)\cos^2(c) - 4\sin^2(b)\sin^2(c)\cos^2(b)$
$+4\sin(b)\sin(c)\cos^3(c)\cos(b) + 4\sin(b)\sin(c)\cos(c)\cos^3(b)$
$+8\sin^2(b)\sin^2(c) - 8\sin(b)\sin(c)\cos(b)\cos(c))\left(1-\frac{r^2}{2}\right)$
$-4\sin^4(c)\sin^2(b) + 4\sin^2(b)\sin^2(c)\cos^2(b)$
$-4\sin(b)\sin(c)\cos^3(c)\cos(b) - 4\sin(b)\sin(c)\cos(c)\cos^3(b)$
$+8\sin(b)\sin(c)\cos(b)\cos(c)\Big)\Bigg)$

$$-2\sin(b)\Big(\cos(c)\cos(b)^3 - \cos(b)^2\sin(c)\sin(b) + \Big(\cos(c)^3 - 2\cos(c)\Big)\cos(b) - \cos(c)^2\sin(c)\sin(b)\Big)\sin(c) \tag{32}$$

> $h(b,c) := -2(余弦(c)\,余弦(b)^3 - 正弦(b)\,正弦(c)\,余弦(b)^2$
$+(余弦(c)^3 - 2\,余弦(c))\,余弦(b) - 正弦(b)\,正弦(c)\,余弦(c)^2)\,正弦(b)\,正弦(c)$

$$\begin{aligned} h := (b,c) \mapsto &-\Big(2\cdot\cos(c)\cdot\cos(b)^3 - 2\cdot\sin(b)\cdot\sin(c)\cdot\cos(b)^2 + 2 \\ &\cdot\Big(余弦(c)^3 - 2\cdot 余弦(c)\Big)\cdot 余弦(b) - 2\cdot 正弦(b)\cdot 正弦(c)\cdot 余弦(c)^2\Big)\cdot 正弦(b) \\ &\cdot 正弦(c) \end{aligned} \tag{33}$$

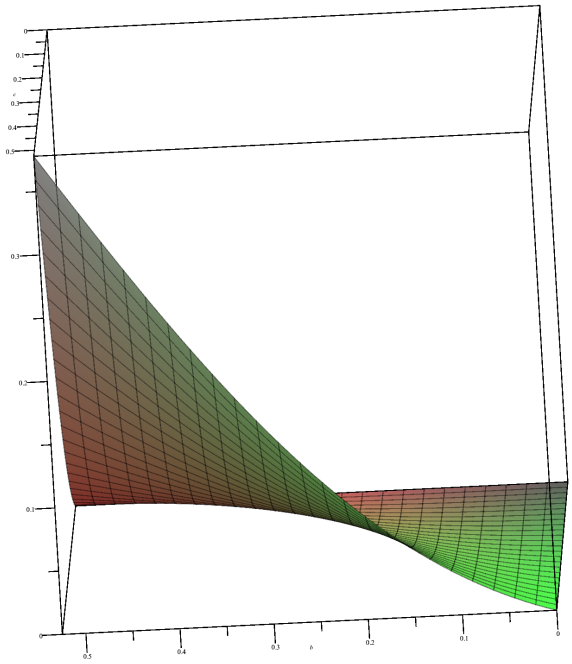
> 化简($h(b,\ c) - 2\cdot(\sin^2(b) + \sin^2(c))\cdot\cos(b+c)\cdot\sin(b)\sin(c)$)

$$4\sin(c)^2\sin(b)^2 \tag{34}$$

> $simplify(int(int(\frac{h(b,c)}{\sin(b+c)^4}, b=0..\frac{\pi}{6}), c=0..\frac{\pi}{6}))$

$$-\frac{1}{4}+\frac{\pi\sqrt{3}}{24}+\frac{\ln(3)}{8} \tag{35}$$

> $plot3d(h(b,c), b=0..\frac{3.15}{6}, c=0..\frac{3.15}{6})$



C.2 引理18中积分的计算

> $f(b,c,r) := (\frac{1}{2}-\cos(\frac{5}{6}\pi-c-r)\cdot\sin(c)-\cos(\frac{5}{6}\pi-b+r)\cdot\sin(b))^2+(\sin(\frac{5}{6}\pi-c-r)\cdot\sin(c)-\sin(\frac{5}{6}\pi-b+r)\cdot\sin(b))^2$

$$\begin{aligned} f := (b,c,r) \mapsto & \left(\frac{1}{2}-\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-c-r\right)\cdot\sin(c)-\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-b+r\right)\cdot\sin(b)\right)^2 \\ & +\left(\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-c-r\right)\cdot\sin(c)-\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6}-b+r\right)\cdot\sin(b)\right)^2 \end{aligned} \tag{36}$$

> $g(b,\ c,\ r) := 化简(展开(f(b,\ c,\ 0)^2 - f(b,\ c,\ r)\cdot f(b,\ c,\ -r)))$

$$g := (b, c, r) \mapsto simplify\Big(expand\Big(f(b,c,0)^2 - f(b,c,r)\cdot f(b,c,-r)\Big)\Big) \tag{37}$$

> 收集(展开($g(b, c, r)$),$\cos(r)$)

$$\begin{aligned}
&\Big(\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)\sin(b)^2 + \sin(c)^2\sin(b)\sqrt{3}\,\cos(b)\\
&+ \cos(c)^2\cos(b)^2 - \sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b) - 1\Big)\cos(r)^2\\
&+ \left(-3\cos(b)^4 + \frac{7\cos(b)^2}{4} + 4\cos(b)^4\cos(c)^2 + 4\cos(b)^2\cos(c)^4\right.\\
&- 8\cos(c)^2\cos(b)^2 + \sqrt{3}\,\sin(b)\cos(b)^3 - \frac{13\sin(b)\sqrt{3}\,\cos(b)}{4} + \sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)^3\\
&- \frac{13\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)}{4} + 2\sqrt{3}\,\sin(b)\cos(b)\cos(c)^2 + 8\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)\\
&- 4\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)^3 + 2\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)\cos(b)^2\\
&\left.- 4\sin(c)\cos(c)^3\sin(b)\cos(b) + \frac{5}{2} - 3\cos(c)^4 + \frac{7\cos(c)^2}{4}\right)\cos(r)\\
&+ \frac{9\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)}{4} - \sqrt{3}\,\sin(b)\cos(b)^3 + \frac{9\sin(b)\sqrt{3}\,\cos(b)}{4}\\
&- \sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)^3 + 4\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)^3 - \sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)\cos(b)^2\\
&+ 4\sin(c)\cos(c)^3\sin(b)\cos(b) - \sqrt{3}\,\sin(b)\cos(b)\cos(c)^2\\
&- 7\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b) - \frac{7\cos(c)^2}{4} + 3\cos(c)^4 - 4\cos(b)^2\cos(c)^4\\
&+ 7\cos(c)^2\cos(b)^2 + 3\cos(b)^4 - \frac{7\cos(b)^2}{4} - 4\cos(b)^4\cos(c)^2 - \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
&> \mathit{simplify}\left(\frac{1}{r^2}\left(\left(\sin^2(c)\sin(b)\sqrt{3}\cos(b)+\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)\sin^2(b)\right.\right.\right.\\
&\qquad -\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)+\cos^2(b)\cos^2(c)-1)(1-r^2)\\
&\qquad +\left(-4\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos^3(b)+2\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)\cos^2(b)\right.\\
&\qquad +2\sqrt{3}\sin(b)\cos(b)\cos^2(c)+8\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)\\
&\qquad -4\sin(c)\cos^3(c)\sin(b)\cos(b)-3\cos^4(c)+\frac{7}{4}\cos^2(c)\\
&\qquad -3\cos^4(b)+\frac{7}{4}\cos^2(b)+\frac{5}{2}+\sin(c)\sqrt{3}\cos^3(c)\\
&\qquad -\frac{13}{4}\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)+\sqrt{3}\sin(b)\cos^3(b)-\frac{13}{4}\sin(b)\sqrt{3}\cos(b)\\
&\qquad \left.-8\cos^2(b)\cos^2(c)+4\cos^2(b)\cos^4(c)+4\cos^2(c)\cos^4(b)\right)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)\\
&\qquad +4\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos^3(b)-7\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)\\
&\qquad -\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)\cos^2(b)-\sqrt{3}\sin(b)\cos(b)\cos^2(c)\\
&\qquad +4\sin(c)\cos^3(c)\sin(b)\cos(b)-\frac{7}{4}\cos^2(b)-\frac{7}{4}\cos^2(c)\\
&\qquad +3\cos^4(c)+3\cos^4(b)-\sin(c)\sqrt{3}\cos^3(c)+\frac{9}{4}\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)\\
&\qquad -\sqrt{3}\sin(b)\cos^3(b)+\frac{9}{4}\sin(b)\sqrt{3}\cos(b)\\
&\qquad \left.\left.-4\cos^2(b)\cos^4(c)-4\cos^2(c)\cos^4(b)+7\cos^2(b)\cos^2(c)-\frac{3}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}+\frac{\left(-4\sin(b)\cos(b)^3-4\cos(c)^3\sin(c)+5\cos(b)\sin(b)+5\sin(c)\cos(c)\right)\sqrt{3}}{8}\\
&+\frac{\left(3-4\cos(c)^2\right)\cos(b)^4}{2}+2\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)^3\\
&+\frac{\left(-16\cos(c)^4+24\cos(c)^2-7\right)\cos(b)^2}{8}\\
&+2\left(\cos(c)^2-\frac{3}{2}\right)\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)+\frac{3\cos(c)^4}{2}-\frac{7\cos(c)^2}{8}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
> \mathrm{h(b,c)} := -\frac{1}{4}+\frac{(-4\sin(b)\cos(b)^3-4\sin(c)\cos(c)^3+5\sin(b)\cos(b)+5\cos(c)\sin(c))\sqrt{3}}{8}+\frac{(-4\cos(c)^2+3)\cos(b)^4}{2}+2\sin(c)\cos(c)\sin(b)\cos(b)^3+\frac{(-16\cos(c)^4+24\cos(c)^2-7)\cos(b)^2}{8}+
$$

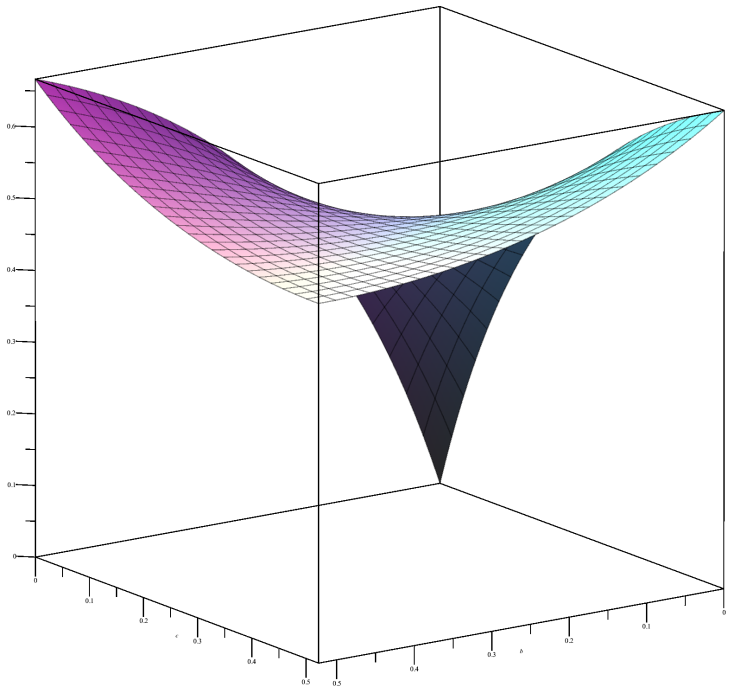
$$2\sin(b)(\cos(c)^2-\frac{3}{2})\cos(c)\sin(c)\cos(b)+\frac{3\cos(c)^4}{2}-\frac{7\cos(c)^2}{8}$$

$$\begin{aligned} h &:= (b,c)\mapsto -\frac{1}{4} \\ &+\frac{\left(-4\cdot\sin(b)\cdot\cos(b)^3-4\cdot\sin(c)\cdot\cos(c)^3+5\cdot\sin(b)\cdot\cos(b)+5\cdot\cos(c)\cdot\sin(c)\right)\cdot\sqrt{3}}{8} \\ &+\frac{\left(-4\cdot\cos(c)^2+3\right)\cdot\cos(b)^4}{2}+2\cdot\cos(c)\cdot\sin(c)\cdot\sin(b)\cdot\cos(b)^3 \\ &+\frac{\left(-16\cdot\cos(c)^4+24\cdot\cos(c)^2-7\right)\cdot\cos(b)^2}{8}+2\cdot\sin(b) \\ &\cdot\left(\cos(c)^2-\frac{3}{2}\right)\cdot\cos(c)\cdot\sin(c)\cdot\cos(b)+\frac{3\cdot\cos(c)^4}{2}-\frac{7\cdot\cos(c)^2}{8} \end{aligned} \tag{40}$$

> $simplify(int(int(\frac{h(b,c)}{\sin(b+c+\frac{\pi}{6})^4},b=0..\frac{\pi}{6}),c=0..\frac{\pi}{6}))$

$$\frac{1}{4}-\frac{5\ln(3)}{8}+\frac{\pi\sqrt{3}}{24}+\frac{\ln(2)}{2} \tag{41}$$

> $plot3d(\frac{h(b,c)}{f(c,b,0)^2},b=0..\frac{3.14}{6},c=0..\frac{3.14}{6})$



> $int(int(h(b,c)\,f(c,b,0)^2, b = 0..\frac{3.14159265359}{6}$, 数值 $= true)\quad c = 0..\frac{3.14159265359}{6}$, 数值 $= true)$

$$0.1366658305 \tag{42}$$

C.3 引理 19 中积分的计算

> $f(b,c,r) := (\frac{1}{2} - \cos(\frac{5}{6}\,\pi - c - r)\cdot\sin(c) - \frac{1}{2}\cdot\cos(\frac{2\cdot\pi}{3} + r) - \cos(\frac{\pi}{2} - b)\cdot\sin(b))^2 + (\sin(\frac{5}{6}\,\pi - c - r)\cdot\sin(c) - (\frac{1}{2}\cdot\sin(\frac{2\cdot\pi}{3} + r) + \sin(\frac{\pi}{2} - b)\cdot\sin(b)))^2$

$$\begin{aligned} f := (b,c,r) \mapsto &\left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{5\cdot\pi}{6} - c - r\right)\cdot\sin(c) - \frac{\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3} + r\right)}{2} - \cos\left(-b + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(b)\right)^2 \\ &+ \left(\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{6} - c - r\right)\cdot\sin(c) - \frac{\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3} + r\right)}{2} - \sin\left(-b + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(b)\right)^2 \end{aligned} \tag{43}$$

> $g(b,c,r) :=$ 化简(展开$(f(b,c,0)^2 - f(b,c,r)\cdot\ f(b,c,-r))$)

$$g := (b,c,r) \mapsto simplify\left(expand\left(f(b,c,0)^2 - f(b,c,r)\cdot f(b,c,-r)\right)\right) \tag{44}$$

> $collect(expand(g(b,c,r)),\cos(r))$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\cos(r)^2}{4}+\left(\sin(b)\cos(b)\sin(c)\cos(c)-\sin(b)\cos(b)\sqrt{3}\,\cos(c)^2\right.\\
&+\frac{\sqrt{3}\,\cos(b)\sin(b)}{2}-\sin(c)\cos(c)\sqrt{3}\,\cos(b)^2-\cos(c)^2\cos(b)^2\\
&\left.+\frac{\cos(b)^2}{2}+\frac{\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)}{2}+\frac{\cos(c)^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\cos(r)+\frac{\sin(b)^2}{2}\\
&-\sin(b)\cos(b)\sin(c)\cos(c)+\sin(b)\cos(b)\sqrt{3}\,\cos(c)^2-\frac{\sqrt{3}\,\cos(b)\sin(b)}{2}\\
&+\sin(c)\cos(c)\sqrt{3}\,\cos(b)^2+\cos(c)^2\cos(b)^2-\frac{\sin(c)\sqrt{3}\,\cos(c)}{2}-\frac{\cos(c)^2}{2}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

> *simplify*$\left(\frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{4}(1-r^2)\right.\right.$
$+\Big(-\sqrt{3}\cos^2(c)\cos(b)\sin(b)-\cos^2(b)\cos^2(c)+\frac{1}{2}\cos^2(c)$
$-\sqrt{3}\sin(c)\cos(c)\cos^2(b)+\sin(c)\cos(c)\cos(b)\sin(b)$
$+\frac{1}{2}\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(b)\cos(b)+\frac{1}{2}\cos^2(b)-\frac{1}{4}\Big)\left(1-\frac{r^2}{2}\right)$
$+\sqrt{3}\cos^2(c)\cos(b)\sin(b)+\cos^2(b)\cos^2(c)+\sqrt{3}\sin(c)\cos(c)\cos^2(b)$
$-\sin(c)\cos(c)\cos(b)\sin(b)-\frac{1}{2}\sin(c)\sqrt{3}\cos(c)+\frac{1}{2}\sin^2(c)$
$\left.\left.-\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin(b)\cos(b)-\frac{1}{2}\cos^2(b)\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{8}+\frac{\left(2\cos(b)^2\sin(c)\cos(c)+\sin(b)\left(-1+2\cos(c)^2\right)\cos(b)-\sin(c)\cos(c)\right)\sqrt{3}}{4}\\
&+\frac{\left(-1+2\cos(c)^2\right)\cos(b)^2}{4}-\frac{\sin(b)\cos(b)\sin(c)\cos(c)}{2}-\frac{\cos(c)^2}{4}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

> $h(b,c):=\frac{3}{8}+\frac{(2\sin(c)\cos(c)\cos(b)^2+\sin(b)(2\cos(c)^2-1)\cos(b)-\sin(c)\cos(c))\sqrt{3}}{4}+$
$\frac{(2\cos(c)^2-1)\cos(b)^2}{4}-\frac{\sin(c)\cos(c)\cos(b)\sin(b)}{2}-\frac{\cos(c)^2}{4}$

$$
\begin{aligned}
h:=(b,c)\mapsto&\ \frac{3}{8}\\
&+\frac{\left(2\cdot\sin(c)\cdot\cos(c)\cdot\cos(b)^2+\sin(b)\cdot\left(2\cdot\cos(c)^2-1\right)\cdot\cos(b)-\sin(c)\cdot\cos(c)\right)\cdot\sqrt{3}}{4}\\
&+\frac{\left(2\cdot\cos(c)^2-1\right)\cdot\cos(b)^2}{4}-\frac{\sin(c)\cdot\cos(c)\cdot\cos(b)\cdot\sin(b)}{2}-\frac{\cos(c)^2}{4}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

> *simplify*$(int(int(\frac{h(b,c)}{\sin(b+c+\frac{\pi}{3})^4},b=0..\frac{\pi}{6}),c=0..\frac{\pi}{6}))$

$$
-\frac{\ln(3)}{2}+\ln(2) \tag{48}
$$

> $int(int(h(b,c)\,f(c,b,0)^2, b = 0..\frac{3.1415926535}{6}, \text{数值 } = true)\ \ c = 0..\frac{3.1415926535}{6}, \text{数值 } = true)$

$$0.1438410363 \tag{49}$$

D 的计算 J

我们通过转化为傅里叶级数来计算 J。首先需要用到三角波的经典展开。

引理 31. 三角波的傅里叶展开为

$$\mathrm{tri}(x) = \sum_{\substack{k\geqslant 1\\ k\ \text{odd}}} \frac{8}{\pi^2 k^2}\cos(kx),$$

该级数绝对收敛（因而一致收敛）。

证明。 由于三角波是偶函数且均值为 0，因此只有余弦系数:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tri}(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos(kx)\,dx.$$

第一项积分为 0，分部积分得 $\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{(-1)^k-1}{k^2}$，因此

$$a_k = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2} = \begin{cases}\frac{8}{\pi^2k^2}, & k\ \text{odd},\\ 0, & k\ \text{even}.\end{cases}$$

由 $\sum_{k\ 奇} 1/k^2 < \infty$可知其绝对收敛。 □

对于整数 k，定义如下：对于 $x \neq y$,

$$R_k(x,y) = \frac{e^{ikx}-e^{iky}}{e^{ix}-e^{iy}}.$$

引理 32。 对于整数 k,ℓ，有

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k(x,y)\,R_\ell(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases}1-|k-1|, & k+\ell = 2,\\ 0, & k+\ell \neq 2.\end{cases}$$

证明。 令 $z = e^{ix}$ 且 $w = e^{iy}$。若 $k \geqslant 1$，则

$$R_k(x,y) = \frac{z^k-w^k}{z-w} = \sum_{m=0}^{k-1} z^{k-1-m}w^m = \sum_{m=0}^{k-1} e^{i((k-1-m)x+my)}.$$

若 $k \leqslant 0$，则将 $k=-p$ 写成 $p \geqslant 0$,

$$R_{-p}(x,y) = \frac{z^{-p}-w^{-p}}{z-w} = \frac{w^p-z^p}{z^pw^p(z-w)} = -\frac{z^p-w^p}{z^pw^p(z-w)} = -\sum_{m=0}^{p-1} z^{-(m+1)}w^{-(p-m)}.$$

在所有情况下， R_kR_ℓ 都是指数函数 $e^{i(ax+by)}$的有限和。利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iax}\,dx = \begin{cases}1, & a=0,\\ 0, & a\neq 0,\end{cases}$$

可以验证，只有当 x 频率和 y 频率的总和都为零时，才会出现非零贡献，这迫使 $k+\ell=2$。当 $k+\ell=2$ 时，剩余项的数量为 $1-|k-1|$，且每一项的贡献均为 1。 □

我们使用菲耶尔逼近，将核恒等式推广到我们的利普希茨 f。对于 $N \geqslant 0$，定义 菲耶尔核

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{50}$$

并且对于一个 2π–周期函数 f， $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 定义其菲耶尔平均为

$$f^{(N)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\,K_N(t)\,dt. \tag{51}$$

若存在 $L \geqslant 0$，使得一个 2π–周期函数 f 在圆上是利普希茨的，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,d(x,y) \qquad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}, \tag{52}$$

我们将满足条件的最小 L 记为 $\mathrm{Lip}(f)$。

引理 33。若 f 是 2π–周期函数，且在圆上是利普希茨的，则对每个 $N \geqslant 0$，

$$\mathrm{Lip}(f^{(N)}) \leqslant \mathrm{Lip}(f).$$

此外，对所有满足 $d(x,y) > 0$ 的 $x, y \in \mathbb{R}$，

$$\left|\frac{f^{(N)}(x) - f^{(N)}(y)}{e^{ix} - e^{iy}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Lip}(f),$$

关于 N 一致。

证明。由于 $K_N \geqslant 0$ 和 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)\,dt = 1$，且 $d(x-t,\ y-t) = d(x,\ y)$，因此我们有

$$|f^{(N)}(x) - f^{(N)}(y)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(y-t)|\,K_N(t)\,dt \leqslant \mathrm{Lip}(f)\,d(x,y),$$

这意味着 $\mathrm{Lip}(f^{(N)}) \leqslant \mathrm{Lip}(f)$。对于 $x \neq y$，我们有 $|e^{ix} - e^{iy}| = 2\sin(d(x,\ y)/2) \geqslant 2d(x,\ y)/\pi$，商的界由此得出。 □

引理 34。设 $\rho(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{e^{ix} - e^{iy}}$ 如 (14) 中所示，并定义

$$B(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho(x,y)^2\,dx\,dy.$$

那么 $B(f)$ 是实数，且等于

$$B(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 - |k-1|)\,a_k\,a_{2-k},$$

其中 $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$ 是 f 的傅里叶级数。

证明。设 $f^{(N)}$ 为菲耶尔平均。定义

$$\rho_N(x,y) = \frac{f^{(N)}(x) - f^{(N)}(y)}{e^{ix} - e^{iy}}.$$

由一致收敛 $f^{(N)} \to f$，我们对每个 $x \neq y$ 都有 $\rho_N(x,y) \to \rho(x,y)$。对于我们的特定 $f(x) = g(x)\,e^{ix}$，引理 20 蕴含 $|g| \leqslant 1$ 且 $\mathrm{Lip}(g) \leqslant L$。因此，对于所有 $x, y \in \mathbb{R}$，

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|e^{ix} - e^{iy}| \leqslant L\,d(x,y) + 2\sin(d(x,y)/2) \leqslant (L+1)\,d(x,y),$$

因此 $\mathrm{Lip}(f) \leqslant L+1$。由引理 33，$|\rho_N(x,y)| \leqslant \frac{\pi}{2}\mathrm{Lip}(f)$ 关于 N 以及 (x,y) 一致收敛。因此可以应用控制收敛定理，且

$$B(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho_N(x,y)^2\,dx\,dy.$$

No W $f^{(N)}$是一个三角多项式，记作 $f_{(N)}(x) = \sum_{|k|\leqslant N} a_k^{(N)} e^{ikx}$。那么对于 $x \neq y$ ，

$$\rho_N(x,y) = \sum_{|k|\leqslant N} a_k^{(N)}\, R_k(x,y),$$

一个有限和。因此，

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho_N(x,y)^2\,dx\,dy = \sum_{|k|,|\ell|\leqslant N} a_k^{(N)} a_\ell^{(N)} \cdot \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R_k R_\ell\,dx\,dy.$$

根据引理 32，只有满足 $k+\ell = 2$ 的项会保留下来，得到

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho_N(x,y)^2\,dx\,dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1-|k-1|) a_k^{(N)} a_{2-k}^{(N)}.$$

对于菲耶尔平均，$a_k^{(N)} = (1-|k|/(N+1))a_k$ 在 $|k|\leqslant N$ 时成立，否则为 0，因此对于每个固定的 k，都有 $a_k^{(N)} \to a_k$。在我们的应用中，所得无穷级数绝对收敛（事实上，它将化简为 $\sum_{r\text{ 奇}} O(1/r^3)$），因此我们可以逐项取 $N\to\infty$。由此得到所需的 $B(f)$ 级数。由于所有 a_k 都是实数，$B(f) \in \mathbb{R}$。 □

现在我们结合 g 的傅里叶展开与引理 34，显式计算 J，其中 $f(\theta) = g(\theta)e^{i\theta}$。

引理35。设 J 为引理*27*中定义的常数。那么

$$J = \frac{1}{3} - \frac{84\,\zeta(3)}{\pi^4} < 0.$$

证明。由引理 31，我们得到绝对收敛的傅里叶展开

$$g(\theta) = \mathrm{tri}(3\theta) = \sum_{\substack{r\geqslant 1\\ r\text{ odd}}} \frac{8}{\pi^2 r^2}\cos(3r\theta) = \sum_{\substack{r\geqslant 1\\ r\text{ odd}}} \frac{4}{\pi^2 r^2}\Big(e^{i3r\theta} + e^{-i3r\theta}\Big).$$

两边乘以 $e^{i\theta}$，得到

$$f(\theta) = g(\theta)e^{i\theta} = \sum_{\substack{r\geqslant 1\\ r\text{ odd}}} \frac{4}{\pi^2 r^2}\Big(e^{i(1+3r)\theta} + e^{i(1-3r)\theta}\Big).$$

因此，$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ 的傅里叶系数为

$$a_{1+3r} = a_{1-3r} = \frac{4}{\pi^2 r^2} \qquad (r\geqslant 1,\ r\text{ odd}), \qquad a_k = 0 \text{ otherwise.}$$

由于所有 a_k 均为实数，引理 34 给出 $J = B(f)$以及

$$J = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1-|k-1|)\, a_k\, a_{2-k}.$$

一项非零仅当 a_k 与 a_{2-k} 均非零。这迫使对某个奇数 $r \geqslant 1$ 有 $k = 1 + 3r$ 与 $2 - k = 1 - 3r$（或以相反顺序的同一对）。对于这样的 k，我们有 $1 - |k - 1| = 1 - 3r$，因此

$$J = \sum_{\substack{r \geqslant 1 \\ r \text{ odd}}} 2(1 - 3r) \left(\frac{4}{\pi^2 r^2} \right)^2 = \frac{32}{\pi^4} \sum_{\substack{r \geqslant 1 \\ r \text{ odd}}} \frac{1 - 3r}{r^4}.$$

利用

$$\sum_{\substack{r \geqslant 1 \\ r \text{ odd}}} \frac{1}{r^4} = \left(1 - \frac{1}{2^4} \right) \zeta(4) = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{\substack{r \geqslant 1 \\ r \text{ odd}}} \frac{1}{r^3} = \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) \zeta(3) = \frac{7}{8} \zeta(3),$$

我们得到

$$J = \frac{32}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{96} - 3 \cdot \frac{7}{8} \zeta(3) \right) = \frac{1}{3} - \frac{84\,\zeta(3)}{\pi^4} < 0,$$

如所述。 □