arXiv:2603.07105v1 [math.RT] 7 Mar 2026

关于彼得-外尔定理的一个注记

YANGA BAVUMA、FRANCESCO G. RUSSO 与 ELIZABETH STEVENSON

Abstract. 我们介绍紧群表示论中的若干经典概念，以便将其用于彼得-外尔定理的一个新推广。我们主要研究具有较大非平凡紧开子群的局部紧群上的函数：事实上，我们证明这些函数可由另一些函数逼近，而这些函数在局部上与众所周知的代表函数相同。

Mathematics Subject Classification 2020: 主分类号 22A10, 22D10；次分类号 42A20, 22E35。

Keywords and Phrases: 拓扑群上的分析；局部紧群的酉表示；傅里叶级数的收敛； p-进李群上的分析。

1. Introduction

1807年，约瑟夫·傅里叶找到了一种方法，可以用正弦和余弦的简单线性组合来逼近任意周期函数。他的思想在当时堪称开创性，并由此发展出如今所称的傅里叶定理。120年后，Fritz Peter 和 Hermann Weyl 在一篇德文论文中发表了著名的“彼得-外尔定理”；该论文标题可译为“闭连续群的本原表示的完备性” [9] 。这一成果是紧群表示论中的里程碑，与傅里叶定理十分相似，因为它同样关注如何用较简单的函数逼近连续函数。不过，彼得-外尔定理所逼近的不是实值周期函数，而是定义在某些具有几何性质的结构上的函数，这些结构称为紧群。紧群是配备了与其拓扑相容的运算、且在该拓扑下既紧又豪斯多夫的群，参见 [5, 6, 7, 12]。换言之，彼得-外尔定理表明，紧群上的任意连续函数都可以用称为代表函数的函数来逼近，而代表函数比原函数简单得多。对于具有通常欧几里得平面中圆的几何性质的连通紧群$\mathbb{R}^2$ （即环面 $\mathbb{T}$，参见 [7]），傅里叶定理便成为彼得-外尔定理的推论。第三位作者尚未发表的理学硕士论文 [11] 以一种自成一体的方式，全面讨论了这两个结果。事实上，文献中已用许多不同的方法证明了这两个重要结果（彼得-外尔定理和傅里叶定理）。例如，[1, §11。5]中给出了一种论证，涉及任意紧阿贝尔群上的 Følner集和 Følner序列。傅里叶最初的论证（参见 [2, 第1节。5]）也截然不同，并且仅适用于环面 $\mathbb{T}$。另一些作者 [3] 则采用了一种方法（始终在 $\mathbb{T}$上），通过检验可能具有不同性质的多项式族来进行（比较 [10, 4。26 傅里叶级数]）。

为了讨论彼得-外尔定理，我们首先需要介绍一些关于拓扑代数的一般概念，并定义紧群在拓扑向量空间上的表示和作用。简言之，我们所说的表示，是指拓扑群在拓扑空间上的群作用，且相对于两种拓扑都是连续的。这是一个标准概念，遵循拓扑群论中的经典脉络，参见 [5, 6, 7, 8, 12]。

我们将在此提出的推广思路是：给定一个具有非平凡紧开子群的拓扑群，可以将该群划分为此子群的紧开陪集。由于每个陪集都与一个紧群拓扑同构，因此我们可以在某种意义上将彼得-外尔定理应用于每个陪集，从而对原群上给定连续函数的各个局部部分进行逼近。随后将这些逼近拼接起来，便可逼近整个函数。当然，当紧开子群就是群本身时，我们的主要结果便归结为彼得-外尔定理。在本节之后1 作为引言，第 2 节将陈述必要的预备知识，涵盖以下主题：

表示论、哈尔测度以及彼得-外尔定理的原始表述。在第 3 节中，我们将证明主要结果，展示一种类似于彼得-外尔定理中由表示函数 $R(G,\mathbb{K})$ 所实现的逼近；这种逼近适用于定义在具有紧开子群的局部紧群上的标量值函数。一个适用的局部紧群例子是 p-进有理数 $\mathbb{Q}_p$，它包含 p-进整数 $\mathbb{Z}_p$ 作为紧开子群。我们也将讨论这个例子。本文使用的记号均为标准记号，主要遵循 [4, 5, 6, 7, 8, 12], 这几本拓扑群论与抽象调和分析的经典教科书。

2. General notions of topological algebra

本节回顾第三位作者在前两位作者指导下撰写的理学硕士论文中的一些未发表内容[11] 。本节中，我们始终认为$\mathbb{K}$ 等于 $\mathbb{C}$ （复数域）或 $\mathbb{R}$（实数域）。首先，我们将讨论拓扑群和表示。本文中，我们将拓扑群 称为具有拓扑结构的（豪斯多夫）群。为使代数结构与拓扑结构以恰当的方式相匹配，我们要求群运算和求逆运算相对于群上的拓扑连续，见[8, 定义 1.1]。如果拓扑群在其拓扑下是紧的，我们称其为紧群。更一般地，局部紧群 是指在其拓扑下局部紧的拓扑群；见 [4, 8, 12, 13]。类似地，我们可以为向量空间的底集合而非群的底集合赋予拓扑。此时，我们要求该拓扑使向量空间的主要运算连续，即加法、加法逆运算和数乘。例如，根据 [8, 第 2] 章，设 E 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，其拓扑分别为 $\mathcal{T}_E$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbb{K}}$。设 $\mathcal{T}_{E\times E}$ 为 $E\times E$的乘积拓扑，并设 $\mathcal{T}_{\mathbb{K}\times E}$ 为 $\mathbb{K}\times E$上的乘积拓扑。如果加法 $(u_1,\ u_2)\ \in E\times E\mapsto u_1+u_2\in E$ 相对于 $\mathcal{T}_{E\times E}$ 和 $\mathcal{T}_E$连续，求逆运算$u\in E\mapsto -u\in E$ 相对于 $\mathcal{T}_E$连续，并且数乘 $(c,\ u)\ \in\mathbb{K}\times E\mapsto cu\in E$相对于 $\mathcal{T}_{\mathbb{K}\times E}$ 和 $\mathcal{T}_E$连续，我们就称 E 为拓扑向量空间。回顾群作用的概念：群的元素可以被视为在另一个集合的元素上“作用”，并再次产生该集合中的元素。例如，通过移动或置换集合中的元素，就得到了作用的实例。这是拓扑群论中一个众所周知的概念，见 [4, 6, 8, 12]。在这种情况下，我们可以引入以下概念：

定义 2.1 （G-模，见 [8], 定义 2.1 (i)）. 设 G 是带有拓扑$\mathcal{T}_G$的拓扑群。设 E是带有拓扑 $\mathcal{T}_E$的拓扑向量空间。设 $(g,t)\ \in G\times E\mapsto gt\in E$是 G 在 E上的群作用。相对于上述作用，我们称 E 为一个 G-模，如果

(i). 对所有 $g\in G$，映射 $t\in E\mapsto gt\in E$ 关于 $\mathcal{T}_E$是连续且线性的，并且 (ii). 对所有 $t\in E$，映射 $g\in G\mapsto gt\in E$ 关于 $\mathcal{T}_G$ 和 $\mathcal{T}_E$是连续的。

向量空间语境下线性函数 的定义是众所周知的：本质上，我们考虑从一个向量空间 X 映到一个向量空间 Y的函数 f （二者均在域 $\mathbb{K}$上），并称 f 是线性的，如果对所有 $x,y\in X$和 $c\in\mathbb{K}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 以及 $f(cx)=cf(x)$。更相关的是回顾以下概念：

定义 2.2 （强算子拓扑与表示，见 [8], 第2章）. 设 E 是具有拓扑 $\mathcal{T}_E$的拓扑向量空间。设 $\mathcal{T}_{E^E}$ 表示 E^E上的乘积拓扑。由$\mathrm{Hom}(E,E)$给出的连续线性函数 $E\to E$ 的集合 $\subseteq E^E$ 关于 $\mathcal{T}_{E^E}$的诱导拓扑构成一个拓扑向量空间。该拓扑空间记为 $\mathcal{L}_p(E)$，其拓扑称为强算子拓扑。设 G是具有拓扑 $\mathcal{T}_G$的拓扑群。考虑映射 $\pi:G\to\mathcal{L}_p(E)$。我们称 π 是 G 在 E 上的表示，如果

(i). π 关于 $\mathcal{T}_G$ 与 $\mathcal{L}_p(E)$的拓扑连续，(ii). π 是群同态。

我们也可以总结定义2.2中的上述两个条件，称 π 是拓扑群范畴中的一个态射。在处理拓扑群时，我们总是寻找同时保持拓扑结构和代数结构的同态。事实证明， G-模与表示是等价的，其中给定的 G-模可以通过定义 $\pi(g)(x):=g\cdot x$。

G-模的一个重要例子由拓扑向量空间给出

$$C(G,\mathbb{K}) := \{f : G \to \mathbb{K} \mid f \text{ is continuous}\},$$

由所有从 G 到 $\mathbb{K}$ 的连续函数组成，其中 G 上赋予拓扑， $\mathbb{K}$上赋予通常拓扑。元素 g 对函数 $f: G \to \mathbb{K}$ 的群作用，是通过将 f 与右乘映射 $h \in G \mapsto hg \in G$复合得到的。下面我们将更详细地讨论这一作用。

例 2.3. 根据 [5, 6, 8, 12], ，如果 G 是一个紧群，那么 $C(G, \mathbb{K})$ 在由 上确界范数所诱导的拓扑下是一个拓扑向量空间

$$||f||_\infty = \sup_{g\in G} f(g).$$

存在一个 G 在 $C(G, \mathbb{K})$ 上的作用，定义如下:

$$(g, f) \in G \times C(G,\mathbb{K}) \mapsto {}_gf \in C(G,\mathbb{K}),$$

对于每个 $g \in G$ ，有

$${}_gf(x) := f(hg) \quad \text{for all} \quad x \in G.$$

在当前情形下， $C(G, \mathbb{K})$ 是一个 G-模。

注意， $C(G, \mathbb{K})$既是拓扑向量空间，也是巴拿赫代数，参见 [8, 第 1]章。事实上，对于任意紧群 G，可以看出， $C(G, \mathbb{K})$在上确界范数下是一个巴拿赫空间，实际上还是一个巴拿赫 G-模。接下来，我们必须讨论哈尔测度，它将用于度量定义在局部紧群上的标量值函数的大小。

定义 2.4 （支集、 $C_c(G, \mathbb{K})$ 和 $C_c^+(G, \mathbb{K})$，参见 [12], 定义 12.1）。 我们将拓扑群 G 上的 $\varphi \in C(G, \mathbb{K})$的支集定义为

$$\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{g \in G \mid \varphi(g) \neq 0\}}.$$

然后，我们将 $C_c(G, \mathbb{K})$定义为从 G 到 $\mathbb{K}$ 的具有紧支撑的连续映射的集合。 $C_c^+(G, \mathbb{K})$则定义为连续映射 $\varphi \in C_c(G, \mathbb{K})$的集合，其中对于所有 $g \in G$，$\varphi(g) \geq 0$ 。

哈尔测度是一个正的、线性的、不变的非零映射，它将拓扑群上的标量值、连续且具有紧支集的函数 G （即属于 $C_C(G, \mathbb{K})$的函数）映射为标量值，参见 [12, 定义 12.3、14.2]。哈尔测度有一个令人遗憾之处：单个局部紧群 G 可能有多个哈尔测度，但它们彼此成比例。例如，若 μ 是 G上的一个哈尔测度，那么 2μ 和 3μ ，或者一般地，对任意正的$p \in \mathbb{R}$ ， $p\mu$ 也都是哈尔测度。幸运的是，产生其他哈尔测度的方式仅此一种，因为哈尔测度在相差一个常数因子的意义下是唯一的。

引理 2.5 （局部紧群的哈尔测度，参见 [12], 定理 12.20、12.23 和 14.3）。 设 G 是一个局部紧群。则存在一个映射 λ ： $C_c(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ，它是一个哈尔测度。此外，固定 $\eta \in C_c^+(G, \mathbb{K})$ ，其中 $\eta \neq 0$，并设 μ ： $C_c(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ 是另一个哈尔测度。那么，对所有 $\varphi \in C_c(G, \mathbb{K})$ ，都有

$$\frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)} = \frac{\mu(\varphi)}{\mu(\eta)}.$$

因此存在一个 $r \in]0, +\infty[$ 使得 $\lambda = r\mu$。

这种唯一性（至多相差一个正常数 r）使我们能够引入如下记号。

定义 2.6 （Haar 测度记号，见 [12] 定理 12.24）。 设 G为一个局部紧群。假设 λ： C_c（G， $\mathbb{K}$）$\to \mathbb{R}$ 是一个哈尔测度，且 $\varphi \in C_c$（G， $\mathbb{K}$）。我们记

$$\lambda(\varphi) = \int_G \varphi \, d\lambda = \int \varphi \, d\lambda$$

当 G 为紧群时，我们可以通过取任意哈尔测度λ ，再除以单位函数**1** 的测度，来“规范化”该哈尔测度： $G \to \mathbb{K}$ 由**1**（x） $= 1$ 对所有 $x \in G$给出。

定义 2.7 （归一化 Haar 测度，见 [8], 定义 2.6）。 设 G 为一个紧群，且 μ : $C(G, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ 为一个哈尔测度。若 μ**(1)** $= 1$，则称 μ 为一个归一化 *Haar* 测度。

遗憾的是，当我们处理局部紧非紧群时，哈尔测度可能无法以这种方式归一化，因为常值函数**1** 可能没有紧支撑。

命题 2.8（归一化 Haar测度的存在性与唯一性，见 [8], 定理 2.8）。给定一个紧群 G，在 G上存在且仅存在一个归一化 *Haar* 测度。

注意，我们可以在 $C_c(G,\mathbb{K})$ 上定义众所周知的 L^2-范数。在 L^2-范数下， $C_c(G,\mathbb{K})$ 的完备化是 $L^2(G,\mathbb{K})$，如果 G 是紧的。

注 2.9。我们回顾 [8, 例 2.12], [10, 第 3]章和 [12, 引理 14.6] 中的一些事实。对于任意局部紧群 G，相对于给定的 Haar 测度 μ，我们可以在 $C_C(G,\mathbb{K})$ 上定义以下标量积

$$(f_1 \mid f_2) := \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}d\mu.$$

由此标量积诱导的范数是 L^2-范数，并且可明确表示为（对于任意 $f \in C_C(G,\mathbb{K})$）

$$||f||_2 = \sqrt{\int_G f(g)\overline{f(g)}d\mu} = \sqrt{\int_G |f(g)|^2 d\mu}.$$

在此范数下，对 $C_C(G,\ \mathbb{K})$（ G 为局部紧的情形）和 $C(G,\ \mathbb{K})$（ G 为紧的情形）分别取完备化，会得到 $L^2(G,\ \mathbb{K})$。

我们现在已经几乎可以陈述彼得-外尔定理了。

定义 2.10（几乎不变元，见 [8], 定义 3.1）。设 G 为局部紧群， E 为一个 G-模，且 $x \in E$。如果 $\text{span}\{G \cdot x\}$ 是有限维向量空间，则称 x 是几乎不变 的。

$C(G,\ \mathbb{K})$ 的几乎不变元将在我们的讨论中发挥重要作用。

定义 2.11（表示函数，见 [8], 定义 3.3）。设 G 为紧群。$C(G,\ \mathbb{K})$ 中几乎不变函数的集合记为 $R(G,\ \mathbb{K})$。也就是说，

$$R(G,\mathbb{K}) = \{f : G \to \mathbb{K} \mid \text{span}\{G \cdot f\} \text{ is finite-dimensional}\}$$

This 是代表函数空间。 $R(G,\mathbb{K})$ 中的元素是一个代表函数 .

彼得-外尔定理的经典表述如下：

引理 *2.12*（彼得-外尔定理，参见 [8], 定理 *3.7*）。考虑一个紧群 G，以及注 *2.9* 中的巴拿赫代数 $R(G,\mathbb{K})$、 $C(G,\mathbb{K})$ 和 $L^2(G,\mathbb{K})$。那么， $R(G,\mathbb{K})$ 是 $C(G,\mathbb{K})$ 和 $L^2(G,\mathbb{K})$ 中的稠密巴拿赫子代数。

引理2.12 也称为“小彼得-外尔定理”或“经典彼得-外尔定理”，以区别于“大彼得-外尔定理”；后者是彼得-外尔定理的推广。利用“大彼得-外尔定理”，可以处理紧群 G，但我们将巴拿赫代数 $R(G,\ \mathbb{K})$ 替换为更一般的拓扑向量空间E，例如 G-完备局部凸 G-模，参见 [8, 定理 3。51]。

3. What happens to locally compact groups with compact open subgroups ?

本节所述结果旨在将引理 2.12 推广到具有特定结构的局部紧群。彼得-外尔定理针对的是紧群，而此结果针对的是具有紧开子群的局部紧群（例如， p-进有理数 $\mathbb{Q}_p$ ，其紧开子群为 p-进整数 $\mathbb{Z}_p$ ）。彼得-外尔定理能够在 L^2-范数下（该范数由归一化的哈尔测度定义）逼近 $L^2(G,\mathbb{K})$中的所有元素（当 G 为紧群时）；而我们将要在 L^2-范数下逼近 $L^2(G,\mathbb{K})$中的所有元素，其中 G 为局部紧群。最后，彼得-外尔定理通过代表函数进行逼近，而我们将使用所谓的“提升代表函数”（稍后介绍）来逼近这些函数。要构造一个提升代表函数，我们首先需要一个局部紧群 G，它具有一个紧开子群 H。接着，我们取紧开子群 H 上的一个代表函数，并将其“提升”为包含它的群 G 上的函数。该提升函数在子群 H 上取原来的值，并且

在子群外取值为 0。此类函数的平移和线性组合也被视为提升代表函数。在定义提升代表函数之前，先定义“提升算子”会很有帮助；该算子将定义在子群H 上的函数提升为定义在 G 上的函数，并在 H之外取值为零。图 1展示了提升过程。

定义 3.1（提升算子）。设 G 是一个局部紧群，且 H 是 G 的一个紧开子群。考虑连续函数 $k: x \in H \mapsto k(x) \in \mathbb{K}$。我们将 k 到 G 的提升 定义为函数 $\ell_G(k): G \to \mathbb{K}$，其定义如下：

$$\ell_G(k)(x) = \begin{cases} k(x) & \text{if } x \in H \\ 0 & \text{if } x \in G \setminus H. \end{cases}$$

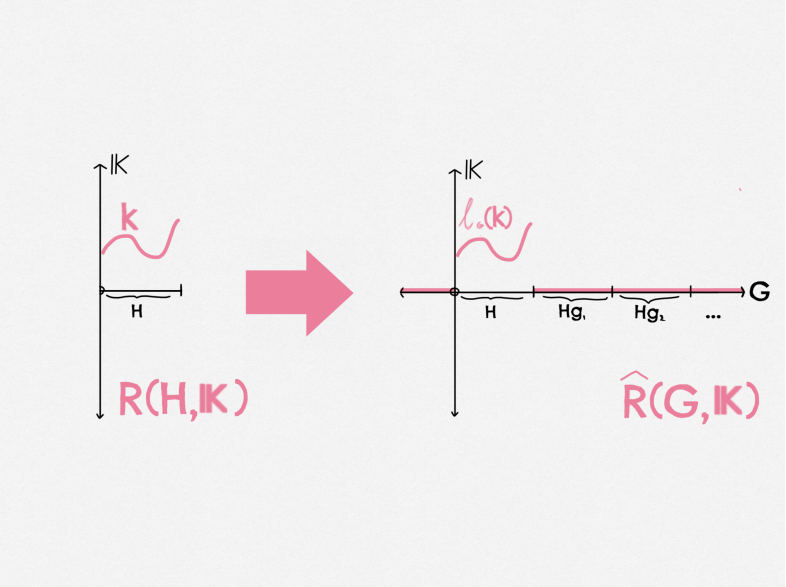


FIGURE 1. 表示函数如何提升的示意图。请注意，图中的 G 和 $\mathbb{K}$ 被画成直线以便直观理解，但一般而言它们并不一定具有这种结构。

请注意，在定义 $\ell_G(k)$ 中，我们并未要求其连续；3.1不过，根据下文的注释可知这一点成立（因为 $k(x)$ 在 H 上连续）。

注释 3.2。根据 [13, 定理 7，6], 我们知道，对于局部紧群 $G = A \cup B$，若A 和 B 都是 G 的开子集（或都是闭子集），且若 $f: G \to \mathbb{K}$ 是一个函数，使得 $f_{|A}$和 $f_{|B}$ 均连续，则 f 连续。这意味着

定义 3.1告诉我们，$\ell_G(k)$ 总是连续的，因为 $k(x)$ 在 H 上连续。这是因为我们可以选取 $H = A$ 和 $G \setminus H = B$。这里假设 G 是拓扑群这一点很重要，因为在拓扑群中，每个开子群（例如 H）都自动是闭子群。对于任意拓扑空间中任意的开集合与闭集合，这一点一般并不成立。参见 [8,命题 1.10 iii)] 了解详情。

提升代表函数的定义方式与我们对提升算子的定义方式相符。当局部紧群 G 具有一个紧开子群 H时，我们可以将 $R(H, \mathbb{K})$ 中的一个元素提升到 $C(G, \mathbb{K})$，从而得到更大的提升代表函数。事实上，根据定义 2.4，对于属于 $R(H, \mathbb{K})$ 的函数，我们总是将支集视为闭子集（因此在豪斯多夫空间中是紧的^）。这说明了^$R(G, \mathbb{K}) \subseteq C_c(G, \mathbb{K})$。另请注意，平移和线性组合都是代表函数。

定义 3.3（提升代表函数）。若 G 是局部紧群，且 H 是 G 的一个紧开子群，则可将提升代表函数的集合定义为集合

$$\hat{R}(G,\mathbb{K}) := \operatorname{span}\left[\{{}_g\ell_G(k) \mid k \in R(H,\mathbb{K}),\ \ g \in G\}\right],$$

其中

$${}_g\ell_G(k)(x) := \ell_G(k)(xg) = \begin{cases} k(xg) & \text{if } x \in Hg^{-1} \\ 0 & \text{if } x \in G \setminus Hg^{-1} \end{cases}$$

表示 $\ell_G(k)$ 的 g 平移。

In 图 2我们可以看到，如何通过在 G 上组合 e or m更多已有的表示函数。

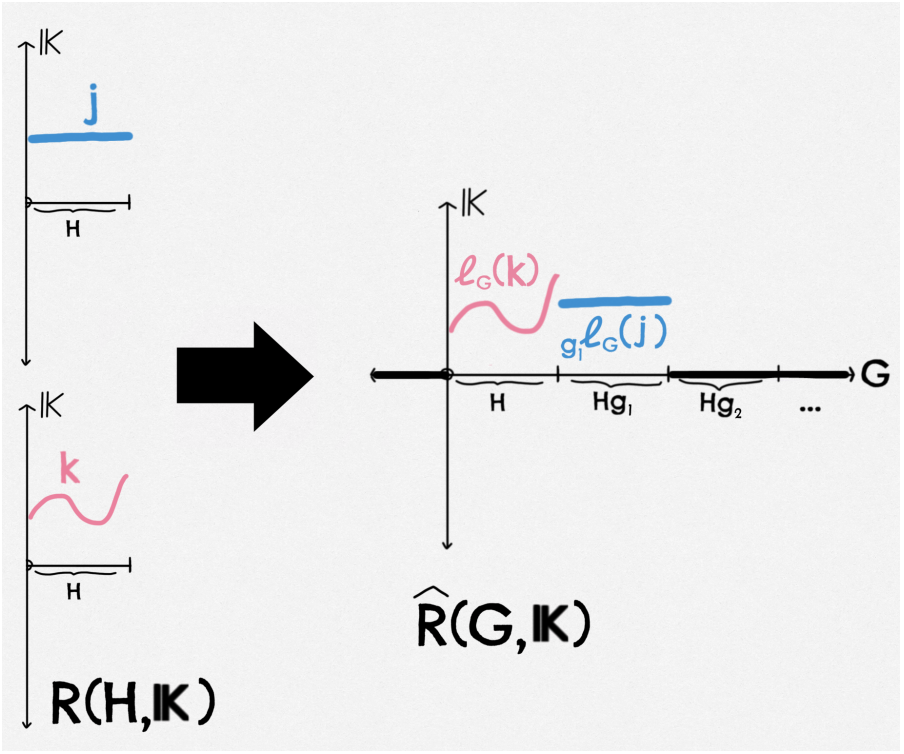


FIGURE 2. 展示如何使用多个表示函数获得一个提升的表示函数。请注意，G 和 $\mathbb{K}$ 被绘制成直线，以便于直观理解，但通常不会具有这种结构。

备注 3.4（提升算子的性质）。下面我们将介绍提升算子的几项关键性质，这些性质将在后续推导中用到。请注意，其中许多事实我们只对 $x \in H$ 情形进行证明，因为 $x \notin H$ 情形是显然的。

(1) **提升算子是线性的：**对于所有 $k_1,\ k_2 \in R(H,\ \mathbb{K})$ 以及 $a,\ b \in \mathbb{K}$ 并且对于所有 $x \in H$

$$\ell_G(ak_1 + bk_2)(x) = a\ell_G(k_1)(x) + b\ell_G(k_2)(x).$$

(2) **提升算子保持正性：**设 $k \in R(H,\ \mathbb{K})$，其中 $k > 0$ 对于所有$x \in H$。那么

$$\ell_G(k)(x) = k(x) \geq 0.$$

(3) **提升算子保持平移：**如果 $k \in R(H,\ \mathbb{K})$ 且 $h \in H$，那么对于所有 $x \in H$

$$\ell_G({}_hk)(x) = \ell_G(k)(xh) = {}_h\ell_G(k)(x),$$

因此，H 的平移作用得以保留。

(4) **提升算子保留乘法：**如果 k_1， $k_2 \in R(H,\ \mathbb{K})$，那么对于所有$x \in H$，我们有

$$\ell_G(k_1k_2)(x) = \ell_G(k_1)(x)\ell_G(k_2)(x).$$

(5) **提升算子保持 $\mathbb{K}$ 的范数：**若 $k \in R(H,\ \mathbb{K})$，则对所有 $x \in H$

$$\ell_G(|k|)(x) = |\ell_G(k)(x)|.$$

稍后证明结果时需要用到一个重要事实：将函数从H 提升到 G时，只要在 G 上使用的哈尔测度以某种意义在 H上经过归一化，原函数相对于 H 上的哈尔测度的 L^2范数，就与提升后函数的 L^2范数相同。

引理 *3.5*（提升 L^2范数的保持性）。设 G 是一个局部紧群，具有非平凡的紧开子群 H，且 $\int_G \cdot\, d\lambda$ 是 G 上的一个哈尔测度，满足（给定χ_H： H上的 $G \to \mathbb{K}$ 示性函数） $\int_G \chi_H\ d\lambda = 1.$。若 $||f||_2$配备 $f \in C_C\ (G, \mathbb{K})$，其为 $L^2\ (G, \mathbb{K})$ 上的L^2范数；并且$||k||_{2,H}$是 $L^2\ (H, \mathbb{K})$ 上的 L^2 范数，其中 $k \in C\ (H, \mathbb{K})$，则对所有$j \in R\ (H, \mathbb{K})$

$$||\ell_G(j)||_2 = ||j||_{2,H}.$$

证明。首先，我们断言函数 $\rho:\ C(H,\ \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ 由 $\rho(j) := \int \ell_G(j)\ d\lambda$ 给出，是 H 上的归一化 Haar 测度。我们通过检验定义并利用备注 3.4。固定 j， j_1， $j_2 \in R(H,\ \mathbb{K})$ 以用于下文：

(1) 线性性：注意，对任意 a、$b \in \mathbb{K}$，我们有 $\rho(aj_1 + bj_2) = \int \ell_G(aj_1 + bj_2)\ d\lambda = \int a\ell_G(j_1) + b\ell_G(j_2)\ d\lambda = a\int \ell_G(j_1)\ d\lambda + b\int \ell_G(j_2)\ d\lambda = a\rho(j_1) + b\rho(j_2)$。这一推理使用了备注 3.4 的性质 (1)，该性质由如下推导得出：对所有 $x \in G$ 与 k_1， $k_2 \in R(H, \mathbb{K})$，我们有

$$\begin{aligned}\ell_G(ak_1 + bk_2)(x) &= \begin{cases} ak_1(x) + bk_2(x) & \text{if } x \in H \\ 0 & \text{if } x \in G \setminus H \end{cases} \\ &= a\begin{cases} k_1(x) & \text{if } x \in H \\ 0 & x \in G \setminus H \end{cases} + b\begin{cases} k_2(x) & \text{if } x \in H \\ 0 & \text{if } x \in G \setminus H \end{cases} \\ &= a\ell_G(k_1)(x) + b\ell_G(k_2)(x).\end{aligned}$$

下面关于正性、左不变性和归一化的性质同样依赖于备注3.4 的断言，这些断言可以用类似的方法证明。

(2) 正性：注意，对于 $j > 0$，我们有 $\rho(j) = \int \ell_G(j)\ d\lambda$。这是正的，因为 $\ell_G(j) > 0$（备注 3.4 性质 (2)），且 Haar 积分是正的。(3) 左不变性：注意，对于 $h \in H$，我们有 $\rho(_hj) = \int \ell_G(_hj)\ d\lambda = \int {}_h\ell_G(j)\ d\lambda = \int \ell_G(j)\, d\lambda$ （备注 3.4 性质 (3)）(4) 归一化：注意（给定 1： $H \to \mathbb{K}$ 为 H 上处处取值为 1 的常值函数） $\rho(1) = \int \ell_G(1)\ d\lambda = \int \chi_H\, d\lambda = 1$

接下来，为了证明 $||\ell_G(j)||_2 = ||j||_{2,\ H}$ 我们注意到（根据注 3.4 (4-5)）

$$||\ell_G(j)||_2 = \sqrt{\int \ell_G(j)\overline{\ell_G(j)}d\lambda} = \sqrt{\int |\ell_G(j)|^2 d\lambda} = \sqrt{\int \ell_G(|j|^2)d\lambda} = \sqrt{\rho(|j|^2)} = \sqrt{\rho(j\ \bar{j})} = ||j||_{2,H}.$$

□

主要结果是，我们可以利用 $\hat{}R(G,\ \mathbb{K})$ 来逼近 $L^2(G,\ \mathbb{K})$ 中的元素。

定理 3.6（关于 $L^2(G, \mathbb{K})$ 上的逼近）。若 G 是一个具有非平凡紧开子群 H 的局部紧群，则 $\hat{}R(G, \mathbb{K})$ 是 $L^2(G, \mathbb{K})$ 的稠密子空间。

证明。首先，我们令 $\int \cdot\, d\mu$ 为 G上的任意哈尔测度。由引理 2.5可知这样的测度存在。我们将利用它为我们的范围构造一个适当的哈尔测度。固定一个常数 $a = \int \chi_H\ d\mu$，其中 χ_H 是 H上的示性函数。接着，我们在 G 上定义一个新的哈尔测度如下：

$$\int \cdot\, d\lambda := \frac{1}{a}\int \cdot\, d\mu.$$

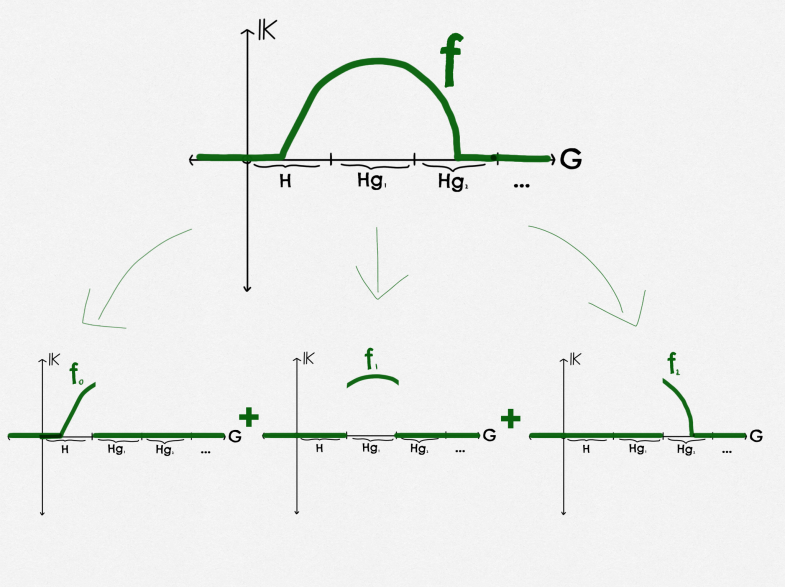


FIGURE 3. 演示该函数如何被拆分为各个部分——注意， G 和 $\mathbb{K}$ 被画成直线是为了提供直观理解，但一般而言并不具有这种结构

该哈尔测度将使函数 χ_H 的测度值为 1。我们可以认为 λ 已在 H上归一化。

U利用这一哈尔测度，我们可以构造在余下部分将要使用的 L^2-范数 r
的这是证明：

$$||f||_2 = \sqrt{\int f\bar{f}\, d\lambda}$$

设 $f \in C_C(G, \mathbb{K})$。我们将在$\hat{}R(G, \mathbb{K})$中找到一列函数，使其关于 $||\cdot||_2$逼近 f。通过证明这一点，我们将能够借助 $C_C(G, \mathbb{K})$在 $L^2(G, \mathbb{K})$中的稠密性得出结论：$\hat{}R(G, \mathbb{K})$在 $L^2(G, \mathbb{K})$中稠密。设 $G/H = \{Hg_i : \ i \in I\}$。对每个 $i \in I$考虑

$$f_i(x) = f(x)\chi_{Hg_i}(x)$$

图 3 展示了函数 f 如何被拆分成许多这样的 f_i 函数。由于 f 被假定具有紧支撑，因此非零的 f_i 只有有限多个。这是因为包含在 G/H 中的陪集构成了 f 的支集的一个开覆盖（事实上，它们构成了 G本身的一个开覆盖），因此我们可以取该支集的一个有限子覆盖，不失一般性，它由 $\{Hg_1, Hg_2, ..., Hg_t\}\,(t \in \mathbb{N})$ 给出。于是 $\text{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} Hg_i$，而非零的 f_i恰好就是 f_1，.....，f_t。注意

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} f_i(x) = \sum_{i=1}^{t} f(x)\chi_{Hg_i}(x).$$

每个 f_i 在 G 上连续，因为它是连续函数的乘积（其中 χ_{Hg_i} 连续，因为 H 是开的）。我们的目标是构造一个能够逼近每个 f_i的序列，然后将这些序列的元素拼接起来，构造一个逼近 f 本身的序列。选取一个 $f_i \in \{f_1, ..., f_t\}$。该函数的支集包含在 Hg_i中，因此我们可以将其全部非零部分（可能还包括其部分为零的部分）视为 Hg_i上的一个函数。由于 Hg_i与紧群 H拓扑同构，因此可以合理地断言函数$f_i|_{Hg_i}$ 可用彼得-外尔定理来逼近。然而，具体做法相当精细，值得加以说明。大致过程如图 4。

思路是，我们将函数 f_i 平移，使得定义在 Hg_i 上的部分被移至定义在 H上。该平移由 ${}_{g_i}f_i$ 给出（其中照例 ${}_{g_i}f_i(x) = f_i(xg_i)$）。参见图 4的步骤 2。然后我们使用彼得-外尔定理于 ${}_{g_i}f_i|_H$ （因为它是连续的 $H \to \mathbb{K}$ 函数）

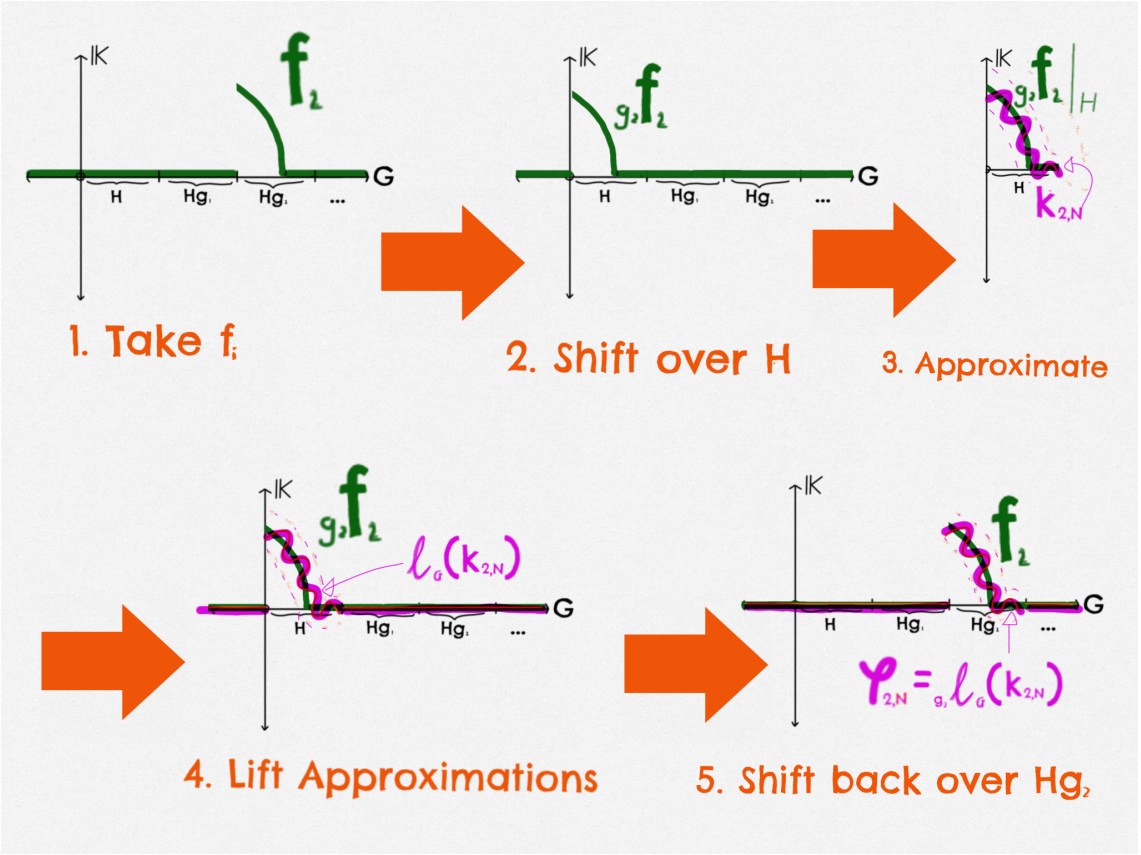


FIGURE 4. 构造近似提升表示函数的算法示意图。请注意， G 和 $\mathbb{K}$ 画成了直线，以便直观展示，但一般来说它们并不具有这种结构。

并得到一列函数 $(k_{i,\ N})_{N=1}^{\infty}$，位于 $R(H,\ \mathbb{K})$ 中，用以逼近它。这在图 4的步骤 3 中示出。具体而言，我们要求

$$||_{g_i} f_i|_H - k_{i,N}||_{2,H} < \frac{1}{N} \tag{3.1}$$

范数 $||\cdot||_{2,\ H}$ 是使用 L^2-范数，并基于 H 上归一化的哈尔测度得到的。这里我们需要使用这个范数，而不是上文给出的范数 $||\cdot||_2$，因为我们是在 $C(H,\ \mathbb{K})$ 上进行近似，因此需要使用适用于该空间的范数。不过，由于哈尔测度在一开始的归一化方式，它们在一定程度上是相同的。稍后我们会看到这一点。接下来，我们将那些 $k_{i,\ N}$ 项提升为定义在 G 上的函数，所用的提升操作见定义 3.1。事实上，根据定义3.3，它们将是提升代表函数。由于哈尔测度是在 H上归一化的，我们得到

$$||_{g_i} f_i - \ell_G(k_{i,N})||_2 < \frac{1}{N} \tag{3.2}$$

这个等式成立是因为引理 3.5，它由 (3.1) 以及以下事实推出：$\ell_G(_{g_i} f_i|_H - k_{i,N}) =_{g_i} f_i - \ell_G(k_{i,N})$。最后，我们将这些 $\ell_G(k_{i,N})$ 移回 Hg_i，使它们能够逼近 f_i，如图 4 的步骤 4 和步骤 5 所示。为便于记号，我们将这些逼近函数记为$\varphi_{i,N} :=\ _{g_i}(\ell_G(k_{i,N}))$，并使其满足与 (3.2) 一致的下列等式，即

$$||f_i - \varphi_{i,N}||_2 = ||f_i - {}_{g_i^{-1}}\ell_G(k_{i,N})||_2 = ||_{g_i} f_i - \ell_G(k_{i,N})||_2 < \frac{1}{N}.$$

我们的想法是使用刚刚构造出的那些序列

$(\varphi_{1,N})_{N=1}^{\infty}$ 以近似 f_1，$(\varphi_{2,N})_{N=1}^{\infty}$ 以近似 f_2，.....$(\varphi_{t,N})_{N=1}^{\infty}$ 以近似 f_t

以适当的方式。事实上，我们构造一个更大的单一序列 $(\varphi_N)_{N=1}^{\infty}$ 定义为求和 $\varphi_N = \varphi_{1,\ N} + \varphi_{2,\ N} + \ldots + \varphi_{t,\ N}$ 其中（由于求和是有限的），每一项都会按照图 2所示出现在提升代表函数中。这个序列 $(\varphi_N)_{N=1}^{\infty}$ 近似于 f 正如下文论证所阐明的

$$\begin{aligned} ||f - \varphi_N||_2 &= ||(f_1 + f_2 + \ldots + f_t) - (\varphi_{1,N} + \varphi_{2,N} + \ldots + \varphi_{t,N})||_2 \\ &= ||(f_1 - \varphi_{1,N}) + (f_2 - \varphi_{2,N}) + \ldots + (f_t - \varphi_{t,N})||_2 \\ &\leq ||f_1 - \varphi_{1,N}||_2 + ||f_2 - \varphi_{2,N}||_2 + \ldots + ||f_t - \varphi_{t,N}||_2 < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N} = \frac{t}{N}. \end{aligned}$$

显然，由于 $N \to \infty$，我们有 $\frac{t}{N} \Rightarrow 0$，且 $0 \leq ||f - \varphi_N||_2$，因此根据夹逼定理，可以得出 $\lim_{N\to\infty} \varphi_N = f$ 在 L^2-范数下成立，正如所需。于是，$\hat{R}(G,\ \mathbb{K})$ 在$C_C(G,\ \mathbb{K})$ 中稠密。由于 $C_C(G,\ \mathbb{K})$ 关于 L^2-范数在 $L^2(G,\ \mathbb{K})$ 中稠密，因此我们构造出了 $L^2(G,\ \mathbb{K})$ 的一个稠密子群。□

在定理 H 中，我们假设其非平凡，3.6，依据是下面的例子中可以找到的重要证据。另一方面，如果 H 在定理 3.6 中是平凡的，那么我们就会陷入这样一种情形：用紧支撑函数来逼近定义在离散拓扑上的函数，而这些紧支撑函数具体而言仅具有有限支撑。由于这类拓扑并非特别有趣，我们将重点放在局部紧群的大型非平凡紧开子群上。

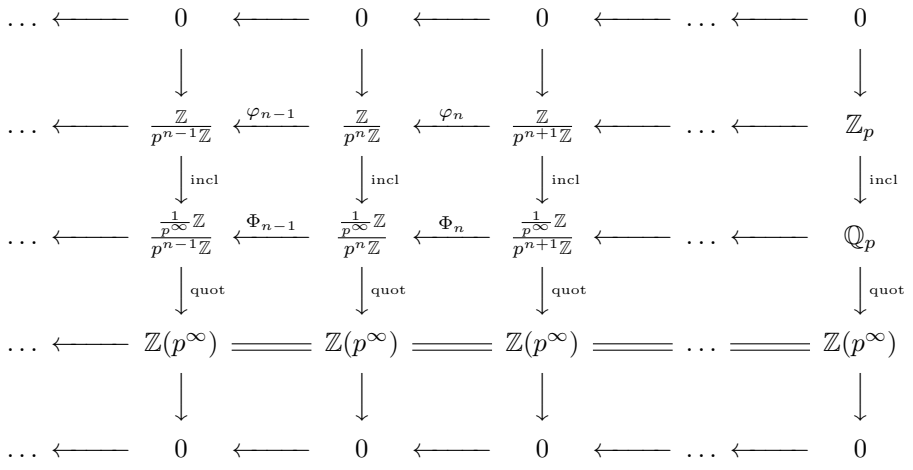
例 3.7。一种众所周知的非紧局部紧阿贝尔群为 $\mathbb{Q}_p$，它有多种构造方法；但对我们的目的而言，最能说明问题的方法是利用逆极限和子群 $\mathbb{Z}_p$ 来构造，参见 [8, 练习 E1.16]。简要介绍这一众所周知的构造：我们从 φ_n 开始：$u + p^{n+1}\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^{n+1}) \longmapsto \varphi_n(u + p^{n+1}\mathbb{Z}) = u + p^n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^n)$，这是有限 p-群之间的满同态，由此得到逆极限 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}(p^n)$。然后，$\Phi_n$：$v + p^{n+1}\mathbb{Z} \in \frac{\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}}{p^{n+1}\mathbb{Z}} \longmapsto \Phi_n(v + p^{n+1}\mathbb{Z}) = v + p^n\mathbb{Z} \in \frac{\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ 使$_{n\in\mathbb{N}}$我们能够构造相应的逆极限，从而得到

$$\mathbb{Q}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \cup \frac{1}{p}\mathbb{Z}_p \cup \frac{1}{p^2}\mathbb{Z}_p \cup \ldots \cup \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p \cup \frac{1}{p^{n+1}}\mathbb{Z}_p \cup \ldots.$$

在这种情况下，我们有 $\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p^n}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ 以及商群 $\frac{\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}(p^\infty)$，通过包含映射 incl：$a + p^{n+1}\mathbb{Z} \mapsto a + p^{n+1}\mathbb{Z}$ 和自然投影 quot：$b + p^{n+1}\mathbb{Z} \mapsto b + \mathbb{Z}.$，进一步得到商群 $\left(\frac{\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}}{p^{n+1}\mathbb{Z}}\right) / \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{n+1}\mathbb{Z}}\right) \simeq \mathbb{Z}(p^\infty)$。请注意，Pr¨ufer 群是一个离散的局部紧阿贝尔非紧群（$\mathbb{Z}(p^n)$ 的直极限）

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}(p^n).$$

读者可参阅 [8, 定义 1.25、1.27、引理 1.26、习题 E1.16、例 1。28] 了解详情。在 $\mathbb{Q}_p$ 上述构造所给出的拓扑下，$\mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个非平凡紧开子群，因此我们可以将定理 3.6 应用于 $G = \mathbb{Q}_p$ 和 $H = \mathbb{Z}_p$。以下示意图广为人知，也适用于当前情形



值得注意的是，定理 3.6 在非紧致连通局部紧群的情形下始终无法发挥作用，因为非紧致连通局部紧群缺少紧开子群。事实上，这样的子群及其补集会构成整个群的一个不交开覆盖，这与其连通性矛盾。特别地，考察 $\mathbb{R}^n$的闭子群即可看出这一点。根据 [8, 定理 A1，12], 我们可知， $\mathbb{R}^n$ 的每个闭子群都具有如下形式

$$\mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} \cdot e_p \oplus \mathbb{Z} \cdot e_{p+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_{p+q}$$

其中， $\oplus$表示群的直积，而 e_1，……， e_{p+q}是 $\mathbb{R}^n$ 的若干基向量，满足p， $q \in \mathbb{N}$。除了平凡子群（它不是开子群）之外，这种形式的子群都不可能是紧的，因为它不是有界的（回想一下，在 $\mathbb{R}^n$ 这样的豪斯多夫空间中，紧子集恰好是闭且有界的集合）。这是一个不满足我们结果前提的连通群的例子。

最后， $G = \mathbb{T} \times \mathbb{Q}_p$提供了一个中间情形，其中 $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_p$是 G中的一个非平凡紧开子群；是一个非紧、非连通的局部紧阿贝尔群。在这里，定理3.6 同样有重要的适用性。

References

[1] L. Aussenhofer、D. Dikranjan 和 A. Giordano Bruno, *Topological Groups and the Pontryagin-Van Kampen Duality* 2021 , 德古意特出版社，柏林，。 1

[2] E. A. Gonzalez-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems* 1995 1 , 学术出版社，圣迭戈，。

[3] N. Fusco、P. Marcellini 和 C. Sbordone, *Mathematical Analysis: Functions of Several Real Variables and Applications* 2022 1 , 施普林格，尚，。

[4] *Periodic Locally Compact Groups* 2019 2

[5] W. Herfort、K. H. Hofmann 和 F. G. Russo, *Abstract Harmonic Analysis: Structure of Topological Groups and Group Representation* 1, *Integration Theory* 1979 , 第意特出版社，柏林，。

[6] E. Hewitt 和 K. A. Ross, 卷。施普林格，纽约，。 1, 1, 2, 3

[7] *Structure and Geometry of Lie Groups* J. Hilgert 和 K. H. Neeb, , 施普林格，柏林，世，2007年。 2012 1, 2, 3

[8] *The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups* 。K. H. Hofmann 和 S. A. Morris, , 欧洲数学学会出版社，苏黎

[9] *The Structure of Compact Groups* 2020 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11

[10] K.H. Hofmann 和 S.A. Morris, , 德古意特出版社，柏林，。

[11] F. Peter 和 H. Weyl, 《闭连续群的本原表示的完备性》, *Math. Ann.* **97** (1927 737 755 1), -。

[12] W. Rudin, , 麦格劳-希尔，纽约， *Real and Complex Analysis* 2015 1, 4

[13] E. Stevenson, , 开普敦大学，开普敦，南非， *Generalizations of the Theorem of Peter and Weyl* 2025, http://hdl.handle.net/11427/41923 1 2

M. Stroppel, , 欧洲数学学会，苏黎世， *Locally Compact Groups* 2006 1, 2, 3, 4

S. Willard, , 艾迪生-韦斯利，纽约，。 *General Topology* 1970 2, 5

Yanga Bavuma
Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Cape Town
Private Bag X1, Rondebosch, 7701, Cape Town, South Africa
Email: yanga.bavuma@uct.ac.za – ORCID: 0000-0001-8991-6071

Francesco G. Russo
School of Science and Technology
University of Camerino
via Madonna delle Carceri 9, 62032, Camerino, Italy
Email: francesco.russo@unicam.it – ORCID: 0000-0002-5889-783X

Elizabeth Stevenson
Department of Mathematics and Applied Mathematics
University of Cape Town
Private Bag X1 Rondebosch 7701 Cape Town South Africa , „ ,
Email: stveli004@myuct.ac.za – ORCID: 0009-0002-2821-0221