arXiv:2603.07154v1 [math.HO] 7 Mar 2026

English translation of Sophie Kowalevski's

关于刚体绕固定点转动的问题

索菲·科瓦列夫斯卡娅*
斯德哥尔摩

§ 1.

众所周知，重刚体绕固定点转动的问题可以归结为对以下微分方程组的积分：

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), \qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{aligned} \tag{1}$$

出现在这些方程中的常数 A、 B、 C、 Mg、 x_0、 y_0、 z_0 具有如下含义：

- A、 B、 C 是所研究刚体相对于固定点的惯性椭球的主轴；
- M 是刚体的质量；
- g 是引力的强度；
- x_0、 y_0、 z_0 是所考虑刚体的重心在某一坐标系中的坐标，该坐标系的原点位于固定点，其方向与惯量椭球的主轴方向一致。

Un迄今为止，人们仅在两种特殊情形中成功地对这些方程进行了积分：

1. 泊松（或欧拉）情形，其中有 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$；2. 拉格朗日情形，
其中有 $A = B$、 $x_0 = y_0 = 0$。

在这两种情形中，积分借助椭圆函数完成，其自变量是时间的线性整函数。这六个量 p、 q、 r、 γ、 γ'、 γ'' 在这两种情形中都是时间的亚纯函数，对于变量的一切有限值，除极点外没有其他奇点。

这些积分是否 所讨论的微分方程在一般情形下是否保留这一性质？如果是这样， ，
就需要 能够借助如下形式的级数对这些微分方程进行积分

*这篇回忆录是对一项研究工作的总结。巴黎科学院在1888年12月24日举行的庄严会议上，将奖金从3000法郎提高至5000法郎，授予了该项研究的作者。

$$
\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots),\\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots),\\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots),\\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots),\\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots),\\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ 表示正整数。为了使这些级数能够表示所考察微分方程的积分通解，它们应包含五个任意常数。因此，有必要考察这种积分是否可能。通过比较所考察方程左右两边首项的指数，很容易验证必须有

$$
n_1 = n_2 = n_3 = 1, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 2.
$$

简化记号，令:

$$
A_1 = B - C, \quad B_1 = C - A, \quad C_1 = A - B
$$

并选取长度单位使得 $Mg = 1$，则系数 p_0, q_0, r_0 必须满足以下方程:

$$
\begin{aligned}
-Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, \quad -2f_0 = r_0 g_0 - q_0 h_0,\\
-Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, \quad -2g_0 = p_0 h_0 - r_0 f_0,\\
-Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, \quad -2h_0 = q_0 f_0 - p_0 g_0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

若要使这三个方程的后面三个方程存在非零解 f_0, g_0, h_0，则必须满足以下行列式为零:

$$
\begin{vmatrix}
2 & -r_0 & q_0\\
r_0 & 2 & -p_0\\
-q_0 & p_0 & 2
\end{vmatrix} = 2(4 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2).
$$

将方程 (3) 的前三个方程分别乘以 Ap_0, Bq_0, Cr_0 后相加，可得

$$
A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 = x_0(Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) + y_0(Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) + z_0(Ap_0 g_0 - Aq_0 f_0); \tag{4}
$$

但由方程 (3) 的后三个方程可知

$$
\begin{aligned}
2(Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) &= p_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - f_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2),\\
2(Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) &= q_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - g_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2),\\
2(Ap_0 g_0 - Bq_0 f_0) &= r_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - h_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

六个量 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 必须满足以下两个代数关系

$$
\begin{aligned}
Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') + l_1,\\
Ax_0 p + By_0 q + Cz_0 r &= l,
\end{aligned}
$$

其中 l 和 l_1 表示积分常数，因此必须满足

$$
\begin{aligned}
Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0 &= 0,\\
x_0 f_0 + y_0 g_0 + z_0 h_0 &= \frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2).
\end{aligned}
$$

因此，由方程（4）和（5）可得

$$
A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 = -\frac{1}{4}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)^2.
$$

现在有必要区分两种情形。

第一种情形。 假设以下各量均不为零

$$A_1 = B - C, \quad B_1 = C - A, \quad C_1 = A - B.$$

若令

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) &= \lambda_0, \\
\frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) &= \lambda, \\
\frac{1}{2}(A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2) &= \lambda_1,
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p_0^2 &= -\frac{BC\lambda_0 - (B+C)\lambda + \lambda_1}{B_1C_1}, \\
\frac{1}{2}q_0^2 &= -\frac{CA\lambda_0 - (C+A)\lambda + \lambda_1}{C_1A_1}, \\
\frac{1}{2}r_0^2 &= -\frac{AB\lambda_0 - (A+B)\lambda + \lambda_1}{A_1B_1}.
\end{aligned}$$

现在我们已经得到

$$\lambda_0 = -2, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda^2.$$

因此有

$$\begin{aligned}
p_0^2 &= \frac{4BC\lambda_0 - (B+C)^2\lambda + \lambda^2}{B_1C_1} = \frac{(2B+\lambda)(2C+\lambda)}{B_1C_1}, \\
q_0^2 &= \frac{4CA\lambda_0 - (C+A)^2\lambda + \lambda^2}{C_1A_1} = \frac{(2C+\lambda)(2A+\lambda)}{C_1A_1}, \\
r_0^2 &= \frac{4AB\lambda_0 - (A+B)^2\lambda + \lambda^2}{A_1B_1} = \frac{(2A+\lambda)(2B+\lambda)}{A_1B_1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

将方程 (3) 的前三个方程分别乘以 x_0、 y_0、 z_0后相加，可得

$$x_0(Ap_0 + A_1q_0r_0) + y_0(Bq_0 + B_1r_0p_0) + z_0(Cr_0 + C_1p_0q_0) = 0. \tag{7}$$

这个方程用于确定量 λ。三个量 f_0、 g_0、 h_0 必须满足以下三个方程:

$$\begin{aligned}
p_0f_0 + q_0g_0 + r_0h_0 &= 0, \\
Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 &= 0, \\
x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 &= \lambda,
\end{aligned}$$

由此，通过设定可得

$$\mu = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0) = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu}, \\
g_0 &= -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu}, \\
h_0 &= -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned} \tag{8}$$

方程（6）和（7）将量 p_0、 q_0、 r_0 确定到只差符号。若令

$$a=\sqrt{\frac{2A+\lambda}{A_1}},\quad b=\sqrt{\frac{2B+\lambda}{B_1}},\quad c=\sqrt{\frac{2C+\lambda}{C_1}}$$

以任意方式确定量 a、 b、 c 的符号后，要使 (3) 中的所有方程成立，必须令

$$\begin{aligned}p_0&=bc,\\ q_0&=ca,\\ r_0&=-ab.\end{aligned}$$

因此，方程 (7) 可写成如下形式

$$x_0(A+\lambda)p_0+y_0(B+\lambda)q_0+z_0(C+\lambda)r_0=0$$

or

$$x_0(A+\lambda)bc+y_0(B+\lambda)ca-z_0(C+\lambda)ab=0.$$

第二种情况。 现在假设三个量 A_1、 B_1、 C_1 中有一个等于零（例如 C_1）。（在这种情形下，也总可以假设 $y_0=0$。）要使两个方程

$$\begin{aligned}A(p_0f_0+q_0g_0)+Cr_0h_0&=0,\\ p_0f_0+q_0g_0+r_0h_0&=0,\end{aligned}$$

必须满足

$$r_0h_0=0.$$

方程 (3) 因此有两组解系统，记 $\varepsilon\pm$ 为.....，可写为 1:

I.
$$\begin{aligned}p_0&=\varepsilon i\cdot\frac{2C}{A-2C}\cdot\frac{z_0}{x_0}, & f_0&=-\frac{2C}{x_0},\\ q_0&=\varepsilon ip_0, & g_0&=-i\varepsilon\frac{2C}{x_0},\\ r_0&=2\varepsilon i, & h_0&=0.\end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned}p_0&=0, & f_0&=-\frac{2A}{x_0-i\varepsilon z_0},\\ q_0&=2\varepsilon i, & g_0&=0,\\ r_0&=0, & h_0&=\varepsilon i\frac{2A}{x_0-i\varepsilon z_0}.\end{aligned}$$

确定系数 p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 后，通过求解以下线性方程组即可得到系数 p_m, q_m, r_m, f_m, g_m,h_m ：

$$\begin{aligned}(m-1)Ap_m-A_1(q_0r_m+r_0q_m)-z_0g_m+y_0h_m&=P_m,\\ (m-1)Bq_m-B_1(r_0p_m+p_0r_m)-x_0h_m+z_0f_m&=Q_m,\\ (m-1)Cr_m-C_1(p_0q_m+q_0p_m)-y_0f_m+x_0g_m&=R_m,\\ (m-2)f_m-r_0g_m+q_0h_m-g_0r_m+h_0q_m&=F_m,\\ (m-2)g_m-p_0h_m+r_0f_m-h_0p_m+f_0r_m&=G_m,\\ (m-2)h_m-q_0f_m+p_0g_m-f_0q_m+g_0p_m&=H_m.\end{aligned}$$

这些方程的右端是系数p_μ, q_μ, r_μ, f_μ, g_μ, h_μ 的整函数，其中指标 $\mu < m$。为了使级数

$$\begin{aligned} p &= t^{-1}\sum p_m t^m, & \gamma &= t^{-2}\sum f_m t^m, \\ q &= t^{-1}\sum q_m t^m, & \gamma' &= t^{-2}\sum g_m t^m, \\ r &= t^{-1}\sum r_m t^m, & \gamma'' &= t^{-2}\sum h_m t^m, \end{aligned}$$

为了包含足够数量的任意常数，必须使这些线性方程的行列式（它是关于 m 的六次整函数）在 m 的五个不同正整数值处为零。此外，还必须使量 P_m、 Q_m、 R_m、 F_m、 G_m、 H_m 满足条件，从而使前述方程彼此相容。

在进行计算时，我发现这些条件在一般情形下并不成立；但除了已知的两种情形外，在一种新的情形下它们仍然成立，此时常数满足以下方程:

$$A = B = 2C, \quad z_0 = 0.$$

我打算在下文中研究的正是这种情形。

§ 2.

在我们即将讨论的情形下，有

$$A = B = 2C, \quad z_0 = 0.$$

通过在 xy 平面内旋转坐标轴，并适当选取长度单位，总可以在这种情形下使各项满足

$$y_0 = 0, \quad C = 1.$$

如果接着令

$$c_0 = Mgx_0,$$

我们需要考虑的微分方程如下:

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - c_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ \frac{dr}{dt} &= c_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'. \end{aligned} \tag{1}$$

一般情形的三个代数积分在此情形下为:

$$\begin{aligned} 2(p^2+q^2) + r^2 &= 2c_0\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

除了这三个代数积分外，还可以很容易地求得第四个。实际上有（令 $i = \sqrt{-1}$），

$$\begin{aligned} 2\frac{d(p+qi)}{dt} &= -ri(p+qi) - c_0 i\gamma'', \\ \frac{d(\gamma+\gamma' i)}{dt} &= -ri(\gamma+\gamma' i) + \gamma'' i(p+qi). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dt}\{(p+qi)^2 + c_0(\gamma+\gamma' i)\} = -ri\{(p+qi)^2 + c_0(\gamma+\gamma' i)\},$$

同理

$$\frac{d}{dt}\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-\gamma'i)\}=ri\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-\gamma'i)\},$$

由此可得

$$\frac{d}{dt}\log\{(p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma')\}+\frac{d}{dt}\log\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma')\}=0,$$

并且积分后,

$$\{(p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma')\}\{(p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma')\}=k^2, \tag{3}$$

以 k 表示任意实常数。令

$$\begin{aligned}
&x_1=p+qi, && y_1=\gamma+\gamma'i,\\
&x_2=p-qi, && y_2=\gamma-\gamma'i,\\
&\xi_1=(p+qi)^2+c_0(\gamma+i\gamma')=x_1^2+c_0y_1,\\
&\xi_2=(p-qi)^2+c_0(\gamma-i\gamma')=x_2^2+c_0y_2.
\end{aligned}$$

方程（3）于是写成

$$\xi_1\xi_2=k^2.$$

由方程（2）可得到用 x_1、 x_2、 ξ_1、 ξ_2 表示的 r^2、 $r\gamma''$、 γ''^2 的值:

$$\begin{aligned}
r^2&=6l_1-(x_1+x_2)^2+\xi_1+\xi_2,\\
c_0r\gamma''&=2lc_0+x_1x_2(x_1+x_2)-x_2\xi_1-x_1\xi_2,\\
c_0^2\gamma''^2&=c_0^2-k^2-x_1^2x_2^2+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2,
\end{aligned} \tag{4}$$

或者，令

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}&=6l_1-(x_1+x_2)^2,\\
\mathfrak{B}&=2lc_0+x_1x_2(x_1+x_2),\\
\mathfrak{C}&=c_0^2-k^2-x_1^2x_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2&=\mathfrak{A}+\xi_1+\xi_2,\\
c_0r\gamma''&=\mathfrak{B}-x_2\xi_1-x_1\xi_2,\\
c_0^2\gamma''^2&=\mathfrak{C}+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2.
\end{aligned} \tag{4'}$$

因此，四个量 x_1、 x_2、 ξ_1、 ξ_2 满足以下两个代数关系

$$\begin{aligned}
&\xi_1\xi_2=k^2,\\
&(\mathfrak{A}+\xi_1+\xi_2)(\mathfrak{C}+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2)-(\mathfrak{B}-x_2\xi_1-x_1\xi_2)^2=0.
\end{aligned} \tag{5}$$

令

$$\begin{aligned}
R(x_1)&=\mathfrak{A}x_1^2+2\mathfrak{B}x_1+\mathfrak{C}=-x_1^4+6l_1x_1^2+4lc_0x_1+c_0^2-k^2,\\
R(x_2)&=\mathfrak{A}x_2^2+2\mathfrak{B}x_2+\mathfrak{C}=-x_2^4+6l_1x_2^2+4lc_0x_2+c_0^2-k^2,\\
R_1(x_1x_2)&=\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2=-6l_1x_1^2x_2^2-(c_0^2-k^2)(x_1+x_2)^2\\
&\quad-4lc_0(x_1+x_2)x_1x_2+6l_1(c_0^2-k^2)-4l^2c_0^2.
\end{aligned}$$

于是方程（5）变为

$$\begin{aligned}
&\xi_1\xi_2=k^2,\\
&R(x_2)\xi_1+R(x_1)\xi_2+R_1(x_1x_2)+k^2(x_1-x_2)^2=0.
\end{aligned} \tag{5'}$$

此外，令

$$\begin{aligned} R(x_1x_2) &= \mathfrak{A}x_1x_2 + \mathfrak{B}(x_1+x_2) + \mathfrak{C} \\ &= -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2 + 2lc_0(x_1+x_2) + c_0^2 - k^2; \end{aligned}$$

使得此时有恒等式

$$R(x_1)R(x_2) - R(x_1x_2)^2 = (x_1-x_2)^2R_1(x_1x_2). \tag{6}$$

令:

$$\begin{aligned} W^2 &= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1-x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1)R(x_2) \\ &= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1-x_2)^2\}^2 - 4k^2\{R(x_1x_2)^2 + (x_1-x_2)^2R_1(x_1x_2)\} \\ &= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1-x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1x_2)^2 \\ &= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1-x_2)^2 - 2kR(x_1x_2)\}\{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1-x_2)^2 + 2kR(x_1x_2)\}. \end{aligned} \tag{7}$$

由于根据恒等式 (6) 有

$$\begin{aligned} k^2(x_1-x_2)^2 + 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2) &= \frac{1}{(x_1-x_2)^2}\{k^2(x_1-x_2)^4 + 2k(x_1-x_2)^2R(x_1x_2) + \\ &\quad R(x_1x_2)^2 - R(x_1)R(x_2)\} \\ &= \frac{1}{(x_1-x_2)^2}\{[k(x_1-x_2)^2 + R(x_1x_2)]^2 - R(x_1)R(x_2)\} \\ &= (x_1-x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\} \\ &\quad \cdot\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\}, \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} k^2(x_1-x_2)^2 - 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2) =& (x_1-x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\} \\ &\cdot\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\}, \end{aligned}$$

可以写成

$$\begin{aligned} W^2 = (x_1-x_2)^4&\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\} \\ \times&\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\}, \end{aligned} \tag{7'}$$

于是有

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1-x_2)^2 - W}{2R(x_2)}, \\ \xi_2 &= -\frac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1-x_2)^2 + W}{2R(x_1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

现在我们不使用两个变量 x_1 和 x_2，而引入由以下方程定义的两个新变量 s_1 和 s_2

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2} + \frac{l_1}{2}, \\ s_2 &= \frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2} + \frac{l_1}{2}; \end{aligned} \tag{9}$$

其中 s_1 和 s_2 显然是二次代数方程的两个根 e

$$(x_1-x_2)^2\left(s-\frac{1}{2}l_1\right)^2-R(x_1x_2)\left(s-\frac{1}{2}l_1\right)-\frac{1}{4}R_1(x_1x_2)=0.$$

于是有

$$W^2=(x_1-x_2)^4(2s_1-l_1-k)(2s_1-l_1+k)(2s_2-l_1-k)(2s_2-l_1+k);$$

或者，令

$$k_1=\frac{l_1+k}{2},\quad k_2=\frac{l_1-k}{2},$$

便有

$$W^2=16(x_1-x_2)^4(s_1-k_1)(s_2-k_1)(s_1-k_2)(s_2-k_2), \tag{10}$$

$$\begin{cases}\xi_1=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{R(x_2)}\{[\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)}+\sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)}]^2-k^2\},\\ \xi_2=\dfrac{(x_1-x_2)^2}{R(x_1)}\{[\sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)}-\sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)}]^2-k^2\}.\end{cases} \tag{11}$$

现在来建立定义这两个新变量 s_1 和 s_2 关于时间的函数的微分方程。令

$$\begin{aligned}g_2&=k^2-c_0^2+3l_1^2,\\ g_3&=l_1(k^2-c_0^2-l_1^2)+l^2c_0^2,\\ S_1&=4s_1^3-g_2s_1-g_3,\\ S_2&=4s_2^3-g_2s_2-g_3,\end{aligned} \tag{12}$$

可得

$$\begin{aligned}\sqrt{S_1}&=\frac{R(x_1)-\frac{1}{4}(x_1-x_2)R'(x_1)}{(x_1-x_2)^3}\sqrt{R(x_2)}-\frac{R(x_2)+\frac{1}{4}(x_1-x_2)R'(x_2)}{(x_1-x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},\\ \sqrt{S_2}&=\frac{R(x_1)-\frac{1}{4}(x_1-x_2)R'(x_1)}{(x_1-x_2)^3}\sqrt{R(x_2)}+\frac{R(x_2)+\frac{1}{4}(x_1-x_2)R'(x_2)}{(x_1-x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\dfrac{ds_1}{\sqrt{S_1}}=\dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}},\\ \dfrac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=-\dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}.\end{cases} \tag{13}$$

由（1）中的微分方程可得，由于 $x_1=p+qi$ 和 $x_2=p-qi$，因此

$$\begin{aligned}2i\frac{dx_1}{dt}&=rx_1+c_0\gamma'',\\ -2i\frac{dx_2}{dt}&=rx_2+c_0\gamma''.\end{aligned} \tag{14}$$

因此

$$-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2=r^2x_1^2+2rc_0\gamma''x_1+c_0^2\gamma''^2$$

或者，将由方程 (4') 定义的 r^2、 $c_0r\gamma''$、 $c_0^2\gamma''^2$ 的值代入，

$$\begin{aligned}-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2&=x_1^2(\mathfrak{A}+\xi_1+\xi_2)+2x_1(\mathfrak{B}-x_2\xi_1-x_1\xi_2)+\mathfrak{C}+x_2^2\xi_1+x_1^2\xi_2\\ &=R(x_1)+(x_1-x_2)^2\xi_1.\end{aligned}$$

同理可得

$$-4\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2\xi_2$$

and

$$\begin{aligned}4\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{dx_2}{dt} &= r^2x_1x_2 + rc_0\gamma''(x_1+x_2) + c_0^2\gamma''^2\\ &= x_1x_2(\mathfrak{A}+\xi_1+\xi_2) + (x_1+x_2)(\mathfrak{B}-x_2\xi_1-x_1\xi_2) + \mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2\\ &= R(x_1x_2).\end{aligned}$$

将方程 (13) 中第一个方程的两边平方，可得

$$\begin{aligned}-4\cdot\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 &= -\frac{4}{R(x_1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \frac{4}{R(x_2)}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}\\ &= 2 + (x_1-x_2)^2\left(\frac{\xi_1}{R(x_1)} + \frac{\xi_2}{R(x_2)}\right) - 2\frac{R(x_1x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}},\end{aligned}$$

或者，利用方程 (5),

$$\begin{aligned}-4\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\frac{ds_1}{dt}\right)^2 =& 2 - \frac{(x_1-x_2)^2}{R(x_1)\cdot R(x_2)}\{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1-x_2)^2\} - \frac{2R(x_1x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\cdot\sqrt{R(x_2)}}\\ =& \frac{R(x_1)\cdot R(x_2) + R(x_1x_2)^2 - 2R(x_1x_2)\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)} - k^2(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\\ =& \frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)\cdot R(x_2)}\left\{\frac{\left[R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}\right]^2}{(x_1-x_2)^4} - k^2\right\}\\ =& 4\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left(\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2} - \frac{1}{2}k\right)\\ &\cdot\left(\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{2}k\right)\\ =& 4\frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)\cdot R(x_2)}(s_1-k_1)(s_1-k_2).\end{aligned}$$

但有

$$s_2 - s_1 = \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}.$$

因此

$$-\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 = \frac{(s_1-k_1)(s_1-k_2)}{(s_1-s_2)^2}.$$

令

$$R_1(s) = -S(s-k_1)(s-k_2) = -4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)(s-k_1)(s-k_2);$$

于是有

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} = \frac{dt}{s_1-s_2}.$$

完全可以用同样的方法得出

$$\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{dt}{s_2-s_1}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}, \\ dt &= \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}. \end{aligned} \tag{15}$$

设 $R_1(s)$ 是一个五次多项式，且方程 $R_1(s) = 0$ 的根彼此互异，则（15）中的微分方程将引导我们得到双曲函数，换言之，即 WEIERSTRASS先生的函数。

我们先来求六个量 p、 q、 r、 γ、 γ'、 γ'' 用两个量 s_1 和 s_2表示的表达式。借助一些公式，我们就能做到这一点。这些公式取自 WEIERSTRASS先生关于椭圆函数的一门未发表课程，其中一部分也见于 HALPHEN先生的《*Trait´e desfonctions elliptiques* 等著作，以及 SCHWARTZ先生的《*Formeln und Lehrs¨atze* 等著作。

§ 3.

Let

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

是变量 x的一个四次多项式。系数 A、 B、 C、 B'、 A' 均为常数，并满足 $R(x)$没有二次因子的条件。设 u 是第二个变量，它与 x 通过下列微分方程相联系

$$du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \tag{1}$$

最　　一般的 u 与 x 之间的关系可表示如下。令我们考察　　t

$$\begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2, \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3, \\ D &= B^2 - AC, \\ E &= A^2B' - 3ABC + 2B^3; \end{aligned} \tag{2}$$

于是我们有

$$4\left(\frac{D}{A}\right)^3 - g_2\frac{D}{A} - g_3 = \frac{E^2}{A^2}. \tag{3}$$

我们用 $\wp(u)$ 表示函数 $\wp(u,\ g_2,\ g_3)$，用 $\bar{\wp}(u)$ 表示函数 $\wp(u,\ g_2,\ -g_3)$[1]。根据方程（3），可以定义一个参数 w ，使得在任意确定 $\sqrt{A}$ 的符号后，以下两个方程

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \quad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}} \tag{4}$$

同时成立。令

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp u + \wp' w}{\wp u - \wp w} \\ &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'(u-w)}{\sigma(u-w)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

x 作为 u 的函数的最一般表达式为

$$x = \varphi_0(u - u_0). \tag{6}$$

[1]参见 HALPHEN，*Traité des fonctions elliptiques* 。SCHWARTZ，*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* 。

wh其中， u_0 表示任意常数。（对于 $u = u_0$、 $x = \infty$ 和 $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{A}$。）有

$$\varphi_0(-u+w) = \varphi_0(u), \quad \varphi_0\left(u+\frac{w}{2}\right) = \varphi_0\left(-u+\frac{w}{2}\right) \tag{7}$$

因此，如果我们设

$$\begin{aligned}\varphi(u,w) = \varphi_0\left(u+\frac{w}{2}\right) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'\left(u-\frac{w}{2}\right)}{\sigma\left(u-\frac{w}{2}\right)} - \frac{\sigma'\left(u+\frac{w}{2}\right)}{\sigma\left(u+\frac{w}{2}\right)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\} \\ &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

那么 $\varphi(u,\ w)$ 是关于 u 的偶函数。若在 w 上加上函数 $\wp(u)$ 的任意一个周期，方程 (4) 不变。因此，如果用 $(2\tilde{\omega},\ 2\tilde{\omega}')$ 表示函数 $\wp(u)$ 的任意一对基本周期，并且在所有满足方程 (4) 的 w 值（无穷多个）中任意选定一个，那么这四个表达式

$$\varphi(u,w), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}'), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}')$$

将表示关于 u 的四个不同的偶函数；将它们代入 x 后，均满足微分方程 (1)。事实上，若 2Ω 和 $2\Omega'$ 是函数 $\wp(u)$ 的两个任意周期，由方程 (8) 可知

$$\begin{aligned}\varphi(u,w+2\Omega) &= \varphi(u+\Omega,w), \\ \varphi(u,w+2\Omega') &= \varphi(u+\Omega',w).\end{aligned} \tag{9}$$

要使方程

$$\varphi(u,w+2\Omega) = \varphi(u,w+2\Omega')$$

对 u 的所有取值都成立，因此必须有

$$\begin{aligned}\varphi(u+\Omega,w) &= \varphi(u+\Omega',w), \\ \varphi(u+\Omega'-\Omega,w) &= \varphi(u,w),\end{aligned}$$

也就是说，$\Omega'-\Omega$ 必须是函数 $\varphi(u)$ 的一个周期；因此（根据方程 (8) 的最后一个方程），$\Omega'-\Omega$ 也必须是 $\wp u$ 的一个周期。若非如此，函数 $\varphi(u,\ w+2\Omega)$ 和 $\varphi(u,\ w+2\Omega')$ 并不相同。因此，前述四个函数，

$$\varphi(u,w), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}'), \quad \varphi(u,w+2\tilde{\omega}'),$$

这些根彼此均不相同。然而，总共只有四个关于 u 的偶函数，在代入 x 后满足微分方程 (1)；这四个函数的特点是，当 $u=0$ 时，每个函数都等于该方程的四个根之一

$$R(x) = 0.$$

因此，这四个函数必定与上述四个偶函数相同，并且根据方程 (9)，也可以将它们写成如下形式：

$$\varphi(u,w), \quad \varphi(u+\tilde{\omega},w), \quad \varphi(u+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}',w), \quad \varphi(u+\tilde{\omega}',w).$$

若设

$$\begin{aligned} a &= \varphi(0,w), & a_1 &= \varphi(\tilde{\omega},w) = \varphi(0,w+2\tilde{\omega}), \\ a_2 &= \varphi(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}',w) = \varphi(0,w+2\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}'), & a_3 &= \varphi(\tilde{\omega}',w) = \varphi(0,w+2\tilde{\omega}'),\end{aligned}$$

四个量 ies a、 a_1、 a_2、 a_3 表示方程 $R(x)=0$ 的4个不同的根，并且有

$$\begin{aligned} a &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}, & a_2 &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'\right)}, \\ a_1 &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}\right)}, & a_3 &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}+\tilde{\omega}'\right)}.\end{aligned}$$

令 $\wp(\tilde{\omega}) = e_1$, $\wp(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}') = e_2$、$\wp(\tilde{\omega}') = e_3$，对于自变量 u的每一个值，下列关系成立 ，

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1 u + (e_3^2-e_1^2)\sigma_2 u + (e_1^2-e_2^2)\sigma_3 u}{(e_2-e_3)\sigma_1 u + (e_3-e_1)\sigma_2 u + (e_1-e_2)\sigma_3 u},$$

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{-2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\sigma u}{(e_2-e_3)\sigma_1 u + (e_3-e_1)\sigma_2 u + (e_1-e_2)\sigma_3 u},$$

$$\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)} = -2\cdot\frac{(e_2-e_3)\sigma_2 u\sigma_3 u + (e_3-e_1)\sigma_3 u\sigma_1 u + (e_1-e_2)\sigma_1 u\sigma_2 u}{\sigma u[(e_2-e_3)\sigma_1 u + (e_3-e_1)\sigma_2 u + (e_1-e_2)\sigma_3 u]}$$

$$= -2\frac{\sigma_1 u + \sigma_2 u + \sigma_3 u}{\sigma u}.$$[2]

此外可得

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A}-e_1},\quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A}-e_2},\quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A}-e_3}.$$

对于 w 的每一个确定值，这些方程中平方根所对应的符号也完全确定，因此有

$$\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}\cdot\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}\cdot\sqrt{\frac{D}{A}-e_3} = -\frac{1}{2}\wp'(w) = \frac{E}{2A\sqrt{A}}.$$

由这些方程可得

$$-\wp\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + (e_3^2-e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + (e_1^2-e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + (e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + (e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}},$$

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{-2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{(e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + (e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + (e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}\right\}.$$

因此，与我们所选 w 的特定值相对应的方程 $R(x)=0$ 的根 a，由下式给出:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)} - \frac{B}{A}$$

$$= -\frac{B}{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}\right\}.$$

如果令

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= \sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+\sqrt{\frac{D}{A}-e_3},$$

$$h_1 = \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3},$$

$$h_2 = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2^2-e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}+(e_3^2-e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}+(e_1^2-e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3},$$

[2]参见 Schwarz, *Formeln und Lehrsätze*。

因此可得

$$a = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},$$
$$\varphi(u,w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1\wp u + h_2}.$$

令

$$\tilde{\omega} = \omega_1,$$
$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = \omega_2,$$
$$\tilde{\omega}' = \omega_3$$

并以 λ、 μ、 ν 按任意顺序表示数字 1、2、3，可得

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)} = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$
$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$
$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\nu)}{\sigma(u+2\omega_\nu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}.$$

因此，在前述表达式中用 $w+2\omega_1$、 $w+2\omega_2$、 $w+2\omega_3$ 代替 w，并令 [TN1], [TN2]，可得:

$$\begin{aligned}
h_0' &= \frac{\sigma_1(w)-\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_1' &= \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_2' &= \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_0'' &= \frac{-\sigma_1(w)+\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_1'' &= \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_2'' &= \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_0''' &= \frac{-\sigma_1(w)-\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_1''' &= \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},\\
h_2''' &= \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_3^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}
\end{aligned} \tag{14}$$

如下

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u,w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1\wp u + h_2},\\
a_1 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_1,w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'\wp u + h_2'},\\
a_2 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_2,w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1''\wp u + h_2''},\\
a_3 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u+\omega_3,w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'''\wp u + h_2'''}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由此可得关于 u 的四个偶函数，它们满足微分方程 $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$；还可得到方程 $R(x) = 0$ 的相应根，也就是说，这四个函数各自在 $u = 0$ 处的取值可表示为下列各量的有理函数：

$$
\frac{B}{A},\quad \frac{1}{\sqrt{A}},\quad \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1},\quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2},\quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.
$$

到目前为止，我们尚未对常数 A、 B、 C、 B'、 A' （即 $R(x)$ 的系数）施加任何条件；现在假设所有这些系数都是实数。在这种情形下，总存在满足方程 $\wp'(u) = 0$ 的正实值 u ；我们将其中最小的一个记为 ω 。类似地，方程 $\bar{\wp}'(u) = 0$ 可由 u 的正实值满足，我们将其中最小的一个记为 $\tilde{\omega}$ 。

现在有必要区分两种情形：

I. 量 $g_2^3 - 27g_3^2$ 为正。

在这种情形下，令

$$
\omega_1 = \omega,\quad \omega_2 = \omega + \tilde{\omega}i,\quad \omega_3 = \tilde{\omega}i,
$$

$$
\wp(\omega_1) = e_1,\quad \wp(\omega_2) = e_2,\quad \wp(\omega_3) = e_3.
$$

量 e_1、 e_2、 e_3 表示方程的根

$$
4s^3 - g_2 s - g_3 = 0,
$$

在这种情形下均为实数，并且有

$$
e_1 > e_2 > e_3;
$$

且（$2\omega_1, 2\omega_3$）是函数 $\wp(u)$ 的一对基本周期。

II. 量 $g_2^3 - 27g_3^2$ 为负。

在这种情形下，令

$$
\omega_1 = \frac{\omega - \tilde{\omega}i}{2},\quad \omega_2 = \omega,\quad \omega_3 = \frac{\omega + \tilde{\omega}i}{2},
$$

$$
\wp(\omega_1) = e_1,\quad \wp(\omega_2) = e_2,\quad \wp(\omega_3) = e_3.
$$

其中，$(2\omega_1,\ 2\omega_3)$ 在此情形下也表示函数 $\wp(u)$ 的一对基本周期；但 e_1 和 e_3在此情形下是共轭虚量，而 $e_2 = -(e_1 + e_3)$ 为实数。量 $\frac{e_1 - e_3}{i}$为正量。若约定在 A 为正时取 $\sqrt{A}$ 的正值，并以此根表示

在 A 为负时， i 与一个正量的乘积，则在两种情形下，都可以按以下方式确定一个满足方程的 w 值

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \quad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}.$$

这些方程

$$\frac{E^2}{A^3} = \wp'(w)^2 = 4\left(\frac{D}{A} - e_1\right)\left(\frac{D}{A} - e_2\right)\left(\frac{D}{A} - e_3\right)$$

表明，在情况 I 中，若 $A > 0$, $\frac{D}{A}$ 必须包含在区间 $(e_1 \ldots \infty)$ 或区间 $(e_3 \ldots e_2)$ 内；若 $A < 0$, $\frac{D}{A}$ 则属于区间 $(-\infty \ldots e_3)$ 或区间 $(e_2 \ldots e_1)$。相反，在情况 II 中， $\frac{D}{A}$ 必须包含在区间 $(e_2 \ldots \infty)$ 或区间 $(-\infty \ldots e_2)$ 内。

我们用 $(a \ldots b)$ 表示包含在实区间 $(a \ldots b)$ 内的一个量，用 (+) 和 (–) 分别表示正量或负量，并用 ϵ 表示满足下列条件的一个实量

$$0 < \epsilon < 1.$$

在情况 I 中，有

$$(1) \quad \wp(2\epsilon\omega) = (\infty \ldots e_1), \quad \wp'(2\epsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = \frac{1}{2}, \\ (+), & \epsilon > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \wp(\omega + 2\epsilon\tilde{\omega}i) = (e_1 \ldots e_2), \quad \wp'(\omega + 2\epsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+)i, & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = \frac{1}{2}, \\ (-)i, & \epsilon > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \wp(2\epsilon\omega + \tilde{\omega}i) = (e_3 \ldots e_2), \quad \wp'(2\epsilon\omega + \tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+), & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = 0, \\ (-), & \epsilon > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \wp(2\epsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_3), \quad \wp'(2\epsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \epsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

在这四种情形中的每一种情形下，若令 ϵ 从 0 连续增至 $1\ 2$，函数 $\wp(u)$ 将遍历所示的整个区间：在第 3 种和第 4 种情形下持续递增，在第 1 种和第 2 种情形下持续递减，直至 $\epsilon = \frac{1}{2}$。随后，若将 ϵ 从 $1\,2$ 变至 1， $\wp(u)$ 在每种情形下都将遍历与之前相同的区间，但方向相反。因此，与距 $1\,2$ 相等的两个 ϵ 值相对应的是相同的 $\wp(u)$ 值，但 $\wp'(u)$ 的值相反。

在情况 II 中，有

$$(5) \quad \wp(2\epsilon\omega) = (+\infty \ldots e_2), \quad \wp'(2\epsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = \frac{1}{2}, \\ (+), & \epsilon > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(6) \quad \wp(2\epsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_2), \quad \wp'(2\epsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \epsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \epsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \epsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

根据这些方程，可以定义一个量 w，满足以下方程

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \quad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

如下所示：

I. $g_2^3 - 27g_3^2$ **为正：**

1) 若 A 为正，且 $\frac{D}{A}$ 属于区间（$+\infty \dots e_1$），则可设

$$w = 2\epsilon\omega \quad (0 < \epsilon < 1),$$

注意到

$$\epsilon \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{according to } E \leqq 0.$$

2) 若 A 为负，且 $\frac{D}{A}$ 位于区间（$-\infty \dots e_3$）内，则可设

$$w = 2\epsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \epsilon < 1),$$

于是有

$$\epsilon \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{according to } E \leqq 0.$$

3) 若 A 为正，但 $\frac{D}{A}$ 位于区间（$e_3 \dots e_2$）内，则可设

$$w = 2\epsilon\omega + \tilde{\omega}i \quad (0 \leq \epsilon < 1),$$

于是有

$$\epsilon \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{according to } E \leqq 0.$$

4) 若 A 为负，且 $\frac{D}{A}$ 属于区间（$e_2 \dots e_1$），则可设

$$w = \omega + 2\epsilon\tilde{\omega}i \quad (0 \leq \epsilon < 1),$$

并且有

$$\epsilon \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{according to } E \leqq 0.$$

II. $g_2^3 - 27g_3^2$ **是一个负量。**

5) 若 A 为正，$\frac{D}{A}$ 属于区间（$e_2 \dots \infty$），则可设

$$w = 2\epsilon\omega \quad (0 \leq \epsilon < 1),$$

其中 ϵ 根据 $E \leqq 0$ 为 $\leqq \frac{1}{2}$。

6) 若 A 为负，$\frac{D}{A}$ 位于区间（$-\infty \dots e_2$），则可设

$$w = 2\epsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \epsilon < 1),$$

ϵ 根据 $E \leqq 0$为 $\leqq \frac{1}{2}$。

情形1)和2)出现在方程 $R(x) = 0$ 的四个根全为实数时。情形3)和4)出现在这些根全为虚数时。最后，当两个根为实数，另外两个根为共轭虚根时，则为情形5)和6)。

在情形1)中，量 $\frac{D}{A} - e_1$、$\frac{D}{A} - e_2$、$\frac{D}{A} - e_3$ 全为实数且为正；在情形2)中，它们为实数且为负；因此，根据方程(14)，这些量

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \quad \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

在这两种情形下均为实数。在情形3)中，量 $\frac{D}{A} - e_1$、$\frac{D}{A} - e_2$ 为负，而 $\frac{D}{A} - e_3$ 为正；因此

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}$$

是虚数量，而 $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$ 是实量。因此，量 $\frac{h_0}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0'}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0''}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$ 是复数量。量 a和 a_2，以及 a_1 和 a_3 在此情形下互为共轭复数量。

在情形4)中，量 $\frac{D}{A}-e_1$、$\frac{D}{A}-e_3$为正，而 $\frac{D}{A}-e_2$为负；因此 $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A}-e_2}$为实数，但 $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A}-e_1}$和 $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}$为虚数。量 $\frac{h_0}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0'}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0''}{\sqrt{A}}$、$\frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$为复数。根 a 和 a_1，以及 a_2 和 a_3 互为共轭复数量。

在情形5)中，$\frac{D}{A}-e_2$为正，$\frac{D}{A}-e_1$和 $\frac{D}{A}-e_3$是共轭复数量。函数 $\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}$和 $\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$在 u取实值时取共轭复值，因此，若 u 和 u' 是共轭复值，则相应的值

$$\frac{\sigma_2 u}{\sigma u},\quad \frac{\sigma_3 u'}{\sigma u'}$$

也为共轭复数量。

在情形5)和情形6)中，以下各量

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_1 w}{\sigma w},\quad \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_3 w}{\sigma w}$$

是共轭复数量，而

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_2 w}{\sigma w}$$

是实量。

因此，在情形5)和情形6)中，量 a 和 a_2 为实数，而 a_1 和 a_3 互为复共轭。因此，根据前面的讨论，当 u取实值时，函数

$$\varphi(u,w),\quad \varphi(u+\omega_1,w),\quad \varphi(u+\omega_2,w),\quad \varphi(u+\omega_3,w)$$

在情形1）和2）中均为实数，在情形3）和4）中均为虚数。需要指出的是，在情形3）中，这些函数中的第一个与第三个、第二个与第四个分别是共轭虚量；而在情形4）中，第一个与第二个、第三个与第四个函数分别互为共轭。在情形5）和6）中，这些函数中的第一个和第三个为实数，而第二个和第四个为共轭虚根。

§ 4.

为了将前一节的公式应用于我们正在讨论的情形，必须先讨论该方程的根

$$R(x)=-x^4+6l_1x^2+4c_0lx+c_0^2-k^2=0.$$

设

$$k_0=c_0^2-k^2,\quad l_0=c_0l.$$

一般而言，若

$$R(x)=Ax^4+4Bx^3+6Cx^2+4B'x+A'$$

并设

$$g_2=AA'-4BCB'+3C^2,$$
$$g_3=ACA'+2BCB'-AB'^2-A'B^2-C^3,$$

方程 $R(x)=0$ 的根为实数的条件可表述如下。若 G $\equiv g_2^3-27g_3^2\leqslant 0$，则方程 $R(x)=0$ 的四个根全为实数，或全为虚数，且组成两对共轭对。若进一步满足以下条件，则会出现四个根全为实数的情形：

$$B^2-AC>0,\quad 12(B^2-AC)^2-A^2g_2>0.$$

但是，如果当 $g_2^3-27g_3^2$ 为正时，上述量中有一个为负，那么方程 $R(x)=0$ 的四个根都是虚数。

将此应用于我们的情形，可得

$$A=-1,\quad B=0,\quad C=l_1,\quad B'=lc_0=l_0,\quad A'=c_0^2-k^2=k_0,$$
$$g_2=-k_0+3l_1^2,$$
$$g_3=-l_1(k_0+l_1^2)+l_0^2,$$

$$\begin{aligned}B^2-AC&=l_1,\\ 12(B^2-AC)^2-A^2g_2&=k_0+9l_1^2,\\ g_2^3-27g_3^2&=(-k_0+3l_1^2)^3-27[-l_1(k_0+l_1^2)+l_0^2]^2\\ &=-27\left\{l_0^4-2l_1(k_0+l_1^2)l_0^2+\frac{1}{27}k_0\left(k_0+9l_1^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

根据恒等式

$$l_1^2(k_0+l_1^2)^2=\frac{1}{27}k_0(k_0+9l_1^2)^2+\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^3$$

以 l_0^2 为未知数的二次方程的根

$$Q(l_0^2)=l_0^4-2l_1(k_0+l_1^2)l_0^2+\frac{1}{27}k_0(k_0+9l_1^2)^2$$

可以写成

$$l_0'^2=l_1(k_0+l_1^2)+\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$l_0''^2=l_1(k_0+l_1^2)-\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

其中，若根式 $\left(\frac{-k_0+3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 为实数，我们将假定其为正。

将这些公式应用于方程 $R(x)=0$ 之根的讨论，可见必须区分下列情形：

1°。 $l_1>0,\ k_0>0,\ -k_0+3l_1^2<0.$

在此情形下， $l_0'^2$和 $l_0''^2$都是虚数。因此，对于所有实值l_0， $G=-27Q(l_0^2)$均为负数，而方程 $R(x)=0$ 有两个实根和两个虚根。

2°。 $l_1>0,\quad k_0>0,\quad -k_0+3l_1^2>0$。

$l_0'^2$和 $l_0''^2$均为正，且 $l_0'^2>l_0''^2$。那么，若

$$l_0^2>l_0'^2\quad\text{or}\quad l_0^2<l_0''^2,$$

有 $G<0$，且方程 $R(x)=0$ 仍有两个实根和两个虚根。反之，若

$$l_0'^2>l_0^2>l_0''^2,$$

G 为正；又因为还有 $l_1>0$、 $k_0+9l_1^2>0$，方程 $R(x)=0$ 的四个根都是实数。**3°**。 $l_1>0,\ k_0<0,\ k_0+9l_1^2>0$。

根 $l_0'^2$为正，另一个 $l_0''^2$为负。这个量

$$G=-27Q(l_0^2)$$

若 $l_0^2>l_0'^2$，则为负；在这种情形下，方程 $R(x)=0$ 有四个实根。相反，若 $l_0^2<l_0'^2$，则 G为正，所给方程只有两个实根。

4°。 $l_1>0,\quad k_0<0,\quad k_0+9l_1^2<0$。

与前一种情形一样，当 $l_0^2 < l_0'^2$时， G 为正；当 $l_0^2 > l_0'^2$时， G 为负。若其为负，则方程$R(x) = 0$ 在这种情形下有四个虚根；若其为正，则有两个实根和两个虚根。**5°**。 $l_1 < 0$， $k_0 > 0$。

当 $l_0'^2$和 $l_0''^2$为负数或虚数时，对于 l_0的每一个实数值，量 $G = -27Q(l_0^2)$始终为负；因此，方程 $R(x) = 0$ 有两个实根和两个虚根。

6°。 $l_1 < 0$， $k_0 < 0$。

这种情形与第四种情形完全一致。

总结：

方程 $R(x) = 0$ 在以下两种情形下有四个实根：

$$1)\quad l_1 > 0,\quad k_0 > 0,\quad -k_0 + 3l_1^2 > 0,\quad l_0'^2 > l_0^2 > l_0''^2,$$

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$2)\quad l_1 > 0,\quad k_0 < 0,\quad k_0 + 9l_1^2 > 0,\quad l_0^2 < l_0'^2.$$

方程 $R(x) = 0$ 在以下情形下的四个根均为虚数：

$$1)\quad l_1 > 0,\quad k_0 > 0,\quad k_0 + 9l_1^2 < 0,\quad l_0^2 < l_0'^2.$$

$$2)\quad l_1 < 0,\quad k_0 < 0,\quad l_0^2 < l_0'^2.$$

最后，方程 $R(x) = 0$ 在下列情形中有两个实根：

$$1)\quad l_1 > 0,\quad k_0 > 0,\quad -k_0 + 3l_1^2 < 0,\ \text{for each value of } l_0.$$

$$2)\quad l_1 > 0,\quad k_0 > 0,\quad -k_0 + 3l_1^2 > 0,\quad l_0^2 > l_0'^2 \text{ or } l_0^2 < l_0''^2.$$

$$3)\quad l_1 > 0,\quad k_0 < 0,\quad k_0 + 9l_1^2 > 0,\quad l_0^2 < l_0'^2.$$

$$4)\quad l_1 > 0,\quad k_0 < 0,\quad k_0 + 9l_1^2 < 0,\quad l_0^2 > l_0'^2.$$

$$5)\quad l_1 < 0,\quad k_0 > 0,\ \text{for each value of } l_0.$$

$$6)\quad l_1 < 0,\quad k_0 < 0,\quad l_0^2 > l_0'^2.$$

§ 5.

我将更详细地考察这样一种情形：方程的所有根

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4lc_0x + c_0^2 - k^2 = 0$$

均为实数。采用与§ 3中相同的记号，因此在此情形下有

$$\wp(w) = \frac{D}{A} = -l_1,\quad \wp'(w)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 = -l_0^2.$$

其中 w 是纯虚的。量 e_1、 e_2、 e_3 均为实数，且有

$$e_1 > e_2 > e_3 > -l_1.$$

这些量

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{-(l_1 + e_1)},\quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{-(l_1 + e_2)},\quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{-(l_1 + e_3)}$$

均为纯虚，量也同样如此

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} + \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} + \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} + (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} + (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} + (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} + (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)}.$$

由于 x^4 在 $R(x)$中的系数等于 -1，因此在这种情形下，我们令 E 表示乘积 $(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$，

$$p + qi = x_1 = \varphi(u_1) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1\wp u_1 + h_2}\right),$$
$$p - qi = x_2 = \varphi(u_2) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1\wp u_2 + h_2}\right),$$

由此可见，若 u_1 和 u_2 是共轭虚量，则 x_1 和 x_2 也将是共轭虚量。令

$$u_1 = \frac{u + vi}{2}, \quad u_2 = \frac{u - vi}{2},$$

其中 u 和 v 为实数。于是有

$$s_1 = \wp(u_1 + u_2) = \wp(u), \quad s_2 = \wp(u_1 - u_2) = \wp(vi).$$

由这些公式可知， s_1 和 s_2 都是实数量，且介于以下界限之间

$$(\infty \ldots s_1 \ldots e_1), \quad (e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

为了用 s_1 和 s_2表示量 p 和 q，我将使用以下恒等式。在所引 SCHWARZ先生著作的第50页上，可以找到以下内容

$$\sigma_\lambda(w)\sigma(u + v + w)\sigma(u - v)$$
$$= \sigma(u + w)\sigma(u)\sigma_\lambda(v + w)\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u + w)\sigma_\lambda(u)\sigma(v + w)\sigma(v),$$
$$\sigma_\lambda(w)\sigma_\lambda(u + v + w)\sigma_\lambda(u - v)$$
$$= \sigma_\lambda(u + w)\sigma_\lambda(u)\sigma_\lambda(v + w)\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\sigma(u + w)\sigma(u)\sigma(v + w)\sigma(v).$$

将 $w = 0$ 代入这些恒等式，并依次令 λ 取值 1、2、3，可得

$$\sigma(u + v)\sigma(u - v) = \sigma^2 u\sigma_1^2 v - \sigma_1^2 u\sigma^2 v,$$
$$\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) = \sigma_1^2 u\sigma_1^2 v - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v,$$
$$\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) = \sigma_2^2 u\sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v,$$
$$\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v) = \sigma_3^2 u\sigma_3^2 v - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v,$$

或者，注意到

$$\sigma_2^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u,$$
$$\sigma_3^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_3)\sigma^2 u,$$

$$\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) = \sigma_1^2 u\sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v + (e_1 - e_2)(\sigma^2 u\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\sigma^2 v),\sigma_3$$
$$(u + v)\sigma_3(u - v) = \sigma_1^2 u\sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u\sigma^2 v + (e_1 - e_3)(\sigma^2 u\sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u\sigma^2 v).$$

由这些公式可知

$$
\begin{aligned}
&2(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)\sigma^2u\sigma^2v=\\
&\qquad(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),\\
&2(e_2-e_3)\sigma_1^2u\sigma_1^2v=\\
&\qquad(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)-(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)-(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),\\
&2(e_2-e_3)\sigma^2u\sigma_1^2v=(e_2-e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v)-\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),\\
&2(e_2-e_3)\sigma_1^2u\sigma^2v=-(e_2-e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v)-\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),
\end{aligned}
$$

由此相除可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_1^2u}{\sigma^2u}&=(e_1-e_2)(e_1-e_3)\\
&\quad\times\frac{(e_2-e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v)+\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)-\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}
\end{aligned}
$$

因此，由于 $\wp u=\frac{\sigma_1^2u}{\sigma^2u}+e_1$，

$$
\begin{aligned}
\wp u=&-\frac{E\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}-\\
&\frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)},\\
\wp v=&\frac{E\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}-\\
&\frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2-e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)+(e_3-e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v)+(e_1-e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}.
\end{aligned}
$$

于是令

$$
P_a=\frac{\sigma_a(u_1+u_2)\sigma_a(u_1-u_2)}{\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2)}=\sqrt{(s_1-e_a)\,(s_2-e_a)},\quad(a=1,2,3)
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\wp(u_1)+\wp(u_2)&=-2\frac{(e_2^2-e_3^2)P_1+(e_3^2-e_1^2)P_2+(e_1^2-e_2^2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3},\\
\wp(u_1)-\wp(u_2)&=\frac{-2E}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3},\\
\wp(u_1)\wp(u_2)&=-\frac{(e_2-e_3)(e_1^2+e_2e_3)P_1+(e_3-e_1)(e_2^2+e_3e_1)P_2+(e_1-e_2)(e_3^2+e_1e_2)P_3}{(e_2-e_3)P_1+(e_3-e_1)P_2+(e_1-e_2)P_3}.
\end{aligned}
$$

将这些表达式代入公式

$$
\begin{aligned}
p&=\frac{x_1+x_2}{2}=i\left(h_0+E\frac{h_1(\wp u_1+\wp u_2)+2h_2}{h_1^2\wp u_1\wp u_2+h_1h_2(\wp u_1+\wp u_2)+h_2^2}\right),\\
q&=\frac{x_1-x_2}{2i}=E\frac{h_1(\wp u_1-\wp u_2)}{h_1^2\wp u_1\wp u_2+h_1h_2(\wp u_1+\wp u_2)+h_2^2},
\end{aligned}
$$

经过一些计算，可以得出

$$
\begin{aligned}
p&=-i\frac{L_1P_1+M_1P_2+N_1P_3}{LP_1+MP_2+NP_3},\\
q&=\frac{E}{LP_1+MP_2+NP_3},
\end{aligned}
$$

其中我设

$$L=(e_2-e_3)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)}=i(e_2-e_3)\sqrt{l_1+e_1},$$
$$M=(e_3-e_1)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)}=i(e_3-e_1)\sqrt{l_1+e_2},$$
$$N=(e_1-e_2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)}=i(e_1-e_2)\sqrt{l_1+e_3},$$
$$L_1=(e_2-e_3)\frac{\sigma_2(w)\sigma_3(w)}{\sigma^2(w)}=(e_2-e_3)\sqrt{(l_1+e_2)(l_1+e_3)},$$
$$M_1=(e_3-e_1)\frac{\sigma_3(w)\sigma_1(w)}{\sigma^2(w)}=(e_3-e_1)\sqrt{(l_1+e_3)(l_1+e_1)},$$
$$N_1=(e_1-e_2)\frac{\sigma_1(w)\sigma_2(w)}{\sigma^2(w)}=(e_1-e_2)\sqrt{(l_1+e_1)(l_1+e_2)}.$$

量 l_1+e_1、 l_1+e_2、 l_1+e_3 均为正。量 s_1-e_1、 s_1-e_2、 s_1-e_3 也为正。相反，量 s_2-e_1、 s_2-e_2、 s_2-e_3均为负。因此， L、 M、 N、 P_1、 P_2、 P_3是虚数。 L_1、 M_1、 N_1 是实数。因此可见， p 和 q 具有实值。

为计算 r 的值，我利用方程

$$2\frac{dp}{dt}=qr.$$

一般而言，若令

$$R(s)=R_0(s-a_0)(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4),$$

$$du_1=\frac{s_1ds_1}{\sqrt{R(s_1)}}+\frac{s_2ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},\qquad ds_1=\frac{\sqrt{R(s_1)}}{s_1-s_2}(du_1-s_2du_2),$$
$$du_2=\frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}}+\frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},\qquad ds_2=\frac{\sqrt{R(s_2)}}{s_2-s_1}(du_1-s_1du_2),$$

$$P_a=\sqrt{c_a(s_1-a_a)(s_2-a_a)}$$
$$P_{a\beta}=\frac{c_{a\beta}P_aP_\beta}{s_1-s_2}\left\{\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1-a_a)(s_1-a_\beta)}-\frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2-a_a)(s_2-a_\beta)}\right\},\quad \begin{pmatrix}a=0,\dots,4\\ \beta=0,\dots,4\end{pmatrix}$$

其中 c_α 和 $c_{\alpha\beta}$ 表示任意常数，经过一些计算后，可得 th at

$$\frac{\partial P_a}{\partial u_1}=\frac{1}{2(a_\beta-a_\gamma)}\left\{\frac{P_\gamma P_{a\gamma}}{c_\gamma c_{a\gamma}}-\frac{P_\beta P_{a\beta}}{c_\beta c_{a\beta}}\right\},$$
$$\frac{\partial P_a}{\partial u_2}=\frac{1}{2(a_\beta-a_\gamma)}\left\{\frac{a_\gamma P_\beta P_{a\beta}}{c_\beta c_{a\beta}}-\frac{a_\beta P_\gamma P_{a\gamma}}{c_\gamma c_{a\gamma}}\right\},$$
$$\frac{\partial P_{a\beta}}{\partial u_1}=\frac{1}{2}R_0c_{a\beta}P_aP_\beta,$$
$$\frac{\partial P_{a\beta}}{\partial u_2}=-\frac{1}{2}R_0a_\gamma c_{a\beta}P_aP_\beta-\frac{1}{2}\frac{c_{a\beta}P_{a\gamma}P_{\beta\gamma}}{c_\gamma c_{a\gamma}c_{\beta\gamma}}.$$

在我们的情形中，有

$$R(s)=-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)(s-k_1)(s-k_2),\quad R_0=-4,$$
$$dt=du_1,\quad 0=du_2.$$

因此可得

$$r = \frac{2}{q}\frac{dp}{dt} = -i\frac{LP_{23} + MP_{31} + NP_{12}}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

$$P_{23} = \frac{i}{s_1 - s_2}\left[\sqrt{(s_1 - e_2)(s_1 - e_3)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)} - \sqrt{(s_2 - e_2)(s_2 - e_3)(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}\right],$$

$$P_{13} = i\frac{\sqrt{(s_1 - e_2)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - e_1)(s_2 - e_3)}}{s_1\,(s_1 - s_2)} - i\frac{\sqrt{(s_1 - e_3)(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}}{s_2\,(s_1 - s_2)},$$

$$P_{12} = i\frac{\sqrt{(s_1 - e_3)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - e_1)(s_2 - e_2)}}{s_1 - s_2} - i\frac{\sqrt{(s_2 - k_2)(s_1 - e_1)(s_1 - e_2)(s_2 - e_3)(s_2 - k_1)}}{s_1 - s_2}.$$

如上所见 ，当 t、 s_1 和 s_2 为实数时，必须满足以下界限 s

$$(\infty \ldots s_1 \ldots e_1), \quad (e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

这些量

$$(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)(s_2 - e_3)$$
$$(s_1 - e_2)(s_2 - e_3)(s_2 - e_1)$$
$$(s_1 - e_3)(s_2 - e_1)(s_2 - e_2)$$

因此为正，而以下各项为负

$$(s_1 - e_2)(s_1 - e_3)(s_2 - e_1)$$
$$(s_1 - e_3)(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)$$
$$(s_1 - e_1)(s_1 - e_2)(s_2 - e_3).$$

要使 r 在 t为实数时也为实数， P_{23}、 P_{13}、 P_{12} 必须为实数；要满足这一条件，乘积必须

$$(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)$$

为负，且以下乘积为正

$$(s_2 - k_1)(s_2 - k_2).$$

常 数（积分常数）因此必须这样选取，以满足不等 y

$$k_1 > e_1 > k_2.$$

因此 s_1 和 s_2 必须介于这些极限之间

$$(k_1 \ldots s_1 \ldots e_1), \quad (k_2 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

我们尚需计算 γ、 γ'、 γ''的值。由该方程可得 γ''

$$2\frac{dq}{dt} = -rp - c_0\gamma''$$

or

$$c_0\gamma'' = -\left(2\frac{dq}{dt} + rp\right),$$

并借助上述微分公式可得

$$c_0\gamma'' = \frac{L_1P_{23} + M_1P_{13} + N_1P_{12}}{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}},$$

系数 L、 M、 N、 L_1、 M_1、 N_1的含义与前面相同。

γ' 的值可借助该方程计算。

$$\frac{dr}{dt} = c_0\gamma'.$$

可得

$$\begin{aligned} c_0\gamma' = &-i\frac{(LP_1+MP_2+NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23}+M\frac{d}{dt}P_{13}+N\frac{d}{dt}P_{12}\right)}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2} \\ &+i\frac{(LP_{23}+MP_{13}+NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1+M\frac{d}{dt}P_2+N\frac{d}{dt}P_3\right)}{(LP_1+MP_2+NP_3)^2}. \end{aligned}$$

根据上述微分公式，可得

$$\begin{aligned} &(LP_1+MP_2+NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23}+M\frac{d}{dt}P_{13}+N\frac{d}{dt}P_{12}\right) \\ &\quad-(LP_{23}+MP_{13}+NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1+M\frac{d}{dt}P_2+N\frac{d}{dt}P_3\right) \\ &=R_0(LP_1+MP_2+NP_3)(LP_2P_3+MP_3P_1+NP_1P_2) \\ &\quad-(LP_{23}+MP_{31}+NP_{12})\left(L\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}+M\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}+N\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\right) \\ &=R_0(L^2+M^2+N^2)P_1P_2P_3-\frac{L^2}{e_2-e_3}P_{23}(P_3P_{13}-P_2P_{12}) \\ &\quad-\frac{M^2}{e_3-e_1}P_{13}(P_1P_{12}-P_3P_{23})-\frac{N^2}{e_1-e_2}P_{12}(P_2P_{23}-P_1P_{13}) \\ &\quad+MN\left(R_0(P_2^2+P_3^2)P_1-P_{13}\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}-P_{12}\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}\right) \\ &\quad+NL\left(R_0(P_3^2+P_1^2)P_2-P_{12}\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}-P_{23}\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\right) \\ &\quad+LM\left(R_0(P_1^2+P_2^2)P_3-P_{23}\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}-P_{13}\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}\right). \end{aligned}$$

γ' 的分子表达式可以按如下方式稍作简化。令 α、β、γ、δ、ϵ 表示按任意顺序排列的数字 1、2、3、4、5，并像我们之前所做的那样设定，

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1-a_\alpha)(s_2-a_\alpha)},$$

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} = &\frac{\sqrt{R_0(s_1-a_\gamma)(s_1-a_\delta)(s_1-a_\epsilon)(s_2-a_a)(s_2-a_\beta)}}{s_1-s_2} \\ &-\frac{\sqrt{R_0(s_1-a_a)(s_1-a_\beta)(s_2-a_\gamma)(s_2-a_\delta)(s_2-a_\epsilon)}}{s_1-s_2}, \end{aligned}$$

很容易得到以下关系：

$$
\begin{aligned}
&R_0P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} = P_{\alpha\delta}P_{\alpha\epsilon},\\
&R_0P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} = P_{\beta\delta}P_{\beta\epsilon},\\
&R_0P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\beta}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} = P_{\gamma\delta}P_{\gamma\epsilon},\\
&R_0(P_\beta^2 + P_\gamma^2)P_\alpha - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} - P_{\alpha\beta}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha}\\
&\quad = P_{\beta\delta}P_{\gamma\epsilon} + P_{\beta\epsilon}P_{\gamma\delta} + R_0(a_\beta - a_\gamma)^2P_\alpha,\\
&R_0(P_\gamma^2 + P_\alpha^2)P_\beta - P_{\alpha\beta}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} - P_{\beta\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta}\\
&\quad = P_{\gamma\delta}P_{\alpha\epsilon} + P_{\alpha\delta}P_{\gamma\epsilon} + R_0(a_\gamma - a_\alpha)^2P_\beta,\\
&R_0(P_\alpha^2 + P_\beta^2)P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma}\\
&\quad = P_{\alpha\delta}P_{\beta\epsilon} + P_{\alpha\epsilon}P_{\beta\delta} + R_0(a_\alpha - a_\beta)^2P_\gamma.
\end{aligned}
$$

因此，若令

$$
\begin{aligned}
a_1 &= e_1,\\
a_2 &= e_2,\\
a_3 &= e_3,\\
k_1 &= a_4,\\
k_2 &= a_5,
\end{aligned}
$$

便得到 $c_0\gamma'$ 的如下表达式

$$
\begin{aligned}
c_0\gamma' = \frac{i}{2(LP_1 + MP_2 + NP_3)^2}&\left[L^2P_{14}P_{15} + M^2P_{24}P_{25} + N^2P_{34}P_{35}\right.\\
&+ MN[P_{24}P_{35} + P_{25}P_{34} + (e_2 - e_3)^2P_1]\\
&+ NL[P_{34}P_{15} + P_{35}P_{14} + (e_3 - e_1)^2P_2]\\
&\left.+LM[P_{14}P_{25} + P_{15}P_{24} + (e_1 - e_2)^2P_3]\right].
\end{aligned}
$$

最后　　借助方程，便可求得用 s_1 和 s_2表示的 γ的值

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1.$$

令

$$
\begin{aligned}
L_2 &= (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = i(e_2^2 - e_3^2)\sqrt{l_1 + e_1},\\
M_2 &= (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = i(e_3^2 - e_1^2)\sqrt{l_1 + e_2},\\
N_2 &= (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = i(e_1^2 - e_2^2)\sqrt{l_1 + e_3},
\end{aligned}
$$

可以得出

$$2c_0\gamma = -4l_1 + \frac{L_2P_1 + M_2P_2 + N_2P_3}{LP_1 + MP_2 + NP_3} - \left(\frac{LP_23 + MP_13 + NP_12}{LP_1 + MP_2 + NP_3}\right)^2.$$

§ 6.

当六个量 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 表示为 s_1 和 s_2 的函数时，借助一般公式，便可轻易得到这两个后者的每一个有理对称函数关于时间的表达式。

我从KONIGSBERGER先生的论文关于阿贝尔函数的变换 （《纯粹与应用数学杂志》，第64卷）中，借用了以下由WEIERSTRASS先生在分析中引入的定义¨。

Let

$$R(x) = A_0(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{2\rho})$$

设其为 x 的 $2\rho + 1$次整函数；假设 A_0、 a_0、 a_1，…，$a_{2\rho}$ 全为实数量，且若$A_0 > 0$,

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{2\rho},$$

但若 $A_0 < 0$

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{2\rho}.$$

设 $u_1, \dots, u_\rho$ 为 ρ 变量，与变量 $x_1, \dots, x_\rho$ 通过以下方程相联系，其中$F_1(x) \dots, F_\rho(x)$表示次数小于 ρ的 x 整函数,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \\ &\vdots \\ u_\rho &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \dots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \int_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \\ i\bar{K}_{\alpha\beta} &= \int_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}$$

$$iK'_{\mu\nu} = i\bar{K}_{\mu 1} + i\bar{K}_{\mu 2} + \dots + i\bar{K}_{\mu\nu},$$

并约定用下式定义这些积分中的平方根

$$\sqrt{R(x)} = A_0^{\rho+1} \left(\frac{x - a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x - a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \left(\frac{x - a_{2\rho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令我们通过以下方程定义 ρ 新变量 $v_1, \dots, v_\rho$

$$\begin{aligned} u_1 &= 2K_{11}v_1 + \dots + 2K_{1\rho}v_\rho, \\ &\vdots \\ u_\rho &= 2K_{\rho 1}v_1 + \dots + 2K_{\rho\rho}v_\rho. \end{aligned}$$

假设这些方程以 $v_1, \dots, v_\rho$ 为未知数求解后，得到

$$\begin{aligned} v_1 &= G_{11}u_1 + \dots + G_{\rho 1}u_\rho, \\ &\vdots \\ v_\rho &= G_{1\rho}u_1 + \dots + G_{\rho\rho}u_\rho. \end{aligned}$$

令

$$\tau_{\alpha\beta} = 2i(G_{1\alpha}K'_{1\beta} + \ldots + G_{\rho\alpha}K'_{\rho\beta}),$$

由此可得 $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$，并将函数 $\vartheta(v_1 \cdots v_\rho)$ 定义为无穷级数之和

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho) = \sum e^{\{\nu_1(2v_1+\nu_1\tau_{11}+\ldots+\nu_\rho\tau_{1\rho})+\ldots+\nu_\rho(2v_\rho+\nu_1\tau_{\rho 1}+\ldots+\nu_\rho\tau_{\rho\rho})\}\pi i};$$

其中，以符号 $\sum$ 表示的求和必须按照如下方式进行： ρ个量 $\nu_1,\ldots,\nu_\rho$ 分别独立地遍历从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的全部整数级数。

该函数 $\vartheta(v_1,\ldots,v_\rho)$ 满足以下两个方程:

$$\vartheta(v_1 + p_1, \ldots, v_\rho + p_\rho) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho),$$

其中 $p_1 \cdots p_\rho$ 表示任意整数，并且

$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha}, \ldots, v_\rho + \tau_{\rho\alpha}) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho)e^{-\pi i(2v_\alpha+\tau_{\alpha\alpha})}.$$

反之，对于满足这两个方程的关于 $v_1 \cdots v_\rho$ 的每个连续函数，对所有数值组 $v_1 \cdots v_\rho$，它必然等于 $\vartheta(v_1 \cdots v_\rho)$ 乘以一个常数。

设 $n_1 \ldots n_\rho$ 为任意常数，并令

$$\tau_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1} + n_2\tau_{\alpha 2} + \ldots + n_\rho\tau_{\alpha\rho}$$

并用方程定义一个新函数 $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho)$

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) = \vartheta(v_1 + \tau_1 \ldots v_\rho + \tau_\rho)e^{\pi i \sum_\alpha n_\alpha(2v_\alpha+\tau_\alpha)}.$$

量$n_1 \ldots n_\rho$称为这个新函数 ϑ的参数。若 $n'_1 \ldots n'_\rho$ 表示另一组 ρ 常数，并令

$$\tau'_\alpha = n'_1\tau'_{1\alpha} + \ldots + n'_\rho\tau'_{\rho\alpha},$$

则有

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1, \ldots, v_\rho + \tau'_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 + n'_1 \ldots n_\rho + n'_\rho)e^{-\pi i \sum_\alpha n'_\alpha(2v_\alpha+\tau'_\alpha)}.$$

若量 $n'_1 \ldots n'_\rho$、 $m_1 \ldots m_\rho$为整数，则有

$$\begin{aligned}
\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 + n'_1 \ldots n_\rho + n'_\rho) &= \vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho),\\
\vartheta(v_1 + m_1 \ldots v_\rho + m_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) &= e^{2\pi i \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha}\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho),\\
\vartheta(v_1 + \tau'_1 \ldots v_\rho + \tau'_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) &= e^{-\pi i \sum n_\alpha(2v_\alpha+\tau'_\alpha)}\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho).
\end{aligned}$$

此外再令

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho)_\lambda = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2}m_1^\lambda \ldots v_\rho + \frac{1}{2}m_\rho^\lambda \mid \frac{1}{2}n_1^\lambda \ldots \frac{1}{2}n_\rho^\lambda\right) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2\rho)$$

其中整数 $m_1^\lambda \ldots m_\rho^\lambda$、 $n_1^\lambda \ldots n_\rho^\lambda$由方程定义

$$\int_\infty^{a_\lambda} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = m_1^\lambda K_{\alpha 1} + \ldots + m_\rho^\lambda K_{\alpha\rho} + i(n_1^\lambda K'_{\alpha 1} + n_2^\lambda K'_{\alpha 2} + \ldots + n_\rho^\lambda K'_{\alpha\rho}).$$

（很容易验证，整数 $m_1^\lambda \ldots m_\rho^\lambda$ 中的每一个都等于 0 或 -1；整数 $n_1^\lambda \ldots n_\rho^\lambda$ 中的每一个都等于 0 或 $+1$。）

接下来从级数 0、1、.....、2ρ中任取两个不同的数 λ和 μ，根据同余式定义整数 $m_1^\nu \ldots m_\rho^\nu$、 $n_1^\nu \ldots n_\rho^\nu$

$$\begin{cases} m_a^\nu \equiv m_a^\lambda + m_a^\mu \\ n_a^\nu \equiv n_a^\lambda + n_a^\mu \end{cases} \pmod 2$$

此外规定， m_λ^ν 中的每个数必须等于 0 或 -1，而 n_λ^ν 中的每个数必须等于 0 或 $+1$，并令

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{\lambda\mu} = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2}m_1^\nu \dots v_\rho + \frac{1}{2}m_\rho^\nu \,\middle|\, \frac{1}{2}n_1^\nu \dots \frac{1}{2}n_\rho^\nu\right).$$

变量 $v_1 \dots v_\rho$ 与 $x_1 \dots x_\rho$ 之间的关系则可按如下方式表示。我们设

$$\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_\rho)$$

并依照 $A_0 \gtrless 0$，以 $\epsilon = \pm 1$ 记之；于是有

$$\frac{\sqrt{\epsilon^\rho(-1)^\alpha \varphi(a_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)},$$

$$\frac{\sqrt{\epsilon^\rho(-1)^{\alpha-1} \varphi(a_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)},$$

$$A_0\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda - a_\mu)}{A_0}} \sum_{a=1}^{\rho} \left\{ \frac{\sqrt{R(x_a)}}{(x_a - a_\lambda)(x_a - a_\mu)\varphi'(x_a)} \right\} = \frac{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_\lambda \vartheta(v_1 \dots v_\rho)_\mu}.$$

我们已假定方程 $R(x) = 0$ 的所有根均为实数。HENOCH先生在其博士论文（柏林，1867年）中指出，当方程 $R(x) = 0$ 的根为虚数时，这些公式如何加以推广。

§ 7.

为了能将前一节的公式应用于我们所讨论的情形，必须将五个实数量 k_1, k_2, e_1, e_2, e_3 按大小顺序排列。

这里可能出现若干情形。时间所限，我无法逐一详加考察。我只对积分常数之间满足下列不等式的情形完成全部计算

$$l_1 > k > c_0 > 0, \quad l^2 < \frac{3l_1 - k}{2}.$$

在此情形下，若记

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s + l_1)\left(s - \frac{l_1 + \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right)\left(s - \frac{l_1 - \sqrt{k^2 - c_0^2}}{2}\right) - l_0^2,$$

容易验证，这五个量 e_1, e_2, e_3, k_1, k_2 满足这些不等式

$$\frac{l_1 + k}{2} > e_1 > e_2 > \frac{l_1 - k}{2} > e_3.$$

若将按大小排列的方程 $R(s) = 0$ 的五个根记为 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

因此有必要令

$$\frac{l_1 + k}{2} = a_0, \quad \frac{l_1 - k}{2} = a_1, \quad e_1 = a_3, \quad e_2 = a_2, \quad e_3 = a_0.$$

如果随后令

$$dt = du_1 = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},$$

$$0 = du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},$$

并按照前一节所述求出量 $K_{\alpha\beta}, K'_{\alpha\beta}, v_1$、……、 v_ρ； v_1, v_2 将是时间的线性函数。若以 c_λ 表示 $\vartheta(v_1,\ v_2)_\lambda$ 在 $v_1 = 0, v_2 = 0$时的值，则有以下关系：

$$\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1} = \frac{e_1-e_2}{k} = \frac{c_2^2c_{03}^2c_{34}^2}{c_4^2c_{01}^2c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1+e_1}{k} = \frac{a_4+a_1-a_2-a_0}{a_4-a_1} = \frac{c_5^2c_{23}^2}{c_4^2c_{01}^2} - \frac{c_2^2c_{14}^2}{c_4^2c_{12}^2},$$
$$\frac{a_3-a_0}{a_4-a_1} = \frac{e_1-e_3}{k} = \frac{c_0^2c_{23}^2c_{34}^2}{c_4^2c_{01}^2c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1+e_2}{k} = \frac{a_4+a_1-a_0-a_3}{a_4-a_1} = \frac{c_5^2c_{23}^2}{c_4^2c_{01}^2} - \frac{c_0^2c_2^2}{c_{01}^2c_{12}^2},$$
$$\frac{a_2-a_0}{a_4-a_1} = \frac{e_2-e_3}{k} = \frac{c_5^2c_{14}^2c_{34}^2}{c_4^2c_{01}^2c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1+e_3}{k} = \frac{a_4+a_1-a_3-a_2}{a_4-a_2} = \frac{c_5^2c_{03}^2}{c_4^2c_{12}^2} - \frac{c_0^2c_2^2}{c_{01}^2c_{12}^2},$$

并且，令

$$C = (a_3-a_1)^{\frac{3}{2}} \frac{c_{01}c_{03}c_{12}c_{23}c_{14}c_{34}}{c_0^2c_2^2c_4^2},$$

有 [TN3]:

$$P_1 = \sqrt{(s_1-e_1)(s_2-e_1)} = \sqrt{(s_1-a_3)(s_2-a_3)} = -i\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{c_0c_2c_4}{c_{01}c_{12}c_{14}} \frac{\vartheta_3(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$
$$P_2 = \sqrt{(s_1-e_2)(s_2-e_2)} = \sqrt{(s_1-a_2)(s_2-a_2)} = -i\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{c_5c_2}{c_{12}c_{23}} \frac{\vartheta_2(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$
$$P_3 = \sqrt{(s_1-e_3)(s_2-e_3)} = \sqrt{(s_1-a_0)(s_2-a_0)} = \frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{c_5c_0}{c_{01}c_{03}} \frac{\vartheta_0(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$
$$P_4 = \sqrt{(s_1-k_1)(s_2-k_1)} = \sqrt{(s_1-a_4)(s_2-a_4)} = -\frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{c_5c_4}{c_{14}c_{34}} \frac{\vartheta_4(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$
$$P_5 = \sqrt{(s_1-k_2)(s_2-k_2)} = \sqrt{(s_1-a_1)(s_2-a_1)} = \frac{C}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{c_0c_2c_4}{c_{03}c_{23}c_{34}} \frac{\vartheta_1(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)}.$$

$$P_{12} = \frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= iC\frac{c_5}{c_{12}} \frac{\vartheta_{23}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{13} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{c_5}{c_{01}} \frac{\vartheta_{03}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{14} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{c_5}{c_{14}} \frac{\vartheta_{34}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{15} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$
$$= -C\frac{\vartheta_{13}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{23}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}-\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$=C\frac{c_5}{c_4}\frac{\vartheta_{02}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{24}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-k_1)}-\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$=-C\frac{c_5}{c_0}\frac{\vartheta_{24}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{25}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}-\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$
$$=C\frac{c_5}{c_{23}}\frac{\vartheta_{12}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{34}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}-\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$=-iC\frac{c_5}{c_2}\frac{\vartheta_{04}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{35}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}-\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$
$$=-iC\frac{c_5}{c_{03}}\frac{\vartheta_{01}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)}.$$

$$P_{45}=\frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}-\sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}$$
$$=-iC\frac{c_5}{c_{34}}\frac{\vartheta_{14}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)}.$$

一旦将六个量 $p,q,r,\gamma,\gamma',\gamma''$ 表示为商 $\frac{\vartheta_\alpha(v_1,v_2)}{\vartheta(v_1,v_2)}$ 的形式，其中 v_1、 v_2 表示时间 t 的整线性函数，接下来便只需求出另外六个余弦 $\alpha,\alpha',\alpha'',\beta,\beta',\beta''$ 作为时间函数的表达式。

这些量满足以下微分方程

$$\frac{d\alpha}{dt}=\alpha'r-\alpha''q,\qquad \frac{d\beta}{dt}=\beta'r-\beta''q,$$
$$\frac{d\alpha'}{dt}=\alpha''p-\alpha r,\qquad \frac{d\beta'}{dt}=\beta''p-\beta r,$$
$$\frac{d\alpha''}{dt}=\alpha q-\alpha'p,\qquad \frac{d\beta''}{dt}=\beta q-\beta'p.$$

由这些方程可得

$$\frac{d(\alpha+\beta i)}{dt}=(\alpha'+\beta'i)r-(\alpha''+\beta''i)q.$$

两边除以 $\alpha+\beta i$，并注意到

$$(\alpha'+\beta'i)(\alpha-\beta i)=\alpha\alpha'+\beta\beta'+i(\alpha\beta'-\alpha'\beta)=-\gamma\gamma'+i\gamma'',$$
$$(\alpha''+\beta''i)(\alpha-\beta i)=\alpha\alpha''+\beta\beta''+i(\alpha\beta''-\alpha''\beta)=-\gamma\gamma''-i\gamma',$$
$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2=1-\gamma^2,$$

可得

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha+\beta i)=r\frac{-\gamma\gamma'+i\gamma''}{1-\gamma^2}+q\frac{\gamma\gamma''+i\gamma'}{1-\gamma^2}=\frac{-i\frac{d\gamma}{dt}+i(\gamma'q+\gamma''r)}{1-\gamma^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d\gamma}{dt}+i(\gamma'q+\gamma''r)}{1+\gamma}-\frac{\frac{d\gamma}{dt}-i(\gamma'q+\gamma''r)}{1-\gamma}\right].$$

同理可得

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha'+\beta'i)=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d\gamma'}{dt}+i(\gamma p+\gamma''r)}{1+\gamma'}-\frac{\frac{d\gamma'}{dt}-i(\gamma p+\gamma''r)}{1-\gamma'}\right],$$
$$\frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d\gamma''}{dt}+i(\gamma p+\gamma' q)}{1+\gamma''}-\frac{\frac{d\gamma''}{dt}-i(\gamma p+\gamma' q)}{1-\gamma''}\right].$$

将 p、 q、 r、 γ、 γ'、 γ''作为时间函数的值代入这组方程中的第二个方程，就会发现，要得到 α、 β、 α'、 β'、 α''、 β'' 的值，必须对商 $\frac{\vartheta_\alpha\ (t+c,\ c_1)}{\vartheta\ (t+c,\ c_1)}$ 的有理函数进行积分。

可以证明，六个量 α、 α'、 α''、 β、 β'、 β'' 各自都是时间的单值函数，且在有限时间值处只有极点。根据一个著名定理，对于所有有限的 t值，只要满足以下条件，时间的单值函数 $f(t)$就可以表示为两个收敛级数之商：

$$\frac{d}{dt}\log f(t)$$

可以　在每个有限值 t_0 的邻域内展开为一个收敛级数，其形式为　　m

$$\frac{d}{dt}\log f(t)=m(t-t_0)^{-1}+\mathfrak{P}(t-t_0)$$

其中 $\mathfrak{P}(t-t_0)$表示一个只含正指数项的无穷级数，而 m 等于零或正、负整数。

现在，这恰好就是定义.....的方程右端的情形　　e

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha+\beta i),\quad \frac{d}{dt}\log(\alpha'+\beta'i),\quad \frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)$$

作为时间函数。若将 $\gamma, \gamma', \gamma'', p, q, r$ 的时间函数值代入相应位置，并假设 t 在 t_0 的邻域内，将它们按 $t-t_0$ 的幂级数展开，便立即可见，负指数项只可能在以下两种情形下出现在这些展开式中：

1）若 $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 的展开式中含有 $(t-t_0)$ 的负幂。
2）若对于 $t=t_0$，三个量 $\gamma, \gamma', \gamma''$ 中有一个等于 ±1。

借助微分方程 (1)，并以 τ 代替 $t-t_0$，便可看出，在第一种情形下， $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ 的展开式必定具有以下形式：

$$p=p_0\tau^{-1}+p_1+p_2\tau+\ldots,\qquad \gamma=f_0\tau^{-2}+f_1\tau^{-1}+f_2+\ldots,$$
$$q=q_0\tau^{-1}+q_1+q_2\tau+\ldots,\qquad \gamma'=g_0\tau^{-2}+g_1\tau^{-1}+g_2+\ldots,$$
$$r=r_0\tau^{-1}+r_1+r_2\tau+\ldots,\qquad \gamma''=h_0\tau^{-2}+h_1\tau^{-1}+h_2+\ldots,$$

其中系数 p_0、 q_0、 r_0、 f_0、 g_0、 h_0 可以取这两种不同的数值组（见§ 1）：

$$\text{I.}\quad r_0=0,\qquad h_0=\pm i\frac{4}{c_0},$$
$$q_0=\pm i2,\qquad g_0=0,$$
$$p_0=0,\qquad f_0=-\frac{4}{c_0},$$
$$\text{II.}\quad q_0=\pm ip_0,\qquad g_0=\pm if_0=-\frac{r_0}{c_0}=\pm\frac{2i}{c_0},$$
$$r_0=\pm2i,\qquad h_0=0.$$

将这些展开式代入方程的右端

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)=\frac{\gamma''\frac{d\gamma''}{dt}-i(\gamma p+\gamma' q)}{\gamma''^2-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d\gamma''}{dt}-i(\gamma p+\gamma' q)}{\gamma''-1}+\frac{\frac{d\gamma''}{dt}+i(\gamma p+\gamma' q)}{\gamma''+1}\right],$$

可见，在情况 I 中

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)=-2\tau^{-1}+\mathfrak{P}(\tau)$$

而在情况 II 中

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)=-\tau^{-1}+\mathfrak{P}(\tau).$$

现在让我们更仔细地考察 $\frac{d}{dt}\log(\alpha''+\beta''i)$ 在值 $t=t_0$ 附近的展开，其中 $\gamma''=\pm 1$。

一般而言，若令

$$p=p_0+p_1t+\ldots,\qquad \gamma=f_0+f_1t+\ldots,$$
$$q=q_0+q_1t+\ldots,\qquad \gamma'=g_0+g_1t+\ldots,$$
$$r=r_0+r_1t+\ldots,\qquad \gamma''=h_0+h_1t+\ldots,$$

系数 p_1、q_1、r_1、f_1、g_1、h_1 根据微分方程（1），§ 2，被定义为 p_0、q_0、r_0、f_0、g_0、h_0 的函数，其满足下列方程

$$2p_1=q_0r_0,\qquad f_1=r_0g_0-q_0h_0,$$
$$2q_1=-p_0r_0-c_0h_0,\qquad g_1=p_0h_0-r_0f_0,$$
$$r_1=c_0g_0,\qquad h_1=q_0f_0-p_0g_0.$$

三个量 γ、γ'、γ'' 由方程联系起来

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1.$$

因此，它们的初始值 f_0、g_0、h_0 也必须满足条件

$$f_0^2+g_0^2+h_0^2=1.$$

设 ε_1 和 ε_2 是满足方程的两个量

$$\varepsilon_1^2=1,\quad \varepsilon_2^2=1.$$

若令 $h_0=\quad\varepsilon_1$，因此必须同时有 $g_0=\varepsilon_2 i f_0$，然后便可完成 ds

$$h_1=-\varepsilon_2 i f_0(p_0+\varepsilon_2 i q_0),$$
$$p_0f_0+q_0g_0=f_0(p_0+\varepsilon_2 i q_0)=\varepsilon_2 i h_1.$$

该项的展开

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{d\gamma''}{dt}-i\varepsilon_1(p\gamma+q\gamma')}{\gamma''-\varepsilon_1}$$

它是唯一可能含有 τ 负幂的项，因此具有以下形式

$$\frac{1+\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\tau^{-1}+\mathfrak{P}(\tau).$$

如果 ε_1 和 ε_2 具有相同的符号，则 τ^{-1} 的系数等于 $+1$。

如果 ε_1 和 ε_2 具有相反符号，则该系数为零。
因此可以看出，在所有情形下，.....的展开

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha'' + \beta''i)$$

都具有所需的形式

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha'' + \beta''i) = m(t - t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t - t_0),$$

由此可知， $\alpha'' + \beta''i$ 是时间的单值函数，可以写成两个始终收敛的级数之商。

关于 $\alpha + \beta i$ 和 $\alpha' + \beta' i$，也可以得出同样的结论。
我还查明　　这些量可以表示为某些量的有理函数，这些量属于..... e
form

$$\frac{\vartheta_\alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2)}{\vartheta(u_1, u_2)} e^{u_3},$$

α 为 16 个函数 $\vartheta(u_1,\ u_2)$ 中的一个指标； u_1、 u_2、 u_3 表示时间的整线性函数，而v_1、 v_2 表示虚常数。

然而，由于计算相当复杂，我尚未能将这些公式推导到最终形式。

§ 8.

若能为绕固定点的刚体转动建立一个模型，并使其满足刚刚研究的情形中的条件，那将很有意思。

在微分方程 (1) 中，常数 A、 B、 C 表示相对于固定点的三个主转动惯量。现在设 A_1、 B_1、 C_1 为同一刚体相对于其重心的三个主转动惯量，并用 x、 y、 z 表示某点的坐标；坐标轴系的原点位于重心，方向与经过该点的三个主惯性轴一致。于是，若 μ 表示所考虑刚体在坐标为 x、 y、 z 的点处的密度，则有

$$A_1 = \iiint \mu(y^2 + z^2)\,dxdydz, \qquad B_1 = \iiint \mu(z^2 + x^2)\,dxdydz, \qquad C_1 = \iiint \mu(x^2 + y^2)\,dxdydz,$$

$$0 = \iiint \mu x\,dxdydz, \qquad 0 = \iiint \mu y\,dxdydz, \qquad 0 = \iiint \mu z\,dxdydz,$$
$$0 = \iiint \mu yz\,dxdydz, \qquad 0 = \iiint \mu zx\,dxdydz, \qquad 0 = \iiint \mu xy\,dxdydz.$$

这些三重积分必须在所考虑刚体的整个内部上积分　　.
设 a、 b、 c 为点 O 的坐标。用 ξ、 η、 ζ 表示空间中某点相对于与前述坐标轴平行、但原点与点 O 重合的坐标系的坐标，则有

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b, \quad \zeta = z - c.$$

众所周知，中心位于 O 的惯性椭球方程为:

$$1 = A_1'\xi^2 + B_1'\eta^2 + C_1'\zeta^2 - 2D_1'\eta\zeta - 2E_1'\zeta\xi - 2F_1'\xi\eta = \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

其中，系数 A_1'、 B_1'、.....由下列方程定义：

$$A_1' = \iiint \mu(\eta^2+\zeta^2)\,d\xi d\eta d\zeta = A_1 + M(b^2+c^2),$$
$$B_1' = \iiint \mu(\zeta^2+\xi^2)\,d\xi d\eta d\zeta = B_1 + M(c^2+a^2),$$
$$C_1' = \iiint \mu(\xi^2+\eta^2)\,d\xi d\eta d\zeta = C_1 + M(a^2+b^2),$$
$$D_1' = \iiint \mu\eta\zeta\,d\xi d\eta d\zeta = Mbc,$$
$$E_1' = \iiint \mu\zeta\xi\,d\xi d\eta d\zeta = Mca,$$
$$F_1' = \iiint \mu\xi\eta\,d\xi d\eta d\zeta = Mab,$$

其中 M 表示刚体的总质量，

$$M = \iiint \mu\,d\xi d\eta d\zeta.$$

现在设 u、 v、 w 为一个空间点的坐标，该点相对于原点位于点 O、但方向与对应于该点的惯性椭球主轴重合的坐标轴来描述。于是有

$$u = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$
$$v = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = u^2+v^2+w^2,$$
$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2,$$

其中 λ、 μ、 ν 为正常数。此外，设重心在这个新坐标系中的坐标为 u_0、 v_0、 w_0 ，则有

$$-u_0 = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$
$$-v_0 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c,$$
$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c.$$

如果现在使所考察的刚体绕固定点 O 旋转，那么只要满足下式，我们所研究的情形的条件便成立：

$$\lambda = \mu = 2\nu,$$

$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c = 0.$$

因此，必须能够满足以下方程

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \nu\left[\left(2u^2+v^2\right)+w^2\right], \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = u^2+v^2+w^2, \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1.$$

让我们看看能否以这样的方式选择点 O ，使这些方程得以满足。由前两个方程可知

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) - 2\nu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = -\nu w^2.$$

如果将 w 写成其值的形式，则必须满足最后这个方程

$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$

可得，b　　令恒等式中每一项的系数等于零，可得以下方程　　：

$$\begin{aligned}
A_1' - 2\nu &= A_1 + M(b^2 + c^2) - 2\nu = -\nu\alpha_2^2,\\
B_1' - 2\nu &= B_1 + M(c^2 + a^2) - 2\nu = -\nu\beta_2^2,\\
C_1' - 2\nu &= C_1 + M(a^2 + b^2) - 2\nu = -\nu\gamma_2^2,\\
D_1' &= Mbc = \nu\beta_2\gamma_2,\\
E_1' &= Mca = \nu\gamma_2\alpha_2,\\
F_1' &= Mab = \nu\alpha_2\beta_2.
\end{aligned}$$

如果这三个常数 a、 b、 c （点 O 的坐标）都不为零，那么由最后三个方程可得

$$M^3a^2b^2c^2 = \nu^3\alpha_2^2\beta_2^2\gamma_2^2,$$

$$\begin{aligned}
M^{\frac{1}{2}}a &= \nu^{\frac{1}{2}}\alpha_2,\\
M^{\frac{1}{2}}b &= \nu^{\frac{1}{2}}\beta_2,\\
M^{\frac{1}{2}}c &= \nu^{\frac{1}{2}}\gamma_2,
\end{aligned}$$

这显然与方程的结果矛盾

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$

且 M 和 ν 均不等于 0。

如果假设 $c = 0$，而 a 和 b 不为 0，则必须令 $\gamma_2 = 0$，因此

$$Mab = \nu\alpha_2\beta_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \quad a\alpha_2 + b\beta_2 = 0,$$

由此可得

$$\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \beta_2 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

（ $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的符号可任意确定）从而得到

$$M = \frac{-\nu}{a^2 + b^2},$$

这不可能成立，因为 M 和 ν 都是正量。

因此必须假设 $b = 0$、 $c = 0$。于是有

$$\begin{aligned}
&A_1' = A_1, && B_1' = B_1 + Ma^2, && C_1' = C_1 + Ma^2,\\
&D_1' = 0, && E_1' = 0, && F_1' = 0,
\end{aligned}$$

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\xi^2 + (B_1 + Ma^2)\eta^2 + (C_1 + Ma^2)\zeta^2.$$

如果相对于所考察刚体重心的三个主惯性轴 A_1、 B_1、 C_1 满足方程

$$A_1 = 2(B_1 - C_1),$$

只要取.....，便能满足我们所假定的所有条件

$$a^2 = \frac{A_1 - B_1}{M},$$

因为在这种情形下，有

$$B_1 + Ma^2 = A_1, \qquad C_1 + Ma^2 = C_1 + A_1 - B_1 = \frac{1}{2}A_1,$$

因此

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1 \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 \right).$$

令 u 只需指出，要使 a 为实数，充要条件是满足 $B_1 > 2C$ 1·

因此，根据这一计算可以看出，我刚才研究的问题的所有条件都可以通过机械方式实现。

译者注

[**TN1**] **方程编号**。作者将方程（14）编号为（14），尽管鉴于前一个编号方程为（9），按逻辑它本可以编号为（10）。本译文保留了原始编号。

[**译者注2**] **方程 14 中可能存在排印错误**。在方程 (14) 中，原文对 h_2''' 的表达式的最后一项包含 $(e_1^2 - e_3^2)$。根据前文 h_2' 和 h_2'' 的表达式中观察到的对称模式，这可能是 $(e_1^2 - e_2^2)$ 的排印错误。不过，本译文保留了原文的记法。

[**译者注3**] **表达式中可能存在排印错误：** P_{35}。P_{35} 表达式分子中的第二个平方根含有重复两次的因子 $(s_2 - e_1)$。类比 P_{23}、P_{24}、P_{25} 和 P_{34} 的表达式中的模式，其中一个因子很可能应为 $(s_2 - e_2)$。不过，本译文保留了原文的记法。

原论文。Kowalevski, S.(1889). Surle probl`eme de la rotationd'uncorpssolideautourd'un pointfixe. 数学学报, 12，177–232。网址：https://doi.org/10.1007/BF02592182

译者：G. Hesketh 06/03/2026，谨献给 Mich`ele Audin：“如果我们不尝试……我来试。”