arXiv:2603.07172v1 [math.NT] 7 Mar 2026

# $k$阶广义卢卡斯数列 Skolem问题的解决

M. MOHAPATRA、P. K. BHOI 和 G. K. PANDA

Abstract. 本文完整解决了关于 $k$ 阶广义卢卡斯数列 $(L_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$ 的 Skolem问题，重点研究其在负指标处的行为。我们通过识别并界定所有满足 $L_n^{(k)}=0$ 的指标 $n<0$，刻画了该数列的零点分布。我们的核心结果表明，对于所有 $k$.，该数列的零点重数 $\delta_k$ 为 $(k-1)\ (k-2)/2$

## 1. Introduction

$k$阶广义卢卡斯数列 $(L_n^{(k)})_{n\geq 2-k}$ 是标准卢卡斯数列针对任意整数 $k\geq 2$ 的多阶推广。它由 $k$ 阶加法递推关系定义：

$$L_n^{(k)}=\sum_{j=1}^{k}L_{n-j}^{(k)},\quad \text{for } n\geq 2,$$

初始项为 $L_0^{(k)}=2$、 $L_1^{(k)}=1$ 和 $L_n^{(k)}=0$，对应指标 $-(k-2)\leq n\leq -1$。值得注意的是，当 $k=2$ 时，该数列退化为经典 Lucas数。该数列的行为与其特征多项式有关：

$$\Psi_k(x)=x^k-2x^{k-1}-\cdots-x-1.$$

Wolfarm 的研究 [30] 表明， $\Psi_k(x)$ 在有理数域上不可约。它有一个主正实根 $\gamma(k)$，位于区间 $(2(1-2^{-k},\ 2)$ 内。其他根$\gamma_2$， $\gamma_3$、.....、 $\gamma_k$ 都位于单位圆内，并满足条件 $3^{1/k}<|\gamma_i|<1$。令$\gamma=\gamma_1$， $\gamma_2$、.....、 $\gamma_k$ 表示多项式 $\Psi_k(z)$ 的根。它们的标记方式使得

$$\gamma>|\gamma_2|\geq|\gamma_3|\geq\cdots\geq|\gamma_{k-1}|\geq|\gamma_k|,\quad \text{where } \gamma=\gamma(k). \tag{1.1}$$

对于 $k\geq 2$，设

$$f_k(x)=\frac{x-1}{2+(k+1)(x-2)}.$$

2020年数学学科分类：主要分类 11B39，次要分类 11J86、11D61。关键词：零点重数、Skolem问题、 $k$-广义 Lucas数、Baker-Davenport 约化方法、对数线性形式，

在 [9], Dresden，Du 证明了

$$|f_k(\gamma_i)| < 1, \quad 2 \le i \le k. \tag{1.2}$$

因此，数 $f_k(\gamma)$不是代数整数。此外，他们还证明了

$$L_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} (2\gamma_i - 1) f_k(\gamma_i) \gamma_i^{n-1} \quad \text{and} \quad \left| L_n^{(k)} - f_k(\gamma)(2\gamma - 1)\gamma^{n-1} \right| < \frac{3}{2} \tag{1.3}$$

对所有 $n \ge 2 - k$ 和 $k \ge 2$均成立。在 [15], 中，证明了$f_k(\gamma)$的对数高度满足

$$h(f_k(\gamma)) < 2 \log k \quad \text{for all } k \ge 2. \tag{1.4}$$

数论中一个长期存在的难题是确定线性递推数列是否以及何时取零。这个问题正式称为Skolem问题，旨在确定指标集合 $\mathcal{Z}(u) = \{n \in \mathbb{Z} : u_n = 0\}$。该集合的大小称为数列的零点重数。目前尚无通用方法可以计算 $\mathcal{Z}(u)$的基数。尽管如此，Skolem在这一问题上取得了根本性突破，并提出了以下定理：

**Skolem定理**[27, 28]**：** 如果线性递推数列的系数为有理数，那么集合–$Z(u)$是有限多个算术级数与一个有限集的并集。

Mahler、Lech 等人对这一结果作了推广 [19, 20, 21]。他们证明，对于系数为有理数或代数数的线性递推数列，其零点集是有限个孤立点和算术级数的并集。然而，他们的论证并未给出有效方法。Berstel 和 Mignotte [3]后来发展出寻找这些算术级数的方法。

在线性递推数列的研究中，如果特征多项式的任意两个不同根之比是单位根，则该数列称为退化的；否则，该数列称为非退化的。对于非退化的线性递推数列，确定其精确的零点重数仍是一项核心问题。正如 [2, 4, 5, 29] 中所讨论的，针对整数系数且阶数较小的数列，已有一些局部进展。相比之下，对于任意阶数 $k \ge 4$，目前只能得到关于 $k$ 的极大界；例如，Wolfgang M. Schmidt [26]证明了 –$Z(u) \le \exp(\exp(\exp(3k \log k)))$。Hagedorn [17] 证明，若特征多项式的所有根均为实数，则零点重数至多为 $2k - 3$。近期文献中，Skolem问题已在若干特定数列族中得到解决，包括 $k$-广义斐波那契数 [13] 和 $k$-广义佩尔数 [25]。本研究考察 $k$-广义 Lucas 数列 $(L_n^{(k)})_{n \in \mathbb{Z}}$的零点重数。为此，我们利用关系式将该数列扩展到负指标 $n$

$$L_{n-k}^{(k)} = -L_{n-(k-1)}^{(k)} - L_{n-(k-2)}^{(k)} - \cdots - L_{n-2}^{(k)} - L_{n-1}^{(k)} + L_n^{(k)}. \tag{1.5}$$

此外，我们考虑由 $n \geq 0$ 定义的数列 $(Q_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$，其初始条件为 $Q_i^{(k)} = 0$（当 $1 \leq i \leq k-2$ 时）以及 $Q_{k-1}^{(k)} = -1$。对于所有 $n \geq k$，该数列满足递推关系

$$Q_n^{(k)} = Q_{n-k}^{(k)} - Q_{n-(k-1)}^{(k)} - \cdots - Q_{n-1}^{(k)}, \text{ holds for all } n \geq k. \tag{1.6}$$

以下观察涉及该数列在非正指标 $n \leq 0$ 处的零点重数：

| $k$ | Indices | Zero-Multiplicity |
|---|---|---|
| 2 | – | 0 |
| 3 | $-1$ | 1 |
| 4 | $[-2,-1], -6$ | 3 |
| 5 | $[-3,-1], [-8,-7], -13$ | 6 |
| 6 | $[-4,-1], [-10,-8], [-16,-15], -22$ | 10 |
| 7 | $[-5,-1], [-12,-9], [-19,-17], [-26,-25], -33$ | 15 |

**定理1.1.** 丢番图方程$L_{-n}^{(k)} = 0$ 的最大非负整数解 $n$ 满足以下界：

(i) 若 $k$ 为偶数，则 $n < 2k^{k^2}\log(490k^2)$。(ii) 若 $k$ 为奇数，则 $n < 1.5 \cdot 10^{17} \cdot 1.454^{k^3} \cdot k^{12} \cdot (\log k)^2$.

通过引入辅助函数$\psi(y,z)$（定义为两个二项式系数之和），可以表示各项的显式形式：

$$\psi(y,z) = \binom{y}{z} + \binom{y+1}{z+1}. \tag{1.7}$$

我们采用标准约定：$\psi(y, -1) = 1$，并且在 $z > y \geq 0$ 的情况下该函数取值为零。

**定理 1.2**。如果 $k \geq 2$，那么

(i) $Q_{mk+r}^{(k)} = 0$, *for* $0 \leq m \leq r \leq k-2$,
(ii) $Q_{mk-1}^{(k)} = -2^{m-1}$, *for* $m \in [1, k-2]$,
(iii) $Q_{mk+r}^{(k)} = (-1)^r\,[\psi(m-1, r-1)2^{m-r} + \psi(m-1, r)2^{m-r-2}]$,
*for* $0 \leq r \leq m \leq k-2$,
(iv) 对于 $r \in [-1, k-2]$ 和 $m \geq k-2$,

$$Q_{mk+r}^{(k)} = \sum_{i=0}^{l}(-1)^{ik+r}[\psi(m-i-1, ik+r-1)2^{m-i(k+1)-r} + \psi(m-i-1, ik+r)2^{m-i(k+1)-r-2}],$$

$$where\ l = m\ for\ k = 2\ and\ l = \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor\ if\ k > 2.$$

**定理 1.3.** 设$(\delta_k)_{k\geq 2}$ 为 $k$-广义*Lucas*数列的零重数计数。则 $\delta_2 = 0$、 $\delta_3 = 1$ 和 $\delta_k = (k-2)(k-1)/2$, 对所有 $k$.

## 2. Auxiliary Results

为了高效地求解丢番图方程，人们常常依赖于非零对数线性形式的贝克型下界。本节概述代数数论的基本原理，以及用于计算并改进这些界的具体定理。

代数数 $\theta$ 的复杂性由其绝对对数高度来度量，记为 $h(\theta)$。设 $\theta$ 具有最小多项式

$$g(X) = c_0 \prod_{i=1}^{k} (X - \theta^{(i)}) \in \mathbb{Z}[X],$$

其中 $c_0 > 0$ 与 $\theta^{(i)}$ 表示 $\theta$的共轭。 $\theta$ 的对数高度定义为

$$h(\theta) = \frac{1}{k} \left( \log c_0 + \sum_{j=1}^{k} \max\{0, \log |\theta^{(j)}|\} \right).$$

若 $\theta = c/d$, $(d \neq 0)$ 是有理数，且 $c$ 和 $d$ 互素，则 $h(\theta) = \log(\max\{|c|, d\})$。

设 $\theta$ 和 $\beta$ 是任意两个代数数。 [7, 定理 B5] 中确立了对数高度 $h$ 的以下性质：

$$\begin{aligned}
&(i)\ \ h(\theta \pm \beta) \leq h(\theta) + h(\beta) + \log 2,\\
&(ii)\ \ h(\theta\beta^{\pm 1}) \leq h(\theta) + h(\beta),\\
&(iii)\ \ h(\theta^k) = |k| h(\theta).
\end{aligned}$$

基于这些记号，我们引用了 [6], 的一项专门结果，该结果改进了马特维耶夫 [22] 的里程碑式定理及布热奥等人 [8] 后续对该定理的推广。这一定理对于确立主方程中变量所需的显式上界至关重要。

**定理 2.1.** [6] 设 $\theta_1, \ldots, \theta_t$ 是代数数域 $\mathbb{K}_t$中次数为 $d_{\mathbb{K}}$ 的正实数，且 $e_1, \ldots, e_t$ 是非零整数。若 $\Lambda = \prod_{i=1} \theta_i^{e_i} - 1$ 不为零，则

$$\log |\Lambda| > -3 \cdot 30^{t+4} (t+1)^{5.5} d_{\mathbb{K}}^2 (1 + \log d_{\mathbb{K}})(1 + \log tB) A_1 \cdots A_t, \tag{2.1}$$

其中 $B \geq$最大值$\{|e_1|, \ldots, |e_t|\}$和 $A_1, \ldots, A_t$是正整数，满足 $A_j \geq h'(\theta_j) =$最大值$\{d_{\mathbb{K}} h(\theta_j) \mid$对数 $\theta_j, 0.16\}$，其中 $j = 1, \ldots, t$。

接下来，我们回顾由 Dujella 和 Peth″o [10]提出的经典 Baker–Davenport约化引理的一个改进版本。我们将利用该引理缩小变量的上界。

**引理2.1**。 [10]设 $M$ 为正整数， $p/q$ 表示实数 $\tau$的连分数的一个渐近分数，且满足 $q > 6M$。考虑满足 $A > 0$和 $B > 1$的实数 $A$、 $B$、 $\mu$。令 $\epsilon = \|\mu q\| - M \|\tau q\|$，其中 $\|.\|$表示与最近整数的距离。若 $\epsilon > 0$，则不等式无解：

$$0 < |u\tau - v + \mu| < AB^{-w},$$

正整数 $u$、 $v$、 $w$中满足 $u \leq M$和 $w \geq \log(Aq/\epsilon) \log B$
的解。

**引理2.2**。 [16] 设 $r \geq 1$ 和 $H > 0$ 满足 $H > (4r^2)^r$ 以及 $H > L/(\log L)^r$。则 $L < 2^r H (\log H)^r$。

**引理2.3**。 [13]对于非退化的线性递推数列，零项的数量（即其零点重数）始终有限。

Mignotte [24]的研究证实，对于 $k$-广义Lucas数列，任意不同指标 $1 \leq i < j \leq k$对应的比值 $\gamma_i/\gamma_j$都不是单位根。因此，该数列严格非退化；根据引理2.3，它只有有限个零点。

以下引理描述了根 $\gamma_i$ 的分布以及函数 $f_k(\gamma_i)$ 的性质。

**引理 2.4**。 [13] 设 $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$为 $\Psi_k(z)$ 的根，并按照 (1.1) 中定义的模排序。

(i) 如果 $\gamma_i$和 $\gamma_j$是满足 $|\gamma_i| > |\gamma_j|$的两个根，那么 $|\gamma_i|/|\gamma_j| > 1 + 1.454^{-k^3}$.
(ii) $1/2 \leq f_k(\gamma) \leq 3/4$，对所有 $k \geq 2$均成立。(iii) $|f_k(\gamma_i)| < \min\{1/2, 2/(k-1)\}$，对所有 $k \geq 2$和 $2 \leq i \leq k$均成立。(iv) 对所有 $k \geq 2$,

$$|\gamma_k| < 1 - \frac{\log \gamma}{2k} \quad and \quad |f_k(\gamma_k)| > \frac{\log \gamma}{2k(3k+1)}.$$

(v) 对所有 $k \geq 2$和 $j \neq 1$，我们有

$$|\gamma_k| < 1 - \frac{1}{2^8 k^3} \quad and \quad |f_k(\gamma_k)| > \frac{1}{2^8 k^3 (3k+1)}.$$

(vi) 如果 $k$为偶数，则 $|\gamma_{k-1}|/|\gamma_k| > 1 +$ $(1/k^{k^2})$ 。

**引理 2.5**。 [14] 设 $k \geq 2$ 和 $H_n^{(k)} = F_{(k)-n}$。

(a) $H_{mk-1} = 2^{m-1}$，当 $m \in [1, k-1]$ 时。(b) $H_{mk} = -(m+1)2^{m-2}$，当 $m \in [1, k-1]$ 时。
(c) 当 $1 \leq r < m \leq k-1$ 时，

$$H_{mk+r} = -\sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} H_{jk+r-1}.$$

**引理 2.6**。 [12]不等式

$$\frac{|\gamma_i|}{|\gamma_j|} > 1 + \frac{1}{10k^{9.6}(\pi/e)^k}$$

对所有 $k \geq 4$，当 $|\gamma_i| > |\gamma_j|$ 时成立。

**引理 2.7**。对于 $n \in \mathbb{Z}$，

$$Q_n^{(k)} = 2H_{n-1}^{(k)} - H_n^{(k)}. \tag{2.2}$$

**证明：** 由 [1], 可得恒等式 $L_n^{(k)} = 2F_{(k}{}_{n+1)} - F_n^{(k)}$ 将 $n$ 替换为 $-n$，得到 $L_{-n}^{(k)} = 2F_{(k)-(n-1)} - F_{(k)-n}$ 由于 $L_{-n}^{(k)} = Q_n^{(k)}$ 且 $F_{(k}{}_{-n} = H_n^{(k))}$，因此得到 (2.2)。

## 3. Proof of Theorem 1.1

考虑 $k \geq 4$的情形。我们要解丢番图方程 $L_{-n}^{(k)} = 0$。利用 (1.3) 中的类比内展开式，该问题等价于确定所有满足以下指数恒等式的非负整数 $n$

$$\sum_{i=1}^{k} (2\gamma_i - 1) f_k(\gamma_i) \gamma_i^{-(n+1)} = 0 \tag{3.1}$$

对于整数 $n \geq 0$，其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ 是特征多项式 $\Psi_k(z)$ 的根，按 (1.1) 中的顺序排列。我们分别讨论 $k$ 为偶数和奇数的情形。

**情形 1 ($k$ 为偶数)：** 当 $k$ 为偶整数时，$\Psi_k(z)$ 有两个异号实根，因此可确定 $\gamma_k$ 为负实根。将序列展开式中与 $\gamma_k$ 相关的项单独分离出来，并利用三角不等式，可得

$$|(2\gamma_k - 1) f_k(\gamma_k)| \cdot |\gamma_k|^{-(n+1)} \leq \sum_{j=1}^{k-1} |(2\gamma_j - 1) f_k(\gamma_j)| \cdot |\gamma_j|^{-(n+1)}.$$

引理 2.4 的估计 (iii) 和 (iv) 得出

$$\begin{aligned}\left((2\gamma_k-1)\frac{\log\gamma}{2k(3k+1)}\right)|\gamma_k|^{-(n+1)} &\le |(2\gamma_k-1)f_k(\gamma_k)||\gamma_k|^{-(n+1)}\\ &<\left(\sum_{j=1}^{k-1}|(2\gamma_j-1)f(\gamma_j)|\right)|\gamma_{k-1}|^{-(n+1)}\\ &<\left(\sum_{j=1}^{k-1}|1.5f(\gamma_j)|\right)|\gamma_{k-1}|^{-(n+1)}\\ &<4.5|\gamma_{k-1}|^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

利用引理 2.4 的 (vi)，我们推得

$$\left(1+\frac{1}{k^{k^2}}\right)^{n+1}<\left(\frac{|\gamma_{k-1}|}{|\gamma_k|}\right)^{n+1}<\frac{9k(3k+1)}{(2\gamma_k-1)\log\gamma}<\frac{9k(3k+1)}{(2\cdot 3^{-1/k}-1)\log\gamma}<490k^2. \quad (3.2)$$

现在，对上述不等式两边取对数，得到

$$\frac{n+1}{2k^{k^2}}<(n+1)\log\left(1+\frac{1}{k^{k^2}}\right)<\log(490k^2),$$

这意味着 $n<2k^{k^2}\log(490k^2)$。

**情形 2（$k$ 为奇数）：** 当 $k$ 为奇数时，特征多项式 $\Psi_k(z)$有一个正实根 $\gamma$，而其余根均为共轭复数对 [11]。Mignotte [23] 证明，任何满足 $L_{-n}^{(k)}=0$ 的指标 $n$ 都必须小于某个有限常数 $c(k)$，为这项研究奠定了定性基础；然而，现有文献尚未给出该界的有效或显式表述。本节旨在弥补这一空白，推导出 $c(k)$的精确值，从而提供必要的分析框架，以约束潜在零点的搜索空间。定义

$$\Gamma=1+\frac{f_k(\gamma_{k-1})(2\gamma_{k-1}-1)}{f_k(\gamma_k)(2\gamma_k-1)}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right)^{n+1},\quad \text{for all } k\ge 2.$$

根据方程(1.1)，$\gamma^{-1}<|\gamma_2^{-1}|\le\cdots\le|\gamma_k^{-1}|$。由于 $k$ 为奇数，根 $\gamma_k$ 和 $\gamma_{k-1}$构成一对共轭复根，从而得到具体关系式 $|\gamma_k|^{-1}=|\gamma_{k-1}|^{-1}>|\gamma_{k-2}|^{-1}$。接着，我们分离出方程 (3.1) 左端中与 $\gamma_k$和 $\gamma_{k-1}$相关的部分。将整个方程除以 $f_k(\gamma_k)(2\gamma_k-1)\gamma_k^{-(n+1)}$ 进行归一化，并应用绝对值算子，可得

$$|\Gamma|=\left|\sum_{i=1}^{k-2}\frac{f_k(\gamma_i)(2\gamma_i-1)}{f_k(\gamma_k)(2\gamma_k-1)}\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_i}\right)^{n+1}\right|.$$

应用引理 2.4 中的估计 (ii)、(iii)，可知

$$\sum_{i=1}^{k-2}\left|\frac{f_k(\gamma_i)}{f_k(\gamma_k)}\right|\left|\frac{(2\gamma_i-1)}{(2\gamma_k-1)}\right|\left|\frac{\gamma_k}{\gamma_i}\right|^{n+1}<\frac{30(k-2)}{(k-1)f_k(\gamma_k)}\left|\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-2}}\right|^{n+1}. \tag{3.3}$$

由于 $|\gamma_{k-2}|>|\gamma_k|$，由引理 2.4 的 (i) 和 (iv) 可得

$$|\Gamma|<\frac{125k(3k+1)}{(1+1.454^{-k^3})^{n+1}}. \tag{3.4}$$

T为求出 $|\Gamma|$ 的下界，我们使用参数应用定理 2.1

$$\theta_1=-\frac{f_k(\gamma_{k-1})}{f_k(\gamma_k)},\quad \theta_2=\frac{2\gamma_{k-1}-1}{2\gamma_k-1},\quad \theta_3=\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}},\quad e_1=1,\quad e_2=1,\quad \text{and } e_3=n+1.$$

考虑数域 $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\gamma_k,\gamma_{k-1})$，其次数至多为 $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]=d_{\mathbb{K}}\le k^2$。利用性质 (1.1) 和 (1.4)，我们得到

$$h(\theta_1)<4\log k,\quad h(\theta_2)<((2\log 4/)k)+4\log 2,\quad \text{and } h(\theta_3)<(\log 4)/k.$$

注意到 $f_k(\gamma_k)$ 和 $f_k(\gamma_{k-1})$ 是代数（且复）共轭。这种对称性保证了对于 $i=1,3$，$|\theta_i|=1$ 和 $|\log\theta_i|<\pi$。因此，我们可以指定

$$A_1=4k^2\log k,\quad A_2=2k\log 4+4k^2\log 2\le 8k^2\log 2,\quad A_3=1.4k,\quad B=n+1.$$

如果 $\Gamma=0$，那么

$$\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right)^{n+1}=-\left(\frac{f_k(\gamma_k)}{f_k(\gamma_{k-1})}\right)\left(\frac{2\gamma_k-1}{2\gamma_{k-1}-1}\right). \tag{3.5}$$

接下来，令 $\sigma$ 表示与 $\mathbb{Q}$ 上 $\Psi_k(z)$ 的分裂域相关联的伽罗瓦群中的一个自同构。若通过 $\sigma$ 将 $\gamma_k$ 映射为 $\gamma$，并令 $\gamma_j=\sigma(\gamma_{k-1})$（其中 $j\ne 1$），则可得 $f_k$ 的值映射为 $\sigma(f_k(\gamma_k))=f_k(\gamma)$ 和 $\sigma(f_k(\gamma_{k-1}))=f_k(\gamma_j)$。将 $\sigma$ 应用于恒等式 (3.5)，并计算共轭项的绝对值，可得

$$\left|\frac{\gamma}{\gamma_j}\right|^{n+1}=\left|\frac{f_k(\gamma)}{f_k(\gamma_j)}\right|\left|\frac{2\gamma-1}{2\gamma_j-1}\right|. \tag{3.6}$$

结合引理 2.4 的 (ii) 和 (v) 以及方程 (3.6)，可得

$$\phi^n<|\gamma/\gamma_j|^{n+1}=|f_k(\gamma)/f_k(\gamma_j)|\,|(2\gamma-1)/(2\gamma_j-1)|<3\cdot 2^6\cdot k^3(3k+1)20,$$

由此得到

$$n<\log\left(3\cdot 2^6\cdot k^3(3k+1)20\right)/\log\phi<13k.$$

由于这个不等式比定理中最初提出的不等式更强，因此我们有理由假设 $\Gamma\ne 0$。根据定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\log|\Gamma|&>-4.2\cdot 10^{15}\cdot k^9(1+\log k^2)(1+\log(2n+2))\log k\\&>-5.2\cdot 10^{16}\cdot k^9\log(n+1)(\log k)^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $(1+\log\ k^2)\ <3.5\log\ k$ 且 $(1+\log(2n+2))\ <3.5\log(n+1)$（对所有 $k\geq 2$ 均成立）。结合方程 (3.4) 和 (3.7)，我们得到

$$-5.2\cdot 10^{16}\cdot k^9\log(n+1)(\log k)^2<\log(125k(3k+1))-(n+1)\log(1+1.454^{-k^3}).$$

由于不等式 $\log(125k(3k+1))\ <6\log\ k$ 和 $\log(1+1.454^{-k^3})\ >\left(1+1.454^{k^3}\right)$ 对于 $k\geq 5$ 成立，因此我们有

$$(n+1)/\log(n+1)<6\cdot 10^{16}\cdot 1.454^{k^3}\cdot k^9(\log k)^2. \tag{3.8}$$

在不等式 (3.8) 中使用引理2.2，我们得到如下形式的上界

$$\begin{aligned} n<c(k)&=2\cdot\left(6\cdot 10^{16}\cdot 1.454^{k^3}\cdot k^9(\log k)^2\right)\cdot\log\left(6\cdot 10^{16}\cdot 1.454^{k^3}\cdot k^9(\log k)^2\right)\\ &<1.5\cdot 10^{17}\cdot 1.454^{k^3}\cdot k^{12}(\log k)^2, \end{aligned}$$

其中我们使用了 $\log(6\cdot 10^{16}\cdot 1.454^{k^3}\cdot k^9(\log k)^2)\ <1.2k^3$，对于 $k\geq 4.$。这就完成了定理1.1(ii)部分的证明。

## 4. Proof of Theorem 1.3 for $k\in[4,500]$

本节旨在确定序列 $(L_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$在区间 $[4,500]$内取 $k$ 值时的零点重数。我们不采用定理1.1中给出的一般上界，而是改进其基础界定技巧，以便为 $n$推导出更精确且便于计算的界。我们根据 $k$的奇偶性分两种情形进行研究。

**情形 1（$k$ 为偶数）：** 当 $k$ 为偶数时，不等式 (3.2) 给出

$$(|\gamma_{k-1}|/|\gamma_k|)^{n+1}<490k^2.$$

对于每个偶数 $k\in[4,500]$，通过数值求解该关系，得到 $n$ 的一个显式上界。计算结果总结如下引理。

**引理4.1**。设 $k\in[4,500]$ 为偶数，且 $C_k$ 为 $n_k$ 的上界。那么，对于 $C_k\in[415,9293983]$，有 $L_{-n_k}^{(k)}=0$。

**情形 2（$k$ 为奇数）：** 根据方程 (3.3) 和 (3.7)，可得

$$5.2\cdot 10^{16}\cdot k^9\log(n+1)(\log k)^2>\log\left|\frac{(k-1)f_k(\gamma_k)}{30(k-2)}\right|+(n+1)\log\left|\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_k}\right|.$$

初步分析证实，如果 $L_{-n}^{(k)}=0$ 对于 $k\in[4,500]$，那么

$$0\leq n<1.5\cdot 10^{46}. \tag{4.1}$$

回顾复对数恒等式 $\log\, w = \log\, |w| + i\arg\, w$ 以及泰勒级数展开

$$\log(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{w^n}{n},$$

我们得到有用的不等式 $|\log(1+w)| \le 2|w|$，只要 $|w| \le 1/2$。回顾方程（3.3），我们的计算测试证实，对于每个奇数 $k \in [4, 500]$，只要 $n > k^3$，条件 $|\Gamma| < 1/2$ 就成立。这一假设是合理的，因为最终推导出的 $n$ 的界在每种情况下都远大于 $k^3$。由于复对数是一个仅在模 $2\pi i$意义下满足加法性的多值函数，方程（3.3）给出以下对数线性形式：

$$\begin{aligned} 0 < |\Gamma| &= \left| \log\left(-\frac{f_k(\gamma_{k-1})}{f_k(\gamma_k)}\right) + \log\left(\frac{2\gamma_{k-1}-1}{2\gamma_k - 1}\right) + (n+1)\log\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right) + 2\pi i \ell \right| \\ &\le \frac{60}{|\gamma_{k-2}/\gamma_k|^{n+1}} \cdot \left| \frac{1}{f_k(\gamma_k)} \right|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由于 $\gamma_k = \gamma_{k-1}$，我们得到

$$\log\left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}\right) = \log\left(\frac{\gamma_k}{\overline{\gamma_k}}\right) = \log\left(e^{2i\arg(\gamma_k)}\right) = 2i\arg(\gamma_k)$$

and

$$\log\left(-\frac{f_k(\gamma_{k-1})}{f_k(\gamma_k)}\right) = \log\left(-\frac{\overline{f_k(\gamma_k)}}{f_k(\gamma_k)}\right) = \log(-1) + \log\left(\frac{\overline{f_k(\gamma_k)}}{f_k(\gamma_k)}\right) = i\pi - 2i\arg(f_k(\gamma_k)).$$

因此，不等式（4.2）转化为

$$\begin{aligned} 0 < \frac{|\Gamma|}{\pi} &= \left| \left(-\frac{2\arg(\gamma_k)}{\pi}\right)(n+1) - (2\ell+1) + \frac{2\arg(f_k(\gamma_k)/(2\gamma_k-1))}{\pi} \right| \\ &< 20\,|f_k(\gamma_k)|^{-1} \left| \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_k} \right|^{-(n+1)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

定义参数

$$\tau_k = -\frac{2\arg(\gamma_k)}{\pi},\ \mu_k = \frac{2\arg(f_k(\gamma_k)/(2\gamma_k-1))}{\pi},\ A_k = 20|f_k(\gamma_k)|^{-1},\ \text{ and } B_k = \left|\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_k}\right|,$$

不等式（4.3）的形式为

$$0 < |u\tau_k - v + \mu_k| < A_k B_k^{-(n+1)}, \tag{4.4}$$

其中 $w = n+1$, $u = n+1$, $v = 2\ell+1$。通过 Python 进行计算验证，确认对于指定的 $k$ 值，$\tau_k \in [1.59, 1.99]$ 且 $\mu_k \in [0.70, 1.99]$。由于该不等式

$$(n+1)\tau_k < A_k B_k^{-(n+1)} + \mu_k$$

当 $n > k^3$ 时并不成立，我们可以得出 $2\ell+1 > 0$。为便于约化，我们将 $n+1$ 的上界设为 $M = 1.5 \times 10^{46}$，这一取值由方程中的约束所规定，即方程

（4.1）。对于区间 $[4, 500]$, 内的每一个奇数 $k$，我们将引理2.1的约化判据应用于不等式（4.4）中的线性形式，并借助 Python 执行了一系列计算检验。我们的结果表明，对于范围 $M \in [1.5 \times 10^{46}, 5 \times 10^{56}]$, 下列估计成立：

$$95 \leq \mathfrak{m}_k \leq 117, \quad 9 \times 10^{46} < q_{m_k} < 3 \times 10^{57}, \quad 0.006745 \leq \epsilon_k \leq 0.3997458,$$
$$34 \leq R_k \leq 445906682970649,$$

其中， $q_{m_k}$ 是 $\tau_k$的 $m_k^{th}$渐近分数的分母， $R_k$ 表示 $n$的上界，该上界是在 $[4, 500]$. 中针对奇数 $k$ 得到的。这些结果归纳为以下引理：

**引理4.2.** 设 $k \in [4, 500]$ 为奇数，且 $R_k$ 为 $n_k$的上界。则对于 $R_k \in [34, 445906682970649]$.，有 $L_{-n}^{(k)} = 0$

**零重** **数公式的推导**。根据方程（1.6），我们得到

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{(k)} &= Q_{n+1-k}^{(k)} - Q_{n+2-k}^{(k)} - \cdots - Q_n^{(k)} \\ &= Q_{n+1-k}^{(k)} - Q_{n+2-k}^{(k)} - \cdots - Q_{n-1}^{(k)} - \left(Q_{n-k}^{(k)} - Q_{n-(k-1)}^{(k)} - \cdots - Q_{n-1}^{(k)}\right) \\ &= 2Q_{n-(k-1)}^{(k)} - Q_{n-k}^{(k)}, \text{ for all } n \geq k. \end{aligned}$$

因此，

$$Q_n^{(k)} = 2Q_{n-k}^{(k)} - Q_{n-k-1}^{(k)} \tag{4.5}$$

对 $n \geq k+1$ 成立。利用（$Q_n^{(k)}$）的初始条件$_{n \geq 0}$，我们观察到

$$Q_{n-k}^{(k)} = Q_{n-k-1}^{(k)} = 0 \text{ for all } 1 \leq n-k-1 < n-k \leq k-2.$$

根据方程（4.5），对于所有 $n \in [1, k-2]$.，我们得到 $Q_n^{(k)} = 0$ 因此，

$$Q_n^{(k)} = 0 \text{ for all } k+2 \leq n-k-1 < n-k \leq 2k-2.$$

因此，对于所有 $n \in [1+$， $Q_n^{(k)} = 0$ （$k+1$） $2k-2]$. 基于这一递归行为，零指标集合为

$$\mathcal{Z}(L_k) = \bigcup_{j=1}^{r} I_j, \quad \text{where } I_j = [1+(j-1)(k+1), jk-2] \quad \text{and } r = k-2 \text{ for } k \geq 4.$$

求和 这些 $r$ 区间的基数，我们得到零点的总重数 y

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{r} j = \frac{(k-2)(k-1)}{2}.$$

对于不超过 $k = 500$ 的取值，这一理论公式与我们的实证数据一致，因为这些区间是通过周期性地应用递推关系构造的。

**数值验证** $k \in [4, 500]$**：** 通过结合分析所得的基于奇偶性的界与 Baker-Davenport约化，可以对 $k \in [4, 500]$ 的零点集进行穷尽验证。Python 数值实验确认，对于该区间内的每个 $k$，所有满足 $L_{-n}^{(k)} = 0$ 的指标 $n$ 都严格落在连续区块 $I_j$之内。具体而言，我们证明:

$$\mathcal{Z}(L_k) \supseteq \bigcup_{j=1}^{r} [1 + (j-1)(k+1), jk - 2]. \tag{4.6}$$

引理4.1和4.2的有效性确保在这些已确定区间之外，不存在属于 $k \in [4, 500]$的“额外”或孤立零点。后续各节将讨论关于 $k > 500$的一般性证明。

## 5. Matrix Representation and Structural Properties of $(Q_n)$

为简化分析，下文将把数列$(Q_n^{(k)})$称为$(Q_n)$，其中 $k$ 固定。该数列按照特定的结构顺序排列：首先是一个维度为$(k-2) \times (k+1)$的矩形矩阵，随后逐步演变为一系列方阵 $k \times k$。这种系统的排列揭示了$(Q_n)$中的内在规律，有助于进行形式化推导。

首先，我们将$(Q_n)$的前$(k-2)(k+1)$个元素表示为一个矩阵，其元素由 $\left(Q_{(i-1)(k+1)+j}\right)$ 定义，其中 $1 \le i \le k-2$ 和 $1 \le j \le k+1$:

$$N_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \cdots & \boldsymbol{Q}_{k-2} & Q_{k-1} & Q_k & Q_{k+1} \\ \boldsymbol{Q}_{(k+1)+1} & \cdots & Q_{(k+1)+k-2} & Q_{(k+1)+k-1} & Q_{(k+1)+k} & Q_{(k+1)+k+1} \\ \boldsymbol{Q}_{2(k+1)+1} & \cdots & Q_{2(k+1)+k-2} & Q_{2(k+1)+k-1} & Q_{2(k+1)+k} & Q_{2(k+1)+k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{(k-3)(k+1)+1} & \cdots & Q_{(k-3)(k+1)+k-2} & Q_{(k-3)(k+1)+k-1} & Q_{(k-3)(k+1)+k} & Q_{(k-3)(k+1)+k+1} \end{pmatrix}.$$

检查加粗的项可知，该数组的上三角部分全部由零点构成。因此，我们可以将上述矩阵改写为以下等价形式:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & Q_{k-1} & Q_k & Q_{k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_{2k-1} & Q_{2k} & Q_{2k+1} & Q_{2k+2} \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{3k-1} & Q_{3k} & Q_{3k+1} & Q_{3k+2} & Q_{3k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & Q_{(k-2)k-1} & \cdots & Q_{(k-2)k+k-6} & Q_{(k-2)k+k-5} & Q_{(k-2)k+k-4} & Q_{(k-2)k+k-3} & Q_{(k-2)k+k-2} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

此配置中非零对角线的性质由以下引理刻画。

**引理 5.1**。设 $k \ge 2$。则

(a) $Q_{mk-1} = -2^{m-1}$，对所有 $m \in [1, k-2]$ 成立。
(b) $Q_{mk} = (m+5)2^{m-2}$，对所有 $m \in [1, k-2]$ 成立。
(c) 对所有 $1 \le r < m \le k-2$:

$$Q_{mk+r} = -\sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} Q_{jk+r-1}.$$

**证明：** 证明依赖于恒等式 (2.2)。

**(a)** 对于 $n = mk-1$，该恒等式变为 $Q_{mk-1} = 2H_{mk-2} - H_{mk-1}$。根据引理 2.5，对于所有 $m \in [1, k-1]$，我们有 $H_{mk-2} = 0$ 和 $H_{mk-1} = 2^{m-1}$。因此，我们得到 $Q_{mk-1} = -2^{m-1}$.

**(b)** 对于 $n = mk$，该恒等式为 $Q_{mk} = 2H_{mk-1} - H_{mk}$。将引理 2.5 中 $H_{mk-1}$ 和 $H_{mk}$ 的值代入，我们得到 $Q_{mk} = 2(2^{m-1}) - (-(m+1)2^{m-2}) = (m+5)2^{m-2}$.

**(c)**将引理 2.5 中的 $H_{mk+r-1}$ 和 $H_{mk+r}$ 的值代入 $Q_{mk+r} = 2H_{mk+r-1} - H_{mk+r}$，我们得到

$$\begin{aligned} Q_{mk+r} &= 2\left(-\sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} H_{jk+r-2}\right) - \left(-\sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} H_{jk+r-1}\right) \\ &= \sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} \left[H_{jk+r-1} - 2H_{jk+r-2}\right]. \end{aligned}$$

由 (2.2) 可得 $H_n - 2H_{n-1} = -Q_n$。因此， $H_{jk+r-1} - 2H_{jk+r-2} = -Q_{jk+r-1}$.将其代回求和式中

$$Q_{mk+r} = \sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} \left(-Q_{jk+r-1}\right) = -\sum_{j=r}^{m-1} 2^{m-1-j} Q_{jk+r-1}.$$

证明至此完成。 □

矩阵 5.1（记作 $N_0$）是矩阵族$\{N_b\}_{b\in\mathbb{Z}^+}$的初始元素，该矩阵族用于对（$Q_n$）的元素进行分类。尽管 $N_0$是一个矩形矩阵（（$k-2$）×（$k+1$）），但后续所有矩阵 $N_b$ 都是 $k \times k$ 方块。第一个这样的方阵$N_1$与 $N_0$最后一行中的非零元素一致:

$$N_1 = \begin{pmatrix} Q_{(k^2-2k-1)+0} & Q_{(k^2-2k-1)+1} & \cdots & Q_{(k^2-2k-1)+k-1} \\ Q_{(k^2-2k-1)+k} & Q_{(k^2-2k-1)+k+1} & \cdots & Q_{(k^2-2k-1)+k+(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{(k^2-2k-1)+(k-1)k} & Q_{(k^2-2k-1)+(k-1)k+1} & \cdots & Q_{(k^2-2k-1)+(k-1)k+(k-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

一般而言l，矩阵 5.1 之后的所有方阵构成序列 $\{N_b\}_{b\in\mathbb{Z}^+}$，其中

$$N_b = \begin{pmatrix} Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+0} & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+1} & \cdots & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+k-1} \\ Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+k} & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+1} & \cdots & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+k+(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+(k-1)k} & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+(k-1)k+1} & \cdots & Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+(k-1)k+(k-1)} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

The 完整数列（$Q_n$）$_{n\geq 0}$ 因此是所有此类矩阵中各项的并集 :

$$Q_n^{(k)} = \bigcup_{b\geq 0}\{v : v \in N_b\}.$$

我们引入简化记号

$$Q_{b,jk+r} = Q_{(bk^2-(b+1)k-1)+jk+r} = Q_{(bk^2-bk-1)+(j-1)k+r},$$

对所有 $b \geq 0$. 这些矩阵具有连续性，即 $N_b$ 的首行等价于 $N_{b-1}$的末行。事实上，

$$Q_{b,r} = Q_{b-1,(k-2)k+r}, \quad \text{for all } 0 \leq r \leq k-1 \text{ and } b \geq 1. \tag{5.4}$$

此外，这些指标满足如下关系

$$Q_{b,-1} = Q_{b-1,(k-3)k+(k-2)}, \quad \text{for all } b \geq 1. \tag{5.5}$$

特别地，利用方程 (4.6)，我们得到 $Q_{1,\ -1} = Q_{0,\ (k-3)k+(k-2)} = Q_{(k-3)(k+1)+1} = 0$.此外，我们注意到，支配性线性递推关系 (4.5) 在记号 $Q_{b,\ n} = 2Q_{b,\ n-k} - Q_{b,\ n-k-1}$，中保持不变，对所有 $b \geq 1$ 和 $n \geq k+1$ 均成立，或者对 $b = 0$ 和 $n \geq k+2$ 成立。

## 6. Proof of Theorem 1.2

我们首先建立以下两个命题，它们将是证明定理 1.2 的基础。

**命题 6.1**。当 $k > 2$ 且 $j$时， $r \in [0, k-2]$,

$$\begin{aligned} Q_{1,(j-1)k+r} &= (-1)^{r+1}\left[\psi(k+j-3, r-2)2^{k+j-r-1} + \psi(k+j-3, r-1)2^{k+j-r-3}\right] \\ &\quad + (-1)^{k+r+1}\left[\psi(k+j-4, k+r-2)2^{j-r-2} + \psi(k+j-4, k+r-1)2^{j-r-4}\right]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

**证明：** 由 [14], 中的引理 4 可得

$$H_{1,jk+r} = (-1)^r 2^{k+j-r-2}\psi(k+j-2, r-1) + (-1)^{k+r}2^{j-r-3}\psi(k+j-3, k+r-1),$$

对于 $k > 2$和 $j$， $r \in [0, k-1]$。将 $r$ 替换为 $r-1$，我们得到

$$H_{1,jk+r-1} = (-1)^{r-1}2^{k+j-r-1}\psi(k+j-2, r-2) + (-1)^{k+(r-1)}2^{j-r-2}\psi(k+j-3, k+r-2).$$

将$H_{1,\ jk+r-1}$ 和$H_{1,\ jk+r}$ 代入恒等式$Q_{1,\ jk+r} = 2H_{1,\ jk+r-1} - H_{1,\ jk+r}$，我们得到

$$\begin{aligned} Q_{1,jk+r} &= (-1)^{r+1}\left[\psi(k+j-2,r-2)2^{k+j-r} + \psi(k+j-2,r-1)2^{k+j-r-2}\right] \\ &\quad + (-1)^{k+r+1}\left[\psi(k+j-3,k+r-2)2^{j-r-1} + \psi(k+j-3,k+r-1)2^{j-r-3}\right]. \end{aligned}$$

将上述表达式中的 $j$ 替换为 $j-1$，即可得到 (6.1)。 □

**命题 6.2**。对所有 $k>2$； $j$， $r\in[0,k-2]$ 和 $b\in\mathbb{Z}^+$，

$$\begin{aligned} Q_{b,(j-1)k+r} = \sum_{i=0}^{b}(-1)^{ik+r+1}[&\psi(bk+j-b-i-2,ik+r-2)2^{(b-i)k+j-r-b-i} \\ &+\psi(bk+j-b-i-2,ik+r-1)2^{(b-i)k+j-r-b-i-2}]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

**证明：**利用引理 5 中 [14], 的 $H_{b、\ jk+r-1}$ 和 $H_{b,\ jk+r}$ 的取值，我们得到

$$\begin{aligned} Q_{b,jk+r} = \sum_{i=0}^{b}(-1)^{ik+r+1}[&\psi(v,ik+r-2)2^{(b-i)k+j-r-b-i+1} \\ &+\psi(v,ik+r-1)2^{(b-i)k+j-r-b-i-1}], \end{aligned}$$

其中 $v=bk+j-b-i-1$。将上述表达式中的 $j$ 替换为 $j-1$，即可得到 (6.2)，从而完成证明。□

**定理 1.2 的证明**。 估计式 (i) 和 (ii) 的证明分别直接由 (4.6) 中的包含关系以及引理 5.1 中确立的性质估计 (a) 得出。其余估计的证明如下所述。

(iii) 根据 $\psi$ 在 (1.7) 中定义的组合记号，我们要验证恒等式

$$Q^{(k)}_{mk+r} = (-1)^r\left[\psi(m-1,r-1)2^{m-r} + \psi(m-1,r)2^{m-r-2}\right], \tag{6.3}$$

对所有 $0\le r<m\le k-2.$。我们先建立 $H^{(k)}_n$ 的相应公式，该公式见 [14]。对于 $m\le k-1$，数列满足以下恒等式

$$\begin{aligned} H^{(k)}_{mk+r-1} &= (-1)^r\psi(m-1,r-1)2^{m-r-1}, \\ \text{and } H^{(k)}_{mk+r} &= (-1)^{r+1}\psi(m-1,r)2^{m-r-2}. \end{aligned}$$

应用引理 2.7，得到 $Q^{(k)}_{mk+r} = 2H^{(k)}_{mk+r-1} - H^{(k)}_{mk+r}.$。提出公因子 $(-1)^r$，即可得到 (6.3)。

(iv) 推导 $Q^{(k)}_{mk+r}$ 的结构公式需要进行分情况分析。我们区分二次情形（$k=2$）与高阶情形（$k>2$），以说明各维度所固有的独特递推行为

。

**情形（$k=2$）：** 这里我们必须证明，对所有 $m \geq 1$,

$$Q_{2m+r} = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{m-1} \psi(t, 2i-2) 2^{m-3i+1} - \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t, 2i-1)\, 2^{m-3i-1}, & \text{if } r=-1, \\ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t, 2i-1)\, 2^{m-3i} + \sum_{i=0}^{m-1} \psi(t, 2i)\, 2^{m-3i-2}, & \text{if } r=0, \end{cases}$$

其中 $t = m-i-1$. 利用恒等式 $Q_{2m-1} = 2H_{2m-2} - H_{2m-1}$，并代入 [14], 中 $H_{2m-1}$ 和 $H_{2m-2}$ 的已知值，我们得到

$$Q_{2m-1} = -\sum_{i=0}^{m-2} \psi(m-i-2, 2i)\, 2^{m-3i-2} - \sum_{i=0}^{m-1} \psi(m-i-1, 2i-1)\, 2^{m-3i-1}.$$

将下标平移 $i \to i-1$ 应用于项 $2H_{2m-2}$，得到

$$2H_{2m-2} = -\sum_{i=1}^{m-1} \psi(m-i-1, 2i-2) 2^{m-3i+1}.$$

因此，对于 $r=-1$，该表达式可简化为

$$Q_{2m-1} = -\sum_{i=0}^{m-1} \left[ \psi(m-i-2, 2i-2)\, 2^{m-3i+1} + \psi(m-i-1, 2i-1)\, 2^{m-3i-1} \right].$$

类似地，对于情形 $r=0$，我们利用关系 $Q_{2m} = 2H_{2m-1} - H_{2m}$。将 [14] 中 $H_{2m-1}$ 与 $H_{2m}$ 的表达式代入，可得

$$\begin{aligned} Q_{2m} &= 2\sum_{i=0}^{m-1} \psi(m-i-1, 2i-1)\, 2^{m-3i-1} + \sum_{i=0}^{m-1} \psi(m-i-1, 2i)\, 2^{m-3i-2} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[ \psi(m-i-1, 2i-1)\, 2^{m-3i} + \psi(m-i-1, 2i)\, 2^{m-3i-2} \right]. \end{aligned}$$

**情形（$k>2$）：** 对于更高维情形，该表述依赖于命题6.1与命题6.2中所建立的结构结果。

将代换 $m = b(k-1) + j - 1$ 和 $r = r-1$ 代入恒等式 (6.2)，可得表达式

$$\begin{aligned} Q_{mk+r} = Q_{b,(j-1)k+r+1} = \sum_{i=0}^{b} (-1)^{ik+r} [ & \psi(m-i-1, ik+r-1) 2^{m-i(k+1)-r-1} \\ & + \psi(m-i-1, ik+r) 2^{m-i(k+1)-r-1}], \end{aligned} \tag{6.4}$$

对所有 $k > 2$、 $j \in [0, k-1]$、 $r \in [-1, k-2]$和 $b \in \mathbb{Z}^+$均成立。为确保表示唯一并避免序列元素重复，我们利用恒等式 (5.4) 将 $j$ 限制在区间 $[0, k-1)$ 内，其中 $Q_{b,r+1} = Q_{b-1,(k-2)k+r+1}$。在变换 $m = b(k-1) + j - 1$下，且已知 $0 \le j < k-1$，参数 $b$ 可由下取整函数唯一确定：

$$\left\lfloor \frac{m+1}{k-1} \right\rfloor - 1 < b \le \left\lfloor \frac{m+1}{k-1} \right\rfloor \implies b = \left\lfloor \frac{m+1}{k-1} \right\rfloor .$$

因此，在 $m \ge k-2$的条件下，将 $b = \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor$ 代入(6.4)，估计式 (iv) 的证明即告完成。

至此，定理 1.2 的证明完成。 □

## 7. Proof of Theorem 1.3 for $k > 500$.

在已验证初始范围 $k \le 500$的零点重数之后，我们现在将证明推广到所有 $k > 500$。我们通过证明不存在满足$m \ge k-2$ 的指标 $n = mk + r$ 能够导致 $Q_n = 0$来进行。我们的分析根据 $k$ 是偶数还是奇数，分为两个不同的逻辑框架。此外，由于初始块的零点集已由定理 1.2 的估计式 (i) 所刻画，并且估计式 (ii) 和 (iii) 排除了额外的零点，我们将注意力限制在$m \ge k-2$的情形。

**7.1. 情形 1 ($k$ 为偶数)：** 当 $k$ 为偶数时，指标的奇偶性使结构公式中的交替符号得以简化。具体而言，$(-1)^{ik+r} = (-1)^r$。将其代入定理 1.2 中关于 $m \ge k-2$ 和 $r \in [-1, k-2]$的估计式 (iv)，得到

$$\begin{aligned} Q_{mk+r} = (-1)^r \sum_{i=0}^{l} [&\psi(m-i-1, ik+r-1) 2^{m-i(k+1)-r} \\ &+ \psi(m-i-1, ik+r) 2^{m-i(k+1)-r-2}], \end{aligned} \tag{7.1}$$

where $\ell = \begin{cases} m, & \text{if } k = 2, \\ \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor, & \text{if } k > 2. \end{cases}$

由于 $k$为偶数， $n = mk + r$与 $r$具有相同的奇偶性。对 (7.1) 的分析表明，对于 $n \ge k^2 - 2k - 1$，数列项 $Q_n$在 $n$ 为偶数时严格为正，在 $n$为奇数时严格为负。因此，在 (4.6) 所定义的区间之外不存在其他零点。这证实，对于偶数 $k$，零点重数恰为 $(k-1)(k-2)/2$。

**7.2. 情形 2（$k$ 为奇数）：** 当 $k > 500$ 为奇数时， $Q_n$ 展开式中的各项符号交替，理论上可能使和为零。我们将证明这会导致数学上的不可能。

7.2.1. 关于 $n$ 以 $k$表示的下界：利用奇数 $k$ 的结构公式，我们通过提出公因子 $2^{m-r-2}$ 来化简 $Q_{mk+r}$：

$$Q_{mk+r} = (-1)^r 2^{m-r-2} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \mathcal{X}_i 2^{-i(k+1)} \quad \text{for } l = \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor ,$$

其中 $\mathcal{X}_i = 4\psi(m-i-1,\ ik+r-1) + \psi(m-i-1,\ ik+r)$。若假设 $Q_{mk+r} = 0$，则

$$\sum_{i=0}^{l} (-1)^i \mathcal{X}_i 2^{-i(k+1)} = 0. \tag{7.2}$$

对于 $r \le k-2 \le m$，方程 (7.2) 中对应于 $i=0$ 的项非零，因为 $\psi(m-1,\ r)$ 和 $\psi(m-1,\ r-1)$ 中至少有一个严格大于零。若 $i=0$ 是唯一一个使 $\psi(m-i-1,\ ik+r)$ 不为零的指标，则方程 (7.2) 将无解，从而立即解决奇数 $k$ 情形的零点重数问题。因此，要使解存在，我们必须假设展开式中至少有两项非零。具体而言，首项 ($i=0$) 和后续某个满足 $i$ 为奇数的项将促成相消。定义 $l'$ 为使第 $i$ 项非平凡的指标 $i>0$ 的上确界，则方程 (7.2) 可表示为

$$\sum_{i=0}^{l'} (-1)^i \mathcal{X}_i 2^{-i(k+1)} = 0, \quad \text{for } 0 < l' \le \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor , \tag{7.3}$$

其中，$\psi(m-l'-1, l'k+r-1)$ 或 $\psi(m-l'-1, l'k+r)$ 中至少有一个值必须非零。将 $i=l'$ in 方程 (7.3) 的情形单独列出，我们得到

$$\mathcal{X}_{l'} = \sum_{i=0}^{l'-1} (-1)^{l'+i+1} \mathcal{X}_i 2^{(l'-i)(k+1)} \quad \text{for } 0 < l' \le \lfloor (m+1)/(k-1) \rfloor .$$

由于求和中的所有项都满足 $l'-i \ge 1$，右侧的每一项都能被 $2^{k+1}$ 整除。因此

$$2^{k+1} \mid \mathcal{X}_{l'}. \tag{7.4}$$

为计算 $\nu_2(\mathcal{X}_{l'})$，我们使用库默尔证明的恒等式 [18],

$$\nu_2(\psi(y,z)) \le 2\frac{\log y}{\log 2} + 2. \tag{7.5}$$

由于 $\mathcal{X}_{l'}$ 是行指标为 $y = m-l'-1$ 的这类 $\psi$ 值的线性组合，非阿基米德三角不等式（$\nu_2(a+b) \ge \min\{\nu_2(a)\ \nu_2(b)\}$）保证该和的赋值仍受行指标 $y$ 的复杂度约束。因此，由 (7.4) 和 (7.5)，我们得到

$$k+1 \le \nu_2(\mathcal{X}_{l'}) \le 2\frac{\log y}{\log 2} + 2,$$

这就得出

$$k-1 \le 2\frac{\log y}{\log 2}.$$

由于 $y \le n/k$，我们得出任何潜在的非平凡零点都必须满足指数下界

$$n \ge 2^{(k-1)/2}. \tag{7.6}$$

**7.2.2. 关于 $n$ 以 $k$为界：** 我们回顾为 $H^{(k)}$ 建立的分析框架，以获得 $Q^{(k)}$的潜在零点的更好上界，然后将其与先前得到的下界 $n \ge 2^{(k-1)/2}$结合起来。$k$-广义卢卡斯数列在负指标处的通项可通过比内公式表示为：

$$Q_n = g_k(\gamma_1)\gamma_1^{-(n+1)} + \cdots + g_k(\gamma_{k-1})\gamma_{k-1}^{-(n+1)} + g_k(\gamma_k)\gamma_k^{-(n+1)}. \tag{7.7}$$

如果 $Q_n = 0$，则由方程（3.4）、（3.7）和引理2.6，我们得到

$$-5.2 \cdot 10^{16} \cdot k^9 \log(n+1)(\log k)^2 < \log|\Gamma| < \frac{125k(3k+1)}{\left(1 + \dfrac{1}{10k^{9.6}(\pi/e)^k}\right)^{n+1}},$$

这意味着

$$(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{10k^{9.6}(\pi/e)^k}\right) < 5.2 \cdot 10^{16} \cdot k^9 \log(n+1)(\log k)^2.$$

Then（$n/\log n$）$< 5.2 \cdot 10^{16} \cdot k^9$（$\log k$）$^2[11k^{9.6}$（$\pi/e$）$^k]$. 因此，根据引理2.2 ，

$$n < 1.7 \cdot 10^{17} k^{19.6} (\log k)^3 (\pi/e)^k. \tag{7.8}$$

**7.2.3. $n$ 和 $k$ 的绝对界：** 结合（7.6）和（7.8），可得

$$\sqrt{2}/(\pi/e)^k < 1.7\sqrt{2} \cdot 10^{17} k^{19.6} (\log k)^3,$$

这表明 $k \le 886$. 根据方程（3.3）和（3.7），

$$5.2 \cdot 10^{16} \cdot k^9 \log(n+1)(\log k)^2 > \log\left|\frac{f_k(\gamma_k)}{30}\right| + (n+1)\log\left|\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_k}\right|.$$

因此，利用 $k \in [501, 885]$这一事实，通过计算可得

l　$f_k(\gamma_k)/30| \in [-10.48, -10.02]$,　$\log|\gamma_{k-2}/\gamma_k| \in [1.78 \times 10^{-8}, 1.04 \times 10^{-7}]$,

og |以及

$$5.2 \cdot 10^{16} \times k^9 (\log k)^2 \in [3.92 \times 10^{42}, 7.93 \times 10^{44}],$$

因此

$$7.93 \times 10^{44} \times \log(n+1) > -10.48 + 1.78 \times 10^{-8} \times (n+1). \tag{7.9}$$

通过对 $n$求解方程（7.9），我们发现，若 $Q_n = 0$ 且 $k \in [501, 885]$，则 $n < 1.1 \times 10^{55}$. 将这些代入不等式（7.6），我们得到 $2^{(k-1)/2} \le n \le 1.1 \times 10^{55}$，从而得到 $k \le 366$。该结果与我们最初的假设$k > 500$直接矛盾。因此，我们得出结论：在此范围内不可能出现零星零点。至此完成了定理 1.3 在奇数 $k$情形下的证明。□

**数据可用性声明：**数据共享不适用于本文，因为在当前研究期间未生成或分析任何数据集。

**经费：**作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金或拨款。

**声明：**

**利益冲突：**代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

## References

[1] A. A.cikel、N. Irmak 和 L. Szalay，《接近 2 的幂的 k-广义Lucas数》，Mathe- matica Slovaca 73(4)，(2023)，871–882。[2] J. Berstel，《关于计算线性递推数列的项》，发表于 I.R.I.A.，(Rocquen- court)，3 月，(1974)。[3] J. Berstel 和 M. Mignotte，《线性递推数列的两个可判定性质》，Bull. Soc. Math. France 104，(1976)，175–184。[4] F. Beukers，《三项递推数列的零点重数》，Compos. Math. 77 (1991)，第 165–177 页。[5] F. Beukers 和 R. Tijdeman，《关于二项复递推数列的重数》，Compos. Math. 51，(1984)，193–213。[6] J. J. Bravo、C. A. G´omez 和 F. Luca，《作为两个 $k$–Fibonacci数之和的 2 的幂》，Miskolc Math. Notes 17，(2016)，85-100。[7] Y. Bugeaud，《对数线性形式及其应用》（IRMA 数学与理论物理讲座 28），欧洲数学会，苏黎世，(2018)。[8] Y. Bugeaud、M. Mignotte 和 S. Siksek，《指数丢番图方程 I 的经典方法与模方法：Fibonacci数和Lucas数的完全幂》，Ann. of Math. (2) 163，(2006)，969–1018。[9] G. Dresden 和 Z. Du，《k-广义斐波那契数的简化比内公式》，J.Integer Sequences 17，(2014)，文章 14.4.7。[10] A. Dujella 和 A. Peth˝o，《Baker-Davenport 定理的推广》，Quart. J. Math. Oxford Ser. 49，(1998)，291-306。[11] A. Dubickas，《关于两个代数数之间的距离》，Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 43，(2020)，3049–3064。[12] J. Garc´ıa、C. A. G´omez 和 F. Luca，《关于广义斐波那契多项式的根的分离》，arXiv:2210.16717v2，(2022)，1–15。[13] J. Garc´ıa、C. A. G´omez 和 F. Luca，《关于 k-广义斐波那契数列的零点重数》，Journal of Difference Equations and Applications 26(11-12)，(2020)，1564–1578。[14] J. Garc´ıa、C. A. G´omez 和 F. Luca，《求解带负指标的 k-广义斐波那契数列的 Skolem问题》，Journal of Number Theory 257，(2024)，273–299。[15] C. A. G´omez 和 F. Luca，《k-广义斐波那契数列中的乘法独立性》，Lith. Math. J. 564，(2016)，503–517。[16] S.G´uzmanS´anchez 和 F. Luca，《二项递推数列中的阶乘与 s-单位的线性组合》，Ann. Math. Qu´e 38，(2014)，169-188。[17] T. R. Hagedorn，《次数为 $n \geq 4$ 的实线性递推数列的零点》，C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 27，(2005)，41–47。[18] E. Kummer，《关于一般互反律的补充定理》，J. Reine Angew. Math. 44，(1852)，93-–146。

[19] C. Lech, 《关于递归级数的一则注记》, Ark. Mat. 2 (1953), 417–421。[20] K. Mahler, 《有理函数的泰勒系数的一个算术性质》, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 38, (1935), 50–60。[21] K. Mahler 和 J.W.S. Cassels, 《关于有理函数的泰勒系数》, Math. Proc. Cam- bridge Philos. Soc. 52, (1956), 39–48。[22] E. M. Matveev, 《代数数的对数的齐次有理线性形式的一个显式下界 II》, Izv. Math. 64, (2000), 1217–1269。[23] M. Mignotte, 《关于线性递归数列的一则注记》, J. Austral. Math. Soc. 20A, (1975), 242-244。[24] M. Mignotte, 《关于 Pisot 数的共轭数》, C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math. 298, (1984), 21。[25] M. Mohapatra、P. K. Bhoi 和 G. K. Panda, 《求解负指标广义 Pell 数的 Skolem问题》, arXiv 预印本 arXiv:2509.04503 (2025)。[26] W.Schmidt, 《线性递推数列的零点重数》, Acta Math.182, (1999), 243–282。[27] T. N. Shorey 和 R. Tijdeman, 《指数丢番图方程》, 剑桥大学出版社, 剑桥, (2008)。[28] T. Skolem, 《处理某些指数方程和丢番图方程的一种方法》, 《第八届斯堪的纳维亚数学家大会论文集》, 斯德哥尔摩, (1934), 163–188。[29] M. Ward, 《与线性递推关系相关的若干丢番图问题》, Rep. Inst. Theory Num- bers (科罗拉多大学), (1959), 250–257。[30] D. A. Wolfram, 《求解广义斐波那契递推关系》, Fibonacci Quart. 36, (1998), 129–145。

Monalisa Mohapatra,
Department of Mathematics, National Institute of Technol-ogy Rourkela,
Odisha-769 008, India电子邮件地址：mmahapatra0212@gmail.comPritam Kumar Bhoi,
Institute of Mathematics and Applications, Andharua, Bhubanes

war,
Odisha -751 029, India电子邮件地址：pritam.bhoi@gmail.comGopal Krishna Panda,
Department of Mathematics, National Institute of Technol-ogy Rourkela,
Odisha-769 008, India

电子邮件地址：gkpanda nit@rediffmail.com