arXiv:2603.07193v1 [math.AG] 7 Mar 2026

紧化雅可比簇上的 Lefschetz 滤过与 perverse 滤过。

YAO YUAN

Abstract. 设 C 是一条具有平面奇点的复整曲线。设 J 是 C的紧化雅可比簇。上同调群 $H^*(J)$上存在两种滤过。一种由在 J上杯乘某个丰沛除子所定义的幂零态射得到，我们称之为 Lefschetz 滤过。为得到另一种滤过，我们将 C 放入曲线族$\mathcal{C} \to B$ 中，使得 J 可以嵌入到一个族 $f : \mathcal{J} \to B$中，并令B，$\mathcal{C}$，$\mathcal{J}$光滑。于是 $Rf_*(\mathbb{Q}_{\mathcal{J}})$分解为其（平移后的）perverse上同调的直和。将此分解限制到纤维上，我们得到 $H^*(J)$上的一个滤过，称为 perverse 滤过。本文证明，正如 Maulik-Yun 所猜想的，这两种滤过互为相反滤过。

关键词： 紧化雅可比簇，perverse 滤过，傅里叶变换，广义theta除子，sl_2 表示。

Contents

1. 引言。2 1.1. Lefschetz 滤过。2 1.2. perverse 滤过。4 1.3. 主要结果。4 1.4. 论文结构。5 1.5. 记号、约定与预备知识。5 1.6. 致谢。6 2. 关于 J 和 $C^{[n]}$ 6的一些性质 2.1. $H_*(J)$上的一个分解。6

2010 数学主题分类。 主要分类号 14D22、14J26。作者受 BNSF 1262005 资助。

2.2. $\mathcal{H}_n$上的一个特征值分解。10 2.3. 旗希尔伯特概形上的庞加莱层的拉回。12 3. 主要结果的证明。14 3.1. 傅里叶变换。14 3.2. 主要结果。21 附录 A. 同调论回顾。28 A.1. 双变理论。28 A.2. 奇异簇上的黎曼–罗赫定理。31 附录 B. 命题 2.4 的证明 33 参考文献 36

1. Introduction.

1.1. Lefschetz 滤过。 设 M 为维数 n 的光滑复射影簇，ω 为 $H^2(M,R)$[1], 中的一个丰富类，其中 $R=\mathbb{Q}/\mathbb{R}/\mathbb{C}$。则 ω通过上积在 $H^*(M)=\bigoplus_{k=0}^{2n}H^k(M,R)$ 上诱导一个幂零自同态 L_ω，即对任意 $a\in H^*(M,R)$, $L_\omega(a)=a\cup\omega$。由 [4, 命题 1.6.1]，存在唯一的递增滤过

$$W_0H^*(M)\subset W_1H^*(M)\subset\cdots\subset W_{2n-1}H^*(M)\subset W_{2n}H^*(M)=H^*(M), \tag{1.1}$$

满足：(1) $L_\omega W_k\subset W_{k-2}$，以及 (2) 分次部分上的诱导自同态 L_ω^k：$\mathrm{Gr}^W_{n+k}H^*(M)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Gr}^W_{n-k}H^*(M)$ 对每个 $0\le k\le n$ 均为同构。由强莱夫谢茨定理，我们有

$$W_kH^*(M)=\bigoplus_{i\ge 2n-k}H^i(M,R). \tag{1.2}$$

因此 $\mathrm{Gr}^W_{n+k}H^*(M)=H^{n-k}(M,R)$，并且与 ω^k 作杯积给出同构 $H^{n-k}(M,R)\cong H^{n+k}(M,R)$。我们将 (1.1) 中的滤过称为 *Lefschetz* 滤过。

根据雅各布森-莫罗佐夫定理，我们可以找到 $H^*(M)$的另一个自同态Λ，使得$(L_\omega, H:=[L_\omega,\Lambda],\Lambda)$构成一个 sl_2-三元组。于是我们有

[1]只需令 M 为一个紧致 K¨ahler 流形，且 ω 为一个 K¨ahler 类

权重分解

$$H^*(M) = \bigoplus_{\lambda=-n}^{n} H_\lambda$$

使得对于任意 $a \in H_\lambda$, $H(a) = \lambda \cdot a$。记 $PD\colon H^{n-k}(M, R) \xrightarrow{\cong} H^{n+k}(M, R)^\vee$ 为庞加莱对偶。PD 以及由与 ω^k 作杯积给出的同构 $H^{n-k}(M, R) \cong H^{n+k}(M, R)$，给出一个同构 $\widetilde{PD}\colon H^k(M, R) \xrightarrow{\cong} H^k(M, R)^\vee$。实际上我们有

$$\Lambda = -\widetilde{PD}^{-1} \circ L_\omega^\vee \circ \widetilde{PD}, \text{ and } H_\lambda = H^{\lambda+n}(M, R),$$

其中 $L_\omega^\vee\colon H^k(M, R)^\vee \to H^{k-2}(M, R)^\vee$ 是 L_ω 的对偶。

注 1.1. 对于任意射影簇（不一定光滑）以及丰富类 ω，由 L_ω 的幂零性，我们仍有 *(1.1)* 中的滤过。然而，*(1.2)* 通常未必成立：例如，我们可能没有 维数 $H^{n-k}(M, R)$ =维数 $H^{n+k}(M, R)$。

现在令 $M = J_X^d$ 为光滑完备曲线 X 的雅可比，它参数化 X 上次数为 d 的线丛。J_X^d 彼此同构。以下轨迹

$$\Theta := \{G \in M | H^0(G) \neq 0\}$$

在 J^{g_X-1} 上构成一个丰沛除子，文献中通常称为 ***theta*** 除子。记 F_X^d 为 $X \times J_X^d$ 上的归一化普适丛，则

$$\mathcal{O}_{J^{g_X-1}}(-\Theta) \cong \det(Rp_* F_X^{g_X-1})$$

其中 $p\colon X \times J_X^{g_X-1} \to J_X^{g_X-1}$ 为投影。

若 C 是具有平面奇点的整曲线，则有紧化雅可比 J_C^d，它参数化 C 上欧拉示性数为 $d - g_C + 1$ 的秩一无挠层。J_C^d 也彼此同构。我们还有定义在 $C \times J_C^d$ 上的泛层 F_C^d，它在光滑点 $x \in C$ 处归一化。令 $d = 2g - 1$，则 $p_* F_C^d = Rp_* F_C^d$，且它是 J_C^d 上秩为 g 的向量丛。我们定义$\Theta := -c_1(\det(p_* F_C^d)) \in H^2(J_C^d)$（我们将在命题 2.4 中看到，对所有 $d \geq 2g - 1$ 该等式均成立）。于是，与 Θ 作杯积仍是一个幂零自同态，因此由 [4, 命题 1.6.1]，存在唯一的递增滤过

(1.3)
$$W_0 H^*(J_C^d) \subset W_1 H^*(J_C^d) \subset \cdots \subset W_{2g_C-1} H^*(J_C^d) \subset W_{2g_C} H^*(J_C^d) = H^*(J_C^d).$$

我们也将滤过 (1.3) 称为 Lefschetz 滤过。然而，由于 J_C^d 可能是奇 (1.2)
异的，这种情况可能会失败。令 $J = J_C^0$。

1.2. **反常滤过**。令 $f: X \to Y$ 是两个非奇异拟射影簇之间的真态射。根据在 $\mathbb{C}$ 上众所周知的分解定理（ [3] 中的定理 6.25、6.2.10），我们有

$$Rf_*\mathbb{Q}_X \cong \bigoplus_{k\geq 0} {}^p\mathcal{H}^k(Rf_*\mathbb{Q}_X)[-k],$$

其中 ${}^p\mathcal{H}^k(Rf_*\mathbb{Q}_X)$ 是 Y 上的所有半单反常层。定义

$$ {}^p\tau_{\leq i}(R\pi_*\mathbb{Q}_X) := \bigoplus_{j\leq i} {}^p\mathcal{H}^j(Rf_*\mathbb{Q}_X)[-j]. \tag{1.4}$$

将 (1.4) 限制到每个纤维 X_s 上，我们便在上同调群 $H^*(X_s,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(X_s,\mathbb{Q})$ 上得到*perverse* 滤过 （相对于 f） $P_\bullet$，使得

$$\bigoplus_{k\geq 0} P_{\leq i}H^k(X_s,\mathbb{Q})[-k] = {}^p\tau_{\leq i}(R\pi_*\mathbb{Q}_X)|_s. \tag{1.5}$$

注意，一般而言，perverse 滤过 (1.5) 取决于映射 $f: X \to Y$，在 X_s 上未必是内在的。

设 C 是一条具有平面奇点的整曲线。我们可以将 C 放入一个族中。设 $\mathcal{C} \to B$ 是一个具有平面奇点的整曲线族，使得 $0 \in B$ 上的纤维 $\mathcal{C}_0$ 同构于 C。此外，还有一个相对紧化雅可比 $\mathcal{J} \to B$，其每个纤维都参数化欧拉示性数为 $1 - g_C$ 的秩1无挠层。我们要问 $\mathcal{C}, B, \mathcal{J}$ 是否都光滑。在 [8] 中，Maulik-Yun 构造了 $H^*(\mathcal{J}_0)$ 上的典范反常滤过，其具有 $\mathcal{J}_0 \cong J$；只要该族满足某些条件，这个滤过便不依赖于 $\mathcal{C} \to B$ 的选取（见 [8, 定理 1.1]）。他们还提出了以下猜想。

猜想 1.2 (猜想 2.17 in [8])。 设 C 是具有平面奇点的整曲线。在 *(1.5)* 中通过适当族 $\mathcal{J} \to B$ 定义的 $P_{\leq i}$ 上的 *perverse* 滤过 $H^*(J)$ 与 *(1.3)* 中定义的 *Lefschetz* 滤过 $W_{\leq i}$ 互为对立滤过。

在 [11] 中，Rennemo 给出了一个分解

$$H^*(J) = \bigoplus_{k\geq 0} D_kH^*(J) \tag{1.6}$$

并证明 $P_{\leq i}H^*(J) = \bigoplus_{k\leq i} D_kH^*(J)$ ([11, 命题 7.1])。我们将在 [11]的 2.1 节中回顾 Rennemo 的结果

1.3. **主要结果**。 在本文中，我们证明了 C 复曲线的猜想 1.2。此外，我们具体描述了与 cupping Θ 相关联的 sl_2-三元组。我们的主要策略是使用 Rennemo 给出的分解 (1.6) 和傅里叶变换 $\mathfrak{F}: H_*(J) \to H_*(J)$。然而，对于 C 奇异的情形，通常的

傅里叶变换定义行不通，尽管我们有由 Arinkin 构造的 $J \times J$ 上的 Poincar´esheaf（[2]）。幸运的是，我们成功利用双变理论为 $\mathfrak{F}$ 得到了一个正确的定义（见 §3.1）。

我们在 $H_*(J)$ 上定义两个算子 e, f。

$$e : H_*(J) \to H_*(J),\ a \mapsto \Theta \cap a;$$
$$f := -\mathfrak{F} \circ e \circ \mathfrak{F}^{-1} = -\mathfrak{F} \circ e \circ \mathfrak{F}_1.$$

我们分别用 $e^\vee, f^\vee$ 表示 e, f 在 $H^*(J)$ 上的对偶映射。注意，对任意 $\alpha \in H^*(J)$，有 $e^\vee(\alpha) = \alpha \cup \Theta$。

我们的主要结果如下。

定理 1.3 (推论 3.7). $(e^\vee, [e^\vee, f^\vee], f^\vee)$ 在 $H^*(J)$ 上构成一个 sl_2-三元组，其特征值分解与 $H^*(J)$ 上的分解 *(1.6)* 一致。

特别地，由 *cup* 乘积诱导的 *Lefschetz* 滤过 Θ 在 $H^*(J)$ 上为 $W_k(H^*(J)) = \bigoplus_{j \geq 2g-k} D_j H^*(J)$，并且它与 *perverse* 滤过 $P_{\leq m} H^*(J) = \bigoplus_{j \leq m} D_j H^*(J)$ 互为对偶，即 $W_k(H^*(J)) \cap P_{\leq m} H^*(J) = 0$ 当且仅当 $m + k < 2g$。

备注 1.4. 为什么我们要求 C 是复曲线？有两个原因：

(1) 我们只知道在 $\mathbb{C}$ 上的双变理论；

(2) 在命题 *2.4* 的证明中，我们需要紧化雅可比簇 J_C 存在奇点消解。

1.4. **本文结构**。 在 §2.1 中，我们回顾 Rennemo 的结果，并给出向量丛 $p_*(F_C^d)$ 在 J_C^d 上的陈类的一些关系。这些关系对我们的主定理非常重要。在 §2.2 中，我们将 Rennemo 的分解描述为某个线性函子的特征值分解。在 §2.3 中，我们证明 Poincar´e 层的一些性质，这些性质将用于证明我们的主定理。在 §3.1 中，我们定义傅里叶变换 $\mathfrak{F}$，并证明它是 $H_*(J)$ 上的一个同构。在 §3.2 中，我们证明主定理。本文有两个附录。§A 简要回顾双变理论以及奇异簇上的黎曼–罗赫定理。§B 给出命题 2.4 的证明。

本文包含许多运用双变理论的技术性证明，因此建议读者在阅读这些细节之前先阅读附录中的综述。

1.5. **记号、约定与预备知识**。

- 设 C 是一个具有平面奇点的真整曲线，定义在 $\mathbb{C}$ 上。记其算术亏格为 g。令 $C^{sm} \subset C$ 表示由 C 的光滑点组成的开子集。固定一个光滑点 $x \in C^{sm}$。

•令 J 表示紧化的雅可比概形，它参数化了 C 上满足 $\chi(G) = 1 - g$（即 $\deg(G) = 0$）的无挠秩一层 G。
• 设 F为在 x 处归一化的 $C \times J$ 上的泛层，即 $F_x \cong \mathcal{O}_J$。
•设 $C^{[n]}$ 为 C 的长度为 n 的子概形的希尔伯特概形。设 $C^{[n,n+1]} \subset C^{[n]} \times C^{[n+1]}$ 为参数化满足 $Z \subset Z'$ 的对偶 (Z, Z') 的旗希尔伯特概形。

•我们有阿贝尔-雅可比映射 $AJ_n \colon C^{[n]} \to J$，它将 Z 映至 $I_Z \otimes \mathcal{O}_C(nx)$，其中 $I_Z \subset \mathcal{O}_C$ 是 Z 的理想层。
• 根据 Arinkin 的结果（[2, 定理 C]），存在一个定义在$J \times J$ 上的 Poincar´e 层 P，它是极大 Cohen-Macaulay 层。此外，P 诱导了 J 的自对偶性，即傅里叶-穆凯函子是一个范畴等价。我们可以假设 $(AJ_1 \times id_J)^* P \cong \mathcal{F}$。$\widetilde{\mathcal{S}} \colon D^b(J) \to D^b(J);\ \mathcal{G} \mapsto Rp_{1,*}(p_2^*(\mathcal{G}) \otimes P)$

• 设 $\mathcal{C} \to B$ 是一族具有平面奇点的整曲线，使得 $0 \in B$ 上的纤维 $\mathcal{C}_0$ 为 C，且对一般的 $t \in B$，$\mathcal{C}_t$ 是光滑的。我们可以假设存在一个截面 $s \colon B \hookrightarrow \mathcal{C}^{sm}$，使得 $s(0) = x$。

• 为简单起见，我们设 B 具有平凡切丛。
• 设 $\mathcal{J}, \mathcal{C}^{[n]}, \mathcal{C}^{[n,n+1]}$ 分别为 $J, C^{[n]}, C^{[n,n+1]}$ 在 B上的相对版本。我们还可以假设 $B, \mathcal{C}, \mathcal{J}, \mathcal{C}^{[n]}, \mathcal{C}^{[n,n+1]}$ 都是光滑的（参见例如[12, 推论 15]）。因此 $C, J, C^{[n]}, C^{[n,n+1]}$ 都是局部完全交。

• 设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{J} \times_B \mathcal{J}$上的相对Poincar´e层。
• 设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C} \times_B \mathcal{J}$ 上在截面 s处归一化的相对泛层。

• 我们有相对阿贝尔-雅可比映射 $\widetilde{AJ}_n \colon \mathcal{C}^{[n]} \to \mathcal{J}$ 并且可以假设 $(AJ_1 \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P} \cong \mathcal{F}$。
• 除非另有说明，所有上同调群和同调群均取 $\mathbb{Q}$ 系数。

•我们用 f^*，f_*，$\otimes$ 表示通常的拉回、推前和张量积，而用 Lf^*，Rf_*，$\otimes^L$ 表示它们的导出形式。

1.6. **致谢**。 感谢 Xuezhi Zhao 和 Fang Sun 在拓扑学方面给予的帮助。感谢各位审稿人。

2. Some properties on J and $C^{[n]}$

2.1. **()上的分解**。本小节回顾 Rennemo 在 [11]中的一些结果。令

$$V(C) := \bigoplus_{n,k \geq 0} H_k(C^{[n]}).$$

Rennemo 在 $V(C)$上定义了两对算子 $\mu_{\pm}[pt]$, $\mu_{\pm}[C]$，见 [11, §2]。我们回顾它们的定义如下。

我们固定一个光滑点 $x \in C$，因此有一个包含映射 $i: C^{[n]} \hookrightarrow C^{[n+1]}$，将 Z 映至 $Z \cup \{x\}$，并且 i 由 [11,引理 2.1]知是正则嵌入。我们定义两个映射 $\mu_{\pm}[pt]$：$H_k(C^{[n]}) \to H_{k-1\pm1}(C^{[n\pm1]})$，令 $\mu_+[pt] = i_*$ 且 $\mu_-[pt] = i^!$，其中 $i^!$ 是交拉回映射。

对于旗希尔伯特概形 $C^{[n,n+1]}$，我们有三个自然映射 p，σ，q，如下面的图表所示，分别将 (Z_n, Z_{n+1}) 映至 Z_n，$Z_{n+1}\backslash Z_n$，Z_{n+1}。

(2.1)
$$\begin{array}{ccccc} & & C^{[n,n+1]} & & \\ & \swarrow^{p} & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & \searrow^{q} & \\ C^{[n]} & & C & & C^{[n+1]} \end{array}$$

我们定义两个映射 $\mu_{\pm}[C]$：$H_k(C^{[n]}) \to H_{k+1\pm1}(C^{[n\pm1]})$，令 $\mu_+[C] = q_* p^!$ 且 $\mu_-[C] = p_* q^!$，其中 $p^!$ 和 $q^!$ 分别是通过正则嵌入 $C^{[n]} \hookrightarrow \mathcal{C}^{[n]}$ 和 $C^{[n+1]} \hookrightarrow \mathcal{C}^{[n+1]}$ 定义的精化 Gysin 拉回（见 [6,§6.2 和例 19.1.10]）。根据 [11, 引理 4.1]，$p^!$ ($q^!$，分别地)与 $\mathcal{C}^{[n]}$ ($\mathcal{C}^{[n+1]}$，分别地)的选取无关。

为了从同调过渡到上同调，我们只需对向量空间 $V(C)$ 以及算子 $\mu_{\pm}[pt]$, $\mu_{\pm}[C]$ 取对偶。令

$$V^c(C) = \bigoplus_{k,n\geq 0} H^k(C^{[n]}) = V(C)^{\vee},$$

并令 $\mu^c_{\pm}[pt] = \mu_{\mp}[pt]^{\vee}$, $\mu^c_{\pm}[C] = \mu_{\mp}[C]^{\vee}$。注意，我们使用与 [11]中相同的记号。

我们将 Rennemo 的部分结果引述为如下两个定理。

定理 2.1（[11] 中的定理 1.2 +引理 3.2）。

(i) 算子 $\mu_{\pm}[pt]$、$\mu_{\pm}[C]$ 满足对易关系

$$[\mu_-[pt], \mu_+[C]] = [\mu_-[C], \mu_+[pt]] = id,$$

且其余所有算子对均对易。

(ii) 令 $W =$核 $\mu_-[pt] \cap$核 $\mu_-[C]$。那么自然映射

$$W \otimes \mathbb{Q}[\mu_+[pt], \mu_+[C]] \to V(C)$$

是一个同构。

(iii) Abel-Jacobi 推前映射 AJ_*：$V(C) \to H_*(J)$ 诱导一个同构 $W \cong H_*(J)$。

(iv) Abel-Jacobi 推前映射

$$AJ_{n,*} : \ker \mu_-[pt] \cap H_*(C^{[n]}) \to H_*(J)$$

对任意 n 均为单射，且对 $n \geq 2g$ 为同构。

定理 2.2 （ [11]中的定理 **1.3**）。

(i) 算子 $\mu^c_\pm[pt]$、$\mu^c_\pm[C]$ 满足对易关系

$$[\mu^c_-[pt], \mu^c_+[C]] = [\mu^c_-[C], \mu^c_+[pt]] = id,$$

且其余所有算子对均对易。

(ii) 设 $W^c = V^c(C)/(\mathrm{Im}\ \mu^c_+[pt] + \mathrm{Im}\ \mu^c_+[C])$。则自然映射

$$\ker \mu^c_-[pt] \cap \ker \mu^c_-[C] \to W^c,$$

and

$$(\ker \mu^c_-[pt] \cap \ker \mu^c_-[C]) \otimes \mathbb{Q}[\mu_+[pt], \mu_+[C]] \to V(C)$$

是同构。

(iii) Abel-Jacobi 拉回映射 AJ^*： $H^*(J) \to V(C)^c$诱导一个同构 $H^*(J) \cong W^c$。

注 2.3。 我们想强调映射的显式形式 $(AJ_{n,*})^{-1}$:$H_*(J) \to \ker \mu_-[pt] \cap H_*(C^{[n]})$，其中 $n \geq 2g$ 见定理 *2.2 (iv)*。由于 AJ_n:$C^{[n]} \to J$ 对于 $n \geq 2g-1$是一个 $\mathbb{P}^{n-g}$-向量丛。对于 $n \geq 2g$，我们有相对丰沛类 $\omega_n := c_1(\mathcal{O}_{AJ_n}(1))$。可以看出 $\omega_n \cap [C^{[n]}] = [i(C^{[n-1]})]$。

回忆一下，我们有定义在 $C \times J$ 上、在光滑点 $x \in C$ 处归一化的泛层 F。对于 $n \geq 2g$, $E_n := p_{2,*}(p_1^*\mathcal{O}_C(nx) \otimes F)$ 是 J 上的秩为 $n-g+1$ 的向量丛，其中 p_1, p_2 是从 $C \times J$ 到 C 和 J 的投影。此外，我们有一个同构 $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow{\cong} C^{[n]}$，以及以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E_n) & \xrightarrow{\cong} & C^{[n]} \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle AJ_n} & \\ & J & \end{array}.$$

记 $c_i(E_n)$ 为 E_n 的第 i 个陈类。由陈类的基本性质以及$\dim J = g$这一事实，对于 $n \geq 2g-1$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-g+1} \pi^* c_i(E_n) \cup \omega_n^{n-g+1-i} = \sum_{i=0}^{g} \pi^* c_i(E_n) \cup \omega_n^{n-g+1-i} = 0.$$

对于任意 $\beta \in H_*(J)$，我们有

$$(AJ_{n,*})^{-1}(\beta) = \sum_{i=0}^{g} \pi^* c_i(E_n) \cup \omega_n^{n-g-i} \cap AJ^!(\beta) =: \gamma. \tag{2.2}$$

我们看到 $\gamma \in \ker \mu_-[pt]$，因为 $\mu_+[pt](\mu_-[pt](\gamma)) = \omega_n \cap \gamma = 0$ 并且 $\mu_+[pt]$ 由定理 *2.1 (ii)* 可知是单射。

以下命题对我们的主定理非常重要。命题 2.4 的证明稍长，因此移至 §B。

命题 2.4. 设 $E_n, n \geq 2g-1$ 与注 *2.3* 中相同。我们有

$$ch_i(E_n) = 0 \ for \ all \ i \geq 2.$$

特别是

$$c_i(E_n) = \frac{1}{i!}(-\Theta)^i \ for \ all \ i \geq 1$$

其中 $\Theta := -c_1(E_n)$ 是 *§1.1* 中定义的 *theta* 除子类。

记 ω_n AJ_n 的相对丰沛除子类为 $C^{[n]} \to J$: $\omega_n = c_1(\mathcal{O}_{AJ_n}(1))$。于是，根据定义有 $\omega_n \cap [C^{[n]}] = [i(C^{[n-1]})]$，并且 $AJ_{n,*}(\omega_n^{n-g+1} \cap [C^{[n]}]) = -c_1(E_n) \cap [J] = \Theta \cap [J]$。

引理 2.5。沿用 *(2.1)* 中的记号，我们有

$$q^*\omega_{n+1} = p^*\omega_n + \sigma^*[x] \in H^*(C^{[n,n+1]}),$$

其中 $[x] \in H^2(C)$ 是线丛 $\mathcal{O}_C(x)$ 的第一陈类。

证明。像 $i(C^{[n]}) \subset C^{[n+1]}$ 是一个 Cartier 除子，并诱导出一个线丛，该线丛恰好是与 $[\mathcal{O}_C(x)] - [\mathcal{O}_C]$ 相关联的行列式线丛，即我们有

$$\mathcal{O}_{C^{[n+1]}}(i(C^{[n]})) \cong \det((p_2)_*(p_1^*\mathcal{O}_C(x))|_{\mathcal{D}_{n+1}}) \otimes \det((p_2)_*\mathcal{O}_{\mathcal{D}_{n+1}})^{-1},$$

其中 $\mathcal{D}_{n+1} \subset C \times C^{[n+1]}$ 是万有子概形，而 p_1, p_2 分别是从 $C \times C^{[n+1]}$ 到 $C, C^{[n+1]}$ 的投影。因此，由类似于 [5, 引理 2.1] 的公式可得

$$q^*\mathcal{O}_{C^{[n+1]}}(i(C^{[n]})) \cong p^*\mathcal{O}_{C^{[n]}}(i(C^{[n-1]})) \otimes \sigma^*\mathcal{O}_C(x).$$

引理得证。 □

下面的引理给出了 theta 除子 Θ 的一个具体描述。但我们不会在主定理中用到它。

引理 2.6。 $\Theta \cap [J] = [AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]$。

证明。 取 $n-g+1$ 个不同的光滑点 $x=x_1,\ \cdots,\ x_{n-g+1}\in C$，并将 i_{x_i} 记为将 Z 映射到 $Z\cup\{x_i\}$的正则嵌入 $C^{[m]}\hookrightarrow C^{[m+1]}$。容易看出 $[i_{x_i}(C^{[n-1]})]=\omega_n\cap[C^{[n]}]$ 具有 ω_n 相对丰沛除子类。尽管 $C^{[n]}$ 不是光滑的，我们可能无法在$H_*(C^{[n]})$上定义交积，但如 [6, 例 6.5.1]中所述，我们可以定义[2]有效卡蒂埃除子的交积。因此，ω_n^{n-g+1}由 $C^{[g-1]}$ 经正则嵌入 i' 所得的像表示：$C^{[g-1]}\hookrightarrow C^{[n]}$ 将 Z 映射到 $Z\cup\{x_1,\cdots,x_{n-g+1}\}$。

另一方面，$AJ_n\circ i'=T\circ AJ_{g-1}$，其中 $T\colon\ J\xrightarrow{\sim}J$ 将每个秩 1 层 G 映射到 $G\otimes\mathcal{O}_C((n-g+1)x-\sum_{i=1}^{n-g+1}x_i)$。因此

$$-c_1(E_n)\cap[J]=AJ_{n,*}(\omega_n^{n-g+1}\cap[C^{[n]}])=AJ_{n,*}([i'(C^{[g-1]})])=T_*([AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]).$$

最后，由于 T 是一个平移，$T_*([AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]$ 和 $[AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]$ 代数等价，因此 $T_*([AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]=[AJ_{g-1}(C^{[g-1]})]$ 在 $H^*(J)$ 中。□

空间 $V^c(C)$（分别为 $V(C)$）带有一个分次 D，使得$D_n(V^c(C))=H^*(C^{[n]})$（分别为 $D_n(V(C))=H_*(C^{[n]})$），并由此在 $W^c(W$，分别为) 和 $H^*(J)$（分别为 $H^*(J)$）上诱导出分次。注意，$V(C)$ 上的分次 D 在子空间 W 上诱导出 D，因为 $\mu_\pm[pt],\ \mu_\pm[C]$ 关于分次 D的次数均为 ±1。我们称由分次 D 诱导的分解 $H^*(J)=\bigoplus_{k\geq0}D_kH^*(J)$ 为 D-分解。

由 [11, 命题 7.1], 可得

$$\bigoplus_{k\leq m}D_kH^*(J)=:D_{\leq m}H^*(J)=P_{\leq m}H^*(J),\tag{2.3}$$

其中 $P_{\leq m}$ 是 §1.2 中定义的 perverse 滤过。因此，D-分解$\bigoplus_m D_mH^*(J)$给出了 perverse 滤过的一个分裂。

记 $\mathcal{H}_n:=\ker\mu_-[pt]\cap H_*(C^{[n]})$，其中 $n\geq2g$。于是由定理 2.1 (iv), 我们有一个同构 $AJ_{n,\ *}:\mathcal{H}_n\xrightarrow{\cong}H_*(J)$，且 $(AJ_{n,\ *})^{-1}$ 由 (2.2) 明确给出。$H_*(J)$ 上的分次 D 也在 $\mathcal{H}_n$上诱导出一个分次。下一小节将对 $\mathcal{H}_n$ 上的诱导分次给出更具体的描述。

2.2. 上的特征值分解 $\mathcal{H}_n$。 本小节中，我们给出 $\mathcal{H}_n$ 的一个分解，将其分解为某个自同态的特征值空间；通过阿贝尔-雅可比推前，该分解与 $H_*(J)$ 上的 D-分解一致。

[2]更一般地，对于由正则嵌入给出的循环。

定义 $\phi := \mu_+[pt] \circ \mu_-[C] \in \mathrm{End}(H_*(C^{[n]}))$。根据定理 2.1 (i)，$\mu_+[pt]$ 和 $\mu_-[C]$ 均与 $\mu_-[pt]$ 交换。因此，ϕ 保持子空间 $\mathcal{H}_n$ 不变。我们也将其在 $\mathcal{H}_n$ 上的限制记为 ϕ。

命题 2.7. 设 $n \geq 2g$。对任意 $\alpha \in \mathcal{H}_n$，我们有

$$AJ_{n,*}(\alpha) \in D_k H_*(J) \Leftrightarrow \phi(\alpha) = (n-k)\alpha.$$

特别地，我们有特征值分解

$$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{i=0}^{2g} H^{\phi}_{n-i}$$

其中 H^{ϕ}_{n-i} 是值为 $n-i$ 的特征子空间，且 $AJ_{n,*}\colon \bigoplus_k D_k H_*(J) \to \bigoplus_k H^{\phi}_{n-k}$ 是分次空间的同构。

我们首先证明以下引理。

引理 2.8. 设 $\alpha \in V(C)$，并设 $l, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则有

(1) *If* $\alpha \in \ker \mu_-[pt]$, *then* $\mu_+[C]^l(\alpha) \in \ker \mu_-[pt]^{l+1}$ *and* $\mu_-[pt]\mu_+[C]^{l+1}(\alpha) = (l+1)\mu_+[C]^l(\alpha)$.
(2) *If* $\alpha \in \ker \mu_-[C]$, *then* $\mu_+[pt]^l(\alpha) \in \ker \mu_-[C]^{l+1}$ *and* $\mu_-[C]\mu_+[pt]^{l+1}(\alpha) = (l+1)\mu_+[pt]^l(\alpha)$.

特别地，回顾 $W = $核 $\mu_-[pt] \cap$核 $\mu_-[C]$，我们有

$$\mu_+[C]^l\mu_+[pt]^k W \cap \ker \mu_-[pt] = 0, \ \textit{if } l \neq 0,$$
$$\mu_+[C]^l\mu_+[pt]^k W \cap \ker \mu_-[C] = 0, \ \textit{if } k \neq 0.$$

证明. (1) 只需证明 $\mu_-[pt]\mu_+[C]^{l+1}(\alpha) = (l+1)\mu_+[C]^l(\alpha)$，而$\mu_+[C]^l(\alpha) \in$核 $\mu_-[pt]^{l+1}$ 将随之得出。我们对 l 使用归纳法。

设 $l = 0$，则由定理 2.1 (i)，有 $\mu_-[pt]\mu_+[C](\alpha) = [\mu_-[pt], \mu_+[C]](\alpha) = \alpha$，因为 $\alpha \in$核 $\mu_-[pt]$ 且 $[\mu_-[pt], \mu_+[C]] = id$。对于一般的 l，由归纳假设可得

$$\begin{aligned}\mu_-[pt]\mu_+[C]^{l+1}(\alpha) &= [\mu_-[pt], \mu_+[C]](\mu_+[C]^l\alpha) + \mu_+[C]\mu_-[pt]\mu_+[C]^l(\alpha) \\ &= \mu_+[C]^l(\alpha) + \mu_+[C]l\mu_+[C]^{l-1}(\alpha) \\ &= (l+1)\mu_+[C]^l(\alpha).\end{aligned}$$

(2) 与 (1) 类似，留给读者完成。

最后，对于任意的 $\alpha \in W$，由于 $\mu_+[pt]^k\alpha \in$ker $\mu_-[pt]$，我们有

$$\begin{aligned}\mu_-[pt](\mu_+[C]^l\mu_+[pt]^k\alpha) &= \mu_-[pt]\mu_+[C]^l(\mu_+[pt]^k\alpha) \\ &= l\mu_+[C]^{l-1}\mu_+[pt]^k\alpha. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

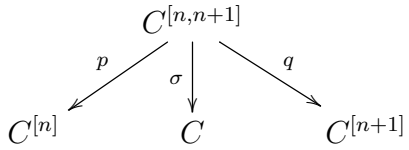
若 $\mu_+[C]^l\mu_+[pt]^k\alpha \in \ker \mu_-[pt]$ 且 $l \neq 0$，则 $\mu_+[C]^{l-1}\mu_+[pt]^k\alpha = 0$，从而有 $\mu_+[C]^l\mu_+[pt]^k\alpha = 0$。第二个陈述的证明类似。引理得证。□

命题 *2.7* 的证明。由于我们已经在 $H_*(J)$ 上有 D-分解，且 $AJ_{n,*}$ 是一个同构，因此我们只需证明 $\Rightarrow$。

根据定义，$\beta \in D_kH_*(J) \Leftrightarrow \exists\, w \in W \cap H_*(C^{[k]})$，使得 $AJ_{k,*}(w) = \beta$。由 $\mu_+[pt]$ 和 $\mu_-[pt]$ 的交换性，我们得到 $\mu_+[pt]^{n-k}(w) \in \mathcal{H}_n$。由于 $AJ_{k,*} = AJ_{n,*} \circ \mu_+[pt]$，我们还有 $AJ_{n,*}(\mu_+[pt]^{n-k}(w)) = \beta$。因此，我们只需证明 $\phi(\mu_+[pt]^{n-k}(w)) = (n-k)\mu_+[pt]^{n-k}(w)$。由引理 2.8 (2)，我们有 $\mu_-[C]\mu_+[pt]^{n-k}(w) = (n-k)\mu_+[pt]^{n-k-1}(w)$，因此结论成立，因为 $\phi = \mu_+[pt] \circ \mu_-[C]$。□

2.3. **将 Poincar´e 层拉回到旗希尔伯特概形**。我们已经证明，$H_*(J)$ 上的 D-分解对应于 $\mathcal{H}_n$ 上的 ϕ-特征值分解。为了更好地理解线性算子 ϕ，我们将使用与 $J \times J$ 上的 Poincar´e 层 P 相关联的傅里叶变换。我们希望研究算子 $\mu_-[C]$ 如何作用于傅里叶变换。

设 $P_n := (AJ_n \times id_J)^*P$ 为 P 到 $C^{[n]} \times J$ 的拉回。回想我们有三个自然映射 p，σ，q，如下图表所示，分别将 $(Z_n,\ Z_{n+1})$ 映到 Z_n，$Z_{n+1} \setminus Z_n$，Z_{n+1}。



命题 2.9.（1）我们有 $(p\times id_J)^*P_n = L(p\times id_J)^*P_n$，$(\sigma\times id_J)^*F = L(\sigma \times id_J)^*F$ 以及 $(q \times id_J)^*P_{n+1} = L(q \times id_J)^*P_{n+1}$。此外，这三个层都是 $C^{[n,n+1]} \times J$ 上的极大 *Cohen–Macaulay* 层，且在余维 *1* 处局部自由。

(2) $(p \times id_J)^*P_n \otimes^L (\sigma \times id_J)^*F = (p \times id_J)^*P_n \otimes (\sigma \times id_J)^*F$，即 $\mathrm{Tor}^i((p \times id_J)^*P_n,\ (\sigma \times id_J)^*F) = 0$ 对于 $i > 0$。

(3) $(q \times id_J)^*P_{n+1} \cong (p \times id_J)^*P_n \otimes (\sigma \times id_J)^*F.$

证明。首先，(2) 可直接由 (1) 和引理 2.10 得出。

由于 P和 F关于两个因子都是平坦的，我们有 $P_n = L(AJ_n \times id_J)^*P$，并且还有 ($p \times id_J)^*P_n = L(p \times id_J)^*P_n$，$(\sigma \times id_J)^*F = L(\sigma \times id_J)^*F$，$(q \times id_J)^*P_{n+1} = L(q \times id_J)^*P_{n+1}$。

我们证明了上述提到的四个层都是极大 Cohen-Macaulay 层。我们只处理 P_n，因为其他三个情形是类似的。 P_n 是 $C^{[n]} \times J$ 上的一个层，在两个因子上都是平坦的。对于每个 $y \in C^{[n]}$， $P_n|_{y\times J}$ 是 $\{y\} \times J$上的极大 Cohen-Macaulay 层，因此根据 [2, 引理 2.1]， P_n是极大 Cohen-Macaulay 层。

记 $J^{sm} \subset J$ 为 J 中参数化 C上线丛的开稠密子集。我们还知道（C^{sm}）$^{[n,n+1]}$ 在 $C^{[n,n+1]}$ 中是开稠密的（参见例如 [11,引理 6.3]）。容易看出，这三个层在 $C^{[n,n+1]} \times J^{sm} \cup$（$C^{sm}$）$^{[n,n+1]} \times J$上是局部自由的，其在 $C^{[n,n+1]} \times J$中的补集的余维为 ≥ 2。（1）得证。

为证明 (3)，我们只需验证 $C^{[n,n+1]} \times J^{sm} \cup (C^{sm})^{[n,n+1]} \times J$ 上的同构。现在我们将讨论限制在 P_n, P与 F 均为局部自由的轨迹上。由 [2, 命题 4.5] 或 [9, 注记 4.9]， P_n 与类 $[F] - [\mathcal{O}_{C\times J}]$所对应的行列式线丛一致，即我们有

$$P_n \cong \det((p_2 \times id_J)_*((p_1 \times id_J)^*F)|_{\mathcal{D}_n\times J}) \otimes \det((p_2 \times id_J)_*\mathcal{O}_{\mathcal{D}_n\times J})^{-1},$$

其中 $\mathcal{D}_n \subset C \times C^{[n]}$ 是万有子概形，而 p_1, p_2 分别是从 $C \times C^{[n]}$ 到 C, $C^{[n]}$ 的投影。因此，由与 [5,引理 2.1] 类似的公式，我们有

$$(q \times id_J)^*P_{n+1} \cong (p \times id_J)^*P_n \otimes (\sigma \times id_J)^*F.$$

命题得证。 □

引理 2.10. 设 X 为纯维数的 ***Cohen-Macaulay***概形。设G_1、G_2 为 X 上的两个极大 ***Cohen–Macaulay*** 层。假设 G_1、G_2 均在余维 ***1*** 处局部自由。则

(1) $G_1 \otimes G_2$ 在 X 上是无挠的。(2) $\mathrm{Tor}^i(G_1, G_2) = 0$ 对所有 $i > 0$ 都成立。

证明。(1) 设 $\jmath : U \hookrightarrow X$ 是一个开嵌入， $X \setminus U$ 的余维为 2，并且可以假设 G_1 和 G_2 都是 U 上的局部自由层。

由于 G_1， G_2是极大 Cohen–Macaulay 的，因此对于 $k = 1$， 2， $G_k = \jmath_*(G_k|_U)$（例如参见 [2, 引理 2.2]）。由于 X 也满足 Cohen–Macaulay 条件， $G_1 \otimes G_2(V)$中的每个截面都可以由 $G_1 \otimes G_2(V \cap U)$中的一个截面唯一确定，而 $G_1 \otimes G_2(V \cap U)$的每个截面都可以唯一延拓为 $G_1 \otimes G_2(V)$中的一个截面。因此 $G_1 \otimes G_2 = \jmath_*(G_1 \otimes G_2|_U)$。由于 G_1， G_2是局部

自由的， $G_1 \otimes G_2$在 U上局部自由，因而无挠。因此 $G_1 \otimes G_2 = \jmath_*(G_1 \otimes G_2|_U)$ 无挠。

(2) 设 $0 \to G_3 \to E \to G_2 \to 0$ 是一个正合列，且 E 局部自由。那么 G_3 也是极大 Cohen-Macaulay 层，并且在余维 1 处局部自由。我们有以下正合列

$$0 \to \mathrm{Tor}^1(G_1, G_2) \to G_1 \otimes G_3 \to G_1 \otimes E \to G_1 \otimes G_2 \to 0; \tag{2.5}$$

$$0 \to \mathrm{Tor}^{i+1}(G_1, G_2) \to \mathrm{Tor}^i(G_1, G_3) \to 0, \text{ for all } i \geq 1. \tag{2.6}$$

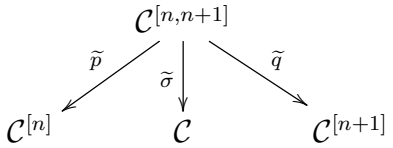
由 **(1)** 可知 $G_1 \otimes G_3$ 无挠，因此根据 **(2.5)**，$\mathrm{Tor}^1(G_1, G_2) = 0$。因此，对于任意 G' 极大 Cohen-Macaulay 且在余维 1 处局部自由的层，根据 **(2.5)**，$\mathrm{Tor}^1(G_1, G') = 0$。于是根据 **(2.6)**，$\mathrm{Tor}^2(G_1, G_2) = 0$，通过归纳重复上述论证可得，对所有 $i > 0$，$\mathrm{Tor}^i(G_1, G_2) = 0$。□

注2.11。设 X、G_1 如引理 *2.10* 中所述。假设 X 是 *Gorenstein* 的，则根据 [2, 引理 7。7]，$G_1^\vee := \mathcal{H}om(G_1, \mathcal{O}_X)$ 也是一个极大 *Cohen-Macaulay* 层，并且在余维 *1* 处局部自由。此外，$G_1^\vee \otimes G_1 = G_1^\vee \otimes^L G_1 \cong \mathcal{O}_X$。

因此，如有必要，在缩小 B 后，命题 *2.9 (3)* 可以推广为相对版本，即我们在 $\mathcal{C}^{[n,n+1]} \times_B \mathcal{J}$ 上有

$$(\widetilde{q} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P}_{n+1} \cong (\widetilde{p} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P}_n \otimes (\widetilde{\sigma} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{F}, \tag{2.7}$$

其中 $\mathcal{P}_n := (AJ_n \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P}$，且 $\widetilde{p}$、$\widetilde{q}$、$\widetilde{\sigma}$ 如下面的图表所示



.

3. Proof of the main result.

3.1.傅里叶变换。在本小节中，我们在 $H_*(J)$ 上构造一个傅里叶变换。

首先回顾一下，对于 C 光滑的情形， J 也光滑，且 P 是 $J \times J$ 上的一个线丛。我们有经典的傅里叶变换 $\mathfrak{F}: H_*(J) \to H_*(J)$

$$\mathfrak{F}(\alpha) := q_{1,*}(ch(P) \cap q_2^*(\alpha)), \ \forall \alpha \in H_*(J), \tag{3.1}$$

其中 q_1， q_2：$J \times J \to J$ 是两个投影。

也可以将上同调群$H^*(J)$上的傅里叶变换定义为 $\mathfrak{F}$ 的对偶，或等价地，在(3.1)中用 $\cup$ 替换 $\cap$ 来定义。当 C 光滑时，傅里叶变换是 $H_*(J)$上的同构。

现在设 C 为整的，且具有平面奇点。由于 J 可能是奇异的， $J \times J$ 上的 P 只是一个极大 Cohen-Macaulay 层。我们只有 tau 类 $\tau(P) \in H_*(J)$，而没有陈多项式。此外，交积在 $H_*(J)$上可能无法良定义。解决这一问题的方法是使用双变理论。我们在§A.1中对该理论作简要回顾，更多细节可见 [7, §I.3] 以及 [6, 第 17] 章。在[11, §4]中也有简要回顾。

对于任意态射 $f: X \to Y$，存在一个记作 $H^i(X \xrightarrow{f} Y)$ 的双变同调群。根据注 A.2，我们将 $H^{-i}(X \to pt)$ 与 Borel–Moore 同调群 $H_i^{BM}(X)$ 视为相同；对于任意 $c \in H^k(X \xrightarrow{f} Y)$，都有一个态射 $c: H_i^{BM}(Y) \to H_{i-k}^{BM}(X)$，其由乘积给出

$$H^k(X \xrightarrow{f} Y) \otimes H^{-i}(Y \to pt) \xrightarrow{\cdot} H^{k-i}(X \to pt).$$

对于任意元素 $a \in H_i^{BM}(Y)$，我们可以将 $c(a)$ 写成 $H_{i-k}^{BM}(X)$ 中的一个元素，或将 $c \cdot a$ 写成 $H^{k-i}(X \to pt)$ 中的一个元素。

设 $d = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{J}$。由于 $\mathcal{J}$是光滑的，根据注 A.2，存在一个同构 $H^i(X \to \mathcal{J}) \to H^{i-2d}(X \to pt)$，这是通过与 $H^{-2d}(\mathcal{J} \to pt)$ 中的基本类 $[\mathcal{J}]$ 复合得到的。

我们有相对 Poincar´e 层 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{J} \times_B \mathcal{J}$ 上。由于 $\mathcal{J} \times_B \mathcal{J}$ 是局部完全交，因此 $ch^\tau(\mathcal{P}) \in H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \to pt)$~ 有明确定义（见 (A.3)）。我们用 $ch^\tau(\mathcal{P}_j)$ 表示其在 $H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \xrightarrow{q_j} \mathcal{J})$ 中的原像，其中$j = 1, 2$。我们用同一个字母表示 $H^i(J \xrightarrow{\imath_J} \mathcal{J})$ 中的元素及其在 $H^{i-2d}(J \to pt)$ 中的像。因此，对于每个 $a \in H^i(J \to \mathcal{J})$，都有 $a \cdot [\mathcal{J}] = a$；对于 $j = 1, 2$，都有 $ch^\tau(\mathcal{P}_j) \cdot [\mathcal{J}] = ch^\tau(\mathcal{P})$。

我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} J \times J & \xhookrightarrow{\imath_{J\times J}} & \mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \\ {\scriptstyle q_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle q_1} & & {\scriptstyle \widetilde{q}_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_1} \\ J & \xhookrightarrow[\imath_J]{} & \mathcal{J} \end{array} . \tag{3.2}$$

对于任意 $a \in H^*(J \xrightarrow{\imath_J} \mathcal{J})$，拉回 $\widetilde{q}_2^* a \in H^*(J \times J \xrightarrow{\imath_{J\times J}} \mathcal{J} \times_B \mathcal{J})$。我们将傅里叶变换 $\mathfrak{F}$ 定义为 $H^*(J \to pt)$ 上的一个线性映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}: H^*(J \to pt) &\to H^*(J \to pt), \\ a &\mapsto q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)(ch^\tau(\mathcal{P}))) = q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a) \cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1)) \cdot [\mathcal{J}] \end{aligned} \tag{3.3}$$

注 3.1. 我们还有

$$\mathfrak{F}(a) = q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)(ch^\tau(\mathcal{P}))) = q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a) \cdot ch^\tau(\mathcal{P}_2) \cdot [\mathcal{J}]).$$

但我们无法定义 $q_{1,\ *}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_2))$，因为 $\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_2)\in H^*(J\times J\xrightarrow{q_2\circ\imath_J}\mathcal{J})$，且映射 $q_2\circ\imath_J$ 不能经由 q_1分解。

下面的命题保证 $\mathfrak{F}$ 定义良好。

命题 3.2。对于任意 $a\in H^*(J\to pt)$，类 $\widetilde{q}_2^*(a)(ch^\tau(\mathcal{P}))\in H_*(J\times J)$ 与嵌入 $J\hookrightarrow\mathcal{J}$ 的选择无关。

证明。我们的论证与 [11, §4.5] 类似。设 $\mathcal{C}_{ver}\to B_{ver}$ 是一个 C 的典范变形族，使得 $\mathcal{C}_{ver},\ B_{ver}$ 和相对紧化雅可比 $\mathcal{J}_{ver}$ 都是光滑的。记 $\mathcal{P}_{ver}$ 为 $\mathcal{J}_{ver}\times_{B_{ver}}\mathcal{J}_{ver}$ 上的相对 Poincar´e 层。缩小 B 后，我们可以得到如下关于 $i=1,$ 的笛卡尔图，2

$$\begin{array}{ccccc}
J\times J & \xrightarrow{\imath_{J\times J}} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xrightarrow{f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}} & \mathcal{J}_{ver}\times_{B_{ver}}\mathcal{J}_{ver}\ , \\
\downarrow{\scriptstyle q_i} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_i} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_{i,ver}} \\
J & \xrightarrow[\imath_J]{} & \mathcal{J} & \xrightarrow[f_{\mathcal{J}}]{} & \mathcal{J}_{ver} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{ver}} \\
0 & \xrightarrow[\imath_0]{} & B & \xrightarrow[f_B]{} & B_{ver}
\end{array}$$

whe因为 $\mathcal{J}\cong\mathcal{J}_{ver}\times_{B_{ver}}B.$，很容易看出 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\cong\mathcal{J}_{ver}\times_{B_{ver}}\mathcal{J}$

设 $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{J}=d,\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{J}_{ver}=d_{ver}$。则 $d-d_{ver}=\dim_{\mathbb{C}}B-\dim_{\mathbb{C}}B_{ver}$。由于 B 和 B_{ver} 均光滑，f_B 是局部完全交态射，因此 $f_{\mathcal{J}}$ 和$f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}$也都是局部完全交态射，因为 π_{ver}和$\widetilde{q}_{i,\ ver}$是平坦的。用 $[f_{\mathcal{J}}]$（分别用 $[f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}]$）表示 $H^{2d_{ver}-2d}$（$\mathcal{J}\xrightarrow{f_{\mathcal{J}}}\mathcal{J}_{ver}$）（分别为 $H^{2d_{ver}-2d}$（$\mathcal{J}_{ver}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}}\mathcal{J}_{ver}\times_{B_{ver}}\mathcal{J}_{ver}$））中的典范定向类（定义见注 A.3）。由于 $f_{\mathcal{J}}$和 $f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}$的余维相同，均为 $d_{ver}-d$，由 [6, 命题 17.4.1] 可得

$$\widetilde{q}_{2,ver}^*[f_{\mathcal{J}}]=[f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}]. \tag{3.4}$$

由于 $\mathcal{P}_{ver}$在两个因子上都是平坦的，$\mathcal{P}=(f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}})^*(\mathcal{P}_{ver})=L(f'_{\mathcal{J}})^*(\mathcal{P}_{ver}))$。因此，由定理 A.4 (4)，$(f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}})^*(ch^\tau(\mathcal{P}_{ver}))=ch^\tau(\mathcal{P})$，这意味着

$$[f_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}]\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_{ver,i})\cdot[\mathcal{J}_{ver}]=ch^\tau(\mathcal{P}_i)\cdot[\mathcal{J}]. \tag{3.5}$$

对于任意 $a\in H^*(J\xrightarrow{\imath_J}\mathcal{J})\cong H_*(J)$，定义 $a_{ver}=a\cdot[f_{\mathcal{J}}]\in H^*(J\xrightarrow{f_{\mathcal{J}}\circ\imath_J}\mathcal{J}_{ver})\cong H_*(J)$。则 a_{ver} 不依赖于 $\imath$ 的选择：$J\to\mathcal{J}$。

结合（3.4）和（3.5），可得

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_{2,ver}^*(a_{ver})\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_{ver,2})\cdot[\mathcal{J}_{ver}] &= (\widetilde{q}_2)^*(a)\cdot \widetilde{q}_{2,ver}^*([f_{\mathcal{J}}])\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_{ver,1})\cdot[\mathcal{J}_{ver}] \\ &= (\widetilde{q}_2)^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1)\cdot[\mathcal{J}]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

命题得证。 □

我们有如下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} J\times J\times J & \xrightarrow{\imath_{J\times J\times J}} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J} \\ {\scriptstyle q_{23}}\downarrow\downarrow{\scriptstyle q_{23}}\downarrow\downarrow{\scriptstyle q_{12}} & & {\scriptstyle \widetilde{q}_{23}}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_{13}}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_{12}} \\ J\times J & \xrightarrow{\imath_{J\times J}} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J} \\ {\scriptstyle q_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle q_1} & & {\scriptstyle \widetilde{q}_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_1} \\ J & \xrightarrow[\imath_J]{} & \mathcal{J} \end{array} \tag{3.7}$$

定义

$$\mathcal{P}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{O}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}})[g]\in D^b(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}),$$

其中，$[-]$ 是移位函子。根据 [2, 引理 6.2 (1)]，$\mathcal{P}^\vee$ 在 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}$的两个因子上也都是平坦的。由于 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}^\vee$ 在 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}$的两个因子上都是平坦的，因此有 $\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes^L\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^\vee)=\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^\vee)$。根据 [2, 命题 7.1],$R\widetilde{q}_{13,*}(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^\vee))$是 $\mathcal{J}\cong\Delta_{\mathcal{J}}\subset\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}$上的一个线丛 $\mathcal{L}$，其中$\Delta_{\mathcal{J}}$是 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}$中的对角线。设 $\omega_{\mathcal{J}}$为 $\mathcal{J}$的典范丛，由于 B 具有平凡切丛，它也是 $\mathcal{J}\to B$ 的相对典范丛$\omega_{\mathcal{J}/B}$。实际上，我们有 $\mathcal{L}\cong\omega_{\mathcal{J}/B}$，但不会用到这一事实。我们定义

$$\mathcal{P}^{-1} := \mathcal{H}om(\mathcal{P},\mathcal{O}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}})\otimes\widetilde{q}_1^*\mathcal{L}^\vee[g]\in D^b(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}).$$

Then

$$R\widetilde{q}_{13,*}(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes^L\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1}))=R\widetilde{q}_{13,*}(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1}))\cong\mathcal{O}_{\Delta_{\mathcal{J}}}. \tag{3.8}$$

定义另一个线性映射 $\mathfrak{F}_1$，作用于 $H_*(J)$

$$\mathfrak{F}_1: H_*(J)\to H_*(J),\ a\mapsto q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)(\tau(\mathcal{P}^{-1}))). \tag{3.9}$$

类似地，可以证明 $\mathfrak{F}_1$ 与 $\imath_J$ 的选取无关：$J\hookrightarrow\mathcal{J}$。

命题3.3。 $\mathfrak{F}_1$ 是 $\mathfrak{F}$的逆，即 $\mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}=\mathfrak{F}\circ\mathfrak{F}_1=id_{H_*(J)}$.

证明。 我们只证明 $\mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}=id_{H_*(J)}$，其余部分类似，留给读者。证明的总体思路与 C 光滑时的情形类似，但我们必须在双变理论中处理所有问题。我们使用与（3.7）中相同的记号。注意，（3.7）中的所有映射都是局部完全交。

对于 $i=1,\ 2$，我们有如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xhookrightarrow{\imath_B} & \mathcal{J}\times\mathcal{J} \\ {\scriptstyle\widetilde{q}_i}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\bar{q}_i} & \\ \mathcal{J} & & \end{array} \tag{3.10}$$

设 $E_\bullet$ 为 $(\imath_B)_*\mathcal{P}$ 的局部自由分解。由定理 A.4（3）以及 B 具有平凡切丛这一事实，存在 $ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\in H^*(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath_B}\mathcal{J}\times\mathcal{J})$，使得

$$ch^\tau(\mathcal{P})=ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\mathcal{J}\times\mathcal{J}]. \tag{3.11}$$

因此

$$ch^\tau(\mathcal{P}_i)=ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\bar{q}_i], \tag{3.12}$$

其中 $[\bar{q}_i]\in H^*(\mathcal{J}\times\mathcal{J}\xrightarrow{\bar{q}_i}\mathcal{J})$ 是典范定向类。

我们有

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}(a) &= q_{1,*}\big\{\widetilde{q}_2^*(q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1)))(\tau(\mathcal{P}^{-1}))\big\} \\ &= q_{1,*}\big\{q_{12,*}(\widetilde{q}_2^*(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1)))(\tau(\mathcal{P}^{-1}))\big\} \\ &= q_{1,*}\big\{q_{12,*}((\widetilde{q}_2^*(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1)))\cdot\tau(\mathcal{P}_2^{-1})\cdot[\mathcal{J}])\big\} \\ &= q_{1,*}q_{12,*}\big\{(\widetilde{q}_2^*(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot\tau(\mathcal{P}_1^{-1})\cdot[\mathcal{J}]\big\} \\ &= q_{1,*}q_{12,*}\big\{(\widetilde{q}_2\circ\widetilde{q}_{23})^*(a)\cdot\widetilde{q}_2^*(ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot\tau(\mathcal{P}_1^{-1})\cdot[\mathcal{J}]\big\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中，第二个等号是由于推前与拉回的交换性（§A.1 (A_6)），第三个等号是由于乘积的结合律~（§A.1 (A_1)），以及 $\tau(\mathcal{P}_i^{-1})\in H^*(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{q_i}\mathcal{J})$ 满足 $\tau(\mathcal{P}_i^{-1})\cdot[\mathcal{J}]=\tau(\mathcal{P}^{-1})$；第四个等号是由于乘积与推前的交换性（§A.1 (A_4)）；最后，第五个等号是由于拉回的函子性（§A.1 (A_3)）以及乘积与~拉回的交换性（§A.1 (A_5)）。注意，$\widetilde{q}_2^*(ch^\tau(\mathcal{P}_1))\in H^*(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{q_{12}}\mathcal{J}\times_B\mathcal{J})$，因为我们有以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xrightarrow{\widetilde{q}_{12}} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J} \\ {\scriptstyle\widetilde{q}_{23}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{q}_2} \\ \mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xrightarrow[\widetilde{q}_1]{} & \mathcal{J} \end{array}. \tag{3.14}$$

我们再写出一个笛卡尔图

(3.15)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xhookrightarrow{\bar{\imath}_B} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times\mathcal{J} & \xrightarrow{\bar{q}_{12}} & \mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\,, \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_{23}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{q}_{23}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_2} \\
\mathcal{J}\times_B\mathcal{J} & \xhookrightarrow{\imath_B} & \mathcal{J}\times\mathcal{J} & \xrightarrow[\bar{q}_1]{} & \mathcal{J} \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}_2} & \swarrow{\scriptstyle \bar{q}_1} & & & \\
\mathcal{J} & & & &
\end{array}$$

由 (3.12) 和 §A.1 (A_5)，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_2^*(ch^\tau(\mathcal{P}_1)) = \widetilde{q}_2^*(ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\bar{q}_1]) &= \bar{q}_{23}^*(ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet))\cdot\widetilde{q}_2^*[\bar{q}_1] \\
&= \bar{q}_{23}^*(ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet))\cdot[\bar{q}_{12}].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

由于 $\widetilde{q}_{23}$ 和 $\bar{q}_{23}$ 是平坦的，$\bar{q}_{23}^*E_\bullet$ 给出了 $\bar{q}_{23}^*\imath_{B,\,*}(\mathcal{P}) \cong \bar{\imath}_{B,\,*}\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})$ 的局部自由分解，因此由 [6, 定理 18.1]，我们有

$$\bar{q}_{23}^*(ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)) = ch^{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(\bar{q}_{23}^*E_\bullet). \tag{3.17}$$

由于 $\bar{q}_{12}$ 是平坦且局部完全交的，由定理 A.4 (4) 和注 A.3，我们有

$$[\bar{q}_{12}]\cdot\tau(\mathcal{P}_1^{-1})\cdot[\mathcal{J}] = [\bar{q}_{12}](\tau(\mathcal{P}^{-1})) = \bar{q}_{12}^*(\tau(\mathcal{P}^{-1})) = td(-T_{\mathcal{J}_3})\cap\tau(\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1}) \tag{3.18}$$

其中，我们用 $T_{\mathcal{J}_3}$ 表示第 3 个因子的切丛 $\mathcal{J}_3$ 在 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times\mathcal{J}$ 上的拉回。

结合 (3.16)、(3.17) 和 (3.18)，可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_2^*(ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot\tau(\mathcal{P}_1^{-1})\cdot[\mathcal{J}] &= ch^{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(\bar{q}_{23}^*E_\bullet)(td(-T_{\mathcal{J}_3})\cap\tau(\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1})) \\
&= td(-T_{\mathcal{J}_3})\cap ch^{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(\bar{q}_{23}^*E_\bullet)(\tau(\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1})),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中第二个等式是由 [6, 命题 17.32] 得出的，我们还将 $T_{\mathcal{J}_3}$ $\mathcal{J}_3$ 到 $\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}$ 的切丛拉回记为

由于 $\mathcal{P}^{-1}$ 在两个因子上都平坦，$\mathcal{H}^i(\bar{q}_{23}^*E_\bullet\otimes\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1}) = 0$ 对于 $i>0$ 和$\mathcal{H}^0(\bar{q}_{23}^*E_\bullet\otimes\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1}) \cong \widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})$。由定理 A.4（3）可得

$$\tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P})\otimes\widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})) = ch^{\mathcal{J}_1\times_B\mathcal{J}_3\times\mathcal{J}_3}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(\bar{q}_{23}^*E_\bullet)(\tau(\bar{q}_{12}^*\mathcal{P}^{-1})) \tag{3.20}$$

因此，由（3.13）、（3.19）和（3.20）可得

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}(a) &= q_{1,*}q_{12,*}\big\{(\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_{23})^*(a) \cdot \widetilde{q}_2^*(ch^\tau(\mathcal{P}_1)) \cdot \tau(\mathcal{P}_1^{-1}) \cdot [\mathcal{J}]\big\} \\
&= q_{1,*}q_{12,*}\big\{(\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_{23})^*(a) \cdot (td(-T_{\mathcal{J}_3}) \cap \tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P}) \otimes \widetilde{q}_{13}^*(\mathcal{P}^{-1})))\big\} \\
&= (q_1 \circ q_{12})_*\big\{(\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_{23})^*(a) \cdot (td(-T_{\mathcal{J}_3}) \cap \tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P}) \otimes \widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})))\big\} \\
&= (q_1 \circ q_{13})_*\big\{(\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_{13})^*(a) \cdot (td(-T_{\mathcal{J}_3}) \cap \tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P}) \otimes \widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})))\big\} \\
&= q_{1,*}q_{13,*}\big\{\widetilde{q}_{13}^*\widetilde{q}_2^*(a) \cdot (td(-T_{\mathcal{J}_3}) \cap \tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P}) \otimes \widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})))\big\} \\
&= q_{1,*}\big\{\widetilde{q}_2^*(a) \cdot \widetilde{q}_{13,*}(td(-T_{\mathcal{J}_3}) \cap \tau(\widetilde{q}_{23}^*(\mathcal{P}) \otimes \widetilde{q}_{12}^*(\mathcal{P}^{-1})))\big\} \\
&= q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)([\Delta_{\mathcal{J}}])) = a. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

其中第三个等号是由于推前的函子性（§A.1 (A_2)），第六个等号是由于投影公式（§A.1 (A_7)），第七个等号是由于 (3.8)、定理 A.4 (1) 以及事实$\tau(\mathcal{O}_{\Delta_{\mathcal{J}}}) = td(T_{\mathcal{J}_3}) \cap \Delta_{\mathcal{J}}$，最后一个等号由引理 3.4 成立。

该命题得证。 □

引理 3.4. 对任意 $a \in H^*(J \to pt)$，我们有

$$q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)([\Delta_{\mathcal{J}}])) = a.$$

证明. 只需证明

$$q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a) \cdot [\Delta_{\mathcal{J},1}] \cdot [\mathcal{J}]) = a,$$

~其中对 $i = 1, 2$，$[\Delta_{\mathcal{J},i}] \in H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \xrightarrow{q_i} \mathcal{J})$ 是 $[\Delta_{\mathcal{J}}]$ 在~同构 $H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \xrightarrow{q_i} \mathcal{J}) \to H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \to pt)$ 下的原像。

我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc}
J & \xrightarrow{\imath_J} & \mathcal{J} \\
{\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\Delta}} \\
J \times J & \xrightarrow{\imath_{J\times J}} & \mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \\
{\scriptstyle q_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle q_1} & & {\scriptstyle\widetilde{q}_2}\downarrow\downarrow{\scriptstyle\widetilde{q}_1} \\
J & \xrightarrow[\imath_J]{} & \mathcal{J}
\end{array} \qquad (3.22)$$

~我们有 $[\Delta_{\mathcal{J},i}] = \widetilde{\Delta}_*[\widetilde{q}_i \circ \widetilde{\Delta}] \in H^*(\mathcal{J} \times_B \mathcal{J} \xrightarrow{q_i} \mathcal{J})$，并且由§A.1的($A_7$)和($A_3$)，我们有

$$\widetilde{q}_2^*(a) \cdot \widetilde{\Delta}_*[\widetilde{q}_i \circ \widetilde{\Delta}] = \Delta_*(\widetilde{\Delta}^*\widetilde{q}_2^*(a) \cdot [\widetilde{q}_i \circ \widetilde{\Delta}]) = \Delta_*((\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{\Delta})^*(a) \cdot [\widetilde{q}_i \circ \widetilde{\Delta}]).$$

~由于 $\widetilde{q}_i \circ \Delta = id_{\mathcal{J}}$，我们有

$$\widetilde{q}_2^*(a) \cdot [\Delta_{\mathcal{J},i}] \cdot [\mathcal{J}] = \Delta_*((id_{\mathcal{J}})^*(a) \cdot [id_{\mathcal{J}}] \cdot [\mathcal{J}]) = \Delta_*(a \cdot [\mathcal{J}]).$$

最后，由 §A.1（A_2）和（A_4），我们得到

$$\begin{aligned} q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)([\Delta_{\mathcal{J}}])) &= q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot[\Delta_{\mathcal{J},i}]\cdot[\mathcal{J}]) \\ &= q_{1,*}\Delta_*(a\cdot[\mathcal{J}]) \\ &= q_{1,*}\Delta_*(a)\cdot[\mathcal{J}] \\ &= (q_1\circ\Delta)_*(a)\cdot[\mathcal{J}] \\ &= (id_J)_*(a)\cdot[\mathcal{J}] = a\cdot[\mathcal{J}] = a. \end{aligned}$$

□

3.2. **主要结果**。我们在 $H_*(J)$ 上定义两个算子 e, f。

$$e : H_*(J)\to H_*(J),\ a\mapsto \Theta\cap a;$$
$$f := -\mathfrak{F}\circ e\circ\mathfrak{F}^{-1} = -\mathfrak{F}\circ e\circ\mathfrak{F}_1.$$

定理 3.5。对于任意 $\beta\in H_*(J)$，以下陈述等价。

(1) $\beta\in D_kH_*(J)$;(2) $\gamma=(A_{J_{n,*}})^{-1}(\beta)\in H^{\phi}_{n-k}\subset\mathcal{H}_n$ 对于任意 $n\geq 2g$;
(3) $[f,e](\beta) := f\circ e(\beta) - e\circ f(\beta) = (k-g)\beta$;(4) $f\circ e^i(\beta) - e^i\circ f(\beta) = i(k-g-i+1)e^{i-1}(\beta)$ 对于所有 $i=1,\cdots,g$。

由定理 3.5 可知，若 $\beta\in D_kH_*(J)$，则 $e(\beta)\in D_{k-2}H_*(J)$。下面的推论显而易见。

推论 3.6. $(f,[f,e],e)$ 在 $H_*(J)$ 上构成一个 sl_2-三元组，其特征值分解与 $H_*(J)$ 上的 D-分解相一致。

我们用 $e^\vee, f^\vee$ 表示 $H^*(J)$ 上 e, f 的对偶映射。注意，对于任意 $\alpha\in H^*(J)$，$e^\vee(\alpha) = \alpha\cup\Theta$，$e^\vee(D_kH^*(J))\subset D_{k+2}H^*(J)$，且 $([f,e])^\vee = [e^\vee, f^\vee]$。

推论 3.7. $(e^\vee,[e^\vee,f^\vee],f^\vee)$ 在 $H^*(J)$ 上构成一个 sl_2-三元组，其特征值分解与 $H^*(J)$ 上的 D-分解相一致。

特别地，通过杯积 Θ 在 $H^*(J)$ 上诱导的 ***Lefschetz*** 滤过为 $W_k(H^*(J)) = \bigoplus_{j\geq 2g-k} D_jH^*(J)$，且它与 ***perverse*** 滤过 $P_{\leq m}H^*(J) = \bigoplus_{j\leq m} D_jH^*(J)$ 相对（见 (*2.3*)），即 $W_k(H^*(J))\cap P_{\leq m}H^*(J) = \{0\}$ 若 $m+k<2g$。

注 3.8。推论 *3.7* 证明了猜想 *2.17* 对于 $[8]$ 上的曲线成立，其中 $\mathbb{C}$。

定理 *3.5* 的证明。（1）⇔（2）由命题 2.7 得出。

(4)⇒(3) 是显然的，因为 (3) 是 (4) 在 $i=1$ 情形下的特例。

为证明 (2) $\Leftrightarrow$ (3)，只需证明 (2) $\Rightarrow$ (3)，因为我们有完全分解 $\mathcal{H}_n = \bigoplus_{i=0}^{2g} H^{\phi}_{n-i}$ 与 $AJ_{n,*}$： $\mathcal{H}_n \to H_*(J)$ 是同构。类似地，为证明 (2) $\Leftrightarrow$ (4)，只需证明 (2) $\Rightarrow$ (4)。因此我们只需证明 (2) $\Rightarrow$ (4)。

回顾一下， $\phi = \mu_+[pt] \circ \mu_-[C]$。由 (2.2) 和命题 2.4，我们有

$$\begin{aligned} \gamma = (AJ_{n+1,*})^{-1}(\beta) &= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{1}{j!}\omega_{n+1}^{n+1-g-j} \cap AJ^!_{n+1}(\Theta^j \cap \beta) \\ &= \sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{1}{j!}\omega_{n+1}^{n+1-g-j} \cap AJ^!_{n+1}(e^j(\beta)). \end{aligned} \tag{3.23}$$

由命题 3.9，我们有

$$\begin{aligned} &\phi(\gamma) = \mu_+[pt]\mu_-[C](\gamma) \\ = \ &\mu_+[pt]\left\{\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{1}{j!}\{\omega_n^{n+1-g-j} \cap AJ^!_n(f(e^j(\beta))) + (n+1-g-j)\omega_n^{n-g-j} \cap AJ^!_n(e^j(\beta))\}\right\} \end{aligned}$$

由于 $\mu_+[pt] = i_*$、 $AJ^!{}_n = i^! AJ^!_{n+1}$ 以及 $i_*(\omega_n^k) = \omega_{n+1}^{k+1}$，我们有

$$\begin{aligned} &\phi(\gamma) = \mu_+[pt]\mu_-[C](\gamma) \\ = \ &\sum_{j=0}^{g}(-1)^j \frac{1}{j!}\left(\omega_{n+1}^{n+2-g-j} \cap AJ^!_{n+1}(f(e^j(\beta))) + (n+1-g-j)\omega_{n+1}^{n+1-g-j} \cap AJ^!_{n+1}(e^j(\beta))\right) \end{aligned}$$

由于 $\omega_{n+1}^{n+2-g} = \sum_{j=1}^{g}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}AJ^*_{n+1}(\Theta^j) \cup \omega_{n+1}^{n-g+2-j}$，我们有

$$\begin{aligned} &\phi(\gamma) = \mu_+[pt]\mu_-[C](\gamma) \\ = \ &\sum_{j=0}^{g-1}\omega_{n+1}^{n+1-g-j} \cap AJ^!_{n+1}\left(\frac{(-1)^j}{j!}(n+1-g-j)e^j(\beta) + \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}f(e^{j+1}(\beta)) + \frac{(-1)^j}{(j+1)!}e^{j+1}(f(\beta))\right) \\ &+\frac{(-1)^g}{g!}(n+1-2g)\omega_{n+1}^{n+1-2g} \cap AJ^!_{n+1}(e^g(\beta)) \end{aligned}$$

现在假设 $\gamma = (AJ_{n+1,*})^{-1}(\beta) \in H^{\phi}_{n+1-k}$，则根据定义， $\phi(\gamma) = (n+1-k)\gamma$。于是

$$\begin{aligned} &0 = \phi(\gamma) - (n+1-k)\gamma \\ = \ &\sum_{j=0}^{g-1}\omega_{n+1}^{n+1-g-j} \cap AJ^!_{n+1}\left(\frac{(-1)^j}{j!}(k-g-j)e^j(\beta) + \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}f(e^{j+1}(\beta)) + \frac{(-1)^j}{(j+1)!}e^{j+1}(f(\beta))\right) \\ &+\frac{(-1)^g}{g!}(k-2g)\omega_{n+1}^{n+1-2g} \cap AJ^!_{n+1}(e^g(\beta)) \end{aligned} \tag{3.24}$$

由 (3.24) 可知，若 $e^g(\beta) \neq 0$，则 $\beta = [J]$ 和 $k = 2g$。此外，对于 $j = 0, 1, \cdots, g-1$，有

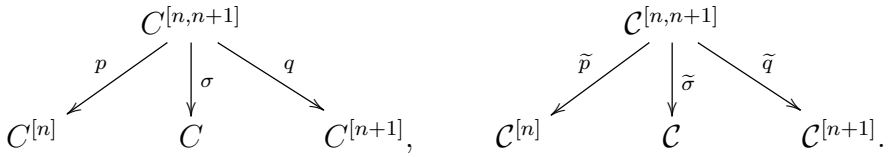
$$(k-g-j)(j+1)e^j(\beta) = f(e^{j+1}(\beta)) - e^{j+1}(f(\beta)).$$

Therefore (2) $\Rightarrow$ (4) and the theorem is proved. □

命题 3.9. 对于任意 $\beta \in H_*(J)$，有

$$\mu_-[C](\omega_{n+1}^k \cap AJ_{n+1}^!(\beta)) = \omega_n^k \cap AJ_n^!(\mathfrak{F}(-\Theta \cap \mathfrak{F}^{-1}(\beta))) + k\omega_n^{k-1} \cap AJ_n^!(\beta).$$

证明。我们有如下图表



回想一下，$\mu_-[C] = p_* \circ q^!$ 和 $q^!$ 定义为经由正则嵌入 $\imath_{C^{[n+1]}}$：$C^{[n+1]} \hookrightarrow \mathcal{C}^{[n+1]}$的精细Gysin拉回。具体而言，我们将$H_*(C^{[n+1]})$与 $H^*(\mathcal{C}^{[n+1]}, \mathcal{C}^{[n+1]} \setminus C^{[n+1]})$等同，并且存在一个精细相交积

$$- \times - : H_k(C^{[n+1]}) \otimes H_l^{BM}(\mathcal{C}^{n,n+1}) \to H_{k+l-2\dim \mathcal{C}^{[n]}}(C^{[n,n+1]}).$$

对于任意 $b \in H_*(C^{[n+1]})$，$q^!(b) := b \times [\mathcal{C}^{[n,n+1]}]$。由于 $H^*(\mathcal{C}^{[n+1]}, \mathcal{C}^{[n+1]} \setminus C^{[n+1]}) \cong H^*(C^{[n+1]} \xrightarrow{\imath_{C^{[n+1]}}} \mathcal{C}^{[n+1]})$，因此这个定义可以在双变理论中重写。我们有 $q^!(b) = \widetilde{q}^*(b)$，将 b 视为 $H^*(C^{[n+1]} \xrightarrow{\imath_{C^{[n+1]}}} \mathcal{C}^{[n+1]})$中的一个元素。

由于 ω_{n+1} 是线丛的第一陈类，根据 [6, 命题 17.3, 2], 我们有

$$q^!(\omega_{n+1}^k \cap AJ_{n+1}^!(\beta)) = q^*(\omega_{n+1})^k \cap q^! AJ_{n+1}^!(\beta)$$

根据引理 2.5，$q^*\omega_{n+1} = p^*\omega_n + \sigma^*[x] \in H^*(C^{[n,n+1]})$。因此

$$\mu_-[C](\omega_{n+1}^k \cap AJ_{n+1}^!(\beta)) = \omega_n^k \cap \mu_-[C](\beta) + k\omega_n^{k-1} \cap p_*(\sigma^*[x] \cap q^! AJ_{n+1}^!(\beta)). \tag{3.25}$$

由于 x 是 C 中的光滑点，$\sigma^{-1}(x) \cong C^{[n]}$, $p|_{\sigma^{-1}(x)} : \sigma^{-1}(x) \to C^{[n]}$ 是同构，且 $q|_{\sigma^{-1}(x)} = i \circ p$。定义 $p' := (p|_{\sigma^{-1}(x)})^{-1}$。我们可以写出一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc}
C^{[n]} & \xrightarrow{\imath_{C^{[n]}}} & \mathcal{C}^{[n]} \\
{\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{p}'} \\
C^{[n,n+1]} & \xrightarrow{\imath_{C^{[n,n+1]}}} & \mathcal{C}^{[n,n+1]} \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{q}} \\
C^{[n+1]} & \xrightarrow[\imath_{C^{[n+1]}}]{} & \mathcal{C}^{[n+1]}
\end{array}.$$

~因此，由 $p\circ p'=id_{C^{[n]}}$、 $i=q\circ p'$ 和 $i=\widetilde{q}\circ\widetilde{p}'$，我们有

$$\begin{aligned} p_*(\sigma^*[x]\cap q^!AJ^!_{n+1}(\beta)) &= p_*(\widetilde{q}^*(AJ^!_{n+1}(\beta))\cdot\widetilde{p}'_*[\mathcal{C}^{[n]}]) \\ &= p_*p'_*((\widetilde{p}')^*\widetilde{q}^*(AJ^!_{n+1}(\beta))\cdot[\mathcal{C}^{[n]}]) \\ &= \widetilde{i}^*(AJ^!_{n+1}(\beta))\cdot[\mathcal{C}^{[n]}] \\ &= i^*AJ^!_{n+1}(\beta)=AJ^!_n(\beta), \end{aligned} \tag{3.26}$$

~其中最后一行成立是因为 i 和 i 是正则嵌入，且 $AJ_{n+1}\circ i=AJ_n$。

现在我们计算 $p_*(q^!(AJ^!_{n+1}(\beta)))$。我们使用与 §3.1 相同的记号。令 $q_1^\star$: $C^{[\star]}\times J\to C^{[\star]}$ 是投影，其中 $\star=n,\ n+1$ 或 $(n,\ n+1)$。令 $\beta=\mathfrak{F}(a)=q_{1,\ *}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot[\mathcal{J}]$。于是

$$\begin{aligned} AJ^!_{n+1}(\beta) &= \widetilde{AJ}^*_{n+1}(q_{1,*}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n+1]}] \\ &= (q_1^{n+1})_*\widetilde{AJ}^*_{n+1}(\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau(\mathcal{P}_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n+1]}] \\ &= (q_1^{n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_{n+1}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{AJ}^*_{n+1}(ch^\tau(\mathcal{P}_1))\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n+1]}] \\ &= (q_1^{n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_{n+1}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n+1]}] \end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 $ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\in H^*(\mathcal{C}^{[n+1]}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\widetilde{q}_1^{n+1}}\mathcal{C}^{[n+1]})$，满足 $ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n+1]}]=ch^\tau(\mathcal{P}_{n+1})$，而最后一个等式成立是因为 AJ_{n+1} 是光滑的。因此

$$\begin{aligned} q^!(AJ^!_{n+1}(\beta)) &= \widetilde{q}^*\Big((q_1^{n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_{n+1}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\Big)\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ &= (q_1^{n,n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_{n+1}\circ\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ &= (q_1^{n,n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_n\circ\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \end{aligned} \tag{3.28}$$

~ ~其中最后一个等式成立是因为 $\widetilde{q}_2\circ(AJ_{n+1}\circ\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})=\widetilde{q}_2\circ(AJ_n\circ\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})$。因此

$$\begin{aligned} & p_*q^!(AJ^!_{n+1}(\beta)) \\ =\ & p_*(q_1^{n,n+1})_*\big\{(\widetilde{AJ}_n\circ\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ =\ & (q_1^n)_*(p\times id_J)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n\circ\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ =\ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot(\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1))\big\}\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ =\ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot(\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}]\big\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

由引理 3.10 (2)，我们有

$$\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)=(\widetilde{p}\times_B\widetilde{\sigma})^*ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1).$$

其中，$\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F}=p_{13}^*\mathcal{P}_n\otimes p_{23}^*\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}$ 上的一个层，具有两个投影: $p_{13}:\ \mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\to\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}$ 和 $p_{23}:\ \mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\to\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}$。

因此

$$\begin{aligned} & (\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^* ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ = \;& p_{13,*}(\widetilde{p}\times_B \widetilde{\sigma}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^* ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}]) \\ = \;& p_{13,*}(ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}]) \end{aligned} \tag{3.30}$$

回顾一下，存在 $ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\in H^*(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath_B}\mathcal{J}\times\mathcal{J})$，使得

$$ch^\tau(\mathcal{P})=ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\mathcal{J}\times\mathcal{J}].$$

令 $\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\jmath^n,_B{}^C}\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}$ 为一个嵌入，并令 $\hat{}p_{ij}$ 为从 $\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}$ 到第 i,j 个因子的投影。定义 $E^n_\bullet:=(\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet$。那么，$\hat{}p^*_{13}E^n_\bullet$ 是 $(\jmath^n,_B{}^C)_*(p^*_{13}\mathcal{P}_n)$ 的局部自由分解；由 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{P}$ 在两个因子上的平坦性，我们有

$$\begin{aligned} ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1) &= ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}(\hat{p}^*_{13}E^n_\bullet)\cdot\hat{p}^*_{23}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)) \\ &= \hat{p}^*_{13}ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot\hat{p}^*_{23}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)). \end{aligned} \tag{3.31}$$

结合 (3.30) 和 (3.31)，可得

$$\begin{aligned} & (\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^* ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}] \\ = \;& p_{13,*}(\hat{p}^*_{13}ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot\hat{p}^*_{23}(ch^\tau(\mathcal{F}_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}]) \\ = \;& ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot\hat{p}_{13,*}(\hat{p}^*_{23}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)\cdot[\mathcal{C}])) \\ = \;& ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot\bar{r}^*_2(\widetilde{s}_{2,*}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)\cdot[\mathcal{C}])) \end{aligned} \tag{3.32}$$

其中 $\bar{r}_2:\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 和 $\widetilde{s}_2:\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是投影。

由 (B.4) 的相对版本可知，$\widetilde{s}_{2,*}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)\cdot[\mathcal{C}])$ 提升到上同调中：我们有

$$\widetilde{s}_{2,*}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)\cdot[\mathcal{C}])=ch_{>0}(\mathcal{E}_m)\cap[\mathcal{J}], \tag{3.33}$$

其中 $\mathcal{E}_m$ 是 $\mathcal{J}$ 上的一个向量丛，其在 J 上的限制是注 2.3 中定义的 E_m。结合 (3.29)、(3.32) 和 (3.33)，我们得到

$$\begin{aligned}
& p_*q^!(AJ^!_{n+1}(\beta)) \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot(\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})_*(\widetilde{q}^* ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1))\cdot[\mathcal{C}^{[n,n+1]}]\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot\bar{r}_2^*(\widetilde{s}_{2,*}(ch^\tau(\mathcal{F}_1)\cdot[\mathcal{C}]))\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{r}_2^*(ch_{>0}(\mathcal{E}_m))\cap ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}(E^n_\bullet)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}])\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot\widetilde{r}_2^*(ch_{>0}(\mathcal{E}_n))\cap ch^\tau((\mathcal{P}_n)_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}]\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{r_2^*(ch_{>0}(E_m))\cap(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(a)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_n)_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}]\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*((ch_{>0}(E_m))\cap a)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_n)_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}]\big\} \\
= \ & (q_1^n)_*\big\{(\widetilde{AJ}_n \times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*((-\Theta)\cap a)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_n)_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}]\big\}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

其中 $\widetilde{r}_2\colon\ \mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}\to\mathcal{J}$、$r_2\colon\ C^{[n]}\times J\to J$ 是投影，第三个、第五个和第六个等式是由于 [6, 命题 17.3。2]以及 $\mathcal{E}_m|_J = E_m$ 这一事实，而最后一个等式是由于命题 2.4。

要证明 $(q_1^n)_*\{(\widetilde{AJ}_n\times_B id_{\mathcal{J}})^*\widetilde{q}_2^*(b)\cdot ch^\tau((\mathcal{P}_n)_1)(\mathfrak{F}(b)) = i^*AJ^!_{n+1}(\mathfrak{F}(b))$ 是标准的，故留给读者。

由（3.25）、（3.26）和（3.34），我们有

$$\mu_-[C](\omega^k_{n+1}\cap AJ^!_{n+1}(\beta)) = \omega^k_n\cap AJ^!_n(\mathfrak{F}(-\Theta\cap\mathfrak{F}^{-1}(\beta))) + k\omega^{k-1}_n\cap AJ^!_n(\beta).$$

命题得证。 □

引理 3.10。 采用注*2.11*中的相同记号，在 $\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J}$ 上我们有

(1) 在 $H_*(\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J})$ 中，我们有

$$ch^\tau((\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_{n+1}) = (\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*(ch^\tau(\mathcal{P}_{n+1})), \tag{3.35}$$

and in $H^*(\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\widetilde{q}_1}\mathcal{C}^{[n,n+1]})$ *we have*

$$ch^\tau(((\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_{n+1})_1) = \widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1), \tag{3.36}$$

(2) 存在一个记作 $ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1)$ 的元素，属于 $H^*(\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_{B\sim}\mathcal{J}\xrightarrow{q_1}\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C})$，满足以下两个条件：*(i)* $\widetilde{q}^*ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1) = (\widetilde{p}\times_B\widetilde{\sigma})^*ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1)$。*(ii)* $ch^\tau((\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})_1)\cdot[\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}] = ch^\tau(\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})$

证明。 (3.35) 由定理 A.4 (4) 以及 $q:\mathcal{C}^{[n,n+1]}\to\mathcal{C}^{[n+1]}$ 是局部完全交这一事实得出，而 (3.36) 则直接成立。我们只需证明 (2)。

由 (2.7) 可得

$$(\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_{n+1}\cong(p\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_n\otimes(\sigma\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{F}$$

也容易看出

$$(p\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_n\otimes(\sigma\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{F}\cong(p\times_B\sigma\times_B id_{\mathcal{J}})^*(\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F}).$$

但遗憾的是，如果 C 不光滑，映射 $p\times_B\sigma\colon\mathcal{C}^{[n,n+1]}\to\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}$ 可能不是局部完全交，因此定理 A.4 (4) 不直接适用。

回想一下，存在 $ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\in H^*(\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath_B}\mathcal{J}\times\mathcal{J})$，使得

$$ch^\tau(\mathcal{P})=ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\mathcal{J}\times\mathcal{J}],$$

and

$$ch^\tau(\mathcal{P}_1)=ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)\cdot[\bar{q}_1],$$

其中 $\bar{q}_1$ 定义于 (3.15) 中。

由于 $\mathcal{P}$ 在两个因子上都是平坦的，$(AJ_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet$ 是 $(\imath^n_B)_*\mathcal{P}_n$ 的局部自由分解，并且我们有

$$(\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)=ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}}((\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet)\in H^*(\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath^n_B}\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}),$$

and

$$(\widetilde{p}\circ\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)=ch^{\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J}}((\widetilde{p}\circ\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet)\in H^*(\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath^{n,n+1}_B}\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times\mathcal{J}),$$

此外，在 $H^*(\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath^n{}_{,B}{}^C}\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times\mathcal{J})$ 中，我们有

$$\bar{p}^*_{13}(\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*ch^{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\times_B\mathcal{J}}(E_\bullet)=ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}(\bar{p}^*_{13}(\widetilde{AJ}_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet),$$

其中 $\bar{p}_{13}\colon\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times\mathcal{J}\to\mathcal{C}^{[n]}\times\mathcal{J}$ 是投影。

类似地，对于 $\mathcal{F}$，存在 $ch^{\mathcal{C}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}(N_\bullet)\in H^*(\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}\xrightarrow{\imath^C_B}\mathcal{C}\times\mathcal{J})$，使得

$$ch^\tau(\mathcal{F})=ch^{\mathcal{C}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}(N_\bullet)\cdot[\mathcal{C}\times\mathcal{J}].$$

由于 $\mathcal{F},\mathcal{P}$ 在两个因子上都是平坦的，双复形 $\bar{p}^*_{13}(AJ_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet\otimes\bar{p}^*_{23}N_\bullet$ 是 $\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times\mathcal{J}$ 上 $(\imath^n{}_{,B}{}^C)_*(\mathcal{P}_n\boxtimes\mathcal{F})$ 的分解。另一方面，根据命题 2.9 (2)，双复形 $(\widetilde{p}\circ AJ_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet\otimes(\widetilde{\sigma}\times id_{\mathcal{J}})^*N_\bullet$ 是 $\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times\mathcal{J}.$ 上 $(\imath^n{}_{,B}{}^{n+1})_*\{(\widetilde{p}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_n\otimes(\widetilde{\sigma}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{F}\}=(\imath^n{}_{,B}{}^{n+1})_*((\widetilde{q}\times_B id_{\mathcal{J}})^*\mathcal{P}_{n+1})$ 的分解

令 $L_\bullet$ 为与双复形 $\bar{p}^*_{13}(AJ_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet\otimes\bar{p}^*_{23}N_\bullet$ 相联系的单复形。则 $(\widetilde{p}\times_B\widetilde{\sigma}\times id_{\mathcal{J}})^*L_\bullet$ 是与 $(\widetilde{p}\circ AJ_n\times id_{\mathcal{J}})^*E_\bullet\otimes(\widetilde{\sigma}\times id_{\mathcal{J}})^*N_\bullet$ 相联系的单复形，并且根据 $[6,$ 定理 18.1$]$，我们有

$$(\widetilde{p}\times_B\widetilde{\sigma}\times id_{\mathcal{J}})^*ch^{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]}\times_B\mathcal{C}\times_B\mathcal{J}}(L_\bullet)=ch^{\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times\mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n,n+1]}\times_B\mathcal{J}}((\widetilde{p}\times_B\widetilde{\sigma}\times id_{\mathcal{J}})^*L_\bullet).$$

为避免记号繁琐，我们将 $\bar{q}_1$ 记作： $\bigstar \times \mathcal{J} \to \bigstar$ 对于 $\bigstar = \mathcal{J}$、$\mathcal{C}^{[n+1]}$、$\mathcal{C}^{[n,n+1]}$、$\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C}$，到第一因子的投影。由于 B 具有平凡切丛，我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}^* ch^\tau((\mathcal{P}_{n+1})_1) &= ch^\tau(((\widetilde{q} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P}_{n+1})_1) \\
&= ch^\tau(((\widetilde{p} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{P}_n \otimes (\widetilde{\sigma} \times_B id_{\mathcal{J}})^* \mathcal{F})_1) \\
&= ch^{\mathcal{C}^{[n,n+1]} \times \mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n,n+1]} \times_B \mathcal{J}}((\widetilde{p} \times_B \widetilde{\sigma} \times id_{\mathcal{J}})^* L_\bullet) \cdot [\bar{q}_1] \\
&= (\widetilde{p} \times_B \widetilde{\sigma} \times id_{\mathcal{J}})^* ch^{\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times \mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times_B \mathcal{J}}(L_\bullet) \cdot [\bar{q}_1] \\
&= (\widetilde{p} \times_B \widetilde{\sigma})^* \big\{ ch^{\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times \mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times_B \mathcal{J}}(L_\bullet) \cdot [\bar{q}_1] \big\}
\end{aligned}$$

我们定义 $ch^\tau((\mathcal{P}_n \boxtimes \mathcal{F})_1) := ch^{\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times \mathcal{J}}_{\mathcal{C}^{[n]} \times \mathcal{C} \times \mathcal{J}}(L_\bullet) \cdot [\bar{q}_1]$，则 $ch^\tau((\mathcal{P}_n \boxtimes \mathcal{F})_1)$ 满足 (i) 和 (ii)。引理得证 □

注 3.11. 由于 $\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C}$ 可能并不光滑，映射

$$H^*(\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times_B \mathcal{J} \to \mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C}) \xrightarrow{\cdot [\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C}]} H^*(\mathcal{C}^{[n]} \times_B \mathcal{C} \times_B \mathcal{J} \to pt)$$

可能不是同构。因此我们不知道$ch^\tau((\mathcal{P}_n \boxtimes \mathcal{F})_1)$ 的选择是否唯一。

Appendix A. A review on some homology theory.

A.1. 双变理论。 本节简要回顾双变理论。更多细节可参见 [7, §I.3] 和 [6, 第 17] 章。

设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$是合理拓扑空间之间的态射，构成如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} .$$

一个双变类 c 属于 $H^i(X \xrightarrow{f} Y)$，是一组同态

$$c_g : H^{BM}_*(Y') \to H^{BM}_{*-i}(X').$$

我们也用 $c \cap \alpha$ 代替 $c_g(\alpha)$。

双变群上有如下三种基本运算。

- 乘积。 对于所有态射 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ 以及整数 p, q，存在一个同态

$$H^p(X \xrightarrow{f} Y) \otimes H^q(Y \xrightarrow{g} Z) \dot{\to} H^{p+q}(X \xrightarrow{g \circ f} Z),$$

其中 $c \otimes d$ 的像记作 $c \cdot d$。给定 $Z' \to Z$，构成纤维图表

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array} . \tag{A.1}$$

那么，对于 $\alpha \in H_*(Z')$，我们有 $c \cdot d(\alpha) = c(d(\alpha))$。

- 推前。若 $f\colon X \to Y$ 是一个真态射，$g\colon Y \to Z$ 是一个态射，并且 p 是一个整数，则存在一个同态

$$f_* : H^p(X \xrightarrow{g\circ f} Z) \to H^p(Y \xrightarrow{g} Z).$$

在图表 (A.1) 中，对于任意 $c \in H^*(X \xrightarrow{g\circ f} Z)$ $\alpha \in H_*(Z')$，我们有

$$f_*(c)(\alpha) = f'_*(c(\alpha))$$

- 拉回。给定 $f\colon X \to Y, g\colon Y_1 \to Y$，构成笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} .$$

对于每个 p，都有一个同态

$$g^* : H^p(X \xrightarrow{f} Y) \to H^p(X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1).$$

任取 $c \in H^*(X \xrightarrow{f} Y)$ $Y' \to Y_1$ 和 $\alpha \in H_*(Y')$。令 $X' = X \times_Y Y' = X_1 \times_{Y_1} Y'$，则有

$$g^*(c)(\alpha) = c(\alpha).$$

这些运算满足以下七条性质。

A_1 乘积的结合律。对于任意 $c \in H^*(X \to Y)$ $d \in H^*(Y \to Z)$ $e \in H^*(Z \to W)$ 有

$$(c \cdot d) \cdot e = c \cdot (d \cdot e) \in H^*(X \to W).$$

A_2 推前的函子性。设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$ 均为适当态射。对于任意 $Z \to W$ 和 $c \in H^*(X \to W)$，有

$$(g \circ f)_*(c) = g_*(f_*(c)) \in H^*(Z \to W).$$

A_3 拉回的函子性。对任意 $c \in H^*(X \to Y)$, $g\colon Y_1 \to Y$,$h : Y_2 \to Y_1$, 我们有

$$(g \circ h)^*(c) = h^* g^*(c) \in H^*(X_2 \to Y_2).$$

其中 $X_2 = X \times_Y Y_2$.

A_4 乘积与推前可交换。设 $f\colon X \to Y$ 是适当的。对于任意 $Y \to Z$, $Z \to W$和 $c \in H^*(X \to Z)$ $d \in H^*(Z \to W)$，有

$$f_*(c) \cdot d = f_*(c \cdot d) \in H^*(Y \to W).$$

A_5 乘积与拉回可交换。我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \longrightarrow & Z \end{array} . \tag{A.2}$$

于是对于任意 $c \in H^*(X \to Y)$ $d \in H^*(Y \to Z)$

$$g^*(c \cdot d) = g'^*(c) \cdot g^*(d) \in H^*(X' \to Z').$$

A_6 推前与拉回可交换。在图表 (A.2) 中，若 $f\colon X \to Y$ 是适当的，则对于任意 $c \in H^*(X \to Z)$，有

$$g^* f_*(c) = f'_*(g^*(c)) \in H_*(Y' \to Z').$$

A_7 投影公式。给定一个态射 $h : Y \to Z$ 以及一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array} ,$$

当 g 适当时，对于 $c \in H^*(X \xrightarrow{f} Y)$ $d \in H^*(Y' \xrightarrow{h\circ g} Z)$，我们有

$$c \cdot g_*(d) = g'_*(g^*(c) \cdot d) \in H^*(X \xrightarrow{h\circ f} Z).$$

注 A.1. 定义双变群的一种方法是使用相对上同调。设 $f\colon X \to Y$ 是任意映射。假设存在一个闭嵌入$\imath : X \hookrightarrow M$，其中 M 是一个定向流形。那么我们有一个闭嵌入$X \xhookrightarrow{(\imath,f)} M \times Y$，并且有

$$H^*(X \xrightarrow{f} Y) := H^*(Y \times M, Y \times M \setminus X).$$

注 A.2. 我们想指出，$H^i(X \to pt)$ 与 $H^i(X \xrightarrow{id} X)$对任意空间 X 均可自然地等同于 $H^{BM}_{-i}(X)$ 与 $H^i(X)$。此外，给定 $f : X \to Y$，其中 Y 为维数 d 的非奇异簇，由[6, 命题 17.4.2，例17.4.3] 与基本类$[Y] \in H^{-2d}(Y \to pt)$ 的乘积给出一个同构

$$H^i(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow[\cong]{\cdot[Y]} H^{i-2d}(X \to pt) = H^{BM}_{2d-i}(X).$$

注 A.3 (定向). 对某些映射 $f\colon X \to Y$，在 $H^*(X \xrightarrow{f} Y)$ 中存在自然确定的元素，称为典范定向 并记作$[f]$。定向一般并不总是存在，但我们有以下三种特殊情形。

(1) 若 $f\colon X \to Y$是相对维数为 n 的平坦态射，则 $[f] \in H^{-2n}(X \xrightarrow{f} Y)$；对于任意 $g\colon Y' \to Y$，我们有 $a \in H_*^{BM}(Y')$，

$$[f](a) = f'^*(a),$$

其中 $f'\colon X' = X \times_Y Y' \to Y'$，且 f'^*是平坦拉回。

(2) 若 $f\colon X \to Y$ 是余维为 d 的正则嵌入，则 $[f] \in H^{2d}(X \xrightarrow{f} Y)$；对于任意 $g\colon Y' \to Y$，我们有 $a \in H_*^{BM}(Y')$，

$$[f](a) = f^!(a),$$

其中 $f^!$是精化 *Gysin* 同态。若 $f'\colon X' = X \times_Y Y' \to Y'$也是正则嵌入，则 $f^! = f'^*$。

(3) 若 $f\colon X \to Y$是局部完全交态射，且 $f = p \circ i$ 使得 p 光滑、 i 为正则嵌入，则

$$[f] := [i] \cdot [p].$$

A.2. 奇异簇的黎曼–罗赫。 在本小节中，我们非常简要地回顾奇异簇的黎曼–罗赫理论。更多细节可见（[6,第18]章）。

对 X 任意代数概形（局部有限型且分离），并令$K_0(X)$为 X上相干层的格罗滕迪克群。我们有一个群同态

$$\tau = \tau_X : K_0(X) \to A_*(X),$$

其中对任意 $\alpha \in K_0(X)$， $\tau(\alpha) \in A_*(X)$将 X光滑时的 $ch(\alpha)td(T_X)$加以推广。我们有 X的托德类，由 $Td(X) := \tau(\mathcal{O}_X) \in A_*(X)$定义。我们还用 $\tau(\alpha)$（相应地，$ch(\beta)$）表示它经由循环映射在 $H_*(X)$（相应地，$H^*(X)$）中的像。

一般而言， $\tau(\alpha)$ 仅属于 $H_*(X)$，但在某些特殊情形下， $\tau(\alpha)$ 属于 $H^*(X)$ 与 $Td(X)$ 的帽积的像。例如，当$\beta \in K^0(X)$ 时，我们有

$$\tau(\beta) = ch(\beta) \cap Td(X),$$

其中， $K^0(X)$ 是由向量丛生成的 $K_0(X)$ 的子群，而$ch(\beta) \in H^*(X)$ 是 β 的指数陈特征。

此外， $Td(X)$ 有时可以提升为 $H^*(X)$，换言之，存在$\exists\ td(X) \in H^*(X)$，使得 $Td(X) = td(X) \cap [X]$。例如，令 X 为

一个局部完全交，那么我们有 $td(X) = td(T_X)$，其中 T_X 是 X 的虚切丛，在这种情况下，我们可以定义

$$ch^\tau(G) := td(-T_X) \cap \tau(\alpha) \in H_*(X) \tag{A.3}$$

对任意 $\alpha \in K_0(X)$。

我们将 [6, 定理18.3、例 18.3.11 和例 18.3.12] 改述为以下定理。

定理 A.4. 同态 τ 具有以下五个性质。

(1) （协变性）。若 $f: X \to Y$ 是适当的，$\alpha \in K_0(X)$，则 $f_*\tau_X(\alpha) = \tau_Y(Rf_*(\alpha))$。(2) （模）。若 $\alpha \in K_0(X)$ $\beta \in K^0(X)$，则

$$\tau(\alpha \otimes \beta) = ch(\beta) \cap \tau(\alpha).$$

(3) 设 $i: X \to M$ 是一个闭嵌入，且 G 是X上的一个凝聚层。假设 i_*G 存在有限长度的局部自由分解 $E_\bullet$，则

$$\tau(G) = ch_X^M(E_\bullet) \cap Td(M),$$

其中 $ch_X^M(E_\bullet)$ 是 $H^*(X \xrightarrow{i} M)$中的一个双变类。特别地，若 M是光滑的，则

$$\tau(G) = ch_X^M(E_\bullet) \cap Td(M) = td(i^*T_M) \cap (ch_X^M(E_\bullet) \cap [M]).$$

此外，对 M上的任意凝聚层 $\mathcal{G}$，$\mathcal{H}^i(E_\bullet \otimes \mathcal{G})$ 是 X 上的层，并且我们有

$$\sum_i (-1)^i \tau_X(\mathcal{H}^i(E_\bullet \otimes \mathcal{G})) = ch_X^M(E_\bullet) \cap \tau_M(\mathcal{G}).$$

(4) 设 $f: X \to Y$ 是一个局部完全交态射，使得 X与 Y 都可闭嵌入到光滑概形中。则对所有 $\alpha \in K_0(Y)$

$$\tau_X(Lf^*\alpha) = td(T_f) \cap f^*\tau_Y(\alpha).$$

此外，若 X与 Y 均为局部完全交，则我们有

$$ch^{\tau_X}(Lf^*\alpha) = f^*ch^{\tau_Y}(\alpha).$$

(5) （最高项）。若 Z 是 X的一个闭子簇，且维数 $Z = n$，则

$$\tau(\mathcal{O}_Z) = [V] + terms\ of\ dimension\ < n.$$

此外，设 G 是 X 上的凝聚层，且 维数 $Supp(G) \leq n$。定义 G 的 n-循环，

$$Z_n(G) = \sum_{\dim V = n} l_V(G)[V]$$

其中，求和遍历 G 的支集中的所有 n 维子簇，而 $l_V(G)$ 是 G 在 X 于 V 处的局部环上的茎的长度。于是

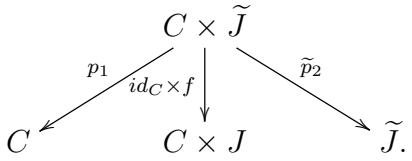
$$\tau(G) = Z_n(G) + terms\ of\ dimension\ < n.$$

Appendix B. Proof of Proposition 2.4

命题 *2.4* 的证明。我们有闭嵌入 $J \hookrightarrow \mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$ 光滑。根据 E_n 的定义，我们可以看出， E_n 是向量丛 $\mathcal{E}_n$ 在 $\mathcal{J}$ 上的限制，且该向量丛定义在 J 上。因此， $ch_i(E_n)$ 是 $\mathcal{J}$ 上上同调类的拉回，故根据混合霍奇理论（例如 [10, 定理 5.33 (iii)]），它们要么是 $ch_i(E_n) \notin W_{<2i}H^{2i}(J)$，要么是 $ch_i(E_n) = 0$ 。

~令 $f\colon J \to J$ 为奇点消解。根据 [10, 推论 5.42], ，为证明对所有 $i \geq 2$ 都有 $ch_i(E_n) = 0$，只需证明对所有 $i \geq 2$ 都有 $f^*(ch_i(E_n)) = 0$ 。

我们有如下图表



由于根据 [2, 定理 A(2)、引理 6.1 (3)], ， F 在两个因子上都是平坦的，因此 $id_C \times f$ $^*F$ 也是导出拉回。由 E_n的泛性质，我们有 $f^*(ch_i(E_n)) = ch_i(f^*(E_n)) = ch_i(\widetilde{p}_{2,*}($ $p_1^*\mathcal{O}_C(nx) \otimes (id_C \times f)^*F))$。

由于 C和 J都是局部完全交， $ch^\tau(G)$ 对任意凝聚层 G在 C、 J或 $C \times J$上都有定义。根据 τ的协变性（定理 A.4 (1)），我们有

$$ch(E_n) \cap [J] = ch^\tau(E_n) = p_{2,*}(p_1^*(ch(\mathcal{O}_C(nx)) \cup td(T_C)) \cap ch^\tau(F)). \tag{B.1}$$

通过直接计算，我们有

$$ch(\mathcal{O}_C(nx)) \cup td(T_C) = 1 + (n - g + 1)x \in H^*(C). \tag{B.2}$$

注意，这里我们取 $H^*(C)$ 中的类，而不是 $A^*(C)$ 中的类。另一方面，由于 F 在 x 处已归一化，我们有

$$\begin{aligned} p_{2,*}(p_1^*(x) \cap ch^\tau(F)) &= p_{2,*}(p_1^*(ch(\mathcal{O}_x) \cup td(T_C)) \cap ch^\tau(F)) \\ &= ch(F_x) \cap [J] = ch(\mathcal{O}_J) \cap [J] = [J]. \end{aligned} \tag{B.3}$$

结合 (B.1)、(B.12) 和 (B.3)，可得

$$ch(E_n) \cap [J] = ch^\tau(E_{2g-1}) + (n-2g+1)[J] = p_{2,*}(ch^\tau(F)) + (n-g+1)[J]. \tag{B.4}$$

同理可得

$$ch(f^*E_n) \cap [\widetilde{J}] = \widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F)) + (n-g+1)[\widetilde{J}]. \tag{B.5}$$

由于 J是光滑的，只需证明对于所有 $i \geq 2$，$\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F)) \in H_*(J)$ 的次数为 $2(g-i)$ 的项均为零。我们将分三步证明这一结论。

步骤 *1*。令 $h : C \to C$ 为 C的正规化。我们有如下正合列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to h_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \to T \to 0,$$

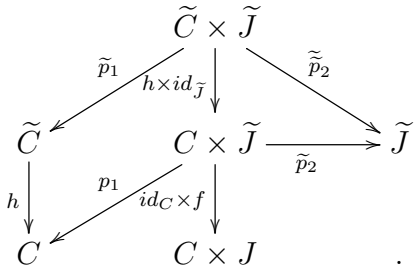
其中 T 是一个支撑于 C的奇异点集上的零维层 .

由于 F在两个因子上均平坦，$(id_C \times f)^*F$在 C 上平坦，并且在 $C \times J$上我们有如下正合列

$$0 \to (id_C \times f)^*F \to (h \times id_{\widetilde{J}})_*(\widetilde{F}) \to (id_C \times f)^*F \otimes p_1^*T \to 0, \tag{B.6}$$

其中 $F := (h \times f)^*F = (h \times id_{\widetilde{J}})^*(id_C \times f)^*F$。

我们有如下图表



.

由 (B.6) 可得

$$\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F)) = \widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((h \times id_{\widetilde{J}})_*(\widetilde{F}))) - \widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F \otimes p_1^*T)). \tag{B.7}$$

步骤 *2.* 我们断言

$$\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F \otimes p_1^*T)) = \ell[\widetilde{J}] \tag{B.8}$$

其中 $\ell := g - g_{\widetilde{C}}$ T 的长度。由于 T 是零维的，我们有

$$[T] = [\mathcal{O}_{x_1}] + \cdots + [\mathcal{O}_{x_\ell}] \in K_0(C).$$

因此，只需证明 $\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^*F \otimes p_1^*\mathcal{O}_y)) = [J]$对任意 $y \in C$均成立。由于 $(id_C \times f)^*F \otimes p_1^*\mathcal{O}_y$的支集位于 $J \times y$，根据τ 的最高项性质（定理 A.4 (5)），我们有

$$p_1^*x \cap ch^\tau((id_C \times f)^*F \otimes p_1^*\mathcal{O}_y) = 0,$$

因此

$$p_1^*(td(T_C)) \cap ch^\tau((id_C \times f)^* F \otimes p_1^* \mathcal{O}_y) = ch^\tau((id_C \times f)^* F \otimes p_1^* \mathcal{O}_y).$$

因此，由 τ 的协变性，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((id_C \times f)^* F \otimes p_1^* \mathcal{O}_y)) &= \widetilde{p}_{2,*}(p_1^*(td(T_C)) \cap ch^\tau((id_C \times f)^* F \otimes p_1^* \mathcal{O}_y)) \\ &= ch^\tau(R\widetilde{p}_{2,*}((id_C \times f)^* F \otimes p_1^* \mathcal{O}_y)) \\ &= ch^\tau(f^* F_y) = [\widetilde{J}], \end{aligned}$$

其中最后一个等式成立，是因为 $f^* F_x \cong f^* \mathcal{O}_J \cong \mathcal{O}_{\tilde{J}}$与 $f^* F_y$和 $f^* F_x$ 位于由连通概形 C参数化的同一平坦族中。

由 (B.7)，只需证明对所有 $i \geq 2$，$\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((h \times \sim id_{\tilde{J}})_* F)) \in H_*(J)$中次数为 $2(g-i)$ 的项均为零。

步骤 *3.* 由于 h是仿射的，$(h \times id_{\tilde{J}})_*$是导出推前，并且由 τ 的协变性，我们有

$$\begin{aligned} ch^\tau((h \times id_{\tilde{J}})_*(\widetilde{F})) &= \tau((h \times id_{\tilde{J}})_* \widetilde{F}) p_1^* td(-T_C) \widetilde{p}_2^* td(-T_{\tilde{J}}) \\ &= (h \times id_{\tilde{J}})_*(\tau(\widetilde{F})) p_1^* td(-T_C) \widetilde{p}_2^* td(-T_{\tilde{J}}) \\ &= (h \times id_{\tilde{J}})_*(ch^\tau(\widetilde{F}) \widetilde{p}_1^*(td(T_{\widetilde{C}})) \widetilde{\widetilde{p}}_2^*(td(T_{\tilde{J}}))) p_1^* td(-T_C) \widetilde{p}_2^* td(-T_{\tilde{J}}) \\ &= (h \times id_{\tilde{J}})_*(ch^\tau(\widetilde{F}) \widetilde{p}_1^*(td(T_{\widetilde{C}}))) p_1^* td(-T_C) \end{aligned} \tag{B.9}$$

其中，最后一个等式由投影公式和 $\widetilde{p}_2 = \widetilde{p}_2 \circ (h \times id_{\tilde{J}})$ 得出。

由于 x 是 C中的一个光滑点，我们也可以将其在 C中的原像记作 $\widetilde{x}$。于是 $F_x = f^*(F_x) \cong f^*(\mathcal{O}_J) \cong \mathcal{O}_{\tilde{J}}$。记 $U \subset C \times J$为 F 局部自由的最大开子集。那么，U 在$\sim C \times J$中的补集的余维为 ≥ 2。令 $V := (h \times f)^{-1}(U) \subset C \times J$。那么，$V$在 $C \times J$ 中的$\widetilde{}$补集的余维也为 ≥ 2，这是因为 U 包含 $(C \times J^{sm}) \cup (C^{sm} \times J)$。

设 $\imath : U \hookrightarrow C \times J$，$\jmath : V \hookrightarrow C \times J$ 是两个嵌入。由于 F是 Cohen–Macaulay，根据（例如 [2, 引理 2.2]），$F = \imath_*(F|_U)$。由于 $C \times J$ 和 $C \times J$ 都是 Cohen–Macaulay，采用与引理 2.10 类似的论证可得

$$\widetilde{F} = (h \times f)^* F = (h \times f)^*(\imath_*(F|_U)) = \jmath_*((h \times f)^*(F|_U)) = \jmath_*(\widetilde{F}|_V).$$

另一方面，$F|_U$是一个线丛，因此 $F|_V$也如此。由 $C \times J$的光滑性，我们有 $F \cong \det F$是 $C \times J$上的一个线丛。因此

$$ch^\tau(\widetilde{F}) = ch(\widetilde{F}) \cap [\widetilde{C} \times \widetilde{J}] = Exp(c_1(\widetilde{F})) \cap [\widetilde{C} \times \widetilde{J}]. \tag{B.10}$$

根据 K¨unneth 公式，我们写作 $c_1(F) = a_0 \otimes b_2 + a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_0$，其中 $a_i \in H^i(C)$ $b_i \in H^i(J)$。由于 $F_x \cong \mathcal{O}_{\widetilde{J}}$，由黎曼–罗赫定理和直接计算，我们有 $(a_0 \cdot x)b_2 = c_1(F_x) = 0$，因此 $a_0 \otimes b_2 = 0$。所以我们有

$$ch^\tau(\widetilde{F}) = (1 + a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + \frac{1}{2}a_1^2 \otimes b_1^2) \cap [\widetilde{C} \times \widetilde{J}].$$

由于 $x \cup a_i = 0$ 对于 $i = 1,2$，我们有

(B.11)

$$ch^\tau(\widetilde{F})\widetilde{p}_1^*(td(T_{\widetilde{C}})) = (1+a_1\otimes b_1+a_2\otimes b_2+\frac{1}{2}a_1^2\otimes b_1^2)\cap[\widetilde{C}\times\widetilde{J}]+(1-g_{\widetilde{C}})[x\times\widetilde{J}].$$

由 (B.9) 可得

$$\begin{aligned} ch^\tau((h\times id_{\widetilde{J}})_*(\widetilde{F})) &= (h\times id_{\widetilde{J}})_*(ch^\tau(\widetilde{F})\widetilde{p}_1^*(td(T_{\widetilde{C}})))p_1^*td(-T_C) \\ &= (h\times id_{\widetilde{J}})_*((1+a_1\otimes b_1+a_2\otimes b_2+\frac{1}{2}a_1^2\otimes b_1^2)\cap[\widetilde{C}\times\widetilde{J}]) \\ &+ (g-g_{\widetilde{C}})[x\times\widetilde{J}]. \end{aligned} \tag{B.12}$$

因此我们有

(B.13)

$$\widetilde{p}_{2,*}(ch^\tau((h\times id_{\widetilde{J}})_*\widetilde{F})) = (g-g_{\widetilde{C}})[\widetilde{J}] + (a_2\cap[\widetilde{C}])b_2\cap[\widetilde{J}] + (\frac{1}{2}a_1^2\cap[\widetilde{C}])b_1^2\cap[\widetilde{J}].$$

T(B.13) 的右侧仅在次数 $2g$ 和 $2g-2$ 中包含非平凡项 .

最后还需证明 $c_1(E_n)$ 与 n 无关。由 (B.5)、(B.7)、(B.8) 和 (B.13) 可知，$f^*ch_1(E_n)$ 与 n 无关。命题得证。□

References

[1] D. Arinkin，紧化雅可比簇上线丛的上同调，《数学研究快报》18 (2011)，第 6 期，1215-1226。[2] D. Arinkin，平面奇点曲线的紧化雅可比簇自对偶性，《代数几何杂志》22 (2013)，第 2 期，363-388。[3] A. A. Beilinson，J. N. Bernstein，P. Deligne，*pervers* 层，Ast´erisque 100，巴黎，法国数学会，1982。[4] P. Deligne，韦伊猜想（二），《高等科学研究所数学出版物》52 (1980)，137-252。[5] G. Ellingsrud，L. G¨ottsche，M. Lehn，关于曲面希尔伯特概形的配边类，《代数几何杂志》10 (2001)，81-100。[6] W. Fulton，交理论。第 *2* 版。，数学及其边界成果（第 3 辑）2，Springer，柏林（1998）。[7] W. Fulton，R. MacPherson，奇异空间研究的范畴框架，美国数学会回忆录 31，第 243 号，vi+165 页（1981）。[8] D. Maulik 和 Z. Yun，具有平面奇点的曲线的 *Macdonald*公式，纯粹与应用数学杂志 694 (2014)，27-48。

[9] M. Melo、A. Rapagnetta 和 F. Viviani，紧化雅可比簇的傅里叶-穆凯变换与自对偶性（二），《Geometry & Topology》23 (2019)，2335-2395。[10] Chris A. M. Peters 和 Joseph H. M. Steenbrink，混合霍奇结构，《数学及其边界领域成果》第 3 辑／《现代数学综述丛书》，第 52 卷。施普林格出版社，柏林-海德堡。[11] J. V. Rennemo，局部平面曲线上点的希尔伯特概形的同调，《欧洲数学会杂志》20 (2018)，第 7 期，1629-1654。[12] V. Shende，局部平面曲线上点的希尔伯特概形及其整体变形的塞韦里分层，《组合数学》148，531-547 (2012)。

YAO YUAN
北京国家应用数学中心、多学科研究院、首都师范大学，北京，100048，中国。电子邮箱：6891@cnu.edu.cn。