arXiv:2603.07210v1 [math.DS] 7 Mar 2026

一般非线性动力系统存在张量不变量的必要条件

ZitongZhao*、Shaoyun Shi†、Wenlei Li‡、Zhiguo Xu§ 和 Kaiyin Huang¶

摘要

可积性在微分方程领域中一直发挥着至关重要的作用。这一性质有助于我们更好地获得所研究系统的拓扑结构，甚至了解其整体动力学。如果一个系统具有若干张量不变量，就称其为可积系统；这些不变量能够全面刻画可积性问题。本文给出了一般非线性系统，尤其是半拟齐次系统存在张量不变量的必要条件。我们的结果可视为对 Poincar´e 和 Kozlov 工作的推广。

关键词：可积性；张量不变量；拟齐次系统；科瓦列夫斯卡娅指数。

*吉林大学数学学院，中国吉林长春 130012（zhaozt22@mails.jlu.edu.cn）。

†长春理工大学数学与统计学院，中国长春 130022（shisy@jlu.edu.cn）。

‡中国吉林省长春市吉林大学数学学院，邮编 130012 (lwlei@jlu.edu.cn)。§中国吉林省长春市吉林大学数学学院，邮编 130012 (xuzg2014@jlu.edu.cn)。

¶中国成都市四川大学数学学院，邮编 630065 (huangky@scu.edu.cn)。

1 引言

{sec1}

微分方程领域的一个基本问题是判断给定系统是否可积。如果一个系统具有若干不变量，使其能够通过求积或以闭式求解，那么就称该系统是可积的。系统的可积性有助于我们获得其拓扑结构，甚至了解其整体动力学 [12, 25]。相反，系统的不可积性往往会使我们预期该系统具有复杂动力学行为或混沌现象 [23, 24]。

据我们所知，对可积性的研究最早可追溯到19世纪末的 Poincar´e。他利用不动点处向量场的雅可比矩阵的特征值，给出了关于第一积分的判据：如果特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不满足以下任何一种共振等式

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \lambda_j = 0, \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{n} k_j \geq 1,$$

那么系统在原点 [26]的邻域内不存在任何解析的非平凡积分。沿着这一思路，Furta [2], 、Shi 等人 [7, 36], 、Zhang 等人 [20, 21]以及 Li 等人 [29] 从不同角度进一步给出了全面的结果。

除了上述围绕不动点的结果（可视为局部可积性）之外，还有大量学者研究非平凡解邻域内的可积性问题。与不动点的情形类似，这一研究思路也可追溯到 Poincar´e。他运用 Floquet理论，针对周期轨道提出了哈密顿系统可积性的若干必要条件。1982年，Ziglin 将其推广到复解析哈密顿系统，并运用单值群理论提出了黎曼解附近完全可积性的一个必要条件 [34]。20世纪90年代，Morales-Ruiz 和 Ramis 基于 Poincar´e 与 Ziglin 的理论，运用微分伽罗瓦理论得出了针对复解析哈密顿系统的相关结果 [37]。更多相关结果可参见 Yoshida [35], 、Simon [31], 、Maciejewski、Przybylska[40, 41],以及 Li [27, 28] 等人的研究。与此同时，针对非平凡解，还有一些其他方法，例如 Lilbre、Zhang 等人运用不变代数曲线和积分因子等方法 [33, 38, 39] 。

随着复分析的发展，人们也一直在探讨微分方程的可积性。对于非线性系统，相关思想可追溯至Kovalevslaya，她通过分析解的单值性，考察了陀螺问题的所有可积情形 [30]。受此启发，人们发展出一系列用于研究微分方程可积性的奇点分析方法，例如Painlev´e [44]。1983年，Yoshida针对相似不变系统的加权次数为 M 的加权齐次第一积分 $\Phi(x^1, \cdots, x^n)$给出了一个必要条件。假设，向量的元素

$$\text{grad } \Phi(c) = [\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(c_1, \cdots, c_n), \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial x^n}(c_1, \cdots, c_n)]$$

对于某个固定选择，若这些值有限且不恒为零，则 $\rho = M$ 就成为一个 Kovalevskaya 指数。1996年，Goriely 将 Yoshida 方法扩展到部分

可积性研究，具体如下 [12]。后来，Furta、Shi 等人也提出了一些相关结果 [7]。

基于上述丰富的思想，人们针对不同类型的可积性问题提出了许多重要结果。考虑解析微分方程组

$$\dot{x} = F(x),\ x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{C}^n. \tag{1.1}$$ {int}

Se几种有趣的可积性定义可归纳如下 .

- 完全可积性 [8, 21, 12]: $n-1$ 函数独立的第一积分。
- 李可积性 [6, 4]: n 线性独立且彼此对易的对称性（包括向量场 F 本身）。

- 博戈亚夫连斯基可积性 [10, 18, 19]: k 函数独立的第一积分 $\Phi_1, \cdots, \Phi_k$ 以及 $n-k$ 线性独立的向量场 $v_1 = F(x) \cdots, v_{n-k}$满足

$$[v_i, v_j] = 0,\ v_i(\Phi_l) = 0,\ 1 \le i, j \le n-k,\ 1 \le l \le k.$$

- 雅可比可积性 [5]: $n-2$ 函数独立的第一积分 $\Phi_1, \cdots, \Phi_k$以及一个雅可比乘子。

- 欧拉-雅可比-李可积性 [5]: k 函数独立的第一积分、 $n-k-1$ 独立的对称场 $v_1 = F, \cdots, v_{n-k}$生成向量场的幂零李代数，以及一个不变体积n-形式 Ω，使得 $L_{v_i}\Omega = 0, \quad L_{v_i}\Phi_j = 0, \quad 1 \le i \le n-k-1, \quad 1 \le j \le k$。

值得注意的是，这些概念都可以统一描述为张量不变量。事实上，回顾一下，一个 T 型为（p, q）的光滑张量场

$$T = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q},\ \ i_r, j_s \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{1.2}$$ {TF}

其中，分量 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)$ 是光滑函数；令 L_F 表示沿向量场 $F = (F^1, \cdots, F^n)$ 的李导数，即

$$\begin{aligned}(L_F T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} =& F^s \frac{\partial}{\partial x^s} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + T^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}\frac{\partial F^k}{\partial x^{j_1}} + \cdots + T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}\frac{\partial F^k}{\partial x^{j_q}} \\ & - T^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^l} - \cdots - T^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial F^{i_p}}{\partial x^l}.\end{aligned} \tag{1.3}$$ {eq2}

在本文中，我们始终使用爱因斯坦求和约定。特别地，如果张量场的所有分量都是解析的，则称 T 为解析张量场。

定义 1.1. 张量场 T称为系统 *(1.1)* 的张量不变量，如果 $L_F T = 0$，或等价地 $(L_F T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0$ 对任意 i_r、 $j_s \in \{1, 2, \cdots, n\}$。

根据上述概念，不难发现第一积分是 (0,0) 型张量不变量，李对称性是 $(1, 0)$ 型张量不变量，而不变 n-形式也是 $(0, n)$ 型张量不变量。

1992 年，Kozlov 将 Yoshida 方法扩展为一项必要条件，用于判断拟齐次系统 [15] 的平衡处非零的一般张量不变量是否存在。设系统具有一个次数为 m 的拟齐次张量不变量 T，且 $T(c) \neq 0$。则存在整数 $1 \le i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q \le n$，使得

$$\rho_{i_1} + \cdots + \rho_{i_p} - \rho_{j_1} - \rho_{j_q} + m = 0.$$

对于类型为 (1，0) 的张量不变量，Furta 方法被扩展到李对称性[4]。如果拟齐次系统具有一个次数为$M \geq 0$的解析李对称，那么对于某个 $i \in \{0, \cdots, n\}$，存在如下共振关系

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \lambda_j = l\lambda_i, \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{n} k_1 \geq M.$$

本文试图对一般非线性微分方程中张量不变量的存在性给出一个一般而完整的研究。首先，我们将Poincar´e方法推广到不动点邻域中的张量不变量。基于这一结果，我们通过在尺度不变解的邻域中建立变分方程来考虑半拟齐次系统中的该问题，并给出半拟齐次系统中张量不变量存在的必要条件。值得注意的是，如上所述，Kozlov曾在某些限制条件下给出了类似结果。然而，我们的结果可视为在不施加其限制条件下的推广。

本文结构如下。在第2节中，我们给出一般微分方程中张量不变量存在的必要条件。在第3节中，我们给出半拟齐次系统中张量不变量存在的必要条件。在第4节中，我们给出两个例子来说明我们的定理。

2 一般非线性系统的张量不变量

2.1 平凡张量不变量

在本小节中，我们介绍平凡张量不变量的概念，并给出一些刻画。

定义 2.1. 如果对任意向量场 F， $L_F T = 0$ 都成立，则称 T为平凡张量不变量。

显然， $T = c$ 是类型为 (0,0) 的平凡张量不变量（平凡第一积分）。接下来，我们尝试完整刻画平凡张量不变量。令 $S_k(i_1, \cdots, i_k)$ 表示指标 $(i_1, \cdots, i_k)$ 的所有排列组成的集合。为简便起见，将 $S_k(1, \cdots, k)$ 记作 S_k。

命题 *2.2.* 若由 *(1.2)* T{eq2}给出的张量场是平凡的，则所有分量 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)$ 都是常数，且 $p = q$。此外，对于任意 $(j_1, \cdots, j_p) \notin \Theta_p$， $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} = 0$，其中 $\Theta_p = \{(j_1, \cdots, j_p) | (j_1, \cdots, j_p) = \sigma(i_1, \cdots, i_p)\ \sigma \in S_p(i_1, \cdots, i_p)\}$。 {平凡}

证明。根据平凡张量不变量的定义，

$$(L_F T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0, \quad i_r, j_s \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

对每个解析向量场 F 都成立。

首先，令 F 为 (0，$\cdots$，1，$\cdots$，0)（其中 1 位于第 $h-$ 个位置），可以得出，对于任意分量 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)$,

$$\frac{\partial}{\partial x^h} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0, \quad h = 1, 2, \cdots, n,$$

这意味着 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)$ 是常数。

接下来，取 $F=(0,\cdots,x_h,\cdots,0)$，得到

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\sum_{k=1}^{q}\delta^{j_k}_h-\sum_{l=1}^{p}\delta^{i_l}_h)=0,\quad h=1,2,\cdots,n, \tag{2.4}$$ {pq}

其中δ^i_j 是克罗内克符号。因此

$$\sum_{k=1}^{q}\delta^{j_k}_h-\sum_{l=1}^{p}\delta^{i_l}_h=0,\quad h=1,2,\cdots,n$$

对任意 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\neq 0$均成立，这意味着 $p=q$。

最后，若 $(j_1,\cdots,j_p)\notin\Theta_p$，则 $\sum\limits_{k=1}^{q}\delta^{j_k}_h-\sum\limits_{l=1}^{p}\delta^{i_l}_h\neq 0$，因此根据 (2.4)，$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=0${pq}。 □

根据命题 2.2，平凡张量不变量具有如下形式

$$T=\sum_{\sigma\in S_p(i_1,\cdots,i_p)}\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n}T^{i_1\cdots i_p}_{\sigma(i_1\cdots i_p)}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes dx^{i_{\sigma(p)}}. \tag{2.5}$$ {TTI}

其中 $(x^{i_{\sigma_1}},\cdots,x^{i_{\sigma_p}})=\sigma(i_1,\cdots,i_p)$。

现在我们继续研究 $T^{i_1\cdots i_p}_{\sigma}$ $(i_1\cdots i_p)$ 之间的关系。

命题 2.3。 类型为 （1，1） 的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x)=c\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^i, \tag{2.6}$$ {t1-1}

其中 c是一个常数。

证明。 由（2.5）{t1-1}，类型为（1，1）的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^i.$$

令 $F=(x^j,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，则

$$(L_FT)^1_j=\beta_1\frac{\partial F^1}{\partial x^j}-\beta_j\frac{\partial F^1}{\partial x^j}=\beta_1-\beta_j=0,\quad j\in\{1,\cdots,n\},$$

因此 $T(x)$ 具有形式（2.6）。 □

命题 2.4。 类型为(2,2) 的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x)=\sum_{\sigma\in S_2}c_\sigma\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes dx^{i_{\sigma(2)}}, \tag{2.7}$$ {t2-2}

其中 c_σ 是一个常数。

证明。 根据（2.5）{t2-2}，类型为 (2,2) 的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x)=\sum_{\sigma\in S_2(i_1,i_2)}\sum_{i_1,i_2=1}^{n}T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes dx^{i_{\sigma(2)}}.$$

我们声称，对于任意 i_1，i_2，$i\in\{1,\cdots,n\}$ 且满足 $i_1\neq i_2$,

$$T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}=T^{12}_{\sigma(12)} \tag{2.8}$$ {T12}

and

$$T^{ii}_{ii}=\sum_{\sigma\in S_2}T^{12}_{\sigma(12)}. \tag{2.9}$$ {T11}

事实上，若 $n=2$，取满足 $F^1=x^2$，$F^2=x^1$ 的向量场 F，我们得到

$$(L_FT)^{11}_{12}=T^{11}_{11}\frac{\partial F^1}{\partial x^2}-T^{21}_{12}\frac{\partial F^1}{\partial x^2}-T^{12}_{12}\frac{\partial F^1}{\partial x^2}=T^{11}_{11}-T^{21}_{12}-T^{12}_{12}=0, \tag{2.10}$$ {01112}

$$(L_FT)^{21}_{11}=T^{21}_{21}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}+T^{21}_{12}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-T^{11}_{11}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}=T^{21}_{21}+T^{21}_{12}-T^{11}_{11}=0, \tag{2.11}$$ {02111}

$$(L_FT)^{12}_{11}=T^{12}_{21}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}+T^{12}_{12}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-T^{11}_{11}\frac{\partial F^2}{\partial x^1}=T^{12}_{21}+T^{12}_{12}-T^{11}_{11}=0. \tag{2.12}$$ {01211}

由 (2.10) {01112}、(2.11) {02111} 和 (2.12)，可得 $T^{21}_{\sigma\ (21)}=T^{12}_{\sigma(12)}$，即 (2.8) 成立。

若 $n\geq 3$，则对于任意满足 $i_3\neq i_1$，$i_3\neq i_2$ 的 $i_3\in\{1,\cdots,n\}$，我们取满足 $F^{i_1}=x^{i_3}$，$F^{i_2}=x^{i_3}$ 的向量场F，然后根据当 $(j_1,\ j_2)\notin\Theta_2$ 时 $T^{i_1i_2}_{j_1j_2}=0$ 这一事实,

$$(L_FT)^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_3)}=T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x^{i_3}}-T^{i_1i_3}_{\sigma(i_1i_3)}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x^{i_3}}=T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}-T^{i_1i_3}_{\sigma(i_1i_3)}=0,$$
$$(L_FT)^{i_1i_2}_{\sigma(i_3i_2)}=T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{i_3}}-T^{i_3i_2}_{\sigma(i_3i_2)}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{i_3}}=T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}-T^{i_3i_2}_{\sigma(i_3i_2)}=0,$$

由此得到

$$T^{i_1i_3}_{\sigma(i_1i_3)}=T^{i_1i_2}_{\sigma(i_1i_2)}=T^{i_3i_2}_{\sigma(i_3i_2)}.$$

由于 i_1,i_2,i_3 的任意性，(2.8) 成立。

为证明 (2.9)，我们取 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 使得 $j\neq i$，并取 F 使得 $F^i=x^j$，于是

$$(L_FT)^{ii}_{ij}=T^{ii}_{ii}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}-T^{ji}_{ij}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}-T^{ij}_{ij}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}=T^{ii}_{ii}-T^{ji}_{ij}-T^{ij}_{ij}=0,$$

结合 (2.8)，可推出

$$T^{ii}_{ii}=T^{ij}_{ij}+T^{ji}_{ij}=\sum_{\sigma\in S_2}T^{12}_{\sigma(12)}.$$

令 $c_\sigma=T^{12}_{\sigma(12)}$，由 (2.8) 和 (2.9) 可知 (2.7) 成立。 □

命题 2.5. 类型为 (3,3) 的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x)=\sum_{\sigma\in S_3}c_\sigma\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_3}}\otimes dx^{i_{\sigma(1)}}\otimes dx^{i_{\sigma(2)}}\otimes dx^{i_{\sigma(3)}},\qquad(2.13)\quad\{\texttt{t3-3}\}$$

其中 c_σ 是一个常数。

证明。 我们声称，对于任意 $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i\in\{1,\cdots,n\}$，若 $i_1,\ i_2,\ i_3$ 两两不同，

$$T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}=T^{123}_{\sigma(123)},\qquad(2.14)\quad\{\texttt{T123}\}$$

$$T^{iii}_{iii}=\sum_{\sigma\in S_3}T^{123}_{\sigma(123)}\qquad(2.15)\quad\{\texttt{T111}\}$$

and

$$\begin{aligned}
&T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}=c_{\sigma_1}+c_{\sigma_3},\ \ T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_2i_1}=c_{\sigma_2}+c_{\sigma_4},\ \ T^{i_1i_1i_2}_{i_2i_1i_1}=c_{\sigma_5}+c_{\sigma_6},\\
&T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_1}=c_{\sigma_1}+c_{\sigma_6},\ \ T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_1i_2}=c_{\sigma_2}+c_{\sigma_5},\ \ T^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_1}=c_{\sigma_3}+c_{\sigma_4},\\
&T^{i_2i_1i_1}_{i_2i_1i_1}=c_{\sigma_1}+c_{\sigma_2},\ \ T^{i_2i_1i_1}_{i_1i_2i_1}=c_{\sigma_3}+c_{\sigma_5},\ \ T^{i_2i_1i_1}_{i_1i_1i_2}=c_{\sigma_4}+c_{\sigma_6},\qquad(2.16)\quad\{\texttt{T112}\}
\end{aligned}$$

其中 $c_{\sigma_k}=T^{123}_{\sigma_k\,(123)}$ 按字典序排列。

事实上，若 $n=3$，通过选取向量场 F，使得 $F^{i_1}=x^{i_3},\ F^{i_3}=x^{i_1}$，我们得到 in

$$(L_FT)^{i_1i_1i_2}_{i_1i_3i_2}=T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_1i_3i_2}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}=T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}-T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}-T^{i_1i_3i_2}_{i_1i_3i_2}=0,$$

(2.17) {112132}

$$(L_FT)^{i_3i_1i_2}_{i_1i_1i_2}=T^{i_3i_1i_2}_{i_3i_1i_2}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}+T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}-T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}=T^{i_3i_1i_2}_{i_3i_1i_2}+T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}-T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}=0,$$

(2.18) {312112}

$$(L_FT)^{i_3i_2i_1}_{i_1i_2i_1}=T^{i_3i_2i_1}_{i_3i_2i_1}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}+T^{i_3i_2i_1}_{i_1i_2i_3}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}-T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_1}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}=T^{i_3i_2i_1}_{i_3i_2i_1}+T^{i_3i_2i_1}_{i_1i_2i_3}-T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_1}=0,$$

(2.19) {321121}

$$(L_FT)^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_3}=T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_1}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_3i_2i_1}_{i_1i_2i_3}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_2i_3}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}=T^{i_1i_2i_1}_{i_1i_2i_1}-T^{i_3i_2i_1}_{i_1i_2i_3}-T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_2i_3}=0.$$

(2.20) {121123}

由 (2.17) {112132}、(.)、(.19) 和 (2.20)，可得

$$T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_2i_3}=T^{i_3i_2i_1}_{i_3i_2i_1},\ T^{i_1i_3i_2}_{i_1i_3i_2}=T^{i_3i_1i_2}_{i_3i_1i_2}.$$

由于对 i_1,i_2,i_3, $T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_2i_3}=T^{123}_{123}$的任意选择。

通过选取带有 $F^{i_1}=x^{i_2},F^{i_2}=x^{i_1},F^{i_3}=x^{i_1}$的向量场 F，我们得到

$$(L_FT)^{i_1i_2i_3}_{i_2i_1i_1}=T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}+T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_1i_3}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}-T^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_1}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x_{i_1}}=T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}+T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_1i_3}-T^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_1}=0, \tag{2.21}$$ {123211}

$$(L_FT)^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_3}=T^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_1}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_3i_2i_1}_{i_2i_1i_3}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_1i_3}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}=T^{i_1i_2i_1}_{i_2i_1i_1}-T^{i_3i_2i_1}_{i_2i_1i_3}-T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_1i_3}=0, \tag{2.22}$$ {121213}

$$(L_FT)^{i_1i_2i_3}_{i_1i_3i_1}=T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x_{i_1}}+T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x_{i_1}}-T^{i_1i_1i_3}_{i_1i_3i_1}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x_{i_1}}=T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}+T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_3i_2}-T^{i_1i_1i_3}_{i_1i_3i_1}=0, \tag{2.23}$$ {123131}

$$(L_FT)^{i_1i_1i_3}_{i_1i_3i_2}=T^{i_1i_1i_3}_{i_1i_3i_1}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_2}}-T^{i_2i_1i_3}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_2}}-T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_2}}=T^{i_1i_1i_3}_{i_1i_3i_1}-T^{i_2i_1i_3}_{i_1i_3i_2}-T^{i_1i_2i_3}_{i_1i_3i_2}=0, \tag{2.24}$$ {113132}

由 (2.21) {123211}、(2.22) {121213}、(2.23) {123131} 和 (2.24) {113132}，可得

$$T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}=T^{i_3i_2i_1}_{i_2i_1i_3}=T^{i_2i_1i_3}_{i_1i_3i_2}.$$

由于 i_1、i_2、i_3、$T^{i_1i_2i_3}_{i_2i_3i_1}=T^{123}_{231}$ 的任意选取。

类似地，(2.14) 成立。

若 $n\geq 4$，则对于任意满足 $i_4\neq i_1$、$i_4\neq i_2$、$i_4\neq i_3$ 的 $i_4\in\{1,\cdots,n\}$，我们选取满足 $F^{i_1}=x^{i_4}$、$F^{i_2}=x^{i_4}$、$F^{i_3}=x^{i_4}$ 的向量场 F，根据当 $(j_1、j_2、j_3)\notin\Theta_3$ 时 $T^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}=0$ 这一事实，

$$\begin{aligned}
(L_FT)^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_4)}&=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x^{i_4}}-T^{i_1i_2i_4}_{\sigma(i_1i_2i_4)}\frac{\partial F^{i_3}}{\partial x^{i_4}}=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}-T^{i_1i_2i_4}_{\sigma(i_1i_2i_4)}=0,\\
(L_FT)^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_4i_3)}&=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x^{i_4}}-T^{i_1i_4i_3}_{\sigma(i_1i_4i_3)}\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x^{i_4}}=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}-T^{i_1i_4i_3}_{\sigma(i_1i_4i_3)}=0,\\
(L_FT)^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_4i_2i_3)}&=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{i_4}}-T^{i_4i_2i_3}_{\sigma(i_4i_2i_3)}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x^{i_4}}=T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}-T^{i_4i_2i_3}_{\sigma(i_4i_2i_3)}=0,
\end{aligned}$$

由此得到

$$T^{i_1i_2i_3}_{\sigma(i_1i_2i_3)}=T^{i_1i_2i_4}_{\sigma(i_1i_2i_4)}=T^{i_1i_4i_3}_{\sigma(i_1i_4i_3)}=T^{i_4i_2i_3}_{\sigma(i_4i_2i_3)}.$$

由于 i_1、i_2、i_3、i_4 的任意选取，(2.14) 成立。

为证明（2.16），我们选取向量场 F，使其满足 $F^{i_1}=x^{i_3}$，于是

$$(L_FT)^{i_1i_1i_2}_{i_1i_3i_2}=T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}-T^{i_1i_3i_2}_{i_1i_3i_2}\frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_3}}=T^{i_1i_1i_2}_{i_1i_1i_2}-T^{i_3i_1i_2}_{i_1i_3i_2}-T^{i_1i_3i_2}_{i_1i_3i_2}=0,$$

同样地，结合（2.14），可得（2.16）成立。

为证明 (2.15)，我们取 $j\in\{1,\cdots,n\}$，使得 $j\neq i$，并取 F，使得 $F^j=x^i$，于是

$$\begin{aligned}
(L_FT)^{jii}_{iii}&=T^{jii}_{jii}\frac{\partial F^j}{\partial x_i}+T^{jii}_{iji}\frac{\partial F^j}{\partial x_i}+T^{jii}_{iij}\frac{\partial F^j}{\partial x_i}-T^{iii}_{iii}\frac{\partial F^j}{\partial x_i}\\
&=T^{jii}_{jii}+T^{jii}_{iji}+T^{jii}_{iij}-T^{iii}_{iii}=0,
\end{aligned}$$

结合 (2.16) 和 (2.14)，可得

$$T^{iii}_{iii} = \sum_{\sigma\in S_3} T^{123}_{\sigma(123)}.$$

S令 $c_\sigma = T^{123}_{\sigma(123)}$，由 (2.14)、(2.15) 和 (2.16) 可知 (2.13) 成立。 □

因此，我们可以猜想，类型为 (p,p) 的平凡张量不变量具有如下形式

$$T(x) = \sum_{\sigma\in S_p} c_\sigma \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_{\sigma(p)}},$$

其中 c_σ 是常数。

2.2 解析张量不变量存在的必要条件

考虑如下解析微分方程组

$$\dot{x} = F(x),\ x = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{C}^n, \tag{2.25}$$ {eq01}

其中 $F(x) = (F^1(x) \cdots, F^n(x))$ 是解析向量值函数，且 $F(0) = 0$。系统 (2.25) {eq01} 可改写为

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x) \tag{2.26}$$ {eq1}

在 $x = 0$ 的邻域内，其中 A 是向量场 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处的雅可比矩阵，且 $\tilde{f}(x) = O(x^2)$。

为了证明本节的主定理，我们需要以下引理。

{lemma1}

引理 2.6。 如果系统 *(2.26)* 在 $x = 0$ 的某个邻域内具有一个解析张量不变量，该不变量可以写成

$$T = T^{(k)} + T^{(k+1)} + \cdots, \tag{2.27}$$ {exp2}

其中 $T^{(r)}(r = k, k+1, \cdots,)$ 是一个类型为 (p, q) 的解析张量场，其分量是次数为 r 的齐次多项式，并且 $T_{(k)} \not\equiv 0$，那么 $T^{(k)}$ 是线性系统的一个解析张量不变量

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.28}$$ {eq00}

证明。 由于 T 是系统 (2.26) 的张量不变量，

$$(L_F T)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = 0 \tag{2.29}$$ {eq02}

对任意 $i_r,\ j_s \in \{1,2,\cdots,n\}$均成立。将 (2.27) 代入 (2.29) 得到

$$\begin{aligned}0 =&[(Ax)^s+\tilde{f}^s(x)]\frac{\partial}{\partial x^s}(T^{(k)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+T^{(k+1)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+\cdots)\\&+(T^{(k)i_1\cdots i_p}_{sj_2\ldots j_q}+T^{(k+1)i_1\cdots i_p}_{sj_2\ldots j_q}+\cdots)(\frac{\partial(Ax)^s}{\partial x^{j_1}}+\frac{\partial\tilde{f}^s}{\partial x^{j_1}})+\cdots\\&+(T^{(k)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}s}+T^{(k+1)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}s}+\cdots)(\frac{\partial(Ax)^s}{\partial x^{j_q}}+\frac{\partial\tilde{f}^s}{\partial x^{j_q}})\\&-(T^{(k)li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+T^{(k+1)li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+\cdots)(\frac{\partial(Ax)^{i_1}}{\partial x^l}+\frac{\partial\tilde{f}^{i_1}}{\partial x^l})-\cdots\\&-(T^{(k)i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}+T^{(k+1)i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}+\cdots)(\frac{\partial(Ax)^{i_p}}{\partial x^l}+\frac{\partial\tilde{f}^{i_p}}{\partial x^l}).\end{aligned}\tag{2.30}$$ {com1}

现在，比较（2.30）两边 x 的最低次幂的系数，可得

$$\begin{aligned}(Ax)^s\frac{\partial}{\partial x^s}T^{(k)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+T^{(k)i_1\cdots i_p}_{sj_2\cdots j_q}\frac{\partial(Ax)^s}{\partial x^{j_1}}+\cdots+T^{(k)i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}s}\frac{\partial(Ax)^s}{\partial x^{j_q}}\\-T^{(k)li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial(Ax)^{i_1}}{\partial x^l}-\cdots-T^{(k)i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial(Ax)^{i_p}}{\partial x^l}=0,\end{aligned}$$

这意味着 $T^{(k)}$ 是线性系统（2.28）的张量不变量。引理得证。

推论 2.7。 假设系统（*2.26*）是线性的。若 T 是（*2.26*）的解析张量不变量，则 $T^{(r)}$（$r=k,\ k+1,\ \cdots,\ $）是系统（*2.26*）的解析张量不变量。 {推论1}

□

定理 2.8。 若系统（*2.26*）在 $x=0$ 的某个邻域内具有一个阶数为 k 、类型为（$p,\ q$）的解析张量不变量，则以下共振条件中至少有一个成立：

$$\sum_{j=1}^{n}k_j\lambda_j=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},\quad i_r,j_s\in\{1,2,\cdots,n\},\tag{2.31}$$ {eq4}

其中 λ_1、$\cdots$、λ_n 是 A、$k_j\in\mathbb{N}$、$\sum k_j=k$ 的特征值。

证明。 设 T 为系统 (2.26) 的 k 阶 (p,q) 型解析张量不变量，不失一般性，我们假设 T 具有 (2.27) {式 4} 的形式。根据引理 2.6， $T^{(k)}$ 是系统 (2.28) 的解析张量不变量。

由于经过非奇异线性变换后， A可化为若尔当标准形，为简单起见，我们假设 A 为若尔当标准形，即：

$$A=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_m\end{pmatrix},\quad J_r=\begin{pmatrix}\lambda_r&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_r\end{pmatrix},\tag{2.32}$$

其中， J_r（$r=1,\ \cdots,\ m$）是一个次数为 d_r，$d_1+\cdots+d_m=n$的若尔当块，并且 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m$可以相等。

作如下变量变换

$$x=Cv, \tag{2.33}$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m \end{pmatrix}, C_r=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{d_r-1} \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$\varepsilon>0$ 是一个常数，则系统 (2.28) 可改写为

$$\dot{v}=(B+\varepsilon\tilde{B})v, \tag{2.35}$$ {eq03}

其中

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix}, B_r=\begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$ {eq03}

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & & & \\ & \tilde{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{B}_m \end{pmatrix}, \tilde{B}_r=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

显然，$\tilde{T}^{(k)}(v,\varepsilon)=T_{(k)}(Cv)$ 是线性系统 (2.35) 的解析张量不变量，即

$$L_H\tilde{T}^{(k)}(v,\varepsilon)=0, \tag{2.38}$$ {eq04}

其中 H 表示系统 (2.35) 的向量场，即 $H(v)=(B+\varepsilon B)v$。

注意到，对于任意 $i_r,\ j_s\in\{1,2,\cdots,n\}$，

$$(\tilde{T}^{(k)})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(v,\varepsilon)=(c_{j_1j_1}\cdots c_{j_qj_q}c^{-1}_{i_1i_1}\cdots c^{-1}_{i_pi_p})(T^{(k)})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(Cv),$$

其中 c_{ij} 是矩阵 C 的元素，$\tilde{T}^{(k)}(v,\ \varepsilon)$ 具有如下形式

$$\tilde{T}^{(k)}(v,\varepsilon)=\varepsilon^l\tilde{T}^{(k)}_l(v)+\varepsilon^{l+1}\tilde{T}^{(k)}_{l+1}(v)\cdots+\varepsilon^L\tilde{T}^{(k)}_L(v), \tag{2.39}$$ {eq004}

其中 l、L 为整数，$\tilde{T}^{(k)}_r(v)$ 是张量场，其分量均为次数为 k 的齐次函数，且 $\tilde{T}^{(k)}_l(v)\not\equiv 0$。由 (2.38) 和 (2.39)，我们有

$$\begin{aligned} 0=&((B+\varepsilon\tilde{B})v)^s\frac{\partial}{\partial v^s}(\varepsilon^l(\tilde{T}^{(k)}_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(v)+\cdots+\varepsilon^L(\tilde{T}^{(k)}_L)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(v))\\ &+(\varepsilon^l(\tilde{T}^{(k)}_l)^{i_1\cdots i_p}_{sj_2\cdots j_q}(v)+\cdots+\varepsilon^L(\tilde{T}^{(k)}_L)^{i_1\cdots i_p}_{sj_2\cdots j_q}(v))\frac{\partial((B+\varepsilon\tilde{B})v)^s}{\partial v^{j_1}}+\cdots\\ &+(\varepsilon^l(\tilde{T}^{(k)}_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}s}(v)+\cdots+\varepsilon^L(\tilde{T}^{(k)}_L)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}s}(v))\frac{\partial((B+\varepsilon\tilde{B})v)^s}{\partial v^{j_q}}\\ &-(\varepsilon^l(\tilde{T}^{(k)}_l)^{si_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(v)+\cdots+\varepsilon^L(\tilde{T}^{(k)}_L)^{si_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(v))\frac{\partial((B+\varepsilon\tilde{B})v)^{i_1}}{\partial v^s}-\cdots\\ &-(\varepsilon^l(\tilde{T}^{(k)}_l)^{i_1\cdots i_{p-1}s}_{j_1\cdots j_q}(v)+\cdots+\varepsilon^L(\tilde{T}^{(k)}_L)^{i_1\cdots i_{p-1}s}_{j_1\cdots j_q}(v))\frac{\partial((B+\varepsilon\tilde{B})v)^{i_p}}{\partial v^s}. \end{aligned} \tag{2.40}$$ {eqq004}

由于 $\tilde{T}_{(k)l}(v) \neq 0$，存在某个 $\hat{i}_m, \hat{j}_n \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得 $\psi(v) \triangleq (\tilde{T}_{(k)l})_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p\hat{j}_1\cdots\hat{j}_q}(v) \neq 0$。现在将 (2.40) 中关于 ε 的所有同阶项令为零，我们得到

$$(Bv)^s \frac{\partial}{\partial v^s}\psi(v) + \psi(v)\lambda_{\hat{j}_1} + \cdots + \psi(v)\lambda_{\hat{j}_q} - \psi(v)\lambda_{\hat{i}_1} - \cdots - -\psi(v)\lambda_{\hat{i}_p} = 0. \quad (2.41) \quad \{\text{eq06}\}$$

假设

$$\psi(v) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n}. \quad (2.42) \quad \{\text{eq07}\}$$

将 (2.42) 代入 (2.41)，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} [(k_1+\cdots+k_{d_1})\lambda_1 + \cdots + (k_{d_1+\cdots+d_{m-1}+1}k_n)\lambda_m)]\psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} \\
&+ \lambda_{\hat{j}_1}\psi_{k_1\ldots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} + \cdots + \lambda_{\hat{j}_q}\psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} \\
&- \lambda_{\hat{i}_1}\psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} + \cdots - \lambda_{\hat{i}_p}\psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} = 0.
\end{aligned} \quad (2.43) \quad \{\text{eq10}\}$$

整理后，(2.43) 变为

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=k} (k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n+\lambda_{\hat{j}_1}+\cdots+\lambda_{\hat{j}_q}-\lambda_{\hat{i}_1}-\cdots-\lambda_{\hat{i}_p})\psi_{k_1\cdots k_n}(v^1)^{k_1}\cdots(v^n)^{k_n} = 0.$$

因此，对于任何非零系数 $\psi_{k_1\cdots k_n}$，都必须满足 (2.31) 型的共振条件。

□

注 2.9。*(1)* 如果 *det* $A = 0$，那么至少存在一个 *(2.31)* 型的共振关系。事实上，如果 $\lambda_1 = 0$，我们只需取 $k_1 = k$、$k_2 = \cdots = k_n = 0$ 和 $i_1 = \cdots = i_p = j_1 = \cdots = j_q = 1$。

(2) 当 $0 \leq q < p$时，*(2.31)* 有与 λ_1、$\cdots$、λ_n 的取值无关的解。事实上，集合中的任意元素

$$\Sigma = \{(k_1,\cdots,k_n,i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q) \mid k_j = \delta^j_{i_{q+1}} + \cdots + \delta^j_{i_p}, i_1 = j_1, \cdots, i_q = j_q\}$$

是（*2.31*）的一个解。

（*3*）定理 *2.8* 可视为某些已知结果的推广。

当 $p = 0$、$q = 0$ 时，定理 *2.8* 与 *[2, 7]* 中关于第一积分的一些结果一致。

当 $p = 1$、$q = 0$ 时，定理 *2.8* 与 *[4]* 中关于李对称性的一些结果一致。

（*4*）当 $k_1 = \cdots = k_n = 0$、$p = q$ 和 $i_1 = j_1$、$\cdots$、$i_p = j_p$ 时，必须满足共振关系。

3 半拟齐次系统的张量不变量

3.1 拟齐次系统与半拟齐次系统 s

首先回顾拟齐次系统和半拟齐次系统的一些概念。更多详情请参阅 [2]。

考虑一个微分方程系统

$$\dot{x} = g(x), \quad x = (x^1,\cdots,x^n) \in \mathbb{C}^n. \quad (3.44) \quad \{\text{eq12}\}$$

定义 3.1. 设 $s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{N}$。若对于任意 $\rho \in \mathbb{R}^+$，$g = (g^1, \cdots, g^n)$ 的所有分量都满足

$$g^j(\rho^{s_1}x^1, \cdots, \rho^{s_n}x^n) = \rho^{s_j+m-1}g^j(x^1, \cdots, x^n), \tag{3.45}$$ {eq13}

则系统 *(3.44)* 称为次数为 m 、指数为s_1、 $\cdots$、 s_n的拟齐次系统，其中 $m \in \mathbb{N}$、 $m > 1$。

定义 3.2. 设 $g(x) = g_m(x)+\tilde{g}(x)$。若 $g_m(x)$ 是次数为 m、指数为 s_1、 $\cdots$、 $s_n \in \mathbb{N}$的拟齐次向量场，且 $\tilde{g}(x)$ 是次数全都大于 m （正半拟齐次）或全都小于 m （负半拟齐次）的拟齐次向量场之和，则系统 *(3.44)* 称为半拟齐次系统。

设 $S = \text{diag}(s_1, \cdots, s_n)$ 为对角矩阵。我们用ρ^S表示 $\text{diag}(\rho^{s_1}, \cdots, \rho^{s_n})$。

若系统 (3.44) 是半拟齐次的，则在变换下

$$x \mapsto \rho^S x, \quad t \mapsto \rho^{-\alpha}t, \quad \alpha = \frac{1}{m-1}, \tag{3.46}$$ {eq22}

它变为

$$\dot{x} = g_m(x) + \tilde{g}(x, \rho),$$

其中， $\tilde{g}(x, \rho)$ 是关于 ρ （正半拟齐次性）或关于 ρ^{-1} （负半拟齐次性）的形式幂级数，且不含常数项。

我们首先考虑半拟齐次系统的拟齐次截断 (3.44)

$$\dot{x} = g_m(x). \tag{3.47}$$ {eq23}

系统 (3.47) 存在如下形式的特解

$$x_0(t) = t^{-H}c = t^{\alpha S}c, \tag{3.48}$$ {eq24}

其中， $H = \alpha S$ 以及平衡 $c \neq 0$ 必须满足代数方程组$Hc + g_m(c) = 0$。作变量变换

$$x = t^{-H}(c + u), \quad \tau = \ln t, \tag{3.49}$$ {eq26}

系统 (3.47) 可写为

$$u' = Ku + \tilde{f}(u), \tag{3.50}$$ {KE}

其中$' = \frac{d}{d\tau}$，$K = H + \frac{\partial g_m}{\partial x}(c)$即所谓的Kovalevskaya矩阵。其特征值称为科瓦列夫斯卡娅指数。根据 [15]， $\lambda = -1$ 是科瓦列夫斯卡娅指数之一。

3.2 半拟齐次系统张量不变量的必要条件

{def3}

定义 3.3。 类型为 (p, q) 的张量场 T ，如果对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，均满足……，则称为次数为 l、指数为 $s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{N}$ 的拟齐次张量场，

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\lambda^{s_1}x^1, \cdots, \lambda^{s_n}x^n) = \lambda^{l-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x). \tag{3.51}$$ {quasi}

注 3.4。 给定 $s_1,\cdots,s_n\in\mathbb{N}$ 时，具有相同分量函数的不同类型 (p,q) 张量场，可以被归类为次数不同的拟齐次张量场。例如，对于 $(s_1,s_2)=(1,\ 2)$，$x^1\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1$ 是次数为1的拟齐次张量场，而 $x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1$ 是次数为0的拟齐次张量场。

我们将寻找正（负）半拟齐次系统 (3.44) 的解析（多项式）张量不变量。注意到，解析（多项式）张量不变量 $T(x)$ 可借助矩阵 S 进行缩放，即可改写如下

$$T(x)=T_l(x)+T_{l+1}(x)+T_{l+2}(x)+\cdots \tag{3.52}$$ {tensor}

$$(\text{resp. } T(x)=T_l(x)+T_{l-1}(x)+T_{l-2}(x)+\cdots+T_{l-L}(x),L<l), \tag{3.53}$$ {tensorr}

其中，$T_r(x)$ 是一个次数为 r 的 $(p,\ q)$ 型拟齐次张量场，且

$$(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)=\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}a_{k_1\cdots k_n}(x^1)^{k_1}\cdots(x^n)^{k_n}. \tag{3.54}$$ {Tr}

{remark3}

注 3.5. 上述拟齐次张量场的次数可以为正、零或负。特别地，若 $s_1=\cdots=s_n=1$，则对于 (p,q) 型拟齐次张量场，其次数 l 满足 $l\geq q-p$。

{le3}

引理 3.6. 若系统 *(3.44)* 是正半拟齐次的，则

$$L_gT_r(\rho^Sx)=\rho^{r+m-1}(L_{g_m}T_r(x)+O(\rho)).$$

若系统 *(3.44)* 是负半拟齐次的，则

$$L_gT_r(\rho^Sx)=\rho^{r+m-1}(L_{g_m}T_r(x)+O(\rho^{-1})).$$

证明。 若系统 (3.44) 是正半拟齐次的，则对任意 $i_r,\ j_s\in\{1,\cdots,n\}$，

$$\begin{aligned}(L_gT_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)=&g^k\frac{\partial}{\partial x^k}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)+T^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}\frac{\partial g^k}{\partial x^{j_1}}+\cdots+T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}\frac{\partial g^k}{\partial x^{j_q}}\\&-T^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial g^{i_1}}{\partial x^l}-\cdots-T^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial g^{i_p}}{\partial x^l}.\end{aligned} \tag{3.55}$$ {eq2222}

由式 (3.45) 和 (3.51)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^k_m}{\partial x^j}(\rho^Sx)=&\rho^{-s_j+s_k+m-1}\frac{\partial g^k_m}{\partial x^j}(x),\\\frac{\partial(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^j}(\rho^Sx)=&\rho^{-s_j+r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}\frac{\partial(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^j}(x).\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&(L_gT_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\rho^S x)\\
=&\rho^{s_k+m-1}(g^k_m(x)+\tilde{g}^k(x,\rho))\rho^{-s_k+r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}\frac{\partial}{\partial x^k}(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)\\
&+\rho^{r-s_k-s_{j_2}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}(x)\rho^{s_k+m-1-s_{j_1}}\frac{\partial(g^k_m(x)+\tilde{g}^k(x,\rho))}{\partial x^{j_1}}\\
&+\cdots\\
&+\rho^{r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_{q-1}}-s_k+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}(x)\rho^{s_k+m-1-s_{j_q}}\frac{\partial(g^k_m(x)+\tilde{g}^k(x,\rho))}{\partial x^{j_q}}\\
&-\rho^{r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}++s_l+s_{i_2}+\cdots+s_{i_p}}((T_r)^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)\rho^{s_{i_1}+m-1-s_l}\frac{\partial(g^{i_1}_m(x)+\tilde{g}^{i_1}(x,\rho))}{\partial x^l}\\
&-\cdots\\
&-\rho^{r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}++s_1+\cdots+s_{i_{p-1}}+s_l}(T_r)^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}(x)\rho^{s_{i_1}+m-1-s_l}\frac{\partial(g^{i_p}_m(x)+\tilde{g}^{i_p}(x,\rho))}{\partial x^l}\\
=&\rho^{r+m-1-s_{j_1}-\ldots-s_{j_q}+s_{i_1}+\ldots+s_{i_p}}((L_{g_m}T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)+O(\rho)),
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
&L_gT_r(\rho^S x)\\
=&(L_gT_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\rho^S x)\frac{\partial}{\partial(\rho^{s_{i_1}}x^{i_1})}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial(\rho^{s_{i_p}}x^{i_p})}\otimes d(\rho^{s_{j_1}}x^{j_1})\otimes\cdots\otimes d(\rho^{s_{j_q}}x^{j_q})\\
=&\rho^{r+m-1}(L_{g_m}T_r(x)+O(\rho)).
\end{aligned}
$$

负半拟齐次的情形可以类似地证明。 □

{引理3}

引理 3.7. 假设系统 *(3.44)* 是正（分别为负）半拟齐次的
若 $T(x)$ 由 (3.52) {等式2232}（分别为 (.53)）给出，且是系统 *(3.44)* 的解析（分别为多项式）张量不变量，那么 T_l 是截断系统 *(3.47)* 的拟齐次张量不变量。

证明. 这里以正半拟齐次的情形为例，另一种情形与之类似。根据引理 3.6,

$$0=L_gT(\rho^S x)=L_g(T_l(\rho^S x)+T_{l+1}(\rho^S x)+\cdots)=\rho^{l+m-1}L_{g_m}T_l(x)+O(\rho^{l+m}).$$

由于 ρ的任意性，我们得到

$$L_{g_m}T_l=0,$$

这意味着 T_l 是系统（3.47）的拟齐次张量不变量。 □

类似地，我们可以得到以下结论。

{引理4}

引理 3.8。 假设系统（*3.44*）是拟齐次的。如果 T（x） 是（*3.44*）的解析张量不变量，那么 T_r（$r\geq l$） 是系统（*3.44*）的拟齐次张量不变量。

现在我们给出拟齐次系统中张量不变量存在的一个必要条件。

{th2}

定理 3.9. 假设系统 *(3.44)* 是半拟齐次的。若 *(3.44)* 在特解 *(3.48)* 的某个邻域内具有类型为 (p,q) 的解析张量不变量，则截断系统 *(3.47)* 容许一个次数为 l 的拟齐次张量不变量，并且下列共振条件中至少有一个成立：

$$-\frac{l}{m-1}+\sum_{j=1}^{n}k_j\lambda_j=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},\quad k_j\in\mathbb{N},\tag{3.56}$$ {eq032}

其中 λ_1、$\cdots$、λ_n 是 *(3.47)* 的科瓦列夫斯卡娅指数，m 是 *(3.47)* 的次数，且 i_r、$j_s\in\{1,\cdots,n\}$。此外，若 $l\geqslant 0$，则 (3.56){eq032} 可改写为

$$\sum_{j=1}^{n}k_j\lambda_j=(m-1)(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q}),\quad k_j\in\mathbb{N},\quad k_1\geqslant l.\tag{3.57}$$ {eq32}

证明。设 $T(x)$ 是系统 (3.44) 的一个类型为 (p,q) 的解析张量不变量，则由引理 3.7 可知，截断系统 (3.47) 存在一个拟齐次张量不变量 $T_l(x)$。

在变换 (3.49) 下，$T_l(x)$ 变为

$$\begin{aligned}
&(T_l)(t^{-H}(c+u))\\
=&\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(t^{-H}(c+u))\frac{\partial}{\partial t^{-h_{i_1}}(c^{i_1}+u^{i_1})}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial t^{-h_{i_p}}(c^{i_p}+u^{i_p})}\\
&\otimes d(t^{-h_{j_1}}(c^{j_1}+u^{j_1}))\otimes\cdots\otimes d(t^{-h_{j_q}}(c^{j_q}+u^{j_q}))\\
=&\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}t^{-\alpha l+h_{j_1}+\cdots+h_{j_q}-h_{i_1}-\cdots-h_{i_p}}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)(t^{h_{i_1}}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}})\otimes\cdots\otimes(t^{h_{i_p}}\frac{\partial}{\partial u^{i_p}})\\
&\otimes(t^{-h_{j_1}}du^{j_1}-h_{j_1}t^{-h_{j_1}-1}(c^{j_1}+u^{j_1})dt)\otimes\cdots\otimes(t^{-h_{j_q}}du^{j_q}-h_{j_q}t^{-h_{j_q}-1}(c^{j_q}+u^{j_q})dt)\\
=&\,t^{-\alpha l}\hat{T}(u)-t^{-\alpha l-1}\bar{T}(t,u),
\end{aligned}$$

其中

$$\hat{T}(u)=\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\leq n}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_p}}\otimes du^{j_1}\otimes\cdots\otimes du^{j_q},$$

$\bar{}$ 和 $T(t,u)$ 表示所有类型为 (p,q) 且基包含 t 的张量场。

设 $\tilde{T}(u^0,u)=(u^0)^{\delta l}\hat{}T(u)$，则 $\tilde{T}(u^0,u)$ 是一个类型为 (p,q) 的张量场，且

$$\begin{aligned}
&\tilde{T}(u^0,u)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=(u^0)^{\delta l}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u),\quad i_r,j_s\in\{1,\cdots,n\},\\
&\tilde{T}(u^0,u)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=0,\quad i_1\cdots i_pj_1\cdots j_q=0.
\end{aligned}$$

我们声称，$\tilde{T}(u^0,\ u)$ 是系统的解析张量不变量

$$(u^0)'=-\delta\alpha u^0,\quad u'=Ku+\tilde{f}(u),\tag{3.58}$$ {new}

其中 $u^0=t^{-\delta\alpha}=e^{-\delta\alpha\tau}$，$\delta=\mathrm{sgn}(l)$，这意味着

$$(L_{\tilde{g}}\tilde{T}(u^0,u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=0\tag{3.59}$$ {de}

对于任意 $i_r, j_s \in \{0,1,\cdots,n\}$ 均成立，其中 $\tilde{g}$ 表示式 (3.58) 的向量场。

若 $i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q = 0$，不失一般性，假设 $i_1 = 0$，这意味着 $\tilde{T}(u^0,\ u)^{0i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = 0$，那么由 (1.3) 可得

$$(L_{\tilde{g}}\tilde{T}(u^0,u))^{0i_2\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q} = -\sum_{k=0}^{n}\tilde{T}(u^0,u))^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial(-\delta\alpha u^0)}{\partial u^k} = 0.$$

若 $i_r,\ j_s \in \{1,\cdots,n\}$，则 (3.59) 等价于

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{g}}\tilde{T}(u^0,u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q} =& -\delta\alpha u^0\delta l(u^0)^{\delta l-1}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}(c+u) + (u^0)^{\delta l}(L_G\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}\\ =&(u^0)^{\delta l}[-\alpha l(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}(c+u) + (L_G\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}] = 0,\end{aligned}$$

其中 $G(u) = Ku + f(u)$。注意到

$$Ku + \tilde{f}(u) = g_m(c+u) + H(c+u)$$

以及李导数的线性性质，

$$(L_G\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q} = (L_{g_m}\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q} + (L_H\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}. \tag{3.60}$$ {LG}

由于 $T_l(x)$ 是系统 (3.47) 的拟齐次张量不变量，因此有

$$\begin{aligned}g^k_m(x)\frac{\partial}{\partial x^k}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x) + (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}(x)\frac{\partial g^k_m(x)}{\partial x^{j_1}} + \cdots + (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}(x)\frac{\partial g^k_m(x)}{\partial x^{j_q}}\\ -(T_l)^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x)\frac{\partial g^{i_1}(x)}{\partial x^k} - \cdots - (T_l)^{i_1\cdots i_{p-1}k}_{j_1\cdots j_q}(x)\frac{\partial g^{i_p}(x)}{\partial x^k} = 0,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(L_{g_m}\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\ldots j_q} =& g^k_m(c+u)\frac{\partial}{\partial u^k}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u) + (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial g^k_m(c+u)}{\partial u^{j_1}} + \cdots\\ &+ (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}(c+u)\frac{\partial g^k_m(c+u)}{\partial u^{j_q}} - (T_l)^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial g^{i_1}(c+u)}{\partial u^k}\\ &- \cdots - (T_l)^{i_1\cdots i_{p-1}k}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial g^{i_p}(c+u)}{\partial u^k}\\ =&\ 0.\end{aligned} \tag{3.61}$$ {gm}

假设 $H=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)$，则 $h_i=\alpha s_i (i=1,2,\cdots,n)$，

$$
\begin{aligned}
&(L_H\hat{T}(u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\\
=&(H(c+u))^k\frac{\partial (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)}{\partial u^k}\\
&+(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial (H(c+u))^k}{\partial u^{j_1}}+\cdots+(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}(c+u)\frac{\partial (H(c+u))^k}{\partial u^{j_q}}\\
&-(T_l)^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial (H(c+u))^{i_1}}{\partial u^l}-\cdots-(T_l)^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\frac{\partial (H(c+u))^{i_p}}{\partial u^l}\\
=&h_k(c^k+u^k)\frac{\partial (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)}{\partial u^k}\\
&+\delta^k_{j_1}h_k(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}(c+u)+\cdots+\delta^k_{j_q}h_k(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}(c+u)\\
&-\delta^{i_1}_l h_{i_1}(T_l)^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)-\cdots--\delta^{i_p}_l h_{i_p}(T_l)^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\\
=&h_k(c^k+u^k)\frac{\partial (T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)}{\partial u^k}\\
&+(h_{j_1}+\cdots+h_{j_q}-h_{i_1}-\cdots-h_{i_p})(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u). \qquad (3.62)\quad \{\texttt{h1}\}
\end{aligned}
$$

根据 (3.54) 式 $\{\texttt{h1}\}$，$(\ )^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)$ 可写为

$$
(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)=\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=l-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}} a_{k_1\cdots k_n}(x^1)^{k_1}\cdots(x^n)^{k_n},
$$

thus

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^n(h_r(c^r+u^r))\frac{\partial}{\partial u^r}(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u)\\
=&\sum_{r=1}^n(h_r(c^r+u^r))\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=l-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}\frac{\partial}{\partial u^r}[a_{k_1\cdots k_n}(c^1+u^1)^{k_1}\cdots(c^n+u^n)^{k_n}]\\
=&\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=l-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}a_{k_1\cdots k_n}\sum_{r=1}^n(h_rk_r)(c^1+u^1)^{k_1}\cdots(c^n+u^n)^{k_n}\\
=&\sum_{r=1}^n(\alpha s_rk_r)\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=l-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}a_{k_1\cdots k_n}(c^1+u^1)^{k_1}\cdots(c^n+u^n)^{k_n}\\
=&(\alpha l-h_{j_1}-\cdots-h_{j_q}+h_{i_1}+\cdots+h_{i_p})(T_l)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(c+u). \qquad (3.63)\quad \{\texttt{h2}\}
\end{aligned}
$$

根据 (3.61)、(3.62) 和 (3.63)，$(L_{\tilde{g}}\tilde{T}(u^0,u))^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=0$ 对任意 $i_r,j_s\in\{1,\cdots,n\}$ 均成立。

根据定理 2.8，(3.56) 型的共振条件中至少有一个必须成立。此外，由于 $\lambda_1=-1$，当 $l\geqslant 0$ 时，(3.56) 可化简为

$$
-l+(m-1)\sum_{j=1}^n k_j\lambda_j=(m-1)(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q}),k_j\in\mathbb{N}. \qquad (3.64)\quad \{\texttt{42}\}
$$

将 $l+(m-1)k_1\to k_1$ 和 $(m-1)k_j\to k_j$、$j=2,\cdots,n$ 代入（3.64）$\{\texttt{42}\}$，可得到（3.57）。定理得证。 □

注 3.10。 我们的结果可以看作是 *Kozlov* 在*[15]*中所得结果的推广。一方面，*Kozlov* 的结果给出了在 $x=c$ 处非零的拟齐次张量不变量存在性的定理，而我们的结果没有这一限制。另一方面，我们的方法与他的方法不同。可以如下理解。*Kozlov* 的结果是在特解上进行研究的。然而，我们的结果可以看作是沿特解的一阶变分。更有趣的是，利用我们的方法，我们甚至可以研究高阶变分问题。

4 例子

本节中，我们给出几个例子来说明我们的结果。**例 1** 为说明定理 2.8，我们考虑以下人工系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = \sqrt{2}x_2. \end{cases} \tag{4.65}$$ {arti}

显然， $\lambda_1 = 1$， $\lambda_2 = \sqrt{2}$ 是系统 (4.65) 的雅可比矩阵的特征值。根据定理 2.8，如果系统 (4.65) 存在类型为 $(p,\ q)$ 的解析张量不变量，那么以下共振条件至少有一个成立：

$$k_1 + \sqrt{2}k_2 = \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p} - \lambda_{j_1} - \cdots - \lambda_{j_q}, \tag{4.66}$$ {reson0}

其中 $k_1,\ k_2 \in \mathbb{N},\ i_r,\ j_s \in \{1,2\}$。

推论 4.1. *(1)* 系统 *(4.65)* 的任何类型为$(0,\ 0)$ 、次数为 k 的解析张量不变量都是平凡的；

(2) 系统 *(4.65)* 的任何类型为$(1,\ 0)$ 的解析张量不变量都具有如下形式

$$T(x) = \alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2};$$

(3) 系统 *(4.65)* 的任意类型为$(1,1)$ 的解析张量不变量具有如下形式

$$T(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes dx_1 + \beta \frac{\partial}{\partial x_2} \otimes dx_2;$$

(4) 系统 *(4.65)* 的任意类型为$(2,0)$ 的解析张量不变量具有如下形式

$$T(x) = \beta x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x_2};$$

(5) 当 $q > p$ 时，系统 *(4.65)* 不存在类型为(p,q) 的解析张量不变量；其中 $\alpha,\beta,\gamma,\zeta$ 为常数。

证明。 由于系统 (4.65) 是线性的，根据引理 2.6 和推论??，如果

$$T = T^{(k)} + T^{(k+1)} + \cdots$$

是（4.65）的一个类型为（$p,\ q$）的解析张量场，其中 $T^{(r)}(r = k,\ k+1,\ \cdots,\ )$ 的分量是 r 次齐次多项式，则 $T^{(r)}(r = k,\ k+1,\ \cdots,\ )$

是系统（4.65）的一个类型为（p, q）的解析张量不变量，且（4.66）成立，其中 $k = k_1 + k_2$。

(1) 设 $T = T(x_1, x_2)$ 是系统 (4.65) 的 $(0, 0)$ 型解析张量不变量，即 T 是系统 (4.65) 的解析第一积分，那么根据 [7], 中的定理 C，T 必为常数，也就是说， T 是平凡张量不变量。

(2) 根据 (4.66)，我们有 $k = k_1 + k_2 = 1$。令

$$T = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

为系统 (4.65) 的 (1,0) 型张量不变量，其中 β_i,γ_j 为常数。令 F 表示 (4.65) 的向量场, 即,

$$F = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

由 $(L_F T)^i = 0, i = 1, 2$ 可得

$$(\sqrt{2} - 1)\beta_2 x_2 = 0,$$
$$(\sqrt{2} - 1)\gamma_1 x_1 = 0,$$

由此得到 $\beta_2 = \gamma_1 = 0$。因此

$$T(x) = \alpha x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

(3) 根据 (4.66)，我们有 $k = k_1 + k_2 = 0$。令

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} \beta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$$

是系统 (4.65) 的 (1,1) 型张量不变量，其中 β_i,γ_j 为常数。由 $(L_F T)^i_j = 0, i, j = 1, 2$ 可得

$$(\sqrt{2} - 1)\beta_{12} = 0,$$
$$(\sqrt{2} - 1)\beta_{21} = 0,$$

由此对 $i \neq j$ 得到 $\beta_{ij} = 0$ 。因此

$$T = \beta_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} \otimes dx_1 + \beta_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} \otimes dx_2.$$

（4）由 (4.66)，我们有 $k = k_1 + k_2 = 2$。设

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} (\beta_{ij}x_1^2 + \alpha_{ij}x_1x_2 + \gamma_{ij}x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$$

是系统 (4.65) 的 (2,0) 型张量不变量，其中 β_{ij},α_{ij},γ_{ij} 为常数。由 $(L_F T)^{ij} = 0, i, j = 1,$ 2 可得

$$(\sqrt{2} - 1)\alpha_{11}x_1x_2 + (2\sqrt{2} - 2)\gamma_{11}x_2^2 = 0,$$
$$(\sqrt{2} - 1)\beta_{12}x_1^2 + (1 - \sqrt{2})\gamma_{12}x_2^2 = 0,$$
$$(\sqrt{2} - 1)\beta_{21}x_1^2 + (1 - \sqrt{2})\gamma_{21}x_2^2 = 0,$$
$$(2 - 2\sqrt{2})\beta_{22}x_1^2 + (1 - \sqrt{2})\alpha_{22}x_1x_2 = 0,$$

从而得到 $\alpha_{11}=\gamma_{11}=\beta_{12}=\gamma_{12}=\beta_{21}=\gamma_{21}=\alpha_{22}=\beta_{22}=0$。因此

$$T(x)=\beta x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}\otimes\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\otimes\frac{\partial}{\partial x_2}+\gamma x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\otimes\frac{\partial}{\partial x_1}+\zeta x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}\otimes\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

(5) 根据(4.66)和 $q>p$，可以得到 $0\leqslant k=p-q<0$，这是一个压缩映射。 □

例2 考虑一个三维洛特卡－沃尔泰拉系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3,\\ \dot{x}_2=-x_1x_2+x_2^2+3x_2x_3,\\ \dot{x}_3=3x_2x_3-x_3^2.\end{cases}\tag{4.67}$$ {ex1}

系统(4.67)是一个次数为2、指数为 $s_1=s_2=s_3=1$的拟齐次系统。因此 $m=2$, $S=E=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1)\alpha=\frac{1}{m-1}=1,\ H=\alpha S=E$。由于以下代数方程

$$\begin{cases}c_1+2c_1^2+2c_1c_2+c_1c_3=0,\\ c_2-c_1c_2+c_2^2+3c_2c_3=0,\\ c_3+3c_2c_3-c_3^2=0\end{cases}$$

有一个非零解 $c=(0,\ -1,\ 0)$，系统(4.67)有一个特解 $x_0(t)=t^{-H}c=t^Ec$。相应的 Kovalevskaya 矩阵

$$K=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&-3\\0&0&-2\end{pmatrix}\tag{4.68}$$ {ex1}

其科瓦列夫斯卡娅指数为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$。

推论4.2。 *(1) 系统(4.67)的任意(0，0)型解析张量不变量都是平凡的；*

(2) 任何解析 lytic tensor invariant of type $(1,1)$ of system (4.67) is trivial；(3) 系统 (4.67) 的任意 $(1,0)$ 型解析张量不变量，除相差一个常数外，均为该向量场本身；

(4) 当 $q>\frac{3}{2}p$ 时，系统 (4.67) 不存在 (p,q) 型解析张量不变量；

证明。 由于系统 (4.67) 是拟齐次的，由引理 3.8 和定理 3.9，如果

$$T(x)=T_l(x)+T_{l+1}(x)+T_{l+2}(x)+\cdots$$

是 (4.67) 的类型为 (p,q) 的解析张量不变量，其中 $T_r(x)(r\geq l)$ 是次数为 r 的类型为 (p,q) 的拟齐次张量场，且

$$(T_r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x)=\sum_{s_1k_1+\cdots+s_nk_n=r-s_{j_1}-\cdots-s_{j_q}+s_{i_1}+\cdots+s_{i_p}}a_{k_1\cdots k_n}(x^1)^{k_1}\cdots(x^n)^{k_n},\tag{4.69}$$ {Tre}

则 $T_r(r\geq l)$ 是系统 (4.67) 的次数为 r 的拟齐次张量不变量，且以下共振条件至少有一个成立：

$$-r-k_1-k_2-2k_3=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},$$

其中 $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{N},\quad i_r,\ j_s \in \{1,2,3\}$。结合注 3.5，可得

$$q-p \le r = -(k_1+k_2+2k_3+\lambda_i+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}\cdots-\lambda_{j_q}) \le 2p-q. \qquad (4.70) \quad \{\texttt{exre1}\}$$

(1) 令 T 的类型为 (0,0)，由 (4.70) 可得 {exre1}, $r=0$；根据 (4.69)，T 必须是一个常数，即 T 是一个平凡张量不变量。

(2) 令 T 的类型为 (1,1)，由 (4.70) 可得 $0 \le r \le 1$。

若 $r=0$，根据 (4.69)，则 T_r 具有如下形式

$$T_r = \sum_{i,j=1}^{3} \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j,$$

其中 β_{ij} 是常数。记 F 为与系统 (4.67) 相关联的向量场，即,

$$F = (2x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1x_2+x_2^2+3x_2x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (3x_2x_3-x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

那么 $(L_F T_r)^i_j = 0 (i,j=1,2,3)$ 意味着

$$\begin{aligned}
\beta_{12}x_2 + (2\beta_{21}+\beta_{31})x_1 &= 0,\\
(2\beta_{11}-2\beta_{22}-\beta_{32})x_1 + 3\beta_{13}x_3 &= 0,\\
(\beta_{11}-2\beta_{23}-\beta_{33})x_1 &= 0,\\
5\beta_{21}x_1 + (-\beta_{22}+\beta_{11}-3\beta_{31})x_2 - 2\beta_{21}x_3 &= 0,\\
3\beta_{23}x_3 - 3\beta_{32}x_2 &= 0,\\
(3\beta_{22}-3\beta_{33})x_2 &= 0,\\
4\beta_{31}x_1 - \beta_{31}x_2 + 3\beta_{31}x_3 &= 0,\\
(3\beta_{33}-3\beta_{22})x_3 &= 0,
\end{aligned}$$

这导出了 $i \ne j$ 和 $\beta_{11}=\beta_{22}=\beta_{33}$ 的 $\beta_{ij}=0$。因此

$$T_r = \beta_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}\otimes dx_1 + \beta_{11}\frac{\partial}{\partial x_2}\otimes dx_2 + \beta_{11}\frac{\partial}{\partial x_3}\otimes dx_3.$$

若 $r=1$，由 (4.69) 可知，T_r 具有如下形式

$$T_r = \sum_{i,j=1}^{3} (\beta_{ij}x_1 + \gamma_{ij}x_2 + \zeta_{ij}x_3)\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j,$$

其中 β_{ij}、γ_{ij}、ζ_{ij} 为常数。类似地，经过一系列复杂计算，我们得到 $\beta_{ij}=\gamma_{ij}=\zeta_{ij}=0$。

In 结论：系统 (4.67) 的任意 (1,1) 型解析张量不变量都是平凡的。

(3) 设 T 为 (1,0) 型，由 (4.70) 可得 $-1 \le r \le 2$。

情况 1： 若 $r=-1$，由（(4.69)）可知，T_r 具有如下形式

$$T_r = \beta\frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma\frac{\partial}{\partial x_2} + \zeta\frac{\partial}{\partial x_3},$$

其中 β，γ，ζ为常数。由（$L_F T_r$）$^i = 0$（$i = 1$，2，3）可得

$$\begin{aligned}(-4a\beta - 2\gamma - \zeta)x_1 - 2\beta x_2 - \beta x_3 = 0,\\ \gamma x_1 + (\beta - 2\gamma - 3\zeta)x_2 = 0,\\ (2\zeta - 3\gamma)x_3 = 0,\end{aligned}$$

由此得到 $\beta = \gamma = \zeta = 0$。

情形 2： 若 $r = 0$，根据 (4.69)，则 T_r 具有如下形式

$$T_r = (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

其中 β_i，γ_i，ζ_i为常数。同理可得 $\beta_i = \gamma_j = \zeta_r = 0$。

情形 3： 若 $r = 1$，根据 (4.69)，则 T_r 具有如下形式

$$T_r = (\sum_{i,j=1,i\le j}^{3} \beta_{ij} x_i x_j)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\sum_{i,j=1,i\le j}^{3} \gamma_{ij} x_i x_j)\frac{\partial}{\partial x_2} + (\sum_{i,j=1,i\le j}^{3} \zeta_{ij} x_i x_j)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

其中 β_{ij}，γ_{ij}，ζ_{ij} 为常数。同理可得

$$\begin{aligned}&\beta_{22} = \beta_{23} = \beta_{33} = \gamma_{11} = \gamma_{13} = \gamma_{33} = \zeta_{11} = \zeta_{12} = \zeta_{13} = \zeta_{22} = 0,\\ &\beta_{11} = \beta_{12} = 2\beta_{13} = -2\gamma_{12} = 2\gamma_{22} = \frac{2}{3}\gamma_{23} = \frac{2}{3}\zeta_{23} = -2\zeta_{33},\end{aligned}$$

因此

$$T_r = \frac{1}{2}\beta_{11}[(2x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}+(-x_1x_2+x_2^2+3x_2x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}+(3x_2x_3-x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_3}] = \frac{1}{2}\beta_{11}F.$$

情形 4： 若 $r = 2$，由（4.69）可知，T_r 具有如下形式

$$T_r = (\sum_{i+j+r=3} \beta_{ijr} x_1^i x_2^j x_3^r)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\sum_{i+j+r=3} \gamma_{ijr} x_1^i x_2^j x_3^r)\frac{\partial}{\partial x_2} + (\sum_{i+j+r=3} \zeta_{ijr} x_1^i x_2^j x_3^r)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

其中 β_{ijr}，γ_{ijr}，ζ_{ijr}为常数。经过一些繁琐的计算，我们得到$\beta_{ijr} = \gamma_{ijr} = \zeta_{ijr} = 0$。

总之，系统（4.67）的任意（1，0）型解析张量不变量，除一个常数因子外，都是向量场本身。

（4）由 $q > -\frac{3}{2}p$和（4.70）可得 $\frac{p}{2} < q - p \le 1 \le 2p - q < \frac{p}{2}$，这就产生了矛盾。

□

例3 考虑一个受扰俄勒冈ator模型 [2, 16]

$$\begin{cases}\dot{x} = \alpha(y - xy + x - \varepsilon xz - gx),\\ \dot{y} = \alpha^{-1}(-y - xy + fz),\\ \dot{z} = \beta(x - \varepsilon xz - z).\end{cases} \tag{4.71}$$ {ex21}

这个方程系统描述了一种假设的别洛索夫–扎鲍廷斯基型化学反应，其中变量 x，y，z表示反应物的浓度。从

模型中，α，β，ε，f，$g>0$。我们注意到，系统 (4.71) 是负半拟齐次的。其截断可写为如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=-\alpha x(y+gx),\\ \dot{y}=-\alpha^{-1}xy,\\ \dot{z}=\beta x(1-\varepsilon z).\end{cases}\tag{4.72}$$ {ex2}

系统 (4.72) 是一个次数为 2、指数为 $s_1=s_2=1$，$s_3=0$ 的拟齐次系统。因此 $m=2$，$\alpha=\frac{1}{m-1}=1$，$S=H=diag(1,1,0)$。由于下列代数方程

$$\begin{cases}c_1-\alpha c_1c_2-\alpha g c_1^2=0,\\ c_2-\alpha^{-1}c_1c_2=0,\\ \beta c_1-\beta\varepsilon c_1c_3=0\end{cases}$$

存在非零解 $c=(\alpha,\ \alpha^{-1}-\alpha g,\ \varepsilon^{-1})$，系统 (4.72) 有一个特解$x_0(t)=t^{-H}c$。相应的 Kovalevskaya 矩阵

$$\begin{pmatrix}-g\alpha^2 & -\alpha^2 & 0\\ -\alpha^2+g & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha\beta\varepsilon\end{pmatrix}\tag{4.73}$$ {ex2}

其科瓦列夫斯卡娅指数为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1-g\alpha^2$，$\lambda_3=-\alpha\beta\varepsilon$。

推论 4.3. *(1)* 若 $g\alpha^2>1$，则系统 *(4.71)* 的任意 $(0,0)$ 型解析张量不变量都是平凡的；

(2) 若 $2<g\alpha^2<3, 1<\alpha\beta\varepsilon<2$，则系统 *(4.71)* 的任意 $(1,1)$型解析张量不变量都是平凡的；

(3) 若 $2<g\alpha^2<3, 1<\alpha\beta\varepsilon<2$，则系统 *(4.71)* 在 $q\geqslant 2$ 时不具有类型为 $(1,q)$ 的解析张量不变量；

(4) 若 $2<g\alpha^2<3, 1<\alpha\beta\varepsilon<2$，则系统 *(4.71)* 在 $q\geqslant 3p$ 时不具有类型为 (p,q) 的解析张量不变量。此外，系统 *(4.71)* 在 $q\geqslant 2p$ 时不具有次数为 $l\geqslant 0$ 、类型为 (p,q) 的解析张量不变量。

(5) 若 $1<g\alpha^2<3, \alpha\beta\varepsilon<2, \frac{\alpha g+\alpha^{-1}}{\beta\varepsilon}\notin\mathbb{Z}, \frac{2\alpha g+\alpha^{-1}}{\beta\varepsilon}\notin\mathbb{Z}$，则系统 *(4.72)* 仅具有类型为 $(1,0)$ 的张量不变量，向量场本身除外；该向量场为$T=(\varepsilon z-1)\frac{\partial}{\partial z}$。

证明。 根据引理 3.7 和定理 3.9，如果系统 (4.71) 具有类型为 $(p,\ q)$ 的解析张量不变量，那么系统 (4.72) 具有次数为 l 的拟齐次张量不变量，并且至少有以下共振条件之一成立：

$$-l-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},$$

其中 $k_1,\ k_2,\ k_3\in\mathbb{N},\quad i_r,\ j_s\in\{1,\cdots,n\}$，结合注 3.5 可得

$$-p\leq l=-(k_1+k_2+2k_3+\lambda_i+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}\cdots-\lambda_{j_q}).\tag{4.74}$$

(1) 如果系统 (4.72) 存在一个次数为 l、类型为 $(0,\ q)$ 的拟齐次张量不变量 T，那么以下共振条件至少有一个成立：

$$-l-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},\ \ k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}.$$

如果 $g\alpha^2 > 1$，那么

$$l = \lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_q} - k_1 + (1 - g\alpha^2)k_2 - \alpha\beta\varepsilon k_3 \leq 0.$$

同时，类似于注 3.5，$l \geq 0$。接下来，我们讨论 $l = 0$ 的情况 .

当 $l = 0$ 时，这意味着 $q = 0$，T 具有如下形式

$$T = f(z),$$

其中 f 是一个解析函数。令 G 表示系统 (4.72) 的向量场。由 (1.3)，我们有

$$L_G T = \beta x(1 - \varepsilon z)f'(z) = 0,$$

由此得到 $f(z) = const$。它是一个 (0，0) 型的平凡张量不变量。

除上述情况外，$l > 0$。这就产生了矛盾，意味着系统 (4.72) 不存在 (0，q) 型的非平凡解析张量不变量。

(2) 若系统 (4.72) 存在一个次数为 l 的 (1，1) 型拟齐次张量不变量 T，则以下共振条件至少有一个成立：

$$-l - k_1 + (1 - g\alpha^2)k_2 - \alpha\beta\varepsilon k_3 = \lambda_i - \lambda_j, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}.$$

如果 $2 < g\alpha^2 < 3$，$1 < \alpha\beta\varepsilon < 2$，那么

$$l = \lambda_j - \lambda_i - k_1 + (1 - g\alpha^2)k_2 - \alpha\beta\varepsilon k_3 < \mu,$$

其中 $0 < \mu < 1$。同时，与注 3.5 类似，$l \geq -1$。

情形 1：T 具有如下形式

$$T = f(z)\frac{\partial}{\partial x} \otimes dz + h(z)\frac{\partial}{\partial y} \otimes dz,$$

由 (1.3)，$(L_G T)^1_1 = (L_G T)^2_1 = 0$，即

$$\begin{aligned} f(z)\beta(1 - \varepsilon z) &= 0, \\ h(z)\beta(1 - \varepsilon z) &= 0, \end{aligned}$$

这导致 $f(z) = h(z) = 0$。

情形 2：T 具有如下形式

$$\begin{aligned} T =& f_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + f_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy + [xf_{13}(z) + yh_{13}(z)]\frac{\partial}{\partial x} \otimes dz + f_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y} \otimes dx \\ &+ f_{22}(z)\frac{\partial}{\partial y} \otimes dy + [xf_{23}(z) + yh_{23}(z)]\frac{\partial}{\partial y} \otimes dz + f_{33}(z)\frac{\partial}{\partial z} \otimes dz. \end{aligned}$$

经过一系列繁琐的计算，我们得到 $f_{11} = f_{22} = f_{33} = const.$，$f_{ij} = h_{ij} = 0$，这与例 1 相同。

因此，系统 (4.72) 的任意 (1，1) 型解析张量不变量都是平凡的。

(3) 当 $q \geq 2$ 时，如果系统 (4.72) 存在一个类型为 $(1, q)$ 的解析张量不变量，那么以下共振条件至少有一个成立：

$$-l - k_1 + (1 - g\alpha^2)k_2 - \alpha\beta\varepsilon k_3 = \lambda_i - \lambda_{j_1} - \cdots - \lambda_{j_q}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}.$$

显然,

$$l=-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3-\lambda_i+\lambda_{j_1}\cdots+\lambda_{j_q}<\nu,$$

其中 $\nu<0$。当 $l=-1$ 时，经过简单计算，我们得到 $T=0$。因此，系统 (4.72) 不存在类型为 $(1,\ q)$ 的解析张量不变量。

(3) 如果系统 (4.72) 存在类型为 $(1,\ q)$ 的解析张量不变量，那么以下共振条件至少有一个成立:

$$-l-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-\lambda_{j_1}-\cdots-\lambda_{j_q},\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}.$$

显然,

$$l=-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3-\lambda_{i_1}-\cdots-\lambda_{i_p}+\lambda_{j_1}\cdots+\lambda_{j_q}<\nu,$$

其中 $\nu<2p-q$。如果 $2<g\alpha^2<3,\ 1<\alpha\beta\varepsilon<2, 2p-q\leq -p$。因此，当 $p\geqslant 2,\ q\geqslant 3p$ 时，系统 (4.72) 不存在类型为 $(p,\ q)$ 的解析张量不变量。此外，如果 $l\geq 0$，那么当 $p\geqslant 2,\ q\geqslant 2p$ 时，系统 (4.72) 不存在次数为$l\geqslant 0$ 的类型为 $(1,\ q)$ 的解析张量不变量。

(4) 若系统 (4.72) 存在一个类型为 (1,0)、次数为 l 的拟齐次张量不变量 T，则以下共振条件至少有一个成立:

$$-l-k_1+(1-g\alpha^2)k_2-\alpha\beta\varepsilon k_3=\lambda_i,\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}.$$

显然,

$$l=-(k_1+(g\alpha^2-1)k_2+\alpha\beta\varepsilon k_3+\lambda_i)\leq\mu,$$

其中 $0<\mu<2$。由注 3.5 可得 $l\geq -1$。

情形 1: T 具有如下形式

$$T=f(z)\frac{\partial}{\partial x}+h(z)\frac{\partial}{\partial y},$$

由 (1.3)，$(L_GT)^1=0$，即

$$\beta x(1-\varepsilon z)f'(z)-(-\alpha y-2\alpha gx)f(z)+\alpha xh(z)=0,$$

这导致 $f(z)=h(z)=0$。

情形 2: T 具有如下形式

$$T=(xf_1(z)+yh_1(z))\frac{\partial}{\partial x_1}+(xf_2(z)+yh_2(z))\frac{\partial}{\partial x_2}+f_3(z)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

由 (1.3)，$(L_GT)^i=0,\ i=1,\ 2,\ 3$，即,

$$\begin{aligned}(-\alpha h_1(z)f_1(z)+\beta f_1'(z)-\beta\varepsilon zf_1'(z)+2\alpha h_1(z)+\alpha f_2(z))x^2+\alpha h_2(z)xy+\alpha h_1(z)y^2=0,\\(-\alpha h_1(z)f_2(z)+\beta f_2'(z)-\beta\varepsilon zf_2'(z)-\alpha^{-1}f_2(z))x^2-(\alpha f_2(z)-\alpha^{-1}f_1(z))xy=0,\\(\beta f_3'(z)-\beta\varepsilon zf_3'(z)-\beta f_1(z)+\beta\varepsilon f_3(z))x=0.\end{aligned}$$

如果 $\frac{\alpha g+\alpha^{-1}}{\beta\varepsilon}\notin\mathbb{Z}$, $\frac{2\alpha g+\alpha^{-1}}{\beta\varepsilon}\notin\mathbb{Z}$，我们可以得到 $T=(\varepsilon z-1)\frac{\partial}{\partial z}$。

情形 3： T 具有如下形式

$$T=[(x^2f_1(z)+xyg_1(z)+y^2h_1(z))f(z)]\frac{\partial}{\partial x_1}+[(x^2f_2(z)+xyg_2(z)+y^2h_2(z))f(z)]\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$+(xf_3(z)+yh_3(z))\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

同样，经过一系列繁琐的计算，我们发现，在这种情况下， T 本身就是系统 (4.72) 的向量场。因此，除向量场本身 $X=(\varepsilon z-1)\frac{\partial}{\partial z}$ 外，系统 (4.72) 仅允许存在 (1，0) 型张量不变量。 — □

参考文献

[1] H. Yoshida，《代数第一积分存在的必要条件：I、II》。《天体力学》，1983年，31：363-379、381-399。[2] S. D. Furta，《论一般微分方程系统的不可积性》。《应用数学与物理杂志》，1996年，47：112-131。[3] V. V. Kozlov，《张量不变量与微分方程的积分》。《俄罗斯数学综述》，2019年，74.1：111。[4] Y. Hirata、K. Imai，《一般常微分方程系统中李对称性存在的必要条件》。《日本物理学会杂志》，2002年，71.10：2396-2400。[5] V. V. Kozlov，《欧拉-雅可比-李可积性定理》。《规律与混沌动力学》，2013年，18：329-343。[6] P. J. Olver，《李群在微分方程中的应用》，《数学研究生教材》第107卷，施普林格出版社，纽约，1986年，xxvi+497 页。[7] S. Y. Shi、Y. Li，《一般非线性系统的不可积性》。《应用数学与物理杂志》，2001年，52.2：191-200。[8] A. Goriely，《常微分方程系统的可积性、部分可积性与不可积性》。《数学物理杂志》，1996年，37：1871-1893。[9] C. G. J. Jacobi，《C. G. J. Jacobi的动力学讲义》¨。柏林：G. Reimer，1884年。[10] O. I. Bogoyavlenskij，《扩展可积性与双哈密顿系统》。《数学物理通讯》，1998年，196：19-51。[11] V. V. Kozlov，《哈密顿力学中的对称性、拓扑学与共振》。柏林：施普林格出版社，1996年。[12] A. Goriely，《动力系统的可积性与不可积性》。新加坡：世界科学出版社，2001年。[13] Y. X. Hu，《关于n阶自治系统的第一积分》。《数学分析及其应用杂志》，2018年，459：1062-1078。

[14] V. V. Kozlov, 《关于李氏定理——微分方程完全可积性的若干评论》, Differ. Uravn., 2005年, 第41卷, 第4期, 第553-555, 576 [Differ. Equ., 2005年, 第41卷, 第4期, 第588-590]。[15] V. V. Kozlov, 《微分方程拟齐次系统的张量不变量及柯瓦列夫斯卡娅-李雅普诺夫渐近方法》, Math. Notes, 1992年, 51. 2: 138-142。[16] J. J. Tyson, 《别洛乌索夫-扎博廷斯基反应模型中混沌的出现》。《数学生物学杂志》, 1978年, 5 (4): 351-362。[17] V. I. Arnold、V. V. Kozlov、A. I. Neˇıshtadt, 《经典力学与天体力学的数学方面》, 《数学科学百科全书》第3卷, 柏林: 施普林格出版社, 1993年, 第1-291页。[18] O. I. Bogoyavlenskij, 《可积哈密顿系统的张量不变量理论。I. 不相容泊松结构》。《数学物理通讯》, 1996年, 180.3: 529-586。[19] O. I. Bogoyavlenskij, 《可积哈密顿系统的张量不变量理论。II. 对称性定理及其应用》。《数学物理通讯》, 1997年, 184.2: 301-365。[20] X. Zhang, 《关于微分系统局部可积性的一则注记》。《微分方程杂志》, 2017年, 263(11), 7309-7321。[21] X. Zhang, 《动力系统的可积性: 代数与分析》。新加坡: 施普林格出版社, 2017年。[22] V. I. Arnold, 《常微分方程理论中的几何方法》, 施普林格出版社, 纽约, 1983年。[23] A. V. Bolsinov、I. A. Taimanov, 《具有正拓扑熵的可积测地流》。《数学发明》, 2000年, 140: 639-650。[24] K. Yagasaki, 《具有鞍中心的二自由度哈密顿系统的伽罗瓦可积性障碍与混沌Melnikov判据》。《非线性》, 2003年, 16: 2003-2012。[25] J. Llibre、Y. Z. Tian, 《具有不变代数曲面的FitzHugh-Nagumo系统的动力学》。《应用数学与物理杂志》, 2021年, 72: 15。[26] H. Poincar´e, 《关于一阶一度微分方程的积分》´。´I and II, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1891年, 5: 161-191, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1897年, 11: 193–239。[27] W. L. Li、S. Y. Shi, 《一般动力系统可积性的伽罗瓦障碍》 [J]。《微分方程杂志》, 2012年, 252: 5518-5534。[28] W. L. Li、S. Y. Shi, 《“一般动力系统可积性的伽罗瓦障碍”的勘误》 [《微分方程杂志》252(10), 2012年, 5518-5534]。《微分方程杂志》, 2017年, 262.3: 1253-1256。

[29] W. Li, J. Llibre, H. Wu, 《几乎周期差分系统的多项式与线性化正规形》。《差分方程及其应用》，2009年，15(10)，927-948。[30] S. Kovalevskaya, 《论刚体绕固定点旋转问题》。《数学学报》，1889年，12：177-232。[31] S. Simon, 《天体力学中某些问题的亚纯不可积性》 [D], 2007。[32] J. J. Moraled-Ruiz, J. P. Ramis, S. Simon, 《哈密顿系统的可积性与高阶变分方程的微分伽罗瓦群》 [J]。《高等师范学校科学年刊》，2007年，40(6)：845-884。[33] J. Lilbre, X. Zhang, 《正则代数超曲面上实多项式向量场的达布可积性》 [J]。《巴勒莫数学学会会报》，2002年，51：109-126。[34] S. L. Ziglin, 《哈密顿力学中解的分支与第一积分的不存在性 I》 [J]。《函数分析及其应用》，1983年，16：181-189。[35] H. Yoshida, 《具有 n 个自由度的哈密顿系统中附加解析积分不存在的判据》 [J]。《物理快报A辑》，1989年，141：3-4；108-112。[36] K. H. Kwek, Y. Li, S. Y. Shi, 《一般非线性系统的部分可积性》[J]。《应用数学与物理杂志》，2003年，53：26-47。[37] J. J. Moraled-Ruiz, 《微分伽罗瓦理论与哈密顿系统的不可积性》 [M]。巴塞尔：Birkhäuser出版社, 《数学进展》第179卷, 1999年。[38] C. Christopher, J. Llibre, C. Pantazi, X. Zhang, 《平面多项式系统的达布可积性与不变代数曲线》。《物理学杂志A辑》，35，2002年，第10期, 2457-2476。[39] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Gin´e等, 《达布可积性与反积分因子》 [J]。《微分方程杂志》，2003年，194(1)：116-139。[40] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, J.A. Weil, 《广义弹簧摆问题的不可积性》 [J]。《物理学杂志A辑》，2004年，37：2579-2597。[41] A. J. Maciejewski, M. Przybylska, 《ABC流的不可积性》 [J]。《物理快报A辑》，2002年，303：265-272。[42] D. W. Noid, M. L. Koszylowski, R. A. Marcus, 《费米共振下多维系统束缚态的半经典计算》 [J]。《化学物理学杂志》，1979年，71：2864-2873。[43] K. Yagasaki, 《具有鞍中心的二自由度哈密顿系统的可积性伽罗瓦障碍与混沌 Melnikov判据》 [J]。《非线性》，2003年，16：2003-2013。[44] P. Painlev´e, 《保罗·潘勒韦文集》第一卷。法国国家科学研究中心出版社，巴黎，1973年。