arXiv:2603.07214v1 [math.LO] 7 Mar 2026

科恩模型中的非平凡自同构： $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$

WILL BRIAN AND ALAN DOW

Abstract. 我们证明，若向一个满足连续统假设的模型中添加 $\kappa < \aleph_\omega$ 科恩实数，则在扩张模型中存在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。在对基模型作出一些进一步假设的条件下，即存在足够长的 sage Davies 树（这可由奇异基数假设加上 $\square_\lambda$ 对每个满足 $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ 的 λ 成立推出），我们还证明基数 $\kappa \geq \aleph_\omega$ 也有同样的结果。这推广了 Shelah 和 Steprāns 的一项结果；他们证明了该结果对 $\kappa = \aleph_2$成立。

1. 引言 Introduction

给定一个基数 $\kappa \geq \aleph_2$，“κ-科恩模型”指通过强迫从一个满足连续统假设的模型得到的任意模型，所用的偏序集为 $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$，即由有限偏函数构成的偏序集 $\kappa \to 2$，这是添加 κ 个相互泛型的科恩实数时通常使用的偏序集。本文探讨的问题是： κ-科恩模型是否包含布尔代数 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。我们证明，若 $\kappa < \aleph_\omega$，答案为是；若基模型满足某些额外的“类似 L”的假设，则对所有 κ ，答案也为是。此外，若 κ是正则基数，那么这些模型不仅包含非平凡自同构，而且包含数量为 2^κ 的非平凡自同构，这是可能的最大数量。

主定理。 假设 连续统假设，令 $\kappa \geq \aleph_2$，并令 $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa,2)$。

(1) 若 $\kappa < \aleph_\omega$，则 V 中 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的每个自同构都可扩张为 $V^{\mathbb{P}}$ 中 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的 2^κ 个自同构。*(2)* 更一般地，若 κ 是正则基数，且存在长度为 κ 的 ***sage Davies*** 树，则 V 中 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的每个自同构都可扩张为 $V^{\mathbb{P}}$ 中 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的 2^κ 个自同构。*(3)* 若 κ 是奇异基数，且存在长度为 $\nu = \kappa^\omega$ 的 ***sage Davies*** 树，则 $V^{\mathbb{P}}$ 中存在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的非平凡自同构。

Davies 树是一列 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ 某个集合论宇宙大碎片的初等子模型 H_θ ，这些初等子模型 M_α 具有某些相干性和覆盖性质。（之所以称这些序列为“树”，是因为它们是通过巧妙地枚举一棵树的叶子而构造出来的，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E35, 08A35, 54D40.*Key words and phrases.* $\mathcal{P}(\omega)/$ 上的自同构、Fin、科恩强迫、Davies 树、初等子模型、Jensen 的 $\square$ 的推论、弱 Freese-Nation 性质。第一作者获得美国国家科学基金会 DMS-2154229 号资助的部分支持。

该树由 H_θ 的初等子模型构成。）这些结构为无穷组合学中各种各样的构造提供了统一框架。R. O. Davies 在 [3]，引入了它们；关于它们诸多用途的精彩综述见 [22]。一种使用可数闭模型的 Davies 树版本，称为 sage Davies 树，在 [22] 中引入。其构造使用低于 κ （即序列长度）的奇异基数假设 SCH，以及对于可数余终性的极限基数 $\lambda < \kappa$ 所满足的 $\square_\lambda$ 。由于这些假设对 $\kappa < \aleph_\omega$ 都是空泛成立的，因此仅凭 ZFC 就能证明存在长度为 $\kappa < \aleph_\omega$ 的 sage Davies 树。具体而言，主定理的第 (1) 部分直接由第 (2) 部分推出；我们将其单独陈述，只是为了强调 (1) 是 ZFC 的一个定理，而更一般的 (2) 在 $\kappa \geq \aleph_\omega$ 时需要额外假设。正如 [22]，所示，相对于存在一个超紧基数而言，与之相容的是不存在长度为 $\geq \aleph_\omega$ 的 sage Davies 树（需要大基数假设，因为 SCH 失效或 $\square_\lambda$ 失效都具有大基数强度）。我们不知道 (2) 的一般性结论是否是 ZFC 的一个定理。

$\kappa = \aleph_2$ 情形的主定理已由 Shelah 和 Stepr$^-$ans 在 [20]中证明。（他们的定理仅指出，$\aleph_2$-Cohen 模型含有非平凡自同构，但他们的论证可以修改，从而得到 $2^{\aleph_2}$自同构，使其扩张任意给定的基模型自同构。）然而，Shelah-Stepr$^-$ans 的证明不适用于 $\kappa \geq \aleph_3$。

大致说来，原因在于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 在 $\aleph_2$-Cohen 模型中具有一种特殊结构，即某种“近饱和”性质，使得一些类似连续统假设的构造或其变体能够在 $\aleph_2$-Cohen 模型中奏效（参见 [21]或 [6]）。（回想一下，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$是一个可数饱和的布尔代数，如 [14] 和 [13]所示。在连续统假设下，$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$可以写成可数子代数的递增并，这使我们能够递归地构造 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的许多自同构。）Shelah-Stepr$^-$ans 在[20] 中的结果早于 [21] 和 [6], ，但事后看来，他们的论证利用了 $\aleph_2$-Cohen 模型这一特殊结构的某些方面。而推动 Shelah-Stepr$^-$ans 证明成立的这些 $\aleph_2$-Cohen 模型的优良特性，在更大的 κ-Cohen 模型中 simply 不复存在，适用于更大的 κ。

更具体地说，Shelah-Stepr$^-$ans 论证利用了这样一个事实：如果 $M \models$ ZFC，且 g 是 M上的 Cohen-泛型实数，那么每个实数 $x \in M[g]$都会在一个（ω，ω）-间隙中切割 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap M$。这意味着存在可数集 L、$U \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap M$，使得 x 高于 L 的每个元素，且低于 U的每个元素，并且与 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap M$ 中的每个元素相交，只要该元素既不低于某个 $\ell \in L$，也不高于某个 $u \in U$。这一事实对于尝试构造 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的自同构至关重要。要将定义域为 D 的部分自同构 Φ 扩张到某个 $x \notin D$，我们需要找到一个 $y \in \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$，使得如果 x在间隙（L，U）中切割 D，那么 y就在间隙（$\Phi[L]$，$\Phi[U]$）中切割 $\Phi[D]$。在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 中填补一个（ω，ω）-间隙的自然强迫偏序集是可数的，因此与 Cohen 偏序 Fn(ω, 2) 强迫等价。因此，如果我们可以使用一个在 Φ上 Cohen-泛型的实数 h，并且 D，那么就可以由 h 定义出填补（$\Phi[L]$，$\Phi[U]$）的偏序集的一个泛型对象。

现在来考察 $\aleph_2$-Cohen 模型 $V[G]$。由于 Fn(ω_2,2) 等价于长度为 ω_2 、由 Fn(ω_1, 2) 构成的有限支撑迭代，我们可以将 $V[G]$写成递增并 $V[G]=\bigcup_{\alpha<\omega_2}V[G_\alpha]$，其中每个 $V[G_\alpha]$ 都是满足连续统假设的模型，并包含 $\aleph_1$ “新鲜的”Cohen-泛型实数。要在 $V[G]$中构造自同构 Φ，我们从 V中的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的某个自同构 Φ_0 开始，并递归地将它扩张到每个 $V[G_\alpha]$。在后继步骤中，要将 Φ 从$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_\alpha]$ 扩张到 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_{\alpha+1}]$，我们按如下方式进行：

- 利用 $V[G_{\alpha+1}]\models$ 连续统假设，按序型 ω_1枚举 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_{\alpha+1}]$，即 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_{\alpha+1}]=\{b_\xi:\ \xi<\omega_1\}$。
- 依次处理这些 b_ξ，每一步向 Φ 的定义域中加入一个或两个新的实数，并在布尔运算下闭包。因此在第 ξ 步，Φ 的定义域是在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_\alpha]$上的可数生成的。从这一点以及上面的评论可知，新的实数 b_ξ 将 Φ 的定义域切割出一个 $(\omega,\ \omega)$-间隙 $(L,\ U)$。
- 由于 $V[G_{\alpha+1}]$ 包含了在 $V[G_\alpha]$上的“新鲜”科恩实数 $\aleph_1$，其中一些仍未被触及，可以用来填补 $(\omega,\ \omega)$-间隙 $(\Phi[L],\ \Phi[U])$，并为 b_ξ 找到一个像。将 b_ξ加入 Φ的定义域后，也可以用类似的方式将其加入 Φ 的像中。

如果 $\kappa\geq\aleph_3$，那么这一论证就会失效。在这种情况下，$V[G]$ 不再是满足连续统假设的中间模型 $V[G_\alpha]$ 的并。然而，在前面的论证中，将 Φ 从 $V[G_\alpha]$ 扩展到 $V[G_{\alpha+1}]$时，必须按序型 ω_1 枚举新的实数。若不这样做，我们就无法使 Φ 的定义域在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap V[G_\alpha]$上保持可数生成，也没有理由认为一个新的实数 b_ξ 会在 Φ 的定义域中切出一个 (ω,ω)-间隙。

为了将这一论证推广到高阶 Cohen 模型，我们需要一个序列 $\langle B_\alpha:\ \alpha<\kappa\rangle$ 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的子代数，满足

- 每个 $B_{\alpha+1}$ 都是 B_α 上的 ω_1-生成的（因此生成元可以按序型 ω_1 处理），并且
- 每个 $B_{\alpha+1}$ 都能以泛型方式填补扩展自同构的过程中出现的所有 (ω,ω)-间隙。

本文的核心洞见是，可以通过在 sage Davies 树上进行强迫来构造这样一个子代数序列。给定基模型中的一棵 sage Davies 树$\langle M_\alpha:\ \alpha<\kappa\rangle$，我们令 $B_\alpha=\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$。不难证明，每个 $B_{\alpha+1}$ 都是在 B_α 上的 ω_1-生成子代数，并且包含相对于 B_α而言的$\aleph_1$ 个“新鲜”Cohen 泛型实数。难点在于确保 $M_{\alpha+1}[G]$ 能够利用这些 Cohen 实数填补尝试将 Φ从 B_α 扩展到 $B_{\alpha+1}$时出现的所有（$\omega,\ \omega$）-间隙。为此，我们必须确保这些间隙及其在 Φ下的像都属于 $M_{\alpha+1}[G]$，这样 $M_{\alpha+1}[G]$ 便能在所需的间隙填充偏序集上计算出足够泛型的滤子。

第 2 节描述了经过一次 κ-科恩强迫后，sage Davies 树会变成什么样。尽管由此得到的模型序列不再是 sage Davies 树，但它保留了足够多的原有结构，因而可以在扩张中作为一种有用的组合工具。第 3 节将展示如何利用这一工具来

将 Shelah-Stepr¯ans 在 [20]中的论证推广，并得到许多 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构。在 Cohen 模型中利用 sage Davies 树的残余结构，最早由 [2], 进行了探索，不过采用的方式颇为不同。另外，值得指出的是，定理 2.1(2)令人联想到 [10, 9], ，其中证明了在 κ-科恩模型中， $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$具有弱 Freese-Nation 性质；其所用假设与我们的主定理基本相同。

2. Sage Davies trees after Cohen forcing

下文中， H_θ 表示所有遗传大小小于某个足够大基数 θ的集合所组成的集合。（在下文中，取 $\theta = (2^\kappa)^+$ 即可。）给定两个集合 M和 N，我们用 $M \prec N$表示（M，$\in$）是（N，$\in$）的一个初等子模型。若集合 M满足 $M^\omega \subseteq M$，则称其为可数闭。若M 满足（足够多的）ZFC 公理，则这等价于性质 $[M]^\omega \subseteq M$。

设 κ 是一个满足 cf(κ) $> \omega$的基数。关于集合P（一个参数）的 κ ***sage Davies*** 树是序列 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ ，由 H_θ的一些初等子模型组成，其中 θ是某个“足够大”的正则基数，并且满足

(1) 每个 M_α 都是可数闭的，且 $|M_\alpha| = \aleph_1$和 $P \in M_\alpha$。 (2) $[\kappa]^\omega \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$。 (3) 对每个 $\alpha < \kappa$，都存在一个可数集 $\mathcal{N}_\alpha$ ，其元素是 H_θ的可数闭初等子模型，且每个模型都包含 P，并满足

$$\bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi = \bigcup \mathcal{N}_\alpha.$$

(4) 对每个 $\alpha < \kappa$、 $\langle M_\xi : \xi < \alpha\rangle \in M_\alpha$。 (5) $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ 是 H_θ 的可数闭初等子模型。(6) 此外，若 κ 是正则基数，则

$$\left\{\delta \in \kappa : \delta = \kappa \cap \bigcup_{\xi<\delta} M_\xi\right\}$$

是 κ 的闭无界子集。

[22] 中 sage Davies 树的定义只列出了性质 (1) –(5)。我们在定义中加入了 (6)，因为它很容易由第 [22, 节中 sage Davies 树的构造推出。此外，尽管我们在 (1) –(5) 中给出了 [22] 的完整定义，但下文不会用到性质 (5)。

令 Fn(A, 2) 表示通常的科恩强迫，它由所有有限部分函数 $A \to 2$ 组成，并按延伸关系排序。令 supp(q) 表示条件 $q \in$ Fn(A, 2) 的定义域；若 $\dot{x}$ 是 Fn(A, 2)-名称，则令 supp($\dot{x}$) $= \bigcup\{$supp(q): $q \in$ Fn(A, 2) $\cap$ TC($\dot{x}$)$\}$（其中 TC($\dot{x}$) 表示 $\dot{x}$ 的传递闭包）。

给定一个强迫偏序集 $\mathbb{P}$，回忆一下，对于 ω 的子集，一个良好 $\mathbb{P}$-名称是 $\check{}\omega \times \mathbb{P}$ 的一个子集 $\dot{x}$，满足对每个 $n \in \mathbb{N}$、 $\{p, (\check{}n, p) \in \dot{x}\}$ 都是 $\mathbb{P}$ 中的反链。为方便起见，我们将 $\check{}n$ 记作 n，并将良好名称视为 $\omega \times \mathbb{P}$ 的子集。良好名称 $\dot{x}$ 关于滤子 $G \subseteq \mathbb{P}$ 的求值记为 val$_G(\dot{x}) = \{n \in \omega$: 存在某个 $p \in G\}$ 使得 $(n, p) \in \dot{x}$。

定理 2.1。设 κ 是一个满足 $\kappa^\omega = \kappa$ 的无限基数，并假设 $\langle M_\alpha\colon \ \alpha<\kappa\rangle$ 是 κ 的 *sage Davies* 树。如果 G 在 V 上是 $\mathrm{Fn}(\kappa,\ 2)$ 强迫-泛型的，那么 $V[G]$ 中的序列 $\langle M_\alpha[G]\colon \ \alpha<\kappa\rangle$ 满足：

(1) 对每个 $\alpha<\kappa$，都有 $\left|\mathrm{Lim}(\kappa)\cap M_\alpha\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right|=\aleph_1$。因此，存在一个函数 $C:\mathrm{Lim}(\kappa)\to\mathcal{P}(\omega)$，使得对所有 $\alpha<\kappa$、$C\in M_\alpha[G]$ 和 C，映射 $\mathrm{Lim}(\kappa)\cap M_\alpha$ 到一个由 $\aleph_1$ 个实数组成的集合，且这些实数在 $V\left[G\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right]$ 上相互科恩泛型。***(2)*** 对每个 $\alpha<\kappa$ 和 $r\in\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap M_\alpha[G]\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$，存在可数集 L^r、$U^r\subseteq\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$，使得对每个$x\in\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$，

- $x\le r\ \Leftrightarrow\ x\le\ell$ 对于某个 $\ell\in L^r$，
- $r\le x\ \Leftrightarrow\ u\le x$ 对于某个 $u\in U^r$。此外，存在一些这样的集合 $L^r,U^r\in M_\alpha[G]$。

证明。固定 $\alpha<\kappa$。为证明第一个断言，我们先在 V中进行讨论。由于对每个 $\xi<\alpha$都有 $|M_\xi|=\aleph_1$，我们有 $\left|\kappa\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right|\le|\alpha|\cdot\aleph_1<\kappa$，这蕴含 $\left|\mathrm{Lim}(\kappa)\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right|=\kappa$。根据 sage Davies 树定义的第 (4) 部分，$\langle M_\xi\colon \xi<\alpha\rangle\in M_\alpha$，并且（由于 $\kappa\in M_\alpha$ 且 M_α 在基本集合论运算下封闭）$\mathrm{Lim}(\kappa)\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\in M_\alpha$。由初等性，$M_\alpha\models\left|\mathrm{Lim}(\kappa)\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right|=\kappa$，特别地，存在一个双射 $f\in M_\alpha$，将 $\mathrm{Lim}(\kappa)\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi$ 映到 κ。将 f限制到 M_α，便得到一个双射，将 $\mathrm{Lim}(\kappa)\cap M_\alpha\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi$ 映到 $\kappa\cap M_\alpha$，且 $|\kappa\cap M_\alpha|=\aleph_1$。（事实上，标准论证表明，只要 M 是一个包含足够多 ZFC 公理的可数闭模型，就有 $\omega_1\subseteq M$。）因此 $\left|\mathrm{Lim}(\kappa)\cap M_\alpha\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right|=\aleph_1$。

由于 M_α 在基本集合论运算下封闭，因此当且仅当对所有 $n\in\omega$ 都有 $\lambda+n\in M_\alpha$ 时，$\lambda\in M_\alpha$ 是一个序数。因此，对于 $\lambda\in\mathrm{Lim}(\kappa)$，

$$\lambda\in M_\alpha\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\qquad\Leftrightarrow\qquad[\lambda,\lambda+\omega)\subseteq M_\alpha\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi.$$

仍在基模型中，对每个 $\lambda\in\mathrm{Lim}(\kappa)$，令 c_λ 表示自然同构 $\mathrm{Fn}\big([\lambda,\lambda+\omega)\ 2\big)\to\mathrm{Fn}(\omega,\ 2)$。

在 $V[G]$中，每个 c_λ 都将 $G\cap\mathrm{Fn}\big([\lambda,\lambda+\omega)\ 2\big)$ 映射到一个相对于 V 泛型的 $\mathrm{Fn}(\omega,\ 2)$ 子集，其并是 ω 的一个科恩泛型子集，记作 g_λ。对所有 $\lambda\in\mathrm{Lim}(\kappa)$，定义 $C(\lambda)=g_\lambda$。C 的这个定义只以 G 为参数，因此对所有 $\alpha<\kappa$ 都有 $C\in M_\alpha[G]$；显然，C 将 $\mathrm{Lim}(\kappa)\cap M_\alpha$ 映射为一组相对于 $V\left[G\cap\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi\right]$ 相互科恩泛型的 $\aleph_1$ 个实数。

在证明第二个断言之前，我们必须先引入几个定义。为方便起见，令 $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa,\ 2)$，给定 $S\subseteq\kappa$，令 $\mathbb{P}_S=\mathrm{Fn}(S,\ 2)$。令$G_S=G\cap\mathbb{P}_S$。注意，如果 $\kappa\supseteq T\supseteq S$，那么 $\mathbb{P}_T=\mathbb{P}_S*\mathbb{P}_{T\setminus S}$，$G_{T\setminus S}$ 是 $\mathbb{P}_{T\setminus S}$-generic over $V[G_S]$，并且 $V[G_T]=V[G_S][G_{T\setminus S}]$。如果 $\dot{x}$ 是一个关于 ω 的 nice $\mathbb{P}$-name，且 $S\subseteq\kappa$，则定义 $\dot{x}$ 相对于

于 G_S 的部分求值为

$$\mathrm{pval}_S(\dot{x}) = \left\{\left(n, p\restriction(\kappa\setminus S)\right) : (n,p)\in\dot{x} \text{ and } p\restriction S\in G_S\right\}.$$

例如，若 $\dot{x}$ 是一个 $\mathbb{P}_S$-名称，则当 $(n,p)\in\dot{x}$ 时，$p\restriction(\kappa\setminus S)=\emptyset$；在这种情况下，$\mathrm{pval}_S(\dot{x}) = \{(n,\emptyset) : (n,p)\in\dot{x} \text{ 且 } p\in G_S\}$，这正是 $y=\mathrm{val}_{G_S}(\dot{x})=\mathrm{val}_G(\dot{x})$ 的规范名称 $\check{y}$。另一个极端是，若 $\dot{x}$ 是一个$\mathbb{P}_{\kappa\setminus S}$-名称，则当 $(n,p)\in\dot{x}$ 时，$p\restriction(\kappa\setminus S)=p$ 且 $p\restriction S=\emptyset\in G$，因此 $\mathrm{pval}(\dot{x})=\dot{x}$。注意，对于任意 nice $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$ 以及任意 $S\subseteq\kappa$，$\mathrm{pval}_S(\dot{x})$ 是一个 nice $\mathbb{P}_{\kappa\setminus S}$-名称，且对应于 ω 的子集，并且 $\emptyset\Vdash\mathrm{val}_G(\dot{x})=\mathrm{val}_{G_{\kappa\setminus S}}(\mathrm{pval}_{G_S}(\dot{x}))$。

我们现在着手第二个断言的证明。固定 $\alpha<\kappa$。根据 sage Davies 树定义的第(3)部分，存在由 H_θ 的可数闭初等子模型构成的可数集 $\mathcal{N}_\alpha$，且满足 $\bigcup\mathcal{N}_\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi$。

断言。 设 $r\in\mathcal{P}(\omega)\cap M_\alpha[G]\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$，设 $\dot{r}\in M_\alpha$ 为r的良好名称，并设 $N\in\mathcal{N}_\alpha$。对每个 $p\in\mathbb{P}$，存在集合的一个良好名称 $\ell\in N$

$$\ell^r_{p,N} = \bigcup\{\mathrm{val}_G(\dot{x}) : \dot{x} \textit{ is a nice } \mathbb{P}\textit{-name in } N \textit{ and } p\Vdash\dot{x}\subseteq\dot{r}\}.$$

因此，$\ell^r_{p,\ N}\in N[G]$。

断言的证明：固定 $p\in\mathbb{P}$。在 V中进行，设 X 表示 ω 的子集的所有好名称 $\dot{x}$ 的集合，使得 $\dot{x}\in N$ 且 $p\Vdash\dot{x}\subseteq\dot{r}$。设

$$\dot{\ell}_0 = \bigcup X = \{(n,q) : \text{there is some } \dot{x}\in X \text{ with } (n,q)\in\dot{x}\}.$$

如果 $\dot{x}\in X$ 那么 $\dot{x}\in N$，并且由于 ω 的子集的良好名称是可数的，这意味着 $\dot{x}\subseteq N$。因此 $\ell_0=\bigcup X\subseteq N$，不难看出. ℓ_0 是一个 $\mathbb{P}$- 名称，用于表示 $u^r_{p,\ N}$。但是，ℓ_0 可能不是良好名称，而我们没有理由相信 $\ell_0\in N$（因为 p 和 $\dot{r}$ 都不一定属于 N）。

对于每个 $n\in\omega$，令 $B_n=\left\{q : (n,q)\in\dot{\ell}_0\right\}$。注意，如果 $(n,q)\in\dot{\ell}_0$，那么 $(n,q)\in N$，从而 $q\in N$；因此 $B_n\subseteq N\cap\mathbb{P}=\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$。令 A_n为 $\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$ 中的一个反链，使得 $\bigvee A_n=\bigvee B_n$ 在 $\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$的布尔完备化中。令 $\ell=\bigcup_{n\in\omega}(\{n\}\times A_n)$。这是一个良好 $\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$-名称，用于表示 $\dot{}$ $\dot{}$的一个子集 ω，根据我们对 A_n的选择，$\emptyset\Vdash\ell_0=\ell$，这意味着 u是一个良好$\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$-名称，用于表示 $\ell^r_{p,\ N}$。此外，由于 $\mathbb{P}_{\kappa\cap N}$满足可数链条件，每个 A_n都是可数的。由于 N 是可数闭的，对于所有 n都有 $A_n\in N$。由于 N在基本集合论运算下也闭合，对于所有 N都有 $\{n\}\times A_n\in N$，再次利用 N 的可数闭性，这意味着 $\ell\in N$。□

断言。 令 $r\in\mathcal{P}(\omega)\cap M_\alpha[G]\setminus\bigcup_{\xi<\alpha}M_\xi[G]$。假设 $N\in\mathcal{N}_\alpha$、$x\in N[G]$ 和 $x\subseteq r$。令 $\dot{r}\in M_\alpha$ 为 r 的良好名称，并令 $S=\mathrm{supp}(\dot{r})$。存在一个 x 的良好名称 $\dot{x}$，满足 $\dot{x}\in N$，以及一个 $p\in G_S$ 使得 $p\Vdash\dot{x}\subseteq\dot{r}$。

断言的证明：令 $\dot{x}_0$ 为 x 的一个良好 $\mathbb{P}$-名称，使得 $\dot{x}_0\in N$，并固定一个条件 $q\in G$，使得 $q\Vdash\dot{x}_0\subseteq\dot{r}$。令 $S_0=\mathrm{supp}(\dot{x}_0)$，并注意到 $S_0\subseteq N$（因为 $\dot{x}_0\in N$）。不失一般性，我们可以（并且确实）假设 $\mathrm{supp}(q)\subseteq\mathrm{supp}(\dot{x}_0)\cup\mathrm{supp}(\dot{r})=S_0\cup S\subseteq N\cup S$。令 $T=\mathrm{supp}(q)\setminus S$，并注意到 T是 $\kappa\cap N$的有限子集。

令 $\dot{x} = \mathrm{pval}_T(\dot{x}_0)$，并令 $p = q \restriction (\kappa \setminus T)$。显然 $p \in G$，因为 $q \in G$且 q扩展了 p。由于 $q \Vdash \dot{x}_0 \subseteq \dot{r}$属于 V， $p \Vdash \mathrm{pval}_T(\dot{x}_0) \subseteq \mathrm{pval}_T(\dot{r})$ 属于$V[G_T]$。但是，根据定义，$\mathrm{pval}_T(\dot{x}_0) = \dot{x}$；$\mathrm{pval}_T(\dot{r}) = \dot{r}$，因为 $T \cap S = \emptyset$；而 $V[G_T] = V$，因为 T是有限的。因此，$p \Vdash \dot{x} \subseteq \dot{r}$属于 V。最后， $\dot{x}$ 可由 $\dot{x}_0$和 G_T定义，它们都属于 N，因此 $\dot{x} \in N$。□

现在固定 $r \in \mathcal{P}(\omega) \cap M_\alpha[G] \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G]$。设 $\dot{r} \in M_\alpha$ 是r的一个良好名称，并设 $S = \mathrm{supp}(\dot{r})$。由于 $\dot{r}$ 是一个实数的良好名称， S 是可数的。这意味着 G_S 也是可数的。对每个 $N \in \mathcal{N}_\alpha$ 以及每个 $p \in G_S$，令 $\ell^r_{p,N}$ 按上述断言中的定义给出。令

$$L^r_0 = \left\{ \ell^r_{p,N} \colon p \in G_S \text{ and } N \in \mathcal{N}_\alpha \right\}.$$

这是一个可数集，因为 G_S 和 $\mathcal{N}_\alpha$ 都是可数的，并且根据上述两个断言中的第一个，它是 $\mathcal{P}(\omega) \cap \bigcup_{N\in\mathcal{N}_\alpha} N[G] = \mathcal{P}(\omega) \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G]$ 的子集。

令 $x \in \mathcal{P}(\omega) \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G] = \mathcal{P}$，并固定满足 $x \in N[G]$的 $N \in \mathcal{N}$。若 $x \subseteq r$，则由上述两个断言中的第二个可知，存在一个关于 x 的良好名称 $\dot{x} \in N$，以及一个 $p \in G_S$，使得 $p \Vdash \dot{x} \subseteq \dot{r}$。根据 $\ell^r_{p,N}$ 的定义，这意味着 $x \subseteq \ell^r_{p,N} \in L^r_0$。反过来，若对于某个 $p \in G_S$ 和 $N \in \mathcal{N}_\alpha$，有 $x \subseteq \ell^r_{p,N}$，那么由 $\ell^r_{p,N}$ 的定义显然可知 $x \subseteq r$。

因此，给定 $x \in \mathcal{P}(\omega) \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G]$，当且仅当对于某个 $\ell \in L^r_0$ 有 $x \subseteq r$。转到等价类，令 $L^{[r]_{\mathrm{Fin}}} = \{[\ell]_{\mathrm{Fin}} \colon \ell \in L^r_0\}$，它具有所需的性质。一个本质上相同的论证可用于证明涉及 U^r 的类似陈述。或者，也可以通过取补集，由关于 L^r 的陈述推导出关于 U^r 的陈述，令 $U^r = \left\{ [\omega]_{\mathrm{Fin}} - \ell \colon \ell \in L^{[\omega]_{\mathrm{Fin}}-r} \right\}$。

最后，为了证明定理中“此外”的部分，我们使用 M_α 的初等性。陈述（2）中“此外”之前的部分，是仅使用来自 $M_\alpha[G]$ 的参数对 L^r 和 U^r 作出的一阶描述。（注意，由于 $\langle M_\xi, \bigcup_{\xi<\alpha} M_\alpha[G] \in M_\alpha[G] \colon \xi < \alpha \rangle \in M_\alpha$ 和 $G \in M_\alpha[G]$。）由于 $M_\alpha \preceq H_\theta$，强迫关系的可定义性意味着 $M_\alpha[G] \preceq H_\theta[G]$。（更多细节请参见 [18, 定理 2.11]。）因此，对 L^r 和 U^r 的这一描述——我们刚刚证明它在 H_θ 中有见证——在 $M_\alpha[G]$ 中也有见证。□

3. 构造自同构

在 ω 上的几乎置换是 ω 的余有限子集之间的双射。 ω 的每个置换都是几乎置换，但并非每个几乎置换都是置换，甚至也不一定是某个置换的限制（例如考虑后继函数 $n \mapsto n+1$）。 ω 上的每个几乎置换 f 都会诱导出 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的一个自同构 α_f，其定义公式为

$$\alpha_f\big([A]_{\mathrm{Fin}}\big) = \big[f[A]\big]_{\mathrm{Fin}}$$

对每个 $A \subseteq \omega$ 都成立。以这种方式由 ω 的几乎置换诱导出的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构称为平凡自同构。注意，由于只有 $\mathfrak{c}$ 个函数 $\omega \to \omega$，因此 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 只有 $\mathfrak{c}$ 个平凡自同构。因此，如果 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构多于 $\mathfrak{c}$ 个，那么其中有一些（大多数）是非平凡的。

Walter Rudin 在 [15] 中证明，连续统假设蕴含存在 $2^{\mathfrak{c}}$ 个 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构。多年以后，Shelah 在 [17, 第 4]章中证明，所有自同构都是平凡的与 ZFC 相容。Shelah 的结果在 [19], [23], 和 [4], 中得到推广与细化，最终表明力迫公理 OCA（亦称 OGA 或 OCA_T）蕴含所有自同构都是平凡的。所有自同构均为平凡的其他模型包括带有$\mathfrak{c} > \aleph_2$、处于 [5] 中的模型，或带有 $\mathfrak{d} = \aleph_1$、处于 [7]中的模型。（回想一下，OCA 蕴含 $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} = \aleph_2$）。

下面的定理涵盖引言中所述主要定理的第(1)部分和第(2)部分。

定理 3.1. 设 $V \models$ 连续统假设，令 $\kappa \geq \aleph_2$ 为一个正则基数，并令G 为一个 $\mathrm{Fn}(\kappa,2)$-泛滤子，其在 V 上。假设对任意 P，存在一棵长度为 κ、在 P 上的 *sage Davies* 树。若 ϕ 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 在 V中的一个自同构，则在 $V[G]$ 中存在 2^κ 个 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构，它们扩张 ϕ。

证明。令 ϕ 为 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 在 V中的一个自同构，并且（仍在 V中）固定 H_κ的一个良序 R。令 F 为一组 2^κ 函数 $\kappa \to 2$，满足如下性质：若 $h, h' \in F$且 $h \neq h'$，则 $\{\alpha \in \kappa\colon h(\alpha) \neq h'(\alpha)\}$ 是平稳的。（要说明这样的函数集确实存在，先回想一下，存在一个将 κ 划分为 κ 个平稳集的划分 $\mathcal{P}$。令 F 为所有满足以下条件的函数 $h\colon \kappa \to 2$组成的集合：对每个 $A \in \mathcal{P}$， $h \restriction A$ 都是常值函数。）

为证明该定理，我们对每个 $h \in F$ 构造一个 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 在 $V[G]$ 中的自同构 Φ_h，使得 $\Phi_h \restriction V = \phi$；此外，我们以这样一种方式进行构造： $h \neq h'$ 蕴含 $\Phi_h \neq \Phi_{h'}$。固定 $h \in F$，并令 $\langle M_\alpha\colon \alpha < \kappa\rangle$为定义在 $P = (R, h, \phi)$上的一棵 sage Davies 树。

令 C 表示定理 2.1(1) 中描述的函数。对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $\delta_\alpha = \min\left(\kappa \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha}\right)$。注意， δ_α 是一个极限序数，并且由于 δ_α 和 $\delta_\alpha + \omega$ 可由彼此定义，$\delta + \omega \in \kappa \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$ 也如此。对所有 $\alpha < \kappa$，定义 $c_0^\alpha = C(\delta_\alpha)$ 和 $c_1^\alpha = C(\delta_\alpha + \omega)$。

定义 $B_0 = \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap V$，若 $0 < \alpha < \kappa$，则定义

$$B_\alpha = \left\langle\!\left\langle \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G] \right\rangle\!\right\rangle,$$

由 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G]$ 生成的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的子代数。由于 M_0 是可数闭的，且 $M_0 \preceq H_\theta$，因此 $\mathcal{P}(\omega) \cap V \subseteq M_0$。于是 $B_0 \subseteq B_1$，并且显然，若 $\alpha < \beta < \kappa$，则 $B_\alpha \subseteq B_\beta$。因此， $\langle B_\alpha\colon \alpha < \kappa\rangle$ 是 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的递增子代数序列，且（由定义可轻易推出）对于极限 α， $B_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$。

此外，我们断言 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$。要证明这一点，只需在 V 中证明，每个以 ω 的子集为对象的 nice $\mathbb{P}$-名称都是 $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ 的成员。若 $\dot{x}$ 是这样的名称，那么 supp($\dot{x}$) 是 κ 的可数子集。根据 sage Davies 树定义的第 (2) 部分，存在某个 $\alpha < \kappa$，使得

$\mathrm{supp}(\dot{x}) \in M_\alpha$。利用 M_α 是可数闭的这一事实以及 $\omega \subseteq M_\alpha$，可得 $\dot{x} \in M_\alpha$。

暂时省略下标，让我们从 h 构造一个自同构 Φ，它作用于 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 中的 $V[G]$。我们的目标是通过超限递归构造 Φ，并在 $V[G]$中进行。该递归分为 κ 个主要阶段。在递归的第 α阶段，我们从 B_α的一个自同构 Φ_α 开始，并希望将其扩展为 $B_{\alpha+1}$ 的一个自同构 $\Phi_{\alpha+1}$，同时将$h(\alpha)$的值编码进 $\Phi_{\alpha+1}$。在递归过程中，我们在第 α阶段维持以下归纳假设：

(∗) 自同构序列 $\langle \Phi_\xi : \xi \le \alpha \rangle$ 可由 P和 $\langle M_\xi[G] : \xi < \alpha \rangle$一致可定义。特别地，$\Phi_\alpha \in M_\alpha$。

在基例 $\alpha = 0$ 中，我们从 B_0的自同构 $\Phi_0 = \phi$ 开始。注意，在 $\alpha = 0$处，归纳假设显然成立。在极限阶段，我们只需取 $\Phi_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \Phi_\xi$。这是 B_α 的一个自同构，因为对于极限 α，有 $B_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} B_\xi$。这也保持了我们的归纳假设：$\langle \Phi_\xi : \xi \le \alpha \rangle$ 定义为 $\langle \Phi_\xi : \xi < \alpha \rangle^\frown \langle \bigcup_{\xi<\alpha} \Phi_\xi \rangle$，而这个定义公式对所有极限序数都是一致的。

现在我们必须说明如何从 Φ_α得到 $\Phi_{\alpha+1}$。主递归的这一单独阶段本身通过长度为 ω_1的超限递归来完成。注意，$M_\alpha \in M_{\alpha+1}$（它可定义为$\langle M_\xi$ 的最后一个元素：$\xi \le \alpha \rangle \in M_{\alpha+1}$），这意味着 $M_{\alpha+1}$ 包含一个由 R给出的典范良序，该良序排列了 M_α中 ω 的子集的好名称。对这些名称求值，并删除重复项以及 B_α 的成员（这也可在 $M_{\alpha+1}$中定义），这意味着 $M_{\alpha+1}$ 包含一个对 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap M_\alpha[G] \setminus B_\alpha$的成员的典范枚举$\langle b_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$。如有需要，对这一良序作一些简单修改后，我们可以（并且确实）假设 $b_0 = c^\alpha_0$。我们的阶段 α（长度为ω_1 的子递归）的目标是构造

(1) 两个递增序列 $\left\langle D^\beta_\alpha : \beta < \omega_1 \right\rangle$ 和 $\left\langle E^\beta_\alpha : \beta < \omega_1 \right\rangle$，它们由 $B_{\alpha+1}$ 的子代数构成，且对于极限 β，有 $D^\beta_\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} D^\xi_\alpha$ 和 $E^\beta_\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} E^\xi_\alpha$，并且 $\bigcup_{\beta<\omega_1} D^\beta_\alpha = \bigcup_{\beta<\omega_1} E^\beta_\alpha = B_{\alpha+1}$；(2) 一列单同态 $\Phi^\beta_\alpha : D^\beta_\alpha \to E^\beta_\alpha$，其中 $\beta < \omega_1$，满足 $\Phi^0_\alpha = \Phi_\alpha$，并且若 $\beta < \beta'$，则 $\Phi^\beta_\alpha = \Phi^{\beta'}_\alpha \restriction D^\beta_\alpha$。

此外，在关于 β 的子递归的每一步中，我们都维持以下归纳假设：

(1) D^β_α，$E^\beta_\alpha \supseteq \langle\!\langle B_\alpha \cup \{b_\xi : \xi < \beta\} \rangle\!\rangle$。(2) 存在一个可数的 $X^\beta \subseteq M_\alpha[G]$，使得 $D^\beta_\alpha = \langle\!\langle B_\alpha \cup X^\beta \rangle\!\rangle$。(3) 此外，序列 $\left\langle X^\xi : \xi \le \beta \right\rangle$ 可由 $M_\alpha[G]$中的参数一致可定义，因此它是 $M_\alpha[G]$的一个元素。(4) 序列 $\left\langle \Phi^\xi_\alpha : \xi \le \beta \right\rangle$ 也可由 $M_\alpha[G]$中的参-数一致可定义，因此是 $M_\alpha[G]$ 的一个元素。

对于基步，取 $D^0_\alpha = E^0_\alpha = B_\alpha$ 和 $\Phi^0_\alpha = \Phi_\alpha$。这显然满足假设(1) – (3)。根据我们更强的归纳假设(∗)，由于 $\Phi_\alpha \in M_\alpha[G]$，它满足(4)。

极限步也很容易：因为 $D^\beta_\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} D^\xi_\alpha$ 和 $E^\beta_\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} E^\xi_\alpha$对于极限 β，我们只需取 $\Phi^\beta_\alpha = \bigcup_{\xi<\beta} \Phi^\xi_\alpha$。这保留了全部四条归纳假设。

为了得到 Φ^1_α，我们根据 $h(\alpha)$ 的值采取两种做法之一。如果 $h(\alpha) = 0$，那么我们将 $b_0 = c^\alpha_0$ 映射到自身。由于 c^α_0 在$V[G \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\alpha]$上是 Cohen-泛型，因此它在 B_α上是自由的。因此，映射 $\Phi^0_\alpha \cup \{(c^\alpha_0, c^\alpha_0)\}$自然延拓为 $\langle\!\langle B_\alpha \cup \{c^\alpha_0\}\rangle\!\rangle$ 的一个自同构 Φ^1_α，并令 $D^1_\alpha = E^1_\alpha = \langle\!\langle B_\alpha \cup \{c^\alpha_0\}\rangle\!\rangle$。如果 $h(\alpha) = 1$，那么我们将 c^α_0映射到 c^α_1，并将 c^α_1映射到 c^α_0。由于 c^α_0和 c^α_1在 $V[G \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\alpha]$ 上相互 Cohen-泛型，每个c^α_i在 $\langle\!\langle B_\alpha \cup \{c^\alpha_{1-i}\}\rangle\!\rangle$上都是自由的。因此，映射 $\Phi^0_\alpha \cup \{(c^\alpha_0, c^\alpha_1), (c^\alpha_1, c^\alpha_0)\}$自然延拓为 $\langle\!\langle B_\alpha \cup \{c^\alpha_0, c^\alpha_1\}\rangle\!\rangle$的一个自同构 Φ^1_α，并令 $D^1_\alpha = E^1_\alpha = \langle\!\langle B_\alpha \cup \{c^\alpha_0, c^\alpha_1\}\rangle\!\rangle$。显然，这保留了归纳假设（请注意，对于归纳假设 (4)， $M_\alpha[G]$ 在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的布尔运算下是封闭的）。

对于一般的后继步，固定 β 与 $0 < \beta < \omega_1$，并设给定的 D^β_α、 E^β_α和 Φ^β_α 满足(1) –(4)。我们分两步得到 $\Phi^{\beta+1}_\alpha$：首先扩张我们的代数与映射，使 b_β 进入$\Phi^{\beta+1}_\alpha$的定义域，然后再扩张一次，将 b_β 放入像中。具体而言，我们首先将 $D^\beta_\alpha, E^\beta_\alpha, \Phi^\beta_\alpha$ 扩张为某个满足 $b_\beta \in \bar{D}^\beta_\alpha$的 $\bar{D}^\beta_\alpha, \bar{E}^\beta_\alpha, \bar{\Phi}^\beta_\alpha$，然后将$\bar{D}^\beta_\alpha$, $\bar{E}^\beta_\alpha, \bar{\Phi}^\beta_\alpha$扩张为满足 $b_\beta \in E^{\beta+1}_\alpha$的 $D^{\beta+1}_\alpha, E^{\beta+1}_\alpha, \Phi^{\beta+1}_\alpha$。

如果 $b_\beta \in D^\beta_\alpha$ 已经如此，那么第一步无需做任何事：只需定义 $\bar{D}^\beta_\alpha = D^\beta_\alpha$、 $\bar{E}^\beta_\alpha = E^\beta_\alpha$和 $\bar{\Phi}^\beta_\alpha = \Phi^\beta_\alpha$。

反之，假设 $b_\beta \notin D^\beta_\alpha$。应用定理 2.1，固定可数集$L, U \subseteq \mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi[G]$，使 $L, U \in M_\alpha[G]$ 具有该定理第 (2) 部分在 $r = b_\beta$ 下所述的性质。令 X^β 表示归纳假设 (2) 和 (3) 中所描述的集合，并定义

$$\tilde{L} = \left\{\ell \in \langle\!\langle L \cup X^\beta \rangle\!\rangle : \ell < b_\beta\right\},$$
$$\tilde{U} = \left\{\ell \in \langle\!\langle U \cup X^\beta \rangle\!\rangle : b_\beta < u\right\}.$$

这些是 D^β_α 的可数子集，并且利用定理 2.1 中所述 L与 U的性质，若 $x \in D^\beta_\alpha$ 则

- $x \le b_\beta \;\Leftrightarrow\; x \le \ell$ for some $\ell \in \tilde{L}$,
- $b_\beta \le x \;\Leftrightarrow\; u \le x$ for some $u \in \tilde{U}$.

换言之，$(\tilde{L}, \tilde{U})$ 是 D^β_α 中的一个 (ω, ω)-间隙，而这个间隙被 b_β 分割。因此，$\left(\Phi^\beta_\alpha[\tilde{L}], \Phi^\beta_\alpha[\tilde{U}]\right)$ 是 E^β_α 中的一个 (ω, ω)-间隙。若要将 Φ^β_α 扩展到 b_β，我们必须将 b_β 映射到 $M_\alpha[G]$ 中一个能够分割此间隙的成员。

由于 $L, U, X^\beta, b_\beta \in M_\alpha[G]$，我们有 $\tilde{L}, \tilde{U} \in M_\alpha[G]$。根据归纳假设 (4)，我们也有 $\Phi^\beta_\alpha[\tilde{L}], \Phi^\beta_\alpha[\tilde{U}] \in M_\alpha[G]$。由于 X^β 是可数的，且 $D^\beta_\alpha = \langle\!\langle B_\alpha \cup X^\beta \rangle\!\rangle$；又由于（不可数）集合 C_α 的成员都是在 B_α 上 Cohen-泛型，C_α 中除了至多可数个成员以外，其他成员都是在 D^β_α 上 Cohen-泛型。固定一个这样的 $c \in C_\alpha$。

用于在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 中分裂 (ω,ω)-间隙的标准强迫偏序集是可数的，因此与科恩强迫 $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ 强迫等价。由于 c 在 E^β_α 上是 Cohen-泛型，且 $M_\alpha[G]$ 满足（足够多的）ZFC，这意味着在 $M_\alpha[G]$ 内工作时，可以定义 (ω,ω)-间隙 $\big(\Phi^\beta_\alpha[\tilde{L}], \Phi^\beta_\alpha[\tilde{U}]\big)$ 在 E^β_α 中的泛型分裂 $s_\beta \in M_\alpha[G]$。此外，我们可以（并且确实）通过选取 R-最小的 $c \in C_\alpha$（即具有 R-最小名称的那个）使其在 D^β_α 上泛型，并选取 $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ 与 $\big(\Phi^\beta_\alpha[\tilde{L}], \Phi^\beta_\alpha[\tilde{U}]\big)$ 之间 R-最小的稠密嵌入等，从而使 s_β 的选择具有规范性。由于 s_β 分裂了间隙 $\big(\Phi^\beta_\alpha[\tilde{L}], \Phi^\beta_\alpha[\tilde{U}]\big)$，函数 $\Phi^\beta_\alpha \cup \{(b_\beta, s_\beta)\}$ 可以扩展为从 $\bar{D}^\beta_\alpha = \langle\!\langle D^\beta_\alpha \cup \{b_\beta\} \rangle\!\rangle$ 到 $\bar{E}^\beta_\alpha = \langle\!\langle E^\beta_\alpha \cup \{s_\beta\} \rangle\!\rangle$ 的同构。令 $\bar{\Phi}^\beta_\alpha$ 表示这个同构。

从 $\bar{D}^\beta_\alpha$、$\bar{E}^\beta_\alpha$ 和 $\bar{\Phi}^\beta_\alpha$ 构造 $D^{\beta+1}_\alpha$、$E^{\beta+1}_\alpha$ 和 $\Phi^{\beta+1}_\alpha$ 的方法完全相同，只需用 $\bar{E}^\beta_\alpha$ 替代 $\bar{D}^b_\alpha$，用 $(\bar{\Phi}^\beta_\alpha)^{-1}$ 替代 Φ^β_α，等等。

这些选择显然保留了归纳假设 (1) 和 (2)。由于此构造中的所有选择都是通过 R 规范地作出的，前述构造便构成了从 D^β_α、E^β_α 和 Φ^β_α 定义 $D^{\beta+1}_\alpha$、$E^{\beta+1}_\alpha$ 和 $\Phi^{\beta+1}_\alpha$ 的一种方法。此外，这个定义是统一的，因为它对所有 β 都以相同的方式起作用。因此，(3) 和 (4) 得以保留。

至此，长度为 ω_1 的子递归完成。归纳假设 (1) 表明 $\bigcup_{\beta<\omega_1} D^\beta_\alpha = \bigcup_{\beta<\omega_1} E^\beta_\alpha = B_{\alpha+1}$，而无论何时 $\beta < \beta'$，$\Phi^\beta_\alpha = \Phi^{\beta'}_\alpha \restriction D^\beta_\alpha$ 这一事实说明 $\Phi_{\alpha+1} = \bigcup_{\beta<\omega_1} \Phi^\beta_\alpha$ 是 $B_{\alpha+1}$ 的一个自同构。最后，整个子递归都是根据 $M_\alpha[G]$、C 和 R（或 P）定义的。在 $M_{\alpha+1}[G]$ 中应用递归定理，并利用归纳假设 (4)，这意味着整个长度为 ω_1 的子递归及其结果 $\Phi_{\alpha+1}$ 都可由 $\langle M_\xi[G] \text{ 定义：} \xi \le \alpha\rangle$ 和 R 在 $M_{\alpha+1}[G]$ 中。此外，此定义对不同的 α 都是统一的（也就是说，我们对归纳步骤的描述不依赖于 α），因此 $(*)$ 在主递归的后继步骤中得以保留。

至此递归构造完成，所得结果是一个自同构 $\Phi = \bigcup_{\alpha<\kappa} \Phi_\alpha$，它定义在 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin} = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ 上，且属于 $V[G]$，并扩张了 $\phi = \Phi_0$。还需证明这样的自同构有 2^κ 个。

请回想，我们的记号稍有不严谨：上面的构造依赖于函数 $h \in F$，但为了简洁，我们从 Φ 中删去了 h。恢复证明开头使用的下标记号，对于每个 $h \in F$，前面的构造都给出了 $\mathcal{P}_{(\omega)}/\mathrm{Fin}$ 在 $V[G]$ 上的一个自同构 Φ_h，并且它扩张了 ϕ。为了完成证明，我们必须证明：如果 $h,\ h' \in F$ 且 $h \neq h'$，那么 $\Phi_h \neq \Phi'_h$。

根据我们的构造，人们可能会以为可以从 Φ_h 恢复 h：如果 $\Phi_h(c_0^\alpha) = c_0^\alpha$，那么 $h(\alpha) = 0$；如果 $\Phi_h(c_0^\alpha) \neq c_0^\alpha$，那么 $h(\alpha) = 1$。然而，c_0^α 的取值不仅由 C 决定（它与 h 无关），也由 $M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$ 决定（它确实与 h 有关）。请回想，h 是作为参数 P 的一部分，为 sage Davies 树 $\langle M_\alpha$ 选取的：$\alpha < \kappa\rangle$ 被用来得到 Φ_h，这意味着 c_0^α 的身份取决于 h。因此，从 Φ_h 定义 h 的提议是循环论证。

为了绕过这一点，我们使用 sage Davies 树定义的第 (6) 部分。设 $\langle M_\alpha^h : \alpha < \kappa\rangle$ 表示用于得到 Φ_h 的 sage Davies 树，并设$\langle M_\alpha^{h'} : \alpha < \kappa\rangle$ 表示用于得到 $\Phi_{h'}$ 的 sage Davies 树。类似地，对所有 $\alpha < \kappa$，设 $(c_0^\alpha)^h = C\big(\min(\kappa \cap M_\alpha^h \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi^h)\big)$ 与 $(c_0^\alpha)^{h'} = C\big(\min(\kappa \cap M_\alpha^{h'} \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi^{h'})\big)$。应用 sage Davies 树定义的第 (6) 部分，

$$D = \left\{\delta \in \kappa : \delta = \kappa \cap \bigcup_{\xi<\delta} M_\xi^h = \kappa \cap \bigcup_{\xi<\delta} M_\xi^{h'}\right\}$$

在 κ 中是闭无界的。若 $\delta \in D$，则 $(c_0^\delta)^h = (c_0^\delta)^{h'} = C(\delta)$。

根据我们对 F 的选取，集合 $S = \{\alpha < \kappa : h(\alpha) \neq h'(\alpha)\}$ 是平稳的。特别地，存在某个 $\delta \in D$，使得 $h(\delta) \neq h'(\delta)$。由上一段可知，$(c_0^\delta)^h = (c_0^\delta)^{h'} = C(\delta)$。但由于 $h(\delta) \neq h'(\delta)$，函数 Φ_h 与 $\Phi_{h'}$ 中有一个以 $C(\delta)$ 为不动点，而另一个则没有。因此 $\Phi_h \neq \Phi_{h'}$。□

证明第 (3) 部分（主定理）。我们现在描述如何修改前述论证，以便适应奇异的 κ。

首先考虑情形 $\kappa^\omega = \kappa$。在此情形下，定理 2.1 适用，且前一定理的证明除最后两段外均可不加修改地通过；在这最后两段中，我们使用 sage Davies 树定义的第 (6) 部分（即该定义中假定 κ 为正则的那一部分），以证明诸 Φ_h 全都互异。当 κ 为奇异时，我们并不旨在证明所有 Φ_h 都互异，而只证明其中至少有一个是非平凡自同构。

考虑由常函数$h(\alpha) = 1$构造的自同构 Φ_h。我们断言，该函数是$\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$的非平凡自同构。为此，固定一个几乎双射 $f : \omega \to \omega$。在基模型 V 中，存在一个关于 f 的良好名称 f，其支撑 S可数。令$G_S = G \cap \mathrm{Fin}(S, 2)$，则有 $f \in V[G_S]$。实数 $\left\{c_\xi^\alpha : \alpha < \kappa, \xi < \omega_1\right\}$在 V上相互 Cohen-泛型，因此，对于 α的除可数多个值之外的所有取值，实数 c_α^0, c_α^1 在 $V[G_S]$上相互 Cohen-泛型。特别地，这意味着 $f[c_\alpha^0] \neq^* c_\alpha^1$。由于 $\Phi_h(c_\alpha^0) = c_\alpha^1$，这意味着 Φ_h 并非由 f诱导。由于 f 是 ω的任意几乎双射，这说明 Φ_h 是非平凡的。

接下来考虑 $\kappa^\omega > \kappa$ 的情形。在这种情况下，我们必须使用长度为 $\nu = \kappa^\omega$ 而非长度为 κ 的 sage Davies 树。此外，在这种情况下，定理 2.1(1) 的证明行不通，但定理 2.1(2) 仍然成立。

为避免无法使用定理 2.1(1)，我们在 $[\kappa]^\omega$ 中使用一个广义几乎不交族。首先，注意到所有有限

κ 中的序列组成一个大小为 κ 的集合。将每个无限序列 $s \in \kappa^\omega$ 与其限制集 $A_s = \{s\restriction n\colon n \in \omega\}$ 相关联，我们可以看到，存在一个大小为 κ^ω 的族 $\{A_s\colon s \in \kappa^\omega\}$，其中的可数子集两两几乎不交，且都属于 $\kappa^{<\omega}$。

固定一个从 ψ 到 $\nu = \kappa^\omega$ 的双射，其中 $\nu = \kappa^\omega$ 是 κ的某个大小为κ^ω 的、两两几乎不交的可数子集族。现在通过将 ψ 纳入 sage Davies 树的参数，修改定理 3.1 的证明：也就是说，取$P = (R,\ h,\ \phi,\ \psi)$，而不只是 $P = (R,\ h,\ \phi)$。

利用 $\nu > \kappa$这一事实，我们可以证明（使用一个与定理 2.1 证明第一段基本相同的论证），对每个 $\alpha < \nu$，都有$\left|\nu \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi\right| = \aleph_1$。由于 $\psi \in M_\alpha$，这 $\aleph_1$个新的序数 $< \nu$ 使我们能够访问 $\aleph_1$个 κ的新可数子集，即当 $\zeta \in \nu \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$时的集合 $\psi(\zeta)$。

现在，假设 $S \in M_\xi$ 对于某个 $\xi < \alpha$ 和 $S \in [\kappa]^\omega$成立。由于 ψ 映射到一个几乎不交族，Hit(S) $= \{\zeta < \nu\colon\ \psi(\zeta) \cap S$ 是无限的，$\}$ 是一个由 S定义的 ν 的可数子集。因此，Hit(S) $\subseteq M_\xi$。此外，如果$\zeta \in \nu \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$，那么对于所有 $S \in [\kappa]^\omega \cap \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$，$\psi(\zeta) \cap S$ 都是有限的。特别地，$C_\alpha = \left\{\psi(\zeta)\colon \zeta \in \nu \cap M_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi\right\}$ 是 M_α中由$\aleph_1$ 个 κ 的可数子集组成的集合，其中每个子集都与 $\bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$中的所有此类集合几乎不交。

这些 C_α 中的集合在定理 2.1(1) 的证明中起到集合 $[\lambda, \lambda+\omega)$ 的作用。由于它们彼此之间以及与 $\bigcup_{\xi<\alpha} M_\xi$ 中的集合几乎不相交，因此会产生一组 $\aleph_1$ 两两互相泛化的科恩实数，它们位于 $M_\alpha[G]$ 中，可用于在阶段 α 执行 Φ_h 的构造。与本证明开头的 $\kappa^\omega = \kappa$ 情形一样，使用 h 常函数 $\alpha \mapsto 1$ 进行这一构造，会得到 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的一个非平凡自同构。□

最后，我们提出一些进一步的观察和开放问题。我们的主定理引出的最紧迫问题是：

问题 3.2。主定理的(2) 和(3) 部分能否从ZFC推出？而(3) 中的自同构数量能否增加到 2^κ?

值得指出的是，如果在某个 $\kappa \geq \aleph_\omega$ 的 κ-Cohen 模型中，$\omega(/_{\mathrm{Fin}})$ 的所有自同构都可能是一致地平凡的，那么要证明这一点就需要一个大基数假设。

如前所述，定理的假设——存在一棵长度为 κ 的 sage Davies 树——在 SCH 和 $\square_\lambda$ 于所有满足 cf(λ) $= \kappa$ 的情形下均成立时得以满足。$\square_\lambda$ 在 SCH 成立时于某个奇异 λ 处失效，其一致性强度相当高：[16, 推论 5] 表明，这会产生一个含有无穷多个伍丁基数的内模型。（即便 SCH 不成立，也仍能得到一个含有一个伍丁基数的内模型。）SCH 失效的一致性强度则低得多：根据 Gitik 在 [11, 12], 中的工作，SCH 失效与存在一个 Mitchell 序为 μ^{++}的可测基数 μ 等一致。因此，构造 sage Davies 树的瓶颈就在于：

如果存在一个没有长 sage Davies 树的模型，那么存在至少具有较大 Mitchell 序的可测基数这一情形是一致的。

如果我们假设基模型满足广义连续统假设，而不仅仅是连续统假设，那么奇异基数假设便自动成立，因此缺少 sage Davies 树就意味着 $\square_\lambda$ 对奇异 λ不成立。此外， [1]证明，在广义连续统假设下，Foreman 和 Magidor 在 [8] 提出的“非常弱方阵”足以构造 sage Davies 树。

问题 3.3。 相对于某个大基数假设，是否可能一致地认为，在某个$\kappa \geq \aleph_\omega$ 下， κ-*Cohen* 模型中的 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 所有自同构都是平凡的？相对于大基数，是否可能一致地存在一个正则$\kappa > \aleph_\omega$ ，使得 κ-*Cohen* 模型中并非所有 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的基模型自同构都能延拓为2^κ 自同构?

最后需要指出，尽管我们对添加 Cohen 实数后 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构已有相当深入的理解，但添加随机实数后会发生什么仍是一个开放问题。

问题 3.4。 在随机实数模型中， $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 是否存在非平凡自同构？对于 $\kappa \geq \aleph_3$ 的 κ- 随机实数模型又如何?

References

[1] W. R. Brian、A. Dow、D. Milovich 和 L. Yengulalp，《Telg´arsky 猜想可能不成立》，*Israel Journal of Mathematics* **242** (2021年)，第 325–358 页。[2] W. R. Brian、A. Dow 和 S. Shelah，《GCH 与一个和 Banach-Mazur 博弈相关的组合原理的独立性》，*Archive for Mathematical Logic* **61**(2022年)，第 1–17 页。[3] R. O. Davies，《用可数多条曲线覆盖平面》，*London Mathematical Society* **38** 1963 433 438 *Journal of the* ( )，第 – 页。[4] B. De Bondt、I. Farah 和 A. Vignati，《约化积之间的平凡同构》，即将在 *Israel Journal of Mathematics*发表，目前可见于 https://arxiv.org/abs/2307.06731。[5] A. Dow，《 $\mathcal{P}\ \omega\ /$ *Annals of Pure and* ( ) *Applied Logic* **176** 2025 103627 fin 的自同构与大连续统》，( )，文章编号。[6] A. Dow 和 K. P. Hart，《另一种 $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ *Topology* 刻画的应用》，*and Its Applications* **122** 2002 105 133 ( )，第 – 页。[7] I. Farah 和 S. Shelah，《平凡自同构》，*Israel Journal of Mathematics* **201** (2014年)，第 701–728 页。[8] M. Foreman 和 M. Magidor，《非常弱方阵原理》，*Journal of Symbolic Logic* **62** 1997 175 196 ( )，第 – 页。

[9] S. Fuchino、S. Koppelberg 和 S. Shelah，《具有弱 Freese-Nation 性质的偏序》，*Annals of Pure and Applied Logic* **80** (1996年)，第 35–54 页。[10] S. Fuchino 和 L. Soukup，《弱 Freese-Nation 性质周围的更多集合论》，*Fundamenta Mathematicae* **154** (1997 年)，第 159–176 页。[11] M. Gitik，《由 $o\ \kappa\ = \kappa^{++}$ *Annals* ( )导致奇异基 *of Pure and Applied Logic* **43** 1989 209 234 数假设不成立》，( )，第 – 页。[12] M. Gitik，《奇异基数假设不成立的力度》，*Annals of Pure and Applied Logic* **51** 1991 215 240 ( )，第 – 页。

[13] B. J´ *Compositio Mathematica* **20** 1968 125 132 onsson 和 P. Olin，《几乎直积与饱和性》，( )，第 – 页。

[14] I. I. Parovi˘cenko, 《权为 ℵ *Soviet Mathematics Doklady* 的通用双紧空 **4** 1963 592 595 间》, ( ), 第 – 页。[15] W. Rudin, 《˘Cech 紧化理论中的齐次性问题》, *Duke Mathematical Journal* **23** 1956 409 419 , ( ), 第 – 页。

[16] E. Schimmerling 和 M. Zeeman, 《核心模型中的平方原理》, *Bulletin of Symbolic Logic* **7** 2001 305 314 ( ), 第 – 页。

[17] S. Shelah, *Proper Forcing*, 《数学讲义》, 第**940**卷, 施普林格出版社, 柏林, 1982年。[18] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, 第二版, Springer, 柏林, 1998年。[19] S. Shelah 和 J. Stepr ¯ans, *Proceedings of the American Mathematical Society* **104** 1988 1220 1225 《PFA 蕴含所有自同构都是平凡的》, ( ), 第 – 页。[20] S. Shelah 和 J. Stepr¯ans, 《在没有连续统假设的情况下 $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ 的非平凡自同构》, *Fundamenta Mathematicae* **132** (1989年), 第 135–141 页。[21] J. Stepr ¯ans, 《*Topology and Its Applications* **45** 1992 85 101 Cohen 模型中的拓扑不变量》, ( ), 第 – 页。[22] D. Soukup 和 L. Soukup, 《简单明了的无穷组合学》, *Journal of Symbolic Logic* **83** 2018 1247 1281 ( ), 第 – 页。[23] B. Veli´ckovi ć, 《OCA 与 $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ 的自同构》, *Topology and Its Applications* **49** 1992 1 12 ( ), 第 – 页。

W. R. Brian, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC (USA) *Email address*: wbrian.math@gmail.com *URL*: wrbrian.wordpress.com

A. S. Dow, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC (USA) *Email address*: adow@charlotte.edu *URL*: https://webpages.uncc.edu/adow