arXiv:2603.07224v1 [math.DS] 7 Mar 2026

动力系统的典型周期优化：符号动力系统

Wen Huang、Oliver Jenkinson、Leiye Xu 和 Yiwei Zhang

Abstract. 我们发展了一套关于动力系统中极大化集的新理论，用于研究弱双曲性系统中的遍历优化，但在这类系统中，Ma˜n´e 上同调引理并不成立。由此，我们为利普希茨范畴中的典型周期优化问题带来了新的结果：存在一个开稠密的利普希茨函数集，其中每个函数都有唯一最大化测度，且该测度是周期的（即单个周期轨道上的等分布）。这套理论还得出了一个结构定理，揭示了系统中导致鲁棒非周期优化的部分。

我们进一步在符号动力系统的框架下发展这一结构定理：对于任意移位空间，证明了典型利普希茨函数的最大化测度要么是周期的，要么支撑在该移位空间的马尔可夫边界上。由此可知，Contreras 的典型周期优化定理 [21] 适用于有限型移位的情形，可以扩展到一大类移位空间，包括所有 sofic 移位。

该结构定理被用于给出首个已知的移位空间示例：尽管周期测度在所有不变测度构成的集合中稠密，典型周期优化仍会失效。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 7 3. 可最大化集与极小极大集 8 4. 完全最大化集 11 5. 可最大化族 14 6. 动力系统的典型周期优化与结构定理 16 7. 子集闭合性质 21 8. 符号动力系统 23 9. sofic 与最终 sofic 移位的典型周期优化 29 10. 最终脆弱移位的典型周期优化 35 11. 移位空间上保持典型周期优化的操作 39 12. 不具有典型周期优化的移位空间 46

参考文献 50

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37A99；次要分类：37B02、37B10、37B99、37D05、37D35。*Key words and phrases.* 典型周期优化、遍历优化、最大化测度、动力系统、符号动力系统、拓扑动力学、遍历理论、sofic 移位。

1. Introduction

设 $T: X \to X$ 是紧致度量空间上的连续映射，并将其视为离散时间动力系统，其中 $\mathcal{M}(X, T)$ 是 T-不变博雷尔概率测度空间。假设 T 具有可数个周期轨道 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, ……，并令 μ_n 为 $\mathcal{M}(X, T)$ 中支撑在 $\mathcal{O}_n$ 上的（唯一）测度。若连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足周期优化性质，则存在一个（必然唯一的） $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\int f \, d\mu_n > \int f \, d\mu \quad \text{for all } \mu \in \mathcal{M}(X,T) \setminus \{\mu_n\}. \tag{1.1}$$

20世纪90年代，尤其是 Hunt & Ott [35, 36], 通过实验观察到一个引人注目的现象：对于混沌映射 T，如果函数 f 足够正则（例如光滑或利普希茨），那么尽管周期测度构成了 $\mathcal{M}($$X$、$T$)的一个拓扑上很小的子集，它似乎通常仍具有周期优化性质。Hunt & Ott 在 [35, 36] 中猜想，对于适当的混沌映射 T，周期优化性质在概率意义下是典型的；Yuan & Hunt [82] 则猜想，当 T 是一致扩张的，或是一个 Axiom A 微分同胚时，周期优化性质在拓扑意义下是典型的。Bochi & Zhang [8], 、Ding, Li & Zhang[26], 在符号动力系统的背景下推动了 Hunt-Ott猜想的发展；最近，Gao, Shen & Zhang [29]又在圆扩张映射方面取得了进展。遵循 Yuan-Hunt 猜想精神的研究更早便已开始，Bousch [10, 11], 、 Contreras, Lopes & Thieullen [23], 、Morris [57], 以及 Quas & Siefken [67], 均取得了进展，最终由 Contreras [21], 的突破性论文达到高潮。Contreras 证明了：如果 T 是开且距离扩张的，并且 Lip(X)是定义在 X上的 Lipschitz 函数空间，那么存在一个开且稠密的子集 $P \subset$Lip(X), 使得其中每个 $f \in P$ 都具有周期优化性质。随后，Huang, Lian, Ma, Xu & Zhang [34]（另见 [6]）将 Contreras 定理推广到了所有一致双曲系统（包括 Axiom A 微分同胚和双边有限型移位），而 Li & Zhang [48]则在扩张 Thurston 映射的框架下证明了相应结果。尽管 [34, 48] 所采用的方法不同于[21], ，但这些方法有一个共同主题，即结合某种形式的闭合引理、跟踪，以及基于 Ma˜n´e 上同调引理的扰动。

尽管 Yuan-Hunt猜想已由 [21, 34], 有效解决，Hunt-Ott猜想的核心思想是：周期优化性质可能对于范围广得多的混沌动力系统而言都是典型的；这一直觉被表述为元猜想，见 [5], ，并在典型周期优化猜想中得到了明确阐述，见[41]。其他相关领域中也存在涉及某种形式的典型周期优化的类似现象，包括拉格朗日动力系统中的 Ma˜n´e猜想[1] （参见 [22, 53, 54]），以及 Lagarias & Wang 关于矩阵集的联合谱半径的有限性猜想 [47] （尽管该猜想已被 Bousch & Mairesse [14], 推翻；参见 [42, 61], ，但其一个典型版本仍是一个猜想，参见 [52]）。

本文提出了一种方法，将典型周期优化结果推广到 [21, 34] 的一致双曲情形之外。与 [21, 的方法不同

[1]正如 Contreras 所指出的， [22, 第 4], 页提到，遍历优化这一广阔领域最初的一些研究动机——本文也属于这一领域——来自 Aubry-Mather理论，以及运用其技术解答拓扑动力系统和符号动力系统中问题的可能性；然而，遍历优化如今已发展到这样的程度，以至于影响方向可以反转：其技术（尤其是 [16, 34]）被引入 Aubry-Mather理论，为该领域一个重要猜想的证明提供了主要思路。

34, 48], 该方法并不依赖影随引理或 Ma˜n´e 上同调引理；事实上，研究表明，典型周期优化在这两项结果均不成立的系统中也成立。相反，我们建立了一套关于极大化集的新理论（为避免与已有概念混淆，我们将这些集合称为可最大化集），以及可数可最大化族。为便于说明，我们聚焦于 Lip(X) 空间，即定义在 X 上的 Lipschitz 实值函数，并称动力系统 $T\colon X \to X$ 具有典型周期优化（*TPO*）性质[2], ，或简称其具有 *TPO*，若存在一个开且稠密的子集 $P \subseteq \mathrm{Lip}(X)$，使得其中每个函数都具有$f \in P$ 周期优化性质（1.1）。对于存在可数可最大化族的系统，我们确立了一般性的结构定理，将 Lip(X) 中某个稠密开子集表示为两个开集的并，其中一个对应周期测度，另一个对应（可能是）非周期测度。这样便能有效地分离出系统中可能妨碍典型周期优化成立的部分；要判断周期优化是否具有典型性，还需进一步分析这部分（即所谓系统的边界）。值得注意的是，结构定理也可能适用于边界动力系统本身；这一过程（不断识别边界，再对其应用结构定理）可以递归进行，在某些情况下，通过有限下降论证即可得到 TPO 定理。反过来，结构定理还使我们得以构造首批不具有典型周期优化性质的混沌系统实例（尽管周期测度在所有不变测度组成的空间中稠密）：通过恰当地选取一个不具有 TPO 性质的目标边界系统，并构造一个边界恰好是该系统、且稳健地支持非周期优化的动力系统。

这种一般性方法具有内在的灵活性，使得我们能够针对具有某种双曲性的各种动力系统建立 TPO 定理（例如，包括那些具有由一致双曲子系统构成的可数可最大化族的系统）。在此，我们在符号动力系统的背景下探讨这一方案（即，其中 X 是有限字母表上的符号序列集合，而 T 是移位映射）。此前，人们尚未在有限型移位[3]之外猜想典型周期优化也适用于这一背景。事实证明，TPO 性质在符号动力系统中十分普遍，并不局限于有限型移位。例如，可以证明所有索菲克系统（即在与移位交换的映射下，作为有限型移位的连续像的移位空间，参见例如 [49, 79]）都具有这一性质：

定理 1.1。每个 *sofic* 移位都具有 *TPO* 性质。

对于任意移位空间 X，上述结构定理中边界所起的作用由马尔可夫边界 $\partial_M X$承担。它是由 Thomsen [71], 引入的 X 的一个典范子移位，并具有如下性质：当 X 为索菲克时，$\partial_M X = \emptyset$。马尔可夫边界可能成为 TPO 的障碍：在非索菲克情形下，它支撑不变测度，并且可能支撑稳健极大化的非周期不变测度 m，即对于所有 $\mu \in \mathcal{M}(X,\ T)$, $\{f \in \mathrm{Lip}(X) : \int f\, dm > \int f\, d\mu$ 都具有非空内部；这种情况将排除 TPO。我们证明，这种情况确实可能发生，即使在每个不变测度都可以由周期测度逼近的情形下也是如此（此前，是否存在这类动力系统一直是一个未解问题）：

[2]注意，TPO 性质比“周期优化是 Lip(X) 中的泛性质”这一说法更强，也就是说，具有周期优化性质的函数构成 Lip(X) 的一个剩余子集。[3]Contreras 的 TPO 定理 [21] 适用于距离扩张开映射；在符号动力系统的语境中，这恰好就是有限型移位这一类（见 [64, 定理 1]）；双边有限型移位的 TPO 情形已在 [34] 中得到证明。

定理 1.2. 存在这样的移位空间：周期测度在所有不变测度构成的空间中稠密，但它们并不具有 *TPO*。

然而，马尔可夫边界是 TPO 性质的唯一障碍：

定理 1.3。马尔可夫边界具有 *TPO* 性质的移位空间本身也具有 *TPO* 性质。

定理 1.3是一般结构定理的推论，是在更广泛的移位空间中识别 TPO 性质的重要工具。例如，$\partial_M X$ 可能特别简单，由单个不动点或若干周期轨道组成；这类子移位显然具有 TPO 性质，因此 X也具有 TPO 性质。特别地，任何 S-间隔移位（例如参见 [49, §1。2]）要么是索菲克的，要么其马尔可夫边界等于单个不动点，因此：

定理 1.4。每个 S-间隔移位都具有 *TPO* 性质。

定理 1.4的类似结论也适用于更一般的变体，例如 S-图移位（参见 [25]）。更一般地，定理1.1 和1.3表明，只要移位空间的马尔可夫边界是索菲克的，该移位空间就具有 TPO 性质：例如，众所周知的（非索菲克）上下文无关移位（参见 [49, §1。2]）便是如此，其马尔可夫边界是一个非周期有限型子移位（参见定理9.24）。

由于移位空间的马尔可夫边界本身也是一个移位空间，因此它在所有移位空间构成的空间上定义了一个算子。结合定理 1.1 和 1.3，这一观察促使我们定义最终索菲克移位这一类，即其迭代马尔可夫边界为索菲克移位的那些移位。由此可得：

定理 1.5。每个最终索菲克移位都具有 *TPO* 性质。

我们研究最终索菲克移位这一类，并引入一种构造，该构造实现了任意层级 n 的最终索菲克移位（即满足 $\partial_M^n X$ 为索菲克且非空），从而生成一大类具有典型周期优化性质的系统。举一个具体例子，若 X 是众所周知的（且为索菲克的）偶移位（例如参见 [49, §1.2]），它由满足如下条件的 0-1序列构成：任意两个 1 之间都有偶数个 0。令 X_1为定义在 $\{0,1,2\}$ 上的序列集合，使得任意两个 2 之间都存在一个 X-允许的块，其长度为 2 的某个幂；移位空间 X_1 是非索菲克的，但它是层级为 1 的最终索菲克移位，因此根据定理 1.5 具有 TPO 性质。若 X_2 定义为由 $\{0,1,2,3\}$ 上的序列构成的集合，使得任意两个 3 之间都存在一个 X_1-允许的块，其长度为 2 的某个幂，那么 X_2 就是层级为 2 的最终索菲克移位，并具有 TPO 性质；继续如此构造，便可得到任意层级 n的最终索菲克移位空间，且它们都具有 TPO 性质。

然而，还有另一类与最终索菲克类不相交的移位空间，也具有典型周期优化性质。这类移位空间源于如下观察——这是结构定理的另一推论：在$\partial_M X$ 上具有 TPO 性质并非 TPO 在 X上成立的必要条件：

定理 1.6. 存在具有 *TPO* 性质的移位空间，但其马尔可夫边界不具有 *TPO* 性质。

为了描述与定理1.6对应的移位空间，定义非索菲克移位空间 X为脆弱的，若其马尔可夫边界不能稳健地支撑非周期优化（即，由 $\partial_M X$ 支撑的最大化测度对应的函数集合具有空

内部（在 Lip(X) 中）），并且最终脆弱，若某个迭代马尔可夫边界是脆弱的。我们确立如下结果：

定理 1.7。 每个最终脆弱移位空间都具有 *TPO* 性质。

作为脆弱移位空间的一类具体例子，设 Y 是字母表$\{0,1\}$ 上的一个移位，它是极小的（即所有轨道均稠密），但不是唯一遍历的（即支撑多个不变测度）；例如 Y 可以取为 Oxtoby 移位（参见[63]），也可以取自 Toeplitz 移位类（例如参见 [27, 37, 55, 80]）。接着令 X 为 $\{0,1,2\}$ 上满足任意两个 2 之间都有一个 Y-允许块的序列集合。移位空间 X 是脆弱的，并且根据定理1.7 它具有 TPO 性质，尽管其马尔可夫边界 $\partial_M X = Y$ 不具有该性质（参见定理 1.6）。

本文的组织结构如下。第 2 节至 7 节讨论一般拓扑动力系统，而第 8 节至 12 节讨论符号动力系统。在第 2节中，我们在拓扑动力系统的背景下介绍记号以及遍历优化中的概念 $T: X \to X$ 和连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$。关于遍历优化的更多背景知识，例如可参见 [4, 41]。

在第3节中，我们发展了一种关于所谓可最大化集的新理论，即对于给定函数，至少支撑一个最大化测度的闭不变集。对于没有马˜纳´引理的系统，最大化测度与其支撑之间的关系可能十分微妙，而这一方法有助于进行更细致的分析。这引出了极小极大集这一关键概念：它是一个可最大化集，并且其中所有支撑包含于该集的最大化测度，其支撑都必然等于该集。这类集合总是存在，并且我们证明它们满足伯克霍夫和的一项重要定量界。

第4节引入了完全最大化集的概念，即其所有不变测度都是最大化测度的闭不变集[4]（这类集合不一定存在，不过若存在，则会带来重要推论）。文中还给出了一个关于伯克霍夫和的关键判据，用以判定极小极大集是否为完全最大化集。

第5节讨论利普希茨函数，其中利用 X 的闭不变子集，根据最大化测度来定义 Lip(X) 的若干子集：可最大化族是由闭 T- 不变集组成的集合族，其中每个利普希茨函数在该集合族中至少有一个可最大化集。这些集合族给出了 Lip(X) 的一个覆盖；对于可数集合族，该覆盖中各集合的内部合在一起构成 Lip(X) 的一个开稠密子集。这一观察构成了我们方法的基础；结合子系统约化（定理5.9），后者将受限利普希茨函数空间中的稠密性与整个空间上定义的利普希茨函数的某个开集中的稠密性联系起来 X。

在第 6 节中，我们在一般拓扑动力系统的框架下考察典型周期优化（TPO）性质。在阐明其若干基本性质（包括 TPO 成立的必要条件）之后，我们运用第 3、4 和第 5 节中发展的工具，确立重要的结构定理（定理6.10），后续的大部分内容都以此为基础。特别地，我们着重强调了具有脆弱边界或 TPO 性质的可数可最大化族的重要性。

[4]完全最大化集未必具备许多以往遍历优化研究所利用的更强性质，即测度为极大化测度 *if and only if* 且其支撑包含在该集合中；本文将这种更强的性质称为 *subordination maximizing*（参见定义4.5）。

第 7 节不再局限于完全任意的拓扑动力系统，而是聚焦于某种弱双曲性条件，即某些系统所具有的子集闭合性质。对于 Lipschitz 函数，我们证明，如果一个极小极大集具有子集闭合性质，那么必定存在一个完全最大化集。

从第8节起，本文将重点转向符号动力系统。对于任意移位空间 X，我们证明可以为其每个允许词 X_w 关联一个典范子移位 w，从而确立子集闭合性质。这意味着（定理8.21），若一个 Lipschitz 函数在马尔可夫边界 $\partial_M X$上没有极大化测度，则存在一个完全最大化（且动力学极小）的子移位包含于 X_w之中。

由此，在第9节中，我们根据 X_w定义了一族特定的有限型子移位，并将马尔可夫边界 $\partial_M X$ 并入其中，证明该族可最大化。由于有限型子移位具有 TPO，这一族构成了结构定理（定理6.10）中所述可数可最大化族的典范选择。由此我们立即推得，周期优化性质对所有 sofic 移位都是典型的（上文定理1.1 ），并可提出结构定理的符号动力系统版本，即典型周期或边界优化定理（定理9.13）。本文还引入并研究了最终索菲克移位这一类，其中包括 S-间隙移位、 S-图移位以及上下文无关移位；我们还证明它们都具有 TPO。

在第10节中，我们采用另一种途径来构造具有典型周期优化性质的移位空间。文中引入了（最终）脆弱移位这一类，并证明它们具有 TPO 性质。脆弱移位的特例包括标本移位，即满足可变规范条件，且其马尔可夫边界极小但非唯一遍历的移位。

第11节讨论了保持 TPO 性质的移位空间运算，并给出了一种构造移位空间的方法 X 使任意给定的移位空间 Y成为其马尔可夫边界。由此构造出任意层级的最终sofic移位 n（即满足 $\partial_M^n X$ 是 sofic 且非空），进而得到若干具有 TPO 性质的非索菲克移位实例。该方法还给出了具体的最终样本移位实例，其中包括一些虽具有 TPO 性质、但其马尔可夫边界不具备这一性质的移位空间。

最后，在第12节中，我们探讨这样一个问题：对于周期测度在所有不变测度空间中（弱*）稠密的移位空间，典型周期优化是否是普遍现象。我们通过明确构造一个反例，证明事实并非如此。其策略是选取一个合适的（极小、唯一遍历、非周期）移位 Z （例如著名的莫尔斯移位），再通过在某个稀疏集合中的 X -允许块之间插入一个新符号，构造一个移位空间 Z，使得 X 的马尔可夫边界等于 Z，且 Z 上的唯一不变（非周期）测度在 Lip(X) 中稳健极大化。再一次，这一构造的理论基础是结构定理（定理6.10）。

致谢。 作者感谢Klaus Thomsen就马尔可夫边界进行的启发性讨论，并感谢匿名审稿人仔细阅读文稿并提出许多有益建议，使本稿得以改进。W. Huang得到国家重点研发计划（编号：2024YFA1013602、2024YFA1013600）以及国家自然科学基金（编号：12090012、

12031019、12090010）的部分资助。L. Xu得到国家重点研发计划（编号：2024YFA1013602、2024YFA1013600）以及国家自然科学基金（编号：12031019、12371197、12426201）的部分资助。Y. Zhang得到国家自然科学基金（编号：12161141002、12271432）以及中国科学技术大学-澳大利亚科技大学数学基础学科研究中心的部分资助。本文此版本已在同行评审（如适用）后被接受发表，但并非正式出版版本，亦不反映录用后的改进或任何勘误。正式出版版本可在线获取：
http://dx.doi.org/10.1007/s00222-026-01411-x

2. Preliminaries

令 $\mathbb{N}$ 表示严格正整数集，令 $\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集。

设 X 为一个紧致度量空间，其距离函数为 d。令 $C(X)$ 表示定义在 X 上的连续实值函数集，并赋予其巴拿赫范数

$$\|f\|_{C(X)} := \max_{x\in X} |f(x)|\,.$$

令 $\mathrm{Lip}(X) \subseteq C(X)$ 表示定义在 X 上的利普希茨实值函数集，并赋予其巴拿赫范数

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X)} := \|f\|_{C(X)} + |f|_{\mathrm{Lip}(X)}\,,$$

其中

$$|f|_{\mathrm{Lip}(X)} := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} : x,y\in X, x\neq y\right\}.$$

记号 2.1。我们将一个（拓扑）动力系统定义为一对 $(X,\ T)$，其中 X 是紧致度量空间，且 $T\colon X\to X$ 是连续的。动力系统的类记为 $\mathfrak{D}$。

对于 X 度量空间，令 $\mathcal{M}(X)$ 表示 X 上的博雷尔概率测度集合。测度 $\mu\in\mathcal{M}(X)$ 的支撑记为 $\mathrm{supp}(\mu)$，指满足 $\mu(Y)=1$ 的最小闭子集 $Y\subseteq X$。对于动力系统 (X,T)，X 上的 T-不变博雷尔概率测度集合记为 $\mathcal{M}(X,T)$。赋予弱 * 拓扑后，$\mathcal{M}(X)$ 是紧的，其闭子集 $\mathcal{M}(X,T)$ 也是如此。令 $\mathcal{E}rg(X,T)\subseteq\mathcal{M}(X,T)$ 表示遍历测度集合，换言之，即单纯形 $\mathcal{M}(X,T)$ 的极点集合。闭子集 $Y\subseteq X$ 若满足 $T(Y)=Y$，则称其为 T-不变的，或简称不变的；$\mathcal{M}(Y,T)$ 表示具有支撑 $\mathrm{supp}(\mu)\subseteq Y$ 的那些 T-不变博雷尔概率测度 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 的集合。根据波特曼托定理，集合 $\mathcal{M}(Y,T)$ 是 $\mathcal{M}(X,T)$ 的一个（弱 *）闭子集。任意 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ 的支撑都是 X 的非空闭 T-不变子集。有关拓扑动力系统遍历理论的背景知识，参见例如 [28, 第 3], [33, 章、 4], [77, 章和 6] 章。

遍历优化中的关键对象（该领域的综述可参见例如 [4, 41] ）如下：

记号 2.2. 对于动力系统 $(X,T)\in\mathfrak{D}$ 和函数 $f\in C(X)$，其最大遍历平均值定义为

$$\beta(X,T,f)=\beta(f):=\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)}\int f\,d\mu\,. \tag{2.1}$$

任何满足 $\int f\,dm = \beta(f)$ 的 $m \in \mathcal{M}(X,T)$ 都称为 f 的最大化测度，或称为f-最大化测度。令

$$\mathcal{M}_{\max}(X,T,f) = \mathcal{M}_{\max}(f) := \{f\text{-maximizing measures}\}. \tag{2.2}$$

每个 $f \in C(X)$ 至少有一个最大化测度：由于 2.1) 中的上确界可以取到，这是因为 $\mathcal{M}(X,T)$ 是弱* 紧的。

我们的许多结果涉及三元组 (X,T,f)，其中 $(X,T) \in \mathfrak{D}$ 是一个动力系统，而 $f \in C(X)$ 是一个连续实值函数，因此引入以下记号会很方便。

记号 2.3。记

$$\mathfrak{X} := \{(X,T,f) : (X,T) \in \mathfrak{D},\ f \in C(X)\}.$$

由于 $\beta(X,T,f+c) = \beta(X,T,f) + c$，且 $\mathcal{M}_{\max}(X,T,f+c) = \mathcal{M}_{\max}(X,T,f)$，对所有 $(X,T,f) \in \mathfrak{X}$, $c \in \mathbb{R}$ 都成立，因此我们通常可以方便地假设 $\beta(X,T,f) = 0$，从而引出以下记号：

记号 2.4. 记

$$\mathfrak{X}_0 := \{(X,T,f) \in \mathfrak{X} :\ \beta(X,T,f) = 0\}.$$

3. Maximizable sets and minimax sets

一致双曲动力系统（X，T）的一个特点是，对于足够正则（例如利普希茨）的函数，最大化测度可以完全通过其支撑来刻画。更准确地说，对于这样的函数 f，可以证明存在一个闭不变集 Y，使得一个测度是 f-最大化的，当且仅当其支撑包含于 Y之中。这一见解与 Ma˜n´e 引理密切相关（参见第 1 节，以及注记 4.6（b）和 9.12）。然而，对于一般的（X，T，f）$\in \mathfrak{X}$，最大化测度与其支撑之间的关系可能更为微妙（例如参见 [13, 59]，其中支撑的信息几乎无法揭示某个特定最大化测度的情况）。为了超越一致双曲情形，本节将首先建立一种新的最大化集理论，其性质略弱于现有文献所要求的性质。最弱的这类概念如下：

定义 3.1. 对于 $(X,T,f) \in \mathfrak{X}$，闭 T-不变集 Y对于 (X,T,f)（或简单地对于 f）是可最大化的，如果

$$\mathcal{M}(Y,T) \cap \mathcal{M}_{\max}(f) \neq \emptyset, \tag{3.1}$$

换言之，如果某个 f-最大化测度 μ 满足 $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq Y$。为简洁起见，我们可以说 Y 是 f-可最大化的。

注意，如果 f 有唯一最大化测度 μ，那么其可最大化集恰好是包含 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的闭不变子集；更一般地，如果 f 有多个最大化测度，那么可最大化集就是包含至少一个最大化测度的支撑的闭不变子集

[5]这里，“极大化集”这一术语仅在宽泛意义上使用，用以指 X 的能够提供关于极大化测度信息的子集。尽管我们所研究的所有极大化集都是闭且不变的，并且至少是 *maximizable* 在定义 3.1的意义上，在更广泛的文献中，各种非不变极大化集也被证明是有用的，尤其是作为 $f+\varphi-\varphi\circ T$对于某些 $\varphi \in C(X)$的最大值集而出现（例如，此类集合是 [9], 中的关键工具，并被称为 *action sets* 于 [23], 以及 *contact loci* [31] X T f *non-wandering (or* 中）。对于 *Aubry) set* [23, 30] *Mather set* [60] 给定的(,)，其他有用的极大化集包括其（参见），以及其（参见）。

。在 f可最大化集中，有一类集合尤为重要：其支撑在某种意义上是极小的：

定义 3.2. 如果 $(X,T,f)\in\mathfrak{X}$，则称可最大化集 Y是 (X,T,f)（或简称 f）的极小极大集，若所有测度 $\mu\in\mathcal{M}(Y,T)\cap\mathcal{M}_{\max}(f)$ 都满足 $\operatorname{supp}(\mu)=Y$。

注 3.3. 定义 3.2 中的“极小极大”是“极小可极大化”的简称；而“极小可极大化”这一说法的由来，则是下文引理 3.4，其中可见，这类集合是可最大化集上某个偏序的极小元。不过需要注意，极小极大集不一定在动力学意义上是极小的[6]（即其中任一轨道的闭包都等于该集；参见 [44, 定义 1.32]）：例如，已知每个遍历测度 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$（见 [40]）都是某个连续函数 f（即 $\mathcal{M}_{\max}(f)=\{\mu\}$）的唯一最大化测度；在这种情况下，无论 $\operatorname{supp}(\mu)$ 是否动力学极小，$\operatorname{supp}(\mu)$ 都是 f 的极小极大集。另一方面，任何动力学极小的可最大化集自动是极小极大集（因为如果某个不变测度的支撑包含在动力学极小集 Y 中，那么它的支撑必定等于 Y）。

一个关键观察是，极小极大集总是存在：

引理 3.4. 每个$(X,T,f)\in\mathfrak{X}$都有一个极小极大集。

证明。令 $\mathcal{Y}_f$ 表示所有 f-可最大化集组成的集合，并赋予集合包含关系$\subseteq$所定义的偏序。我们声称，$(\mathcal{Y}_f,\subseteq)$具有如下性质：$\mathcal{Y}_f$的每个全序子集$\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$都有下界 $Y_\infty:=\bigcap_{\alpha\in A}Y_\alpha$属于 $\mathcal{Y}_f$。

注意到，由于每个 Y_α 都是闭且 T-不变的，$Y_\infty=\bigcap_{\alpha\in A}Y_\alpha$ 也闭且 T-不变。对于每个 $\alpha\in A$，集合 $K_\alpha:=\mathcal{M}_{\max}(f)\cap\mathcal{M}(Y_\alpha,T)$是闭的，因而是紧的；又由于 Y_α 可最大化，它非空。由于 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 关于 $\subseteq$全序排列，且每个 K_α 都是紧且非空的，因此 $\bigcap_{\alpha\in A}K_\alpha\neq\emptyset$。于是，任意 $\mu\in\bigcap_{\alpha\in A}K_\alpha$ 都满足 $\mu\in\mathcal{M}_{\max}(f)$，并且对所有$\alpha\in A$都有 $\operatorname{supp}(\mu)\subseteq Y_\alpha$，故 $\operatorname{supp}(\mu)\subseteq Y_\infty$，所以 $\mu\in\mathcal{M}_{\max}(f)\cap\mathcal{M}(Y_\infty,T)$，从而 Y_∞可最大化，换言之，$Y_\infty\in\mathcal{Y}_f$。

因此，根据佐恩引理，$(\mathcal{Y}_f,\subseteq)$ 存在一个极小元 $Y\in\mathcal{Y}_f$，其含义是：若 $Y'\in\mathcal{Y}_f$ 满足 $Y'\subseteq Y$，则 $Y'=Y$。我们断言，任何这样的 Y 都是 f 的极小极大集。为此，反设某个 $\mu\in\mathcal{M}(Y,T)\cap\mathcal{M}_{\max}(f)$ 的支撑 $Y':=\operatorname{supp}(\mu)$ 是 Y 的真子集。由于 Y' 是闭且 T- 不变的，并且 $\mu\in\mathcal{M}(Y',T)\cap\mathcal{M}_{\max}(f)$，这意味着 $Y'\in\mathcal{Y}_f$，其中 $Y'\subseteq Y$ 但 $Y'\neq Y$，从而与 Y 是 $(\mathcal{Y}_f,\subseteq)$ 的极小元这一事实矛盾。□

记号 **n 3.5.** 对于映射 $T\colon X\to X$、函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 以及 $n\in\mathbb{N}$，我们记作

$$S_nf:=\sum_{i=0}^{n-1}f\circ T^i.$$

极小极大集 Y 具有一个非常实用的性质：给定任意非空开子集 $A\subseteq Y$，所有足够长且与 A 不相交的 Y 中的轨道段，其伯克霍夫平均都严格小于最大遍历平均。

[6]为避免日后可能产生的任何混淆，以下将使用术语 *dynamically minimal* *mini-mal* （而非仅用 ）来指称所有轨道均稠密的动力系统（X T）。

引理 3.6。 假设 $(X, T, f) \in \mathfrak{X}$，且 $Y \subseteq X$ 是 f 的极小极大集。对于 Y 的任意非空开子集 A，存在 $N_A \in \mathbb{N}$，使得若 $x \in Y$，且 $n \geq N_A$ 满足$T^i(x) \notin A$，其中 $0 \leq i \leq n-1$，则

$$\frac{1}{n} S_n f(x) < \beta(f)\,. \tag{3.2}$$

证明。只需证明（3.2）在如下情形成立： β（f） $= 0$，换言之，即证明存在 $N_A \in \mathbb{N}$，使得若 $x \in Y$， $n \geq N_A$，且 T^i（x） $\notin A$ 对 $0 \leq i \leq n-1$成立，则

$$S_n f(x) < 0\,. \tag{3.3}$$

若（3.3）不成立，则存在序列（N_j）$_{j=1}^{\infty}$ （由自然数构成），且 $\lim_{j\to\infty} N_j = \infty$，以及序列 $x_j \in Y$，使得

$$T^i(x_j) \notin A \quad \text{for all } 0 \leq i \leq N_j - 1,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{3.4}$$

with

$$S_{N_j} f(x_j) \geq 0 \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.5}$$

定义测度 $\nu_j \in \mathcal{M}$（Y）如下

$$\nu_j := \frac{1}{N_j} \sum_{i=0}^{N_j-1} \delta_{T^i(x_j)},$$

则（3.4）给出

$$\nu_j(A) = 0 \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}\,, \tag{3.6}$$

且（3.5）给出

$$\int f\, d\nu_j \geq 0 \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}\,. \tag{3.7}$$

弱* 紧性 $\mathcal{M}(Y)$意味着序列ν_j 有一个子序列极限$\nu \in \mathcal{M}(Y)$，事实上 $\nu \in \mathcal{M}(Y,\ T)$。由于 A是开集，因此（3.6）给出

$$\nu(A) = 0\,. \tag{3.8}$$

因此 supp(ν) $\subseteq Y \setminus A$，特别是 ν的支撑是 Y的真闭子集。但$\nu \in \mathcal{M}(Y,\ T)$也是 f-最大化的，因为（3.7）给出

$$\int f\, d\nu \geq 0\,. \tag{3.9}$$

但 Y是 f的极小极大集，因此不存在 f-最大化测度，其支撑是 Y的真闭子集。这个矛盾完成了证明。□

由此可得极小极大集内各点的伯克霍夫和满足以下界；为方便起见，以下在最大遍历平均值为零的情形下表述。

命题 3.7。 （极小极大*Birkhoff*界）
假设 $(X, T, f) \in \mathfrak{X}_0$，且 $Y \subseteq X$ 是 f 的极小极大集。对于 Y 的任意非空开子集 A，存在 $N_A \in \mathbb{N}$，使得若 $x \in Y$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $T^i(x) \notin A$，其中$0 \leq i \leq n-1$，则

$$S_n f(x) \leq N_A \|f\|_{C(X)}\,. \tag{3.10}$$

证明。令 N_A 如引理 3.6中所述，并假设 $x \in Y$ 满足 $T^i(x) \notin A$，其中 $0 \le i \le n-1$。若 $n < N_A$ 则有直接的界

$$S_n f(x) \le n\|f\|_{C(X)} \le N_A \|f\|_{C(X)},$$

而如果 $n \ge N_A$ 则引理 3.6 给出

$$S_n f(x) < 0 \le N_A \|f\|_{C(X)},$$

因此确实（3.10）成立。 □

在下文中，对于给定的三元组（X，T，f）$\in \mathfrak{X}$，其中 $Z \subseteq X$ 是一个非空的闭 T-不变子集，考虑受限三元组（Z，$T|_Z$，$f|_Z$）$\in \mathfrak{X}$的遍历优化问题将是重要的。为此，用（Z，T，f）来代替（Z，$T|_Z$，$f|_Z$）会更为方便，从而引出如下记号：

记号 3.8. 若（X，T，f）$\in \mathfrak{X}$，且 $Z \subseteq X$ 是一个非空的闭 T-不变子集，则我们记

$$\beta(Z,T,f) = \max_{m\in\mathcal{M}(Z,T)} \int f|_Z \, dm = \max_{m\in\mathcal{M}(Z,T)} \int f \, dm,$$

and

$$\mathcal{M}_{\max}(Z,T,f) = \left\{ m \in \mathcal{M}(Z,T) : \int f\, dm = \beta(Z,T,f) \right\}.$$

下面的结论是直接的：

引理 3.9. 若$(X,T,f) \in \mathfrak{X}$，且 $Z \subseteq X$ 是一个非空闭的 T-不变集，则

(a) $\beta(Z,T,f) \le \beta(X,T,f)$。*(b)* 当且仅当 $\beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$ 时，Z对于 (X,T,f) 可最大化。*(c)* 若 $\beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$，则 $\mathcal{M}_{\max}(Z,T,f) \subseteq \mathcal{M}_{\max}(X,T,f)$。

证明。由定义可立即得出，因为 $\mathcal{M}(Z,T) \subseteq \mathcal{M}(X,T)$。

(b) 若 Z对于 (X,T,f) 可最大化，则存在 $\mu \in \mathcal{M}(Z,T)$，使得 $\int f\, d\mu = \beta(X,T,f)$，因此 $\beta(Z,T,f) = \max_{m\in\mathcal{M}(Z,T)} \int f\, dm \ge \int f\, d\mu = \beta(X,T,f)$。然而，根据 (a)，$\beta(Z,T,f) \le \beta(X,T,f)$，故等式 $\beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$ 成立。

反之，若 $\beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$，则存在 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(Z,T,f) \subseteq \mathcal{M}(Z,T)$，使得 $\int f\, d\mu = \beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$。因此 $\mu \in \mathcal{M}(Z,T) \cap \mathcal{M}_{\max}(X,T,f)$，所以 Z 对于 (X,T,f) 是可最大化的。

(c) 若 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(Z,T,f)$，则 $\int f\, d\mu = \beta(Z,T,f) = \beta(X,T,f)$，因此 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(X,T,f)$，结论得证。□

4. Completely maximizing sets

下面给出对可最大化集概念的加强：

定义 4.1。对于 $(X,T,f) \in \mathfrak{X}$，闭的非空 T-不变集 Y 称为 (X,T,f) 的完全最大化集（或简称为 f 的完全最大化集），如果

$$\mathcal{M}(Y,T) \subseteq \mathcal{M}_{\max}(f), \tag{4.1}$$

in 换句话说，如果每个支撑包含在 Y 内的不变测度都是 f-最大化的 .

我们记录定义的以下直接推论：

引理 4.2. 若 $(X,T,f) \in \mathfrak{X}$ 则

(a) f 的任一完全最大化集对于 f均可最大化。(b) f 的完全最大化集的任一非空闭 T-不变子集，本身也是 f的完全最大化集。

注记 4.3。 一般而言，完全最大化集不一定存在：例如，若 X是动力学极小的，但恰好支撑两个遍历不变测度 μ，μ'，那么对于任意满足 $\int f\,d\mu \neq \int f\,d\mu'$的 $f \in C(X)$，集合 X 是可最大化的，而且确实是极小极大集，尽管它并非完全最大化集。但是， X 是唯一的闭非空 T不变子集，因此对于 f，不存在完全最大化集。

任何闭非空不变集都是某个连续函数的完全最大化集（例如常函数），因此完全最大化集不一定是动力学极小的。正如注记 3.3中所述，极小极大集也不一定是动力学极小的。然而，同时为极小极大集和完全最大化集的集合必定是动力学极小的：

引理 4.4。 假设 $(X, T, f) \in \mathfrak{X}$。若 Y是 f的极小极大集，且也是 f的完全最大化集，则 Y 是动力学极小的。

证明。 任取 Y' 为一个非空闭 T-不变子集 Y。由引理 4.2(b)， Y' 是 的完全最大化集。特别地，存在一个 f-最大化测度 μ，使得 $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq Y' \subseteq Y$。但 Y是极小极大集，因此 $\mathrm{supp}(\mu) = Y$，由此可得 $Y' = Y$。因此，任意非空闭 T-不变子集 Y都必须等于 Y；换言之， Y 是动力学极小的。□

下面这个更强的极大化集概念，可以通过支撑对极大化测度进行精确刻画：

定义 4.5。 对于 $(X,\ T,\ f) \in \mathfrak{X}$，若闭集 Y是 T-不变集，则称其为 $(X,\ T,\ f)$ 的从属最大化集 （或简称为 f的从属最大化集），当且仅当

$$\mathcal{M}(Y, T) = \mathcal{M}_{\max}(f)\,, \tag{4.2}$$

换言之，一个不变测度是 f-极大化的，当且仅当其支撑包含于 Y。

注记 4.6. (a) 显然，每个从属最大化集都是完全极大化的。从属最大化集未必唯一，因为存在闭不变集 $Y \neq Y'$，使得 $\mathcal{M}(Y, T) = \mathcal{M}(Y', T)$：例如，若 $(X, T) \in \mathfrak{D}$是满射的、唯一遍历的，但不是动力学极小的，则此结论对$Y = X$成立，且 Y' 为唯一不变概率测度的支撑。

(b) 从属最大化集的存在性（根据 Morris [56, 定理 1、命题 1]）等价于所谓的[7] 从属性质，由 Bousch [10, , 第 290]页引入： $f \in C(X)$ 具有从属性质，若对任意μ, $\nu \in \mathcal{M}(X, T)$，满足 $\nu \in \mathcal{M}_{\max}(f)$ 且支撑$(\mu) \subseteq$ 支撑(ν)，则 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(f)$。

Morris [56, 定理 1] 建立了从属性质的一个刻画，换言之，即从属最大化集的存在性可由伯克霍夫和的一致有界性来刻画。在 $\beta(f) = 0$ 的情况下陈述该结果较为方便：

[7]事实上，Bousch [10, 第 290]将其表述为一种从属性质 *principle*，并证明该性质对所有 Walters 函数都成立（参见 [76]）；对于更一般的连续函数而言，这一性质可能成立，也可能不成立，因此我们使用“从属”一词 *property*。在本文中，“从属”一词 *principle* 专指从属性质对所有 Lipschitz 函数都成立的情形（参见定义 10.4）。

引理 4.7. 设 $(X,T,f)\in\mathfrak{X}_0$。若

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in X} S_n f(x)<\infty \tag{4.3}$$

则存在 f的从属最大化集。

证明。由 [56, 定理 1], , 条件(4.3)蕴含 f 满足从属性质（参见注 4.6(b)），并由 [56, 命题 1] 可知，这等价于存在闭子集 $K\subseteq X$，使得 $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$为 f-极大化当且仅当 $\mathrm{supp}(\mu)\subseteq K$。于是闭 T-不变集 $Y:=\cap_{n=0}^{\infty}T^n\left(\cap_{i=0}^{\infty}T^{-i}(K)\right)$具有类似性质：$\mu\in\mathcal{M}(X,T)$为 f-极大化当且仅当$\mathrm{supp}(\mu)\subseteq Y$。换言之，$Y$是 f的从属最大化集。□

一个重要推论是下述关于极小极大集为完全最大化的判别准则：

命题 4.8. *(*完全最大化准则*)*
设$(X,T,f)\in\mathfrak{X}_0$。若 $Y\subseteq X$是 f的极小极大集，并且

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Y} S_n f(x)<\infty\,, \tag{4.4}$$

那么 Y是 f的完全最大化集，并且也是动力学极小的。

证明。 条件 (4.4) 由引理 4.7可推出，存在一个闭 T-不变子集$Z\subseteq Y$，它是限制系统 (Y,T,f) 的从属最大化集，换言之

$$\mathcal{M}(Z,T)=\mathcal{M}_{\max}(Y,T,f)\,. \tag{4.5}$$

现在 Y是 (X,T,f) 的极小极大集，因此是 (X,T,f) 的可最大化集，所以引理 3.9 的 (b) 和 (c) 部分表明 $\beta(Y,T,f)=\beta(X,T,f)$，且

$$\mathcal{M}_{\max}(Y,T,f)\subseteq\mathcal{M}_{\max}(X,T,f)\,. \tag{4.6}$$

合并 (4.5) 和 (4.6) 得到

$$\mathcal{M}(Z,T)\subseteq\mathcal{M}_{\max}(X,T,f)\,. \tag{4.7}$$

但是，Y对于 f是极小极大的，因此 $\mathcal{M}(Y,T)$中的所有测度$\cap\,\mathcal{M}_{\max}(X,T,f)$的支撑都必须等于整个 Y。这意味着，$\mathcal{M}(Z,T)$中的所有测度的支撑都必须等于 Y。但这实际上意味着 $Z=Y$。

这意味着（4.7）变为

$$\mathcal{M}(Y,T)\subseteq\mathcal{M}_{\max}(X,T,f)\,.$$

换句话说，Y是（X，T，f）的完全最大化集。

由于 Y 既是极小极大又是完全最大化的，因此根据引理4.4，它必然是动力学极小的。□

5. Maximizable families

本节中，我们考虑定义在 X 上的 Lipschitz 实值函数空间 $\mathrm{Lip}(X)$。通过遍历优化，不变测度的集合将按以下方式定义 $\mathrm{Lip}(X)$ 的子集：

记号 5.1。 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。对于子集 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}(X,T)$，记作

$$\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T) := \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset\}\,,$$
$$\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T) := \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) \subseteq \mathcal{N}\}\,.$$

当 Z 是 X 的闭 T-不变子集时，记作

$$\mathrm{Lip}_Z(X,T) := \mathrm{Lip}^{\mathcal{M}(Z,T)}(X,T) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) : Z \text{ is } f\text{-maximizable}\}\,,$$
$$\mathrm{Lip}^{\subseteq}_Z(X,T) := \mathrm{Lip}^{\mathcal{M}(Z,T)}_{\subseteq}(X,T) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) \subseteq \mathcal{M}(Z,T)\}\,.$$

注记 5.2。 在下文中，子集 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}(X,T)$ 将取为 $\mathcal{N} = \mathcal{M}(Z,T)$ 或 $\mathcal{N} = \mathcal{P}er(Z,T)$（在 Z 上的周期测度集合，参见定义 6.1），其中 $Z \subseteq X$ 是一个闭不变子集。

以下引理是显然的：

引理 5.3. 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。闭的 T-不变子集 $Z \subseteq X$ 非空，当且仅当 利普希茨$_Z(X,T)$ 非空。

证明。 若 $Z = \emptyset$，则 $\mathcal{M}(Z,T) = \emptyset$，因此对于任何 $f \in \mathrm{Lip}(X)$，Z都不是 f-可最大化的，即 $\mathrm{Lip}_Z(X,T) = \emptyset$。若 $Z \neq \emptyset$，则对于常函数，Z是 f-可最大化的，因此 $\mathrm{Lip}_Z(X,T) \neq \emptyset$。□

引理 5.4. 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。若 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{M}(X,T)$ 的闭子集，则 利普希茨$^{\mathcal{N}}(X,T)$ 是 $\mathrm{Lip}(X)$ 的闭子集。特别地，若 $Z \subseteq X$ 是闭的 T-不变子集，则利普希茨$_Z(X,T)$ 是 $\mathrm{Lip}(X)$ 的闭子集。

证明。 设 $f_i \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$，其中 $f_i \to f$ in $\mathrm{Lip}(X)$，因此尤其有 $f_i \to f$ 属于 $C(X)$ 的拓扑。存在 f_i-最大化测度 $\mu_i \in \mathcal{N}$，并通过取子序列，我们可以假设 $\mu_i \to \mu \in \mathcal{N}$。但是

$$\int f\,d\mu = \left(\int f\,d\mu - \int f\,d\mu_i\right) + \left(\int f\,d\mu_i - \int f_i\,d\mu_i\right) + \int f_i\,d\mu_i\,, \tag{5.1}$$

并注意到对所有 $m \in \mathcal{M}(X,T)$，$\int f_i\,d\mu_i \geq \int f_i\,dm$，然后令 $i \to \infty$ 属于 (5.1)，我们看到对所有 $m \in \mathcal{M}(X,T)$，$\int f\,d\mu \geq \int f\,dm$，因此 μ是 f-最大化的。但是 $\mu \in \mathcal{N}$，因此 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(f) \cap \mathcal{N}$，换言之 $f \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$，所以 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$ 是闭的。□

可最大化集的概念有如下重要的推广：

定义 5.5. 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。一个可最大化族 是由闭 T-不变子集构成的集合 $\mathcal{Z}$，使得对所有 $f \in$ 利普希茨(X)，存在 $Z \in \mathcal{Z}$ 是 f-可最大化的。

对于动力系统 (X,T) 的可最大化族 $\mathcal{Z}$，将成为下文论述中的重要工具：如果 $\mathcal{Z}$ 是非平凡的 （即不包含其自身 X），那么在某些情况下，可以从 $\mathcal{Z}$ 的成员的性质推导出 (X,T) 的性质。第一步是一个直接的观察：每个可最大化族都会诱导出 $\mathrm{Lip}(X)$ 的一个覆盖：

引理 5.6。 如果 $(X,T)\in\mathfrak{D}$，且具有可最大化族 $\mathcal{Z}$，那么

$$\mathrm{Lip}(X)=\bigcup_{Z\in\mathcal{Z}}\mathrm{Lip}_Z(X,T)\,. \tag{5.2}$$

当可最大化族是可数的时，一个关键结论如下 :

Lem引理 5.7。 若$(X$、$T)\in\mathfrak{D}$，且 $\mathcal{Z}=\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是可数可最大化族，则 n

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}int\left(\mathrm{Lip}_{Z_i}(X,T)\right)$$

在利普希茨(X)中稠密。

证明。 由于 $\mathcal{Z}=\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$是可最大化的，引理 5.6 给出利普希茨$(X)=\bigcup_{i=1}^{\infty}$利普希茨$_{Z_i}(X,T)$。由于利普希茨$(X)$是一个贝尔空间，且每个利普希茨$_{Z_i}(X,T)$都是闭集，贝尔纲定理意味着它们内部的并集在利普希茨(X)中稠密（例如参见 [1,定理 3。34]）。□

对于某些 $\mathcal{N}$，特别是当 $\mathcal{N}=\mathcal{M}(Z,T)$ 时，集合 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X)$ 和 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X)$ 具有公共内部，这一结果稍后将会有用。

引理 5.8。 对于 $(X,T)\in\mathfrak{D}$，若 $\mathcal{N}$是 $\mathcal{M}(X,T)$ 的闭凸子集，则

$$int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\right)=int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)\right).$$

*Pro*因此。 若 $\mathcal{N}=\emptyset$，则 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)=\emptyset=\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)$，因此所需的等式成立 .

假设 $\mathcal{N}\neq\emptyset$。现在 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)\subseteq\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$，因此 $int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)\right)$包含于 $int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\right)$。为证明反向包含关系 $int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\right)\subseteq int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)\right)$，注意到这等价于证明 $int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\right)\subseteq\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)$。为证明这一包含关系，反设存在 $f\in int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\right)\setminus\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X,T)$。

因此，存在 $\mu\in\mathcal{M}_{\max}(f)\setminus\mathcal{N}$。由于 $\mathcal{N}$是局部凸空间 $\mathcal{M}(X,T)$ 的非空闭凸子集，且 $\mu\notin\mathcal{N}$，所以存在一个连续线性泛函 l（定义在配备弱* 拓扑的 X 上的符号测度空间上），它能严格分离 $\mathcal{N}$ 和 μ （参见 [1, 推论 5.59]）。将 l 与某个 $\phi\in C(X)$ 等同起来，这意味着存在 $\delta>0$，使得 $\int\phi\,d\mu=3\delta$，且对所有 $\nu\in\mathcal{N}$，$\int\phi\,d\nu\leq 0$。由于 $\mathrm{Lip}(X)$ 在 $C(X)$ 中一致稠密，根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，存在 $\psi\in\mathrm{Lip}(X)$，使得 $\|\phi-\psi\|_{C(X)}\leq\delta$，因此对所有 $\nu\in\mathcal{N}$，$\int\psi\,d\mu\geq 2\delta\geq\delta+\int\psi\,d\nu$。由此可得，对于所有 $\nu\in\mathcal{N},\epsilon>0$，$\int(f+\epsilon\psi)\,d\mu\geq\delta\epsilon+\int(f+\epsilon\psi)\,d\nu$。因此，若 $\epsilon>0$，则 $\mathcal{N}$与 $\mathcal{M}_{\max}(f+\epsilon\psi)$ 不相交，因而 $f+\epsilon\psi\notin\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$，这就与 f位于 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)$ 的内部这一事实相矛盾。□

以下重要结果将全空间 X 上定义的 Lipschitz 函数开集中的稠密性，与受限 Lipschitz 函数空间中的稠密性联系起来。

定理 5.9。 （子系统约化）
设 $(X,T)\in\mathfrak{D}$，其中 Z 是 X 的一个闭 T-不变子集。设 U 是 $Lip(X)$ 的一个非空开子集，并且对所有 $f\in U$，Z 都可最大化。若 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}(X,T)$ 满足 $Lip^{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}_{(Z,T)}}(Z,T)$ 在 $Lip(Z)$ 中稠密，则 $Lip^{\mathcal{N}}(X,T)\cap U$ 在 U 中稠密。

证明。 令 $f\in U$，并选取足够小的 $\delta>0$，使得

$$\{g\in\mathrm{Lip}(X):\|f-g\|_{\mathrm{Lip}(X)}<\delta\}\subseteq U\,. \tag{5.3}$$

由于 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}}{}_{(Z,T)}(Z,T)$ 在 $\mathrm{Lip}(Z)$ 中稠密，因此存在 $h_\delta \in \mathrm{Lip}(Z)$，使得 $\|h_\delta\|_{\mathrm{Lip}(Z)} < \delta$，满足 $f|_Z + h_\delta \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}}{}_{(Z,T)}(Z,T)$，因此存在 $\mu \in \mathcal{N}\cap\mathcal{M}(Z,T)$，使得

$$\mu \in \mathcal{M}_{\max}(Z,T,f|_Z + h_\delta)\,. \tag{5.4}$$

根据 McShane 延拓定理，[51]，Lipschitz 函数 h_δ 可以延拓为 $\widehat{}$函数 $\widehat{h}_\delta \in \mathrm{Lip}(X)$，且 Lipschitz 范数不变（见 [78, 定理 1。33]），因此 $\|\widehat{h}_\delta\|_{\mathrm{Lip}(X)} = \|h_\delta\|_{\mathrm{Lip}(Z)} < \delta$，故（5.3）推出

$$f + \widehat{h}_\delta \in U\,. \tag{5.5}$$

$\widehat{}$事实 $f+h_\delta \in U$ 意味着 Z 对 $f+h_\delta$是可最大化的。因此，引理$\widehat{}$3.9(b) 和 (c) 表明 $\beta(Z,\ T,\ f|_Z+h_\delta) = \beta(X,\ T,\ f+\widehat{h}_\delta)$，并且

$$\mathcal{M}_{\max}(Z,T,f|_Z+h_\delta) \subseteq \mathcal{M}_{\max}(X,T,f+\widehat{h}_\delta)\,. \tag{5.6}$$

$\widehat{}$结合（5.4）和（5.6）可得 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(X,\ T,\ f+\widehat{h}_\delta)$。又因为$\mu \in \mathcal{N}\cap\mathcal{M}(Z,\ T) \subseteq \mathcal{N}$，所以

$$f + \widehat{h}_\delta \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\,, \tag{5.7}$$

因此（5.5）和（5.7）给出

$$f + \widehat{h}_\delta \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X,T)\cap U\,. \tag{5.8}$$

由于 f是 U的任意元素，且 $\|h_\delta\|_{\mathrm{Lip}(X)} < \delta$可$\widehat{}$以取得任意小，由（5.8）可知利普希茨$^{\mathcal{N}}$（$X,\ T$）$\cap U$在 U中稠密。□

6. Typical periodic optimization and the structural theorem

在本节中，我们开始研究本文的主题——典型周期优化。特别地，第3、4和5节中所发展的工具将被用来建立一个关键的结构定理（定理6.10）。

定义 6.1. 对于（$X,\ T$）$\in \mathfrak{D}$，若 $x \in X$是周期的，最小周期为 n，则其轨道$\{x,\dots,T^{n-1}(x)\}$支撑唯一的 T-不变概率测度，即

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{T^j(x)}\,,$$

并且任一这样的 μ 都称为周期测度。我们定义

$$\mathcal{P}er(X,T) := \{\mu \in \mathcal{M}(X,T) : \mu \text{ is periodic}\}\,,$$

动力系统 $(X,\ T)$ 的周期测度集合。

以下定义曾在第1节讨论：

定义 6.2. 给定 $(X,\ T) \in \mathfrak{D}$，若连续函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 满足周期优化性质，则存在 $m \in \mathcal{P}er(X,\ T)$，使得

$$\int f\,dm > \int f\,d\mu \text{ for all } \mu \in \mathcal{M}(X,T)\setminus\{m\}.$$

周期优化性质引出了以下定义：

定义 6.3. 一个动力系统 $(X,T) \in \mathfrak{D}$ 具有典型周期优化 *(TPO)* 性质，如果存在一个开稠密子集 $P \subseteq$ 利普希茨(X)，使得每个 $f \in P$ 都具有周期优化性质。为简洁起见，我们可以简单地说 (X,T) 具有 *TPO*。

注记 6.4. 注意，TPO 比如下说法更强：具有周期优化性质的利普希茨函数是通有的，即构成利普希茨(X)的一个剩余子集。

若将 $\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 定义为具有周期优化性质的所有 Lipschitz 函数组成的集合，则我们可以表示为

$$\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,T) := \bigcup_{\mu\in\mathcal{P}er(X,T)} \mathrm{Lip}_{\subseteq}^{\{\mu\}}(X,T). \tag{6.1}$$

一般而言，$\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 不一定是 $\mathrm{Lip}(X)$ 的开子集，因此其内部

$$P(X,T) := int\left(\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,T)\right)$$

将起到集合 P的作用，该集合见定义 6.3；也就是说，若 $(X,\ T)$ 具有 TPO，则 $P(X,\ T)$ 将在 $\mathrm{Lip}(X)$ 中稠密。

$\mathrm{Lip}(X)$ 中还有另外两个开子集，它们对于给定的 $(X,\ T)\in\mathfrak{D}$而言，与周期优化有着自然的联系。其中第一个记作 $P_-(X,\ T)$，其定义是先取出式 $(\overset{\{\mu\}}{\subseteq}(X,\ T)$ 中 Lip6.1 所示各集合的内部，再取它们的并集

$$P_-(X,T) := \bigcup_{\mu\in\mathcal{P}er(X,T)} int\left(\mathrm{Lip}_{\subseteq}^{\{\mu\}}(X,T)\right) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{P}er(X,T)} int\left(\mathrm{Lip}^{\{\mu\}}(X,T)\right), \tag{6.2}$$

其中需要指出，式 (6.2) 中的第二个等号是由引理 5.8 得出的，其中 $\mathcal{N}=\{\mu\}$。集合 $P_-(X,T)$ 由具有所谓锁定性质的 Lipschitz 函数组成（该性质的定义见 [6, 7], cf. [9, 38] ，其中讨论了 locking 一词的相关用法）。比较式 (6.1) 和 (6.2) 可知，开集 $P_-(X,T)$ 是 $\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,T)$ 的子集，因此也是 $P(X,T)\ = int\left(\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,T)\right)$ 的子集。

相比之下，在 TPO 的语境中，还有一个超集 $P_+(X,\ T)$，可视为 $\mathrm{Lip}(X)$ 的一个自然开子集。为了描述 $P_+(X,\ T)$，我们先说，如果 f 至少有一个最大化测度是周期的，即存在 $m\in\mathcal{P}er(X,\ T)$，使得 $\int f\,dm\geq\int f\,d\mu$ 对所有 $\mu\in\mathcal{M}(X,\ T)$ 都成立，那么它就具有弱周期优化 性质；随后将 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 定义为所有具有弱周期优化性质的 Lipschitz 函数所构成的集合。集合 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 可以表示为

$$\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T) := \mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er(X,T)}(X,T) = \bigcup_{\mu\in\mathcal{P}er(X,T)} \mathrm{Lip}^{\{\mu\}}(X,T), \tag{6.3}$$

并且我们定义

$$P_+(X,T) := int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T)\right).$$

显然，$\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 是 $\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,\ T)$ 的子集，因此 $P(X,\ T)\ = int\left(\mathrm{Lip}_!^{\mathcal{P}er}(X,\ T)\right)$ 是 $P_+(X,\ T)\ = int\left(\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,\ T)\right)$的子集。综上，我们有：

$$P_-(X,T)\subseteq P(X,T)\subseteq P_+(X,T)\subseteq \mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T). \tag{6.4}$$

为了考察周期优化在多大程度上具有典型性，最令人满意的情况是自然开集 $P_-(X,T)$、$P(X,T)$、$P_+(X,T)$ 在 $\mathrm{Lip}(X)$ 中都具有相同的闭包，而事实确实如此。尽管对于任意动力系统 $(X,T)\in\mathfrak{D}$，$P_-(X,T)\ = P(X,T)\ = P_+(X,T)$ 确实成立，但一般性证明对我们的目的而言略显冗长，因此下文给出一个简短证明，适用于 T 是利普希茨的情形（这足以涵盖第 8 节及之后所研究的特定系统类别），并简要指出推广到更一般结果的一种思路。

引理 6.5. 若 $(X,T) \in \mathfrak{D}$ 则

$$\overline{P_-(X,T)} = \overline{P(X,T)} = \overline{P_+(X,T)} = \overline{\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T)}. \tag{6.5}$$

证明。设 T 是利普希茨的，因此每个迭代 T^i 也是利普希茨的，换言之，存在 $K_i > 0$ 使得 $d(T^i(x)\ T^i(x')) \le K_i d(x,x')$ 对所有 $x, x' \in X$, $i \in \mathbb{N}$均成立。根据 (6.4)，要证明 (6.5)，只需证明

$$\mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T) \subseteq \overline{P_-(X,T)}. \tag{6.6}$$

假设 $f \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T)$。因此存在一个周期性的 f-最大化测度 μ，其对应的轨道为 $Q := \mathrm{supp}(\mu)$，基数为 $q \in \mathbb{N}$，记作如此。注意，如果 $g \in \mathrm{Lip}(X) x \in X$，那么

$$S_q g(x) - q\int g\,d\mu \le |g|_{\mathrm{Lip}(X)} d(x,Q) \sum_{i=0}^{q-1} K_i, \tag{6.7}$$

因为如果 $y \in Q$ 满足 $d(x,y) = d(x,Q) := \min_{z\in Q} d(x,z)$，那么 (6.7) 左边等于 $\sum_{i=0}^{q-1}($ $g(T^i x) - g(T^i y))$，利用 g 和 T^i的利普希茨常数即可直接对其进行界定。

对于任意 $\epsilon > 0$，定义 $f_\epsilon := f - \epsilon d(\cdot, Q)$，并且

$$U_\epsilon := \left\{ g \in \mathrm{Lip}(X) : |g|_{\mathrm{Lip}(X)} \sum_{i=0}^{q-1} K_i < \epsilon/2 \right\}. \tag{6.8}$$

我们声称，对于所有 $g \in U_\epsilon$，μ 都是唯一的 $(f_\epsilon + g)$-最大化测度。这意味着开集 $V_\epsilon := \{f_\epsilon + g : g \in U_\epsilon\}$ 是 $int(\mathrm{Lip}^{\{\mu\}}(X,T))$ 的子集；又由于 f 是 $\cup_{\epsilon>0} V_\epsilon$ 中元素在利普希茨拓扑下的极限，因此可得 $f \in int(\mathrm{Lip}^{\{\mu\}}(X,T))$。由于 $P_-(X,T) = \bigcup_{m\in\mathcal{P}er(X,T)} int\Big(\mathrm{Lip}^{\{m\}}(X,T)\Big)$（参见 (6.2)），我们看到 $f \in P_-(X,T)$，故 (6.6) 得证。

还需要证明这一断言：对于所有$g \in U_\epsilon$，μ 都是唯一的 $(f_\epsilon + g)$-最大化测度。换句话说，若 $\nu \in \mathcal{M}(X,\ T) \setminus \{\mu\}$，则

$$\int (f_\epsilon + g)\,d\nu < \int (f_\epsilon + g)\,d\mu. \tag{6.9}$$

首先注意到，根据（6.7）、（6.8），

$$\frac{1}{q} S_q g(x) - \int g\,d\mu \le \frac{1}{q}\frac{\epsilon}{2} d(x,Q) \le \frac{\epsilon}{2} d(x,Q) \quad \text{for all } x \in X. \tag{6.10}$$

-不变性以及 ν，结合（6.10），可得

$$\int g\,d\nu = \int \frac{1}{q} S_q g\,d\nu = \int \left(\frac{1}{q} S_q g - \int g\,d\mu\right) d\nu + \int g\,d\mu \le \frac{\epsilon}{2}\int d(\cdot,Q)\,d\nu + \int g\,d\mu, \tag{6.11}$$

而（6.11）意味着

$$\int (f_\epsilon + g)\,d\nu \le \int f\,d\nu - \frac{\epsilon}{2}\int d(\cdot,Q)\,d\nu + \int g\,d\mu < \int f\,d\nu + \int g\,d\mu, \tag{6.12}$$

其中最后一个不等式用到了 $\nu \neq \mu$，因此 $\int d(\cdot,\ Q)\,d\nu > 0$。现在 μ 是 f 和 f_ϵ的一个最大化测度，因此 $\int f\,d\nu \le \int f\,d\mu = \int f_\epsilon\,d\mu$，结合式（6.12）即可得到所需的不等式（6.9）。

对于一般的 $(X,T) \in \mathfrak{D}$，也就是说，不对 T 作利普希茨假设时，可以采用 [7]的方法证明：若 $f \in \mathrm{Lip}^{\mathcal{P}er}(X,T)$，则 $f \in P_{-}(X,T)$。首先注意到，若 $\mu \in \mathcal{P}er(X,T) \cap \mathcal{M}_{\max}(f)$，则存在 $C_\mu > 0$ 使得 $W(\mu,\nu) \leq C_\mu \int d(\cdot, \mathrm{supp}(\mu))\, d\nu$，其中 W 表示 $\mathcal{M}(X)$ 上的 Wasserstein距离（见定义 12.1）。由此可知，对于 $\epsilon > 0$，函数 $f_\epsilon := f - \epsilon\, d(\cdot, \mathrm{supp}(\mu))$ 属于 $int(\mathrm{Lip}^{\{\mu\}}_{\subseteq}(X,T))$，因此 $f \in int(\mathrm{Lip}^{\{\mu\}}_{\subseteq}(X,T)) \subseteq P_{-}(X,T)$。 □

鉴于引理 6.5，典型周期优化的各种刻画可总结如下：

推论 6.6. 对于 $(X,T) \in \mathfrak{D}$，下列各项等价：

(a) (X,T) *具有 TPO 性质。(b)* $P(X,T)$ *在利普希茨*(X) *中稠密。(c) 利普希茨*$^{\mathcal{P}er}_{!}(X,T)$ *在利普希茨* (X) *中稠密。(d)* $P_{+}(X,T)$ *在利普希茨*(X) *中稠密。(e) 利普希茨*$^{\mathcal{P}er}(X,T)$ *在利普希茨* (X) *中稠密。(f)* $P_{-}(X,T)$ *在利普希茨*(X) *中稠密。*

证明。注意，(b) 蕴含 (a)，因为 $P(X,T)$ 是开的，且 (a) 蕴含 (b)，因为 $P(X,T)$ 是最大的开集，其所有元素都具有周期优化性质。(b)、(d)、(e) 与 (f) 的等价性直接来自引理 6.5，而 (c) 与它们的等价性则是因为 $P(X,T) \subseteq$ 利普希茨$^{\mathcal{P}er}_{!}(X,T) \subseteq$ 利普希茨$^{\mathcal{P}er}(X,T)$。 □

显然，若 $(X,T) \in \mathfrak{D}$ 没有周期轨道，则它不具有 TPO。事实上，TPO 的一个必要条件是周期测度在遍历测度中稠密：

Le引理 6.7。 若$(X,T) \in \mathfrak{D}$ 具有 *TPO*，则 $\mathcal{P}er(X,T)$ 在 $\mathcal{E}rg(X,T)$ 中弱* 稠密 .

证明。若 $(X,T) \in \mathfrak{D}$ 具有典型周期优化性质，则 $P(X,T)$ 在 $\mathrm{Lip}(X)$ 中稠密。因此，关于 $C(X)$ 上的一致拓扑，$P(X,T)$ 在 $C(X)$ 中稠密，因为 $\mathrm{Lip}(X)$ 稠密嵌入于 $C(X)$。根据引理 3.4],，这种稠密性意味着集合 $\mathcal{U} = \mathcal{E}rg(X,T) \cap \left(\cup_{f \in P(X,T)} \mathcal{M}_{\max}(f)\right)$ 在 $\mathcal{E}rg(X,T)$ 中弱*稠密。

现在，每个 $f \in P(X,\ T)$ 都满足：$\mathcal{M}_{\max}(f)$ 由单个周期测度构成，因此$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}er(X,\ T)$。由此可知，$\mathcal{P}er(X,\ T)$ 在 $\mathcal{E}rg(X,\ T)$ 中是弱*稠密的，正如所要求的那样。□

注记 6.8。要使 TPO 成立，并不要求 $\mathcal{P}er(X,\ T)$ 在$\mathcal{M}(X,\ T$的全部范围内稠密$\mathcal{M}$：例如参见例 8.12 中所描述的（拓扑传递）移位空间。

定理5.9 和推论 6.6 共同推出以下结论：

推论 6.9。 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$，其中 Z是 X 的一个闭 T-不变子集。设 U是 利普希茨(X) 的一个非空开子集，并且对所有 $f \in U$，Z都是可最大化的。如果 (Z,T) 具有 *TPO*，那么 $P(X,T) \cap U$在 U 中稠密。

证明。(Z,T) 的 TPO 意味着，由推论 6.6，利普希茨$^{\mathcal{P}er}(Z,T)$ =利普希茨$^{\mathcal{P}er(Z,T)}(Z,T)$ 在利普希茨(Z) 中稠密。定义 $\mathcal{N} = \mathcal{P}er(X,T)$，使得 $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}(Z,T) = \mathcal{P}er(Z,T)$，且利普希茨$^{\mathcal{P}er}(X,T)$ =利普希茨$^{\mathcal{N}}(X,T)$。定理 5.9 表明利普希茨$^{\mathcal{N}}(X,T) \cap U$在 U 中稠密，换言之利普希茨$^{\mathcal{P}er}(X,T) \cap U$在 U 中稠密。但由推论 6.6，$P(X,T)$ 在利普希茨$^{\mathcal{P}er}(X,T)$ 中稠密，因此 $P(X,T) \cap U$在 U 中稠密，如所需。□

结合引理 5.7与推论 6.9，我们得到如下关键结构定理：

定理 6.10. （结构定理）
设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。令 $\mathcal{Z} = \{Z_0\} \cup \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一个可数可最大化族，使得(Z_i,T) 对所有 $i \geq 1$ 具有 *TPO*。则开集

$$P(X,T) \cup int\left(\mathrm{Lip}_{Z_0}(X,T)\right)$$

在利普希茨(X)中稠密。

证明。 对每个 $i \geq 0$，定义开集

$$U_i := int(\mathrm{Lip}_{Z_i}(X,T)) .$$

由于 $\mathcal{Z}$ 是可数且可最大化的，引理5.7 蕴含

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} U_i \text{ is dense in } \mathrm{Lip}(X) . \tag{6.13}$$

现在 $\mathcal{Z}$是一个可最大化族，因此每个 Z_i 对所有 $f \in$利普希茨$_{Z_i}(X,T)$都是可最大化的，进而对所有 $f \in U_i$也成立。对于 $i \geq 1$，由于根据假设，(Z_i,T)具有 TPO 性质，因此推论6.9 表明

$$P(X,T) \cap U_i \text{ is dense in } U_i, \text{ for all } i \geq 1.$$

因此， $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X,T) \cap U_i$ 在 $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$中稠密，换言之

$$P(X,T) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \text{ is dense in } \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

由此可得

$$U_0 \cup \left(P(X,T) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right)\right) \text{ is dense in } \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i. \tag{6.14}$$

结合式(6.13)和式(6.14)，可知

$$U_0 \cup P(X,T) \text{ is dense in } \mathrm{Lip}(X),$$

换言之， int(利普希茨$_{Z_0}(X,T)) \cup P(X,T)$ 在利普希茨(X)中稠密，证毕。 □

若动力系统(X,T)具有定理6.10中所述的可数可最大化族 $\mathcal{Z} = \{Z_0\} \cup \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$，则$(X,T)$是否具有 TPO 性质的问题，关键在于不变集 Z_0。我们将 Z_0 称为边界[8]，并称 $\mathcal{Z}$的边界是脆弱的，如果利普希茨$_{Z_0}(X,T)$在利普希茨(X)中具有空内部。根据结构定理，脆弱边界意味着(X,T)具有 TPO 性质：

定理 6.11。 （脆弱边界蕴含 *TPO*）
设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。令 $\mathcal{Z} = \{Z_0\} \cup \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一个可数可最大化族，使得对于所有 $i \geq 1$，(Z_i,T) 都具有 *TPO*，并且 利普希茨$_{Z_0}(X,T)$ 在 利普希茨(X)中具有空内部。那么(X,T) 具有 *TPO*。

证明。 如果 int(利普希茨$_{Z_0}(X,\ T)) = \emptyset$那么定理 6.10 表明 $P(X,\ T)$ 在 Lip(X) 中稠密，因此 $(X,\ T)$ 具有 TPO（参见推论 6.6）。 □

[8]这一术语源于符号动力系统的情形；在该情形中，我们证明（见第 8 节和 9节），存在一个可数可最大化族的规范选择 $\mathcal{Z} = \{Z_0\} \cup \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$，其中边界的作用由 Z_0 承担，而 *Markov boundary* 则由移位空间的 X承担。

脆弱边界最简单的例子当然是边界为空的情形，由此引出以下定义：

定义 6.12。 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。若一个可数可最大化族 $\mathcal{Z} = \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足：对所有 $i \in \mathbb{N}$，(Z_i, T) 都具有 TPO，则称其为具有 *TPO* 的可数可最大化族。

定理 6.13。 （具有 *TPO* 的可数可最大化族蕴含 *TPO*）设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。若 $\mathcal{Z} = \{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个具有 *TPO* 的可数可最大化族，则 (X,T) 具有 *TPO*。

证明。 在定理 6.10 中令 $Z_0 = \emptyset$，可知开集 $P(X,T)$ 在 $\mathrm{Lip}(X)$ 中稠密，因此 (X,T) 具有 TPO。□

注记 6.14。 定理6.11和 6.13为建立具有非平凡可数可最大化族的动力系统 (X,T) 的 TPO 提供了一条路线图；该族可以具有 TPO，也可以更一般地具有脆弱边界。正如定义 5.5之后所指出的，我们不考虑平凡的可最大化族：例如，定理6.13在作出平凡选择 $\mathcal{Z} = \{X\}$ (若 $T : X \to X$ 是满射）时，便有一个同义反复的解释；显然，这无法带来新信息。注意，定理 6.13 在形式上是定理 6.11的特例。人们或许会问，是否存在具有脆弱边界、却没有（非平凡）具有 TPO 的可数可最大化族的动力系统；我们将在第 10节看到，这样的系统确实存在，而且其特征与可用定理6.13处理的系统大不相同。

7. The subset closing property

到目前为止的讨论都处于一般拓扑动力系统的背景下；从现在起，我们将只关注满足特定假设的系统。我们引入以下弱双曲性条件，它将在后文中发挥作用：

定义 7.1. 设 $(X,T) \in \mathfrak{D}$。非空子集 $A \subseteq X$ 相对于 (X,T) 具有闭合性质，如果存在 $C_A > 0$，使得对所有 $x \in A$，若 $T^n(x) \in A$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，则存在一个周期点 $z = T^n(z) \in X$，使得

$$\sum_{i=0}^{n-1} d\left(T^i(x), T^i(z)\right) \le C_A\,. \tag{7.1}$$

若闭的 T-不变子集 $Y \subseteq X$ 存在一个非空子集 $A \subseteq Y$，其中 A 在 Y 中是开集，且 A 相对于 (X,T) 具有闭合性质，则称其具有子集闭合性质 。

注记 7.2. 若（X， T） $\in \mathfrak{D}$ 是开的且距离扩张的，或是具有局部乘积结构的双曲同胚（例如 Axiom A 微分同胚），则每个闭不变 $Y \subseteq X$ 都具有子集闭合性质：周期点的存在性是阿诺索夫闭合引理的推论（参见例如 [44, 定理 6.4.15], [73, 推论 4.3.7]），并且此类系统中轨道的指数不稳定性（参见 [44, 推论 6.4.17]）蕴含一致界（7.1）。在一致双曲性之外，各种其他系统具有带子集闭合性质的（非周期的）不变集：其中一些将在第 8 节中、在符号动力系统的背景下有用。

子集闭合性质的意义在于它与极小极大集的联系。通过结合极小极大Birkhoff界（命题3.7）和完全最大化准则（命题 4.8），我们能够推导出完全最大化集的存在性：

定理 7.3。设$(X,T)\in\mathfrak{D}$，且 $f\colon X\to\mathbb{R}$是利普希茨的。若 $Y\subseteq X$是 f的极小极大集，且(Y,T)具有子集闭合性质，则 Y是 f的完全最大化集，并且是动力学极小的。

证明。不失一般性，假设 $\beta(f)=0$。要证明该定理，只需证明

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Y} S_n f(x)<\infty\,, \tag{7.2}$$

因为在此情形下，Y是 f的极小极大集这一事实Y意味着它是 f的完全最大化集，并且根据命题 4.8，它是动力学极小的。

由于 (Y,T) 具有子集闭合性质，因此存在一个非空子集 $A\subseteq Y$，它在 Y下是开集，并且相对于 (X,T) 具有闭合性质。设 $N_A\in\mathbb{N}$如极小极大Birkhoff界（命题 3.7）中所述，并令 $C_A>0$ 如定义7.1中所述。

设 $x\in Y$，$n\in\mathbb{N}$。若 $T^i(x)\notin A$ 对 $0\leq i\leq n-1$ 成立，则命题 3.7 给出

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))\leq N_A\|f\|_{C(X)}\,. \tag{7.3}$$

另一方面，若 $\{0\leq i\leq n-1\colon T^i(x)\in A\}$ 非空，则令 n_1 表示其最小元素，n_2 表示其最大元素，因此 $0\leq n_1\leq n_2\leq n-1$。我们将依次估计三个和[9] $\sum_{i=0}^{n_1-1} f(T^i(x))$、$\sum_{i=n_1}^{n_2-1} f(T^i(x))$和 $\sum_{i=n_2}^{n-1} f(T^i(x))$，从而得出和 $S_nf(x)=\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ 的上界。

首先，由于 $T^i(x)\notin A$ 对 $0\leq i\leq n_1-1$成立，命题 3.7 给出

$$\sum_{i=0}^{n_1-1} f(T^i(x))\leq N_A\|f\|_{C(X)}\,. \tag{7.4}$$

其次，由于 $y:=T^{n_1}(x)\in A$，且 $T^{n_2-n_1}(y)=T^{n_2}(x)\in A$，并且 A相对于 (X,T) 具有闭合性质，因此存在一个周期点 $z=T^{n_2-n_1}(z)\in X$，使得

$$\sum_{i=0}^{n_2-n_1-1} d\left(T^i(y),T^i(z)\right)\leq C_A\,. \tag{7.5}$$

相对于由 z 的轨道支撑的周期测度，对 f 的积分非正，因为 $\beta(f)=0$，换言之

$$\sum_{i=0}^{n_2-n_1-1} f(T^i(z))\leq 0\,. \tag{7.6}$$

由此可得

$$\sum_{i=n_1}^{n_2-1} f(T^i(x))=\sum_{i=0}^{n_2-n_1-1} f(T^i(y))\leq\sum_{i=0}^{n_2-n_1-1}\left(f(T^i(y))-f(T^i(z))\right). \tag{7.7}$$

[9]如果 $n_1=n_2$，那么按照约定，我们设 $\sum_{i=n_1}^{n_2-1} f(T^i(x))=0$。

利用 f 在（7.7）中的利普希茨性质，再利用（7.5），可得

$$\sum_{i=n_1}^{n_2-1} f(T^i(x)) \le |f|_{\mathrm{Lip}(X)} \sum_{i=0}^{n_2-n_1-1} d(T^i(y), T^i(z)) \le C_A |f|_{\mathrm{Lip}(X)}\,. \tag{7.8}$$

第三，注意到 $T^{n_2}(x) \in A$，但对于 $n_2+1 \le i \le n-1$， $T^i(x) \notin A$，因此

$$\sum_{i=n_2}^{n-1} f(T^i(x)) = f(T^{n_2}(x)) + \sum_{i=n_2+1}^{n-1} f(T^i(x)) \le (1+N_A)\|f\|_{C(X)}, \tag{7.9}$$

根据命题3.7。

结合（7.4）、（7.8）和（7.9）可得

$$S_n f(x) \le C_A |f|_{\mathrm{Lip}(X)} + (1+2N_A)\|f\|_{C(X)}. \tag{7.10}$$

由于（7.3）和（7.10）合起来涵盖了所有 $x \in Y$ 和 $n \in \mathbb{N}$，所需的界（7.2）成立。□

8. Symbolic dynamics

到目前为止，我们已经在相当一般的动力系统框架下，发展了可数可最大化族的理论，并将其应用于 TPO 问题。然而，在本文的其余部分，我们将把注意力集中于符号动力系统。为方便起见，我们考虑单边移位空间，并特别利用 Contreras 的 TPO 定理（见引理9.4）对有限型移位有效这一事实。第8 节至 12 节中的所有结果的类似结论也适用于双边移位空间，其证明仅在记号层面有所不同（因此略去），并以双边有限型移位的 Contreras 定理的类似结果为基础；该结果已在 [34]中证明（参见引理9.4的证明之后的注记）。

记号 8.1。（拓扑、度量、移位映射、子移位）

对于一个 有限非空集合 A（称为一个字母表）， A 上的满移位是集合

$$A^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in A \text{ for all } i \ge 1\},$$

在赋予乘积拓扑后，它是紧的。

对于一个y $\alpha \in (0,1)$，空间 $A^{\mathbb{N}}$ 由距离函数 $d = d_\alpha$ 度量，定义为 y

$$d_\alpha(x,y) = \alpha^{N(x,y)},$$

其中 $N(x,y) := \inf\{i \in \mathbb{N} : x_i \ne y_i\} - 1$。

移位映射 $\sigma : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$，定义为 $(\sigma(x))_i = x_{i+1}$ 对所有 $i \ge 1$ 均成立，是连续的。 A 上的移位空间，也称为 $A^{\mathbb{N}}$ 的子移位，是一个闭子集 $X \subseteq A^{\mathbb{N}}$，并且是移位不变的，即 $\sigma(X) = X$。更一般地，若 X 和 Y 是移位空间，且 $Y \subseteq X$，我们称 Y 是 X 的子移位 。为方便起见，我们不要求移位空间或子移位非空：下文将研究 X 的若干个典范定义的子移位，它们在某些情况下可能为空。

对于给定的移位空间 X，我们用 σ 表示受限移位映射 $\sigma|_X$，并将 $(X,\ \sigma)$ 视为拓扑动力系统。

注记 8.2. 对任意 $\alpha \in (0,1)$，以及 $\gamma \in (0,1]$, 移位空间 X 上关于距离函数 d_α 的 γ-赫¨尔德函数空间，配备通常的赫¨尔德范数，恰好是 X 上关于距离函数 d_{α^γ} 的利普希茨函数空间。

因此，尽管本文其余部分的所有结果都是针对任意距离函数 d_α，用利普希茨函数空间来陈述的，但同样的结果对关于同一族距离函数的任意 γ-赫¨尔德函数空间也成立。

记号 8.3。 （词、语言、柱集）

对于一个字母表 A，A 上的一个词或块指一个有限字符串 $w = a_1 \dots a_n \in A^n$,$n \geq 0$，其中 $|w| = n$ 是它的长度。令 A^* 表示 A 上所有词的集合（包括空词 ϵ，即长度为 0 的唯一词）。

如果 $x \in A^{\mathbb{N}}$，我们定义

$$x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_j \,, \tag{8.1}$$

约定当 $i > j$时 $x_{[i,j]} = \epsilon$，并且如果对于某个 i，$x_{[i,j]} = w$ 成立，则称词 $w \in A^*$ 在序列 $x \in A^{\mathbb{N}}$ 中出现，j。我们记作

$$w \subset x \tag{8.2}$$

表示 w 在 x中出现。对于定义在 A上的移位空间 X，如果词 $w \in A^*$ 出现在某个 $x \in X$中，则称其为允许的（在X中）。X的语言记作 $\mathbb{W}(X)$，是其所有允许词组成的集合。对于 $w \in \mathbb{W}(X)$，相应的柱集 $[w]$ 定义为

$$[w] = \left\{ x \in X : x_{[1,|w|]} = w \right\},$$

对于子移位 $Z \subseteq X$，我们记作

$$[w]_Z = [w] \cap Z = \left\{ x \in Z : x_{[1,|w|]} = w \right\}.$$

对于 $n \in \mathbb{N}_0$，令 $\mathbb{W}_n(X)$ 表示 $\mathbb{W}(X)$ 中长度为 n 的词的集合；对于 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，记作

$$\mathbb{W}_S(X) := \bigcup_{n \in S} \mathbb{W}_n(X). \tag{8.3}$$

我们将记号（8.1）、（8.2）扩展到词 $w = a_1 \dots a_n \in A^*$，使用 $w_{[i,j]}$ 表示子词 $v = a_i \dots a_j \in A^*$，此时称 v在 出现于 w，记作 $v \subset w$。每个子词 $w_{[1,k]}$（其中 $1 \leq k \leq |w|$）称为 前缀，属于 w；每个子词 $w_{[k,|w|]}$（其中 $1 \leq k \leq |w|$）称为 后缀，属于 w。

给定 u，$v \in A^*$，连接 uv表示长度为 $|w| = |u| + |v|$ 的词 $w \in A^*$，其中 $w_{[1,|u|]} = u$ 且 $w_{[|u|+1,|u|+|v|]} = v$；若 $x \in A^{\mathbb{N}}$，则 ux表示序列$y \in A^{\mathbb{N}}$，其中 $y_{[1,|u|]} = u$ 且 $\sigma^{|u|}(y) = x$。若 $n \in \mathbb{N}$，则 u^n 表示词 w，其中$x_{[i|u|+1,(i+1)|u|]} = u$ 对 $0 \leq i \leq n-1$成立；而 u^∞ 表示周期序列 $x \in A^{\mathbb{N}}$，其中$x_{[i|u|+1,(i+1)|u|]} = u$ 对所有 $i \geq 0$成立。在后一种情况下，称 u 为 x的周期词，也称其为 x 在 σ作用下的周期轨道的周期词，以及由该轨道支撑的周期测度 $\frac{1}{|u|}\sum_{j=0}^{|u|-1} \delta_{\sigma^j(x)}$的周期词。

记号 8.4. 设 X 是一个语言为 $\mathbb{W}(X)$ 的移位空间。对于 $w \in \mathbb{W}(X)$，其前驱集 $P_X(w)$ 定义为

$$P_X(w) := \{u \in \mathbb{W}(X) : uw \in \mathbb{W}(X)\},$$

其后继集 $F_X(w)$ 定义为

$$F_X(w) := \{u \in \mathbb{W}(X) : wu \in \mathbb{W}(X)\}.$$

引理 8.5. 设 X 是一个移位空间，并且假设 $w \in \mathbb{W}(X)$。那么：

(a) $F_X(uw) \subseteq F_X(w)$ 对所有 $u \in P_X(w)$。

(b) 如果 $u \in P_X(w)$ 满足 $F_X(uw) = F_X(w)$，则对于所有 $v \in F_X(w)$，$F_X(uwv) = F_X(wv)$。

证明。显然。 □

记号 8.6。对于移位空间 X，定义

$$\mathbb{W}_\infty(X) = \{w \in \mathbb{W}(X) : |\{F_X(uw) : u \in P_X(w)\}| = \infty\}, \tag{8.4}$$

具有无限多个后继集的允许词集合，以及

$$\mathbb{W}_{<\infty}(X) := \{w \in \mathbb{W}(X) : |\{F_X(uw) : u \in P_X(w)\}| < \infty\}, \tag{8.5}$$

具有有限多个后继集的允许词集合。

以下概念由 Thomsen 引入 [71]。

定义 8.7. 对于移位空间 X，定义其马尔可夫边界，记作 $\partial_M X$，如下：

$$\partial_M X := \{x \in X : w \in \mathbb{W}_\infty(X) \text{ for all finite words } w \text{ that appear in } x\}. \tag{8.6}$$

引理 8.8. 对于任意移位空间 X，其马尔可夫边界 $\partial_M X$ 是 X 的一个（可能为空的）子移位。

证明。 参见 [71, 引理 2.1]。 □

回忆一下，如果不同后继集的集合 $\{F_X(w) : w \in \mathbb{W}(X)\}$ 是有限的（或者，等价地，如果其不同前驱集合的集合是有限的），则称移位空间 X 为**索菲克**。索菲克系统有多种等价定义，其中一些可以追溯到 Weiss 的原始论文 [79],，包括这样一种刻画：索菲克移位恰好是有限型移位的连续因子；关于索菲克移位空间的更多内容，参见 [17, §3.2], [45, §6.1] 和 [49, 第 3] 章。以下刻画对我们的研究很重要：

引理 8.9. 移位空间 X 是索菲克的当且仅当 $\partial_M X = \emptyset$。

证明。 见 [71, 定理 2.3]。 □

定义 8.10. 给定移位空间 X，词 $w \in \mathbb{W}(X)$ 称为 X 的**同步词**，如果每当 $u \in P_X(w)$ 且 $v \in F_X(w)$，则 $uwv \in \mathbb{W}(X)$。

注记 8.11. 同步的概念由 Blanchard & Hansel [3]在编码移位空间的背景下引入，而编码移位空间必然是拓扑传递的。一些作者称一个移位空间是同步的，如果它具有同步词，但许多作者遵循 [3]，仅将这一术语保留给那些此外还是拓扑传递的移位空间。在本文中，我们不要求拓扑传递性，为避免混淆，当属于这种情况时，我们将只说 X 具有同步词。

在第 6 节中，我们在引理 6.7 中证明，TPO 的一个必要条件是周期测度在遍历测度集合中稠密。我们还在注 6.8 中指出，周期测度在所有不变测度集合中稠密并非 TPO 的必要条件；本节介绍了相关的符号动力系统记号后，我们现在可以通过以下例子证明这一说法。该例子在注 6.8 中提及：一个拓扑传递的移位空间 X 具有 TPO，但其周期测度在 * 中并不弱 $\mathcal{M}(X, \sigma)$ 稠密。

例 8.12。设 $A=\{a,b\}$，并定义 X 为形如 $a^{n_1}b^{n_1}a^{n_2}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_3}\ldots$ 的序列的移位迭代集合的闭包，其中 $n_i\in\mathbb{N}$，$i\in\mathbb{N}$。移位空间 X 是拓扑传递的，具有同步词 ba，且 $\partial_M X=\{a^\infty,b^\infty\}\cup\{a^nb^\infty : n\geq 1\}$。由于 $\partial_M X$ 是有限型移位，我们将看到 (X,σ) 具有 TPO（可由定理 1.3 以及有限型移位具有 TPO 这一事实得出；或者也可以由 X 是最终索菲克这一点得出，参见定义 9.18、定理 9.20）。周期测度集合 $\mathcal{P}er(X,\sigma)$ 在遍历测度集合 $\mathcal{E}rg(X,\sigma)$ 中稠密（事实上，这由 X 具有 TPO 可知，参见引理 6.7）；然而，正如注 6.8 所述，$\mathcal{P}er(X,\sigma)$ 在整个 $\mathcal{M}(X,\sigma)$ 中并不稠密。为说明这一点，注意若 μ 是 X 上的一个周期测度，其支撑是一个不同于不动点 a^∞ 和 b^∞ 的周期轨道，则 $\mu([a])=1/2=\mu([b])$；因此，对于 $\epsilon\in(0,1/2)\cup(1/2,1)$，测度 $\epsilon\delta_{a^\infty}+(1-\epsilon)\delta_{b^\infty}$（它是不变但非遍历的）不是周期测度的弱* 极限。

引理 8.13. 设 X 是一个移位空间，并假设 $w\in\mathbb{W}(X)$ 是子移位 $Z\subseteq X$ 的一个同步词。若 $x,y\in Z$ 可写成 $x=uwr$, $y=vws$，其中 $u,v\in\mathbb{W}(Z)$，且 $r,s\in Z$，则 $uws\in Z$。

证明.现在 $uw\subset x\in Z$，因此 $uw\in\mathbb{W}(Z)$，而若 $n\in\mathbb{N}$，则 $ws_{[1,n]}\subset y\in Z$，所以 $ws_{[1,n]}\in\mathbb{W}(Z)$。由于 w 是 Z 的一个同步词，因此对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $uws_{[1,n]}\in\mathbb{W}(Z)$。于是存在 $z^{(n)}\in Z$ 使得 $uws_{[1,n]}\subset z^{(n)}$，并且我们可以假设 $z^{(n)}_{[1,|u|+|w|+n]}=uws_{[1,n]}$，从而 $z^{(n)}\to uws$，因为 $n\to\infty$，因此 $uws\in Z$，因为 Z 是闭的。□

定义 8.14. 设 X 是一个移位空间。对于 $w\in\mathbb{W}(X)$，将 X_w 定义为满足以下条件的所有 $x\in X$ 的集合：若 $t\in\mathbb{W}(X)$ 满足 $tw\subset x$，则 $F_X(tw)=F_X(w)$。

注记 8.15。注意，X_w 包含所有满足以下条件的 $x\in X$：w 不出现在 x 中。一般而言，X_w 可能是空集（当 X 没有同步词时便是如此），也可能等于 X（若 w 是 X 的同步词）。

引理 8.16. 对于任意移位空间 X，每个 $w\in\mathbb{W}(X)$ 都是 X_w 的同步词.

证明。假设 $u,v\in\mathbb{W}(X_w)$ 满足 $uw\in\mathbb{W}(X_w)$ 且 $wv\in\mathbb{W}(X_w)$，因此存在 $x,y\in X_w$，使得 $uw\subset x$ 且 $wv\subset y$。记

$$y=rwvs \tag{8.7}$$

对于某些 $r\in\mathbb{W}(X_w)$ 和 $s\in X_w$，我们断言

$$z:=uwvs \tag{8.8}$$

属于 X_w，这将意味着 $uwv\in\mathbb{W}(X_w)$，从而 w 是 X_w 的一个同步词。

由于 w 出现在 z 中，要验证 $z\in X_w$ 就相当于证明：若对某个 $t\in\mathbb{W}(X)$ 有 $tw\subset z$，则 $F_X(tw)=F_X(w)$。为此我们写出

$$t=t_1\ldots t_k,\quad u=u_1\ldots u_l,\quad w=w_1\ldots w_m, \tag{8.9}$$

并分别考虑三种情形。

在第一种情形下，假设 $z_{[i+1,i+k+m]}=tw$ 对某个 $i\geq l$ 成立。由（8.7）、（8.8）、（8.9）可知，$tw\subset wvs=\sigma^{|r|}(y)$。但是 $\sigma^{|r|}(y)$ 属于 X_w，因为 $y\in X_w$，所以根据 X_w 的定义可知，$F_X(tw)=F_X(w)$，如所需。

在第二种情形下，假设 $k \le l$，并且 $z_{[i+1,i+k+m]} = tw$ 对某个 $0 \le i \le l-k$成立。由（8.8）、（8.9）可知， $tw \subset uw$。但是 $uw \subset x$，因此 $tw \subset x \in X_w$，而根据 X_w 的定义可知 F_X（tw） $= F_X$（w），如所需。

在第三种情形中，假设 $tw \subset z$，但第一种和第二种情形的条件均不成立。特别地，对于某个 $i < l$，有 $z_{[i+1,i+k+m]} = tw$，因此存在 $1 \le j \le k$，使得 t 的长度为j 的前缀是 u的长度为j 的后缀，换言之

$$t_1 \dots t_j = u_{l-j+1} \dots u_l \,. \tag{8.10}$$

现在 $u_{l-j+1} \dots u_l w \subset uw \subset x \in X_w$，因此根据 X_w的定义可得

$$F_X(u_{l-j+1} \dots u_l w) = F_X(w), \tag{8.11}$$

并结合（8.10）、（8.11）可得

$$F_X(t_1 \dots t_j w) = F_X(w). \tag{8.12}$$

现在令 $q \in \mathbb{W}(X)$ 满足

$$t_1 \dots t_j w q = tw \,. \tag{8.13}$$

由（8.12）和引理8.5,

$$F_X(t_1 \dots t_j w q) = F_X(wq), \tag{8.14}$$

并将 (8.13) 与 (8.14) 结合，得到

$$F_X(tw) = F_X(wq). \tag{8.15}$$

现在 $wq \subset wvs = \sigma^{|r|}(y) \in X_w$，而 (8.13) 表明 w 是 wq的后缀，因此 X_w 的定义意味着

$$F_X(wq) = F_X(w). \tag{8.16}$$

结合 (8.15) 和 (8.16)，得到 $F_X(tw) = F_X(w)$，如所需。 □

一般来说，同步词的存在会对周期点产生影响:

引理 8.17。 设 Z 是具有同步词 $w \in \mathbb{W}(Z)$的移位空间。若 $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in Z$，其中 $x \in [w]$ 且 $\sigma^n(x) \in [w]$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$成立，则周期为 n 的点

$$(x_1 \dots x_n)^{\infty}$$

属于 Z。

证明。 假设意味着 w 既是词 $x_{[1,n+|w|]}$的前缀，也是其后缀，因此定义 $u = x_{[1,n]} = x_1 \dots x_n$ 和 $v = x_{[|w|+1,|w|+n]} = x_{|w|+1} \dots x_{|w|+n}$ 可得

$$uw = x_{[1,n+|w|]} = wv \,. \tag{8.17}$$

特别地，(8.17)意味着

$$uw \in \mathbb{W}(Z) \tag{8.18}$$

and

$$wv \in \mathbb{W}(Z) \,. \tag{8.19}$$

由于 w 是同步的，(8.18)和(8.19)意味着 $uwv \in \mathbb{W}(Z)$。但是(8.17)意味着 uwv 可以写成 uuw，因此

$$u^2 w = uuw \in \mathbb{W}(Z) \,. \tag{8.20}$$

结合（8.19）和（8.20），再利用 w 是同步的这一事实，可得 $uuwv \in \mathbb{W}$（Z）。利用（8.17）将其改写后，我们得到 $u^3 w = uuuw \in \mathbb{W}$（$Z$）。继续

归纳下去，可知对于所有 $m \geq 1$，均有 $u^m w \in \mathbb{W}(Z)$，因此 $u^\infty \in Z$。换言之，$(x_1 \dots x_n)^\infty \in Z$，如所需。□

一个简单的推论如下：

推论 8.18. 若 Z 是具有同步词 w的移位空间，则柱集$[w]_Z$ 相对于(Z, σ)具有闭合性质。

证明。 由引理 8.17，若 $x \in [w]_Z$，且 $\sigma^n(x) \in [w]_Z$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$，则周期为n的点 $z = (x_1 \dots x_n)^\infty$ 属于 Z，并且还满足

$$d_\alpha(\sigma^i(x), \sigma^i(z)) \leq \alpha^{n-i} d_\alpha(\sigma^n(x), z) \quad \text{for } 0 \leq i \leq n-1\,. \tag{8.21}$$

由此可得

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_\alpha(\sigma^i(x), \sigma^i(z)) < \frac{\alpha}{1-\alpha}\,,$$

因此（7.1）对 $C_{[w]_Z} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$成立。 □

由此可推得：

推论 8.19. 若 X 是一个移位空间，且 $w \in \mathbb{W}(X)$，并且 $Y \subseteq X_w$ 是满足 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 的子移位，则 Y 具有子集闭合性质。

证明。 由于 w 是 X_w的同步词，推论8.18 表明柱集 $[w]_{X_w}$ 相对于 (X_w, σ) 具有闭合性质。若 $w \in \mathbb{W}(Y)$，则非空集 $[w]_Y$在 Y中是开集，并且相对于 (X_w, σ) 具有闭合性质，因为它是 $[w]_{X_w}$的子集，而 $[w]_{X_w}$相对于 (X_w, σ) 具有闭合性质。因此 Y具有子集闭合性质。 □

任何未包含于 $\partial_M X$ 中的子移位必然有一个同步词，而且实际上是某个 X_w 的子集：

引理 8.20. 设 X 是一个移位空间。若 $Y \subseteq X$ 是任意一个未包含于马尔可夫边界 $\partial_M X$ 中的子移位，则存在 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 使得 $Y \subseteq X_w$，特别是 Y 有一个同步词。

证明。由于 $Y \setminus \partial_M X \neq \emptyset$，存在 $w_0 \in \mathbb{W}(Y) \cap \mathbb{W}_{<\infty}(X)$。反设 Y 对于任意 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 都不包含于 X_w 。这意味着不存在 $w \in \mathbb{W}(Y)$，使得对于所有 $u \in P_Y(w)$，都有 $F_X(w) = F_X(uw)$。因此存在一个序列 $(w_i)_{i=1}^\infty$，其中每个 $w_i \in \mathbb{W}(Y)$，且对于所有 $i \in \mathbb{N}$，词 w_{i-1}都是 w_i 的后缀，并且 $F_X(w_i)$ 是 $F_X(w_{i-1})$ 的真子集。这意味着$|\{F_X(uw_0) : u \in P_Y(w_0)\}| \geq |\{F_X(w_i) : i \in \mathbb{N}\}| = \infty$，从而与$w_0 \in \mathbb{W}_{<\infty}(X)$这一事实矛盾。因此，事实上对于某个 $w \in \mathbb{W}(Y)$， Y 包含于 X_w 。由于 w 是 $X_w \supseteq Y$ 的同步词，且 $w \in \mathbb{W}(Y)$，所以 w 是 Y 的同步词。□

最后，我们能够将第3节与第4节中关于可最大化集与完全最大化集的概念，与上述关于子移位 X_w 及马尔可夫边界的结果联系起来，从而证明下述关于那些没有任何最大化测度支撑于马尔可夫边界之内的利普希茨函数的重要结果：

定理 8.21. 若 X是一个移位空间，且 f ∈利普希茨(X)满足： $\partial_M X$不可被 f最大化，则 f 具有一个动力学极小的完全最大化集 Y。对于任意这样的 Y，存在 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 使得 $Y \subseteq X_w$。

证明. 由引理 3.4，存在一个极小极大集 Y，对应于 f；特别地，存在某个f-最大化测度 μ，使得 $\mathrm{supp}(\mu) = Y$。子移位 Y 不是 $\partial_M X$ 的子集，否则 μ 将支撑在马尔可夫边界内，这与 f 没有此类最大化测度的假设矛盾。但由于 Y 不是 $\partial_M X$的子集，引理8.20推出存在 $w \in \mathbb{W}(Y)$，使得 $Y \subseteq X_w$，而这一包含关系意味着Y 具有子集闭合性质，依据推论 8.19。

作为具有子集闭合性质的极小极大集，Y 对于 f必定是完全最大化的，且根据定理7.3，它是动力学极小的。□

推论 8.22。若 X 是 *sofic* 移位，则每个 $f \in$利普希茨(X) 都有一个完全最大化集，且该集是动力学极小的。

证明。由于 X 是 sofic 移位，引理8.9 表明 $\partial_M X = \emptyset$，因此 $f \in$ 利普希茨(X)不存在支撑于 $\partial_M X$内的最大化测度，即 $\partial_M X$不是 f-可最大化的。结论由定理8.21得出，

□

注记 8.23。定理8.21中的假设，即 f 在 $\partial_M X$内不应存在支撑于其中的最大化测度，不能省略。例如，设移位空间 X是动力学极小的，但恰好支撑两个遍历不变测度 μ，μ'；这样的 X 没有同步词（参见引理8.17），因此 $\partial_M X = X$。如注记4.3所述，若 $f \in C(X)$满足 $\int f\,d\mu \neq \int f\,d\mu'$，则 f不存在完全最大化子集；又由于利普希茨(X)稠密嵌入于 $C(X)$，这样的 f 可以选为利普希茨函数。

9. Typical periodic optimization for sofic and eventually sofic shifts

本节将结合定理 8.21 与第 5 节提出的可数可最大化族框架，以证明第 1 节中陈述的若干定理。为引入一个合适的可数可最大化族，我们先定义：

定义 9.1. 设 Z 为一个具有同步词 $w \in \mathbb{W}(Z)$ 的移位空间。对于 $q \in \mathbb{N}$，定义其关联的 (w, q) 步子移位 $Z_{w,q} \subseteq Z$ 如下：

$$Z_{w,q} := \left\{ x \in Z : \sigma^n(x) \in \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w] \text{ for all } n \geq 0 \right\}, \tag{9.1}$$

换言之

$$Z_{w,q} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n} \left(\bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w] \right).$$

事实证明，相应的 (w, q) 步子移位 $Z_{w,q}$ 是有限型（见下文命题 9.3 ）。为证明这一结果，我们首先需要以下引理：

引理 9.2. 设 X 是一个移位空间，$Z \subseteq X$ 是一个具有同步词 $w \in \mathbb{W}(Z)$ 的子移位。设 $q \in \mathbb{N}$。若 $x,y \in Z_{w,q}$ 可写为 $x = uvr$，$y = vs$，其中 $u, v \in \mathbb{W}(Z_{w,q})$，$r,s \in Z_{w,q}$，且 $|v| \geq q + |w|$，则 $uvs \in Z_{w,q}$。

证明。现在 $y \in Z_{w,\,q}$，因此 $y \in \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w]$，所以存在 $t \in \mathbb{W}(Z_{w,\,q})$，使得 $|t| \leq q - 1$

$$y_{[1,|tw|]} = tw\,. \tag{9.2}$$

由于 $|v| \geq q + |w| \geq |tw|$，将（9.2）与表达式 $y = vs$ 进行比较可得 t

$$v = twp \tag{9.3}$$

对于某个 $p \in \mathbb{W}(Z_{w,\ q})$，因此

$$y = twps\,. \tag{9.4}$$

现在 $x = uvr$，因此（9.3）可推出

$$x = utwpr\,. \tag{9.5}$$

由于 $x,\ y \in Z$，且 w 对 Z是同步的，引理 8.13结合（9.4）和（9.5），可推出

$$z := utwps \in Z\,. \tag{9.6}$$

换句话说，$z = uvs \in Z$。

剩下要证明的是 $z = uvs \in Z_{w,\ q}$，换言之，要证明

$$\sigma^n(z) \in \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w] \quad \text{for all } n \geq 0. \tag{9.7}$$

若 $n \leq |u|$ 那么，由于 $x \in Z_{w,\ q}$，词 w 出现在 $x_{[n+1,n+q+|w|-1]} = z_{[n+1,n+q+|w|-1]}$中，因此（9.7）确实成立。

若 $n > |u|$ 那么，由于 $\sigma^{n-|u|}(y) \in Z_{w,\ q}$，那么 $\sigma^{n-|u|}(y) \in \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w]$，因此 w 出现在$y_{[n-|u|+1,n-|u|+q+|w|]} = z_{[n+1,n+q+|w|]}$中，并且（9.7）再次成立，故证明完成。□

回想一下（例如参见 [49, 定理 2.1。8]）：移位空间 Y 是一个 m步有限型移位（*SFT*），当且仅当其中每个长度至少为 m的词 Y 都是同步词。现在我们可以证明以下结论：

命题 9.3. 设 Z 是一个具有同步词 w的移位空间。对于所有 $q \in \mathbb{N}$，相应的(w, q)步子移位 $Z_{w,q}$ 是一个$(q + |w|)$步有限型移位。

证明。我们必须证明：若 $t, u\, v \in \mathbb{W}(Z_{w,q})$ 满足 $tv, vu \in \mathbb{W}(Z_{w,q})$，且$|v| \geq q + |w|$，则 $tvu \in \mathbb{W}(Z_{w,q})$。存在 $x,y \in Z_{w,q}$，使得 $x = tvr$ 且 $y = vus$，对于$r,s \in Z_{w,q}$。根据引理 9.2，$|v| \geq q + |w|$ 这一事实意味着 $z = tvus \in Z_{w,q}$，因此 $tvu \in \mathbb{W}(Z_{w,q})$，证毕。□

有限型移位在 TPO 性质语境中的重要性至关重要：

引理 9.4. 若 Z 是一个有限型移位，则(Z, σ) 具有 *TPO* 性质。

由于作用在单边有限型移位上的移位映射是一个开扩张映射（见 [64,定理 1]，，并参见 [73, 第 112]页），引理 9.4 可由 [21] 推出（另参见 [41, 第 2609] 页，其中简要讨论了证明策略）。按照 [34]（另参见 [6]）的思路，针对引理 9.4 证明中的某些部分，还有一种颇为不同的方法：对于 Lipschitz 函数 f，Ma˜n´e 引理（更多讨论见注 9.12）成立：当 Z 是有限型移位时，这意味着这样的 f 可以不失一般性地假设满足 $f \leq \beta(f)$。如果f没有周期最大化测度，那么 $f^{-1}(\beta(f))$ 的最大 σ-不变子集不包含周期轨道，但可以证明它能以某种精确意义被周期轨道充分逼近；这一意义详见 [34]，，其中采用了 [16], 所发展的、适用于有限型移位的工具。因此，若 Y 是这样一条逼近用的周期轨道，则形如以下的函数

$f_\epsilon := f - \epsilon d(\cdot, Y)$ 在利普希茨拓扑中逼近 f，且它们唯一的最大化测度是支撑在 Y上的周期测度。

给定一个移位空间 X，我们将特别关注（w, q）步子移位（X_w）$_{w,\ q}$ 对应于各种 X_w；为简化记号，我们将写作$X_{w,\ q}$ 而不是（X_w）$_{w,\ q}$。具体地，我们定义[10]：

定义 9.5。若 X 是一个移位空间，$w \in \mathbb{W}(X)$，且 $q \in \mathbb{N}$，则定义

$$X_{w,q} := \left\{ x \in X_w : \sigma^n(x) \in \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w] \text{ for all } n \geq 0 \right\} . \tag{9.8}$$

推论 9.6。对于移位空间 X，满足 $w \in \mathbb{W}(X)$，且 $q \in \mathbb{N}$，子移位 $X_{w,\ q}$ 是一个$(q + |w|)$步有限型移位。

证明。由引理 8.16 和命题 9.3立即可得。 □

我们希望考察有限型移位的族 $X_{w,\ q}$，并可能添上马尔可夫边界：**记号 9.7**。设 X 为一个移位空间。定义

$$\mathcal{Z}_{SFT} := \{X_{w,q} : w \in \mathbb{W}(X), q \in \mathbb{N}\}$$

and

$$\mathcal{Z}^{\partial}_{SFT} := \mathcal{Z}_{SFT} \cup \{\partial_M X\} .$$

由于马尔可夫边界是 X 的闭不变子集，我们将关注 $\mathbf{Lip}(X)$ 中对应于其最大化测度支撑在该边界上的函数的子集：

记号 9.8. 对于移位空间 X，我们记作

$$\mathrm{Lip}_\partial(X) := \mathrm{Lip}_{\partial_M X}(X, \sigma) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \partial_M X \text{ is } f\text{-maximizable}\} ,$$

and

$$\mathrm{Lip}^{\subseteq}_\partial(X) := \mathrm{Lip}^{\subseteq}_{\partial_M X}(X, \sigma) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) \subseteq \mathcal{M}(\partial_M X, \sigma)\} .$$

注意，$\mathbf{Lip}_\partial(X)$ 是 $\mathbf{Lip}(X)$ 中的闭集，由引理 5.4可知；当且仅当 $\partial_M X$为空时它也为空，由引理 5.3可知。

引理 9.9. 对于任意移位空间 X，

$$int\left(\mathrm{Lip}^{\subseteq}_\partial(X)\right) = int\left(\mathrm{Lip}_\partial(X)\right) .$$

证明。若 $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\partial_M(X)\ \sigma)$，则 $\mathbf{Lip}_\partial(X) = \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}(X)$，且 $\mathbf{Lip}^{\subseteq}_\partial(X) = \mathrm{Lip}^{\mathcal{N}}_{\subseteq}(X)$，因此由引理 5.8可得结论，因为 $\mathcal{N}$ 是闭凸集。 □

现在我们能够证明，族 $\mathcal{Z}^{\partial}_{SFT}$ 可最大化：

命题 9.10。设 X 是一个移位空间。该族

$$\mathcal{Z}^{\partial}_{SFT} = \{X_{w,q} : w \in \mathbb{W}(X), q \in \mathbb{N}\} \cup \{\partial_M X\}$$

是可最大化的。

[10]注意，如果移位空间 X 具有一个同步词 $w \in \mathbb{W}(X)$，那么 $X_w = X$ (参见注记 8.15)，因此 $X_{w,q}$ 由（9.1）给出的定义与（9.8）中的定义一致。

证明。若 $f \in \mathrm{Lip}_\partial(X)$，则根据此集合的定义，$\partial_M X$对于 f 是可最大化的。现在令$f \in \mathrm{Lip}(X) \setminus \mathrm{Lip}_\partial(X)$。根据定理 8.21，$f$ 有一个完全最大化集 Y，且该集是动力学极小的，并且存在 $w \in \mathbb{W}(X)$，使得 $Y \subseteq X_w$，且 $Y \cap [w]_X \neq \emptyset$。$(Y,\sigma)$ 的动力学极小性意味着（例如参见 [28，引理 1.14]）存在 $q \in \mathbb{N}$，使得 $Y \subseteq \bigcup_{j=0}^{q-1} \sigma^{-j}[w]$。但是 Y 是 σ-不变的，因此

$$Y \subseteq X_{w,q}\,. \tag{9.9}$$

由于 Y对 f是完全最大化的，因此它特别地对 f是可最大化的，所以（9.9）意味着 $X_{w,\ q}$ 对 f 是可最大化的。□

在已经确定可数族 $\mathcal{Z}_{SFT}^{\partial}$ 是可最大化的之后，我们现在能够证明一个典型周期优化定理。下述对应于定理 1.1（第 1 节）：

定理 9.11. 每个 *sofic* 移位空间都具有 *TPO* 性质。

证明。若 X 是索菲克的，则 $\partial_M X = \emptyset$，由引理 8.9。该族

$$\mathcal{Z}_{SFT} = \{X_{w,q} : (w,q) \in \mathbb{W}(X) \times \mathbb{N}\}$$

是可数的，并且由命题 9.10可知是可最大化的，且有限型移位 $X_{w,\ q}$ 对每个（w，q）$\in \mathbb{W}$（X）$\times \mathbb{N}$ 都具有 TPO，由引理 9.4。因此 $\mathcal{Z}_{SFT}$是一个具有 TPO 的可数可最大化族，从而 X 具有 TPO，由定理 6.13。□

注 9.12. 正如第 1 节所述，本文给出的 TPO 结果的一项新意在于，移位空间 (X,σ) 不必满足 Ma ˜n ´e 引理[11], 即保证对所有 $f \in \mathrm{Lip}(X)$，都存在满足 $f + \phi - \phi\circ\sigma \leq \beta(f)$ 的 $\phi \in \mathrm{Lip}(X)$ 的结果。存在这样的函数 ϕ 对于 [21, 34, 48]，的 TPO 结果至关重要，因为它能促进后续的闭合、跟踪和扰动技巧。一般而言，对于移位空间 X，Ma˜n´e 引理未必成立，即使在相对良性的情形下也如此：当 X 是索菲克时，一个简单例子可通过将 $X \subseteq \{a,b,c\}^{\mathbb{N}}$ 定义为如下形式序列的移位轨道闭包得到

$$a^{n_1}ba^{n_2}ca^{n_3}ba^{n_4}ca^{n_5}\ldots,$$

其中每个 $n_i \geq 1$。这个 X 是索菲克的，因为它是有限型移位 $Y \subseteq \{a_1,a_2,a_3,a_4,b,c\}^{\mathbb{N}}$ 的一个因子，其允许的长度为 2 的词为 a_1a_1，a_1b，ba_2，a_2a_3，a_3a_3，a_3c,ca_4，a_4a_1。定义利普希茨函数 f：$X \to \mathbb{R}$，使其仅依赖于一个坐标，如下所示：$f(x) = 0$ 若 $x_1 = a$，$f(x) = 1$ 若 $x_1 = b$，$f(x) = -1$若 $x_1 = c$。现在，对任意 $\mu \in \mathcal{M}(X,\sigma)$，都有 $\int f\,d\mu = 0$，因此 $\beta(f) = 0$。我们声称，对任何利普希茨函数（甚至任何连续函数）ϕ，$f(x) + \phi(x) - \phi(\sigma x) \leq 0$都不成立；否则，定义$z^{(n)} := a^nba^\infty$（对 $n \geq 1$），并在 $0 \leq i \leq n$时将不等式代入 $x = x_i = \sigma^i(z^{(n)})$，便会得到 $1 + \phi(a^nba^\infty) - \phi(a^\infty) \leq 0$。令 $n \to \infty$ 趋于极限即可得到矛盾，因为 ϕ 的连续性意味着 $\lim_{n\to\infty}\phi(a^nba^\infty) = \phi(a^\infty)$。

另一个结果是，$\mathcal{Z}_{SFT}^{\partial}$ 可最大化，这一结论由结构定理（定理 6.10）得出：所有移位空间都具有典型周期或边界优化性质：

[11]这类结果的命名可追溯至 [9]，，鉴于 [53, 54]，，有时也被称为Ma˜n´e-Conze-Guivarc'h引理（见 [12, 58]），鉴于 [24]；关于Ma˜n´e引理的其他重要早期论文包括 [23, 50, 69]，，更多历史与背景见例如 [4, 39, 41]。

定理 9.13。（典型周期或边界优化定理 ）
若 X 是一个移位空间，则 $P(X,\sigma) \cup int$(利普希茨$\partial(X)$) 在 利普希茨(X)中稠密。

证明。由命题 9.10，可数族 $\mathcal{Z}_{SFT}^{\partial} = \mathcal{Z}_{SFT} \cup \{\partial_M X\}$是可最大化的。现在 $\mathcal{Z}_{SFT} = \{X_{w,q}$：$(w,q) \in \mathbb{W}(X) \times \mathbb{N}\}$，并且对每个 $(w,q) \in \mathbb{W}(X) \times \mathbb{N}$，$X_{w,q}$都具有 TPO；这是由引理 9.4 得出的，因为 $X_{w,q}$ 是有限型移位。结论遂由定理 6.10 得出。□

命题9.10 的一个重要推论是以下关于 X 具有典型周期优化性质的判据：

命题 9.14。 设 X 是任意一个移位空间。假设 $\partial_M X \subseteq Y \subseteq X$，其中 Y 是具有 *TPO* 的子移位。那么 X 具有 *TPO*。

证明。 可数族 $\mathcal{Z}_{SFT}^{\partial} = \{X_{w,q}$： $w \in \mathbb{W}(X)$ $q \in \mathbb{N}\} \cup \{\partial_M X\}$根据命题 9.10 是可最大化的。由于 Y是满足 $\partial_M X \subseteq Y \subseteq X$ 的子移位，因此可得

$$\mathcal{Z} := \{X_{w,q} : w \in \mathbb{W}(X), q \in \mathbb{N}\} \cup \{Y\}$$

也可最大化。每个 $X_{w,\ q}$ 根据引理 9.4具有 TPO，而 Y 根据假设具有 TPO。因此， $\mathcal{Z}$ 是一个具有 TPO 的可数可最大化族。由定理6.13可得 X具有 TPO。□

As 作为推论，我们得出以下结果，它对应于第1.3 节 中的定理1 ：

定理 9.15。 设 X 为任意移位空间。若马尔可夫边界 $\partial_M X$ 具有 *TPO*，则X 具有 *TPO*。

证明。 令 $Y = \partial_M X$，结论由命题 9.14 得出。 □

记号 9.16. 令 $\mathfrak{S}$表示所有移位空间（在所有字母表上）的类，并约定（参见记号 8.1）空集是一个移位空间。定义马尔可夫边界映射

$$\partial_M : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$$

以显然的方式，即 $\partial_M(X) = \partial_M X$是 X 的马尔可夫边界。

作为定理9.15的一个简单推论，TPO 的一个充分条件是：在马尔可夫边界映射下的某个迭代像具有 TPO：

推论 9.17. 设 X 为任意移位空间。若对某个 $n \geq 0$， $\partial_M^n(X)$ 具有 *TPO*，则 X具有 *TPO*。

证明。 应用定理 9.15 可逐次推出，迭代马尔可夫边界$\partial_M^{n-i} X$ 具有 TPO，其中 $1 \leq i \leq n$。□

由定理 9.11，每个 sofic 移位都具有 TPO，因此推论9.17 引出如下定义：

定义 9.18. 对于 $n \in \mathbb{N}_0$，如果移位空间 X 是非空的 sofic 移位空间，则称其为层级为 n 的最终索菲克$\partial_M^n(X)$。如果某个移位空间对于某个 $n \in \mathbb{N}_0$，是层级为 n 的最终索菲克移位空间，则称其为最终索菲克。

注记 9.19。 若 X 最终索菲克，则按照定义9.18所述，其层级是良定义的，因为若 Y是非空的 sofic 移位，则 $\partial_M Y = \emptyset$，由引理 8.9可知。移位空间是层级为 0 的最终索菲克移位空间，当且仅当它是非空的 sofic 移位。

以下内容对应于第 1.5 节中的定理 1：

定理 9.20。 每个最终索菲克移位空间都具有 *TPO*。

证明。 若 X 是最终索菲克的，则 $\partial_M^n(X)$ 对某个 $n \geq 0$ 是索菲克的，因此根据定理 $\partial_M^n(X)$ 具有 TPO。 9.11由推论 9.17 可知 X 具有 TPO。 □

现在我们可以证明，某些特定的移位空间是最终索菲克的（层级至多为一[12]），因而具有 TPO。给定 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，相应的 S- 间隙移位 定义为字母表 $\{0,1\}$ 上的序列集合，其中任意两个相邻的 1 之间 0 的个数都是一个整数，取自 S (著名的 偶移位，在第 1 节中提及，是一个特例）。 S-间隙移位这一类已得到广泛研究（例如参见 [49, §1.2], ；近期进展参见 [18, 19, 20]）。就本文而言，将 S-间隙移位视为 S-图 移位的特例更为方便，后者定义如下：

定义 9.21。 令 A 为一个字母表。令 G 为一个有限有向简单图，其顶点集为 $V_G = A$，边集为 E_G。令 $S = (S_a)_{a \in A}$ 为 $S_a \subseteq \mathbb{N}$的一个非空子集的带索引集合。相应的 S-图移位$X_{G,\ S}$ 定义为（参见 [25]）集合在满移位 $A^{\mathbb{N}}$中的移位轨道闭包

$$\{a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \cdots : a_i \in A,\ n_i \in S_{a_i},\ (a_i, a_{i+1}) \in E_G \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}.$$

当且仅当每个 S_a 中按升序排列的相邻项的差序列最终周期时， S-图移位是索菲克的 [25, 命题 3.2], ；当且仅当每个 S_a 都是有限集或余有限集时，它是有限型移位 [25, 命题 3.1]。无论它们是否为索菲克，所有 S- 图移位都具有 TPO：

定理 9.22。 每个 S-图移位都是最终索菲克的，因而具有 *TPO*。

证明。 采用定义 9.21中的记号，注意，如果 $(a_1,\ a_2) \in E_G$ 满足 $a_1 \neq a_2$，那么$a_1 a_2$ 是$X_{G,\ S}$的同步词，因此不属于 $\mathbb{W}_\infty(X_{G,\ S})$。由此可得$\partial_M X_{G,\ S} \subseteq \{a^\infty :\ a \in A\}$。特别地，$\partial_M X_{G,\ S}$要么为空（此时 $X_{G,\ S}$是索菲克的），要么是由有限个不动点组成的有限型移位（此时$X_{G,\ S}$ 是层级为一的最终索菲克）；无论哪种情况，定理 9.20都蕴含$X_{G,\ S}$ 具有 TPO。□

以下内容对应第 1.4 节中的定理 1：

推论 9.23。 每个 S-间隙移位都是最终索菲克的，特别是具有 *TPO*。

证明。一个 S-间隙移位是 S-图移位的一种特殊情形，因此该结果由定理9.22得出。 □

该上下文无关移位 [49, §1.2] 定义为满移位 $\{a, b, c\}^{\mathbb{N}}$ 中所有不含有形如 $ab^m c^n a$ 的子词的序列，其中 $m \neq n$。上下文无关移位不是索菲克的（参见 [49,第 68] 页），但我们可以证明它确实具有 TPO：

定理 9.24。 上下文无关移位是最终索菲克的，尤其具有 *TPO*。

[12]任意高层级的最终sofic移位将在第11节中进行研究。

证明。 设 $X \subseteq \{a,b,c\}^{\mathbb{N}}$ 表示上下文无关移位。我们断言，其马尔可夫边界$\partial_M X$是由字母表 $\{b,c\}$ 上那些不包含词 cb 作为子词的序列所构成的有限型移位。为证明这一点，只需证明

$$\mathbb{W}(\partial_M X) = \mathbb{W}_\infty(X) = \{b^n c^m : m,n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{9.10}$$

注意，词 a 和 cb 在 X中都是同步的，因此可得$\mathbb{W}_\infty(X) \subseteq \{b^m c^n : m,n \in \mathbb{N}_0\}$，所以只需证明反向包含。

对任意 $w \in \mathbb{W}(X)$，定义 $M(w) := \min\{m \in \mathbb{N}_0 : wc^m a \in \mathbb{W}(X)\}$。

现在，设 $w = b^n c^m$ 对某个 $m,n \in \mathbb{N}_0$成立，其中 $m+n \neq 0$。对任意 $k \in \mathbb{N}$，根据 X的定义， $M(ab^{km}w) = M(ab^{km+n}c^m) = n+(k-1)m$。因此，后继集 $\{F_X(ab^{km}w)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 两两不同，所以 $|\{F_X(uw) : u \in P_X(w)\}| = \infty$，从而 $w \in \mathbb{W}_\infty(X)$。但是， w 是 $\{b^n c^m$ 中的任意非空词： $m,n \in \mathbb{N}_0\}$，因此我们证明了 $\{b^n c^m : m,n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{W}_\infty(X)$，如所需。

由于 $\partial_M X$ 是非空的有限型移位， X 是层级为 1 的最终索菲克，特别地具有 TPO，依据定理9.22。□

10. Typical periodic optimization for eventually fragile shifts

在本节中，我们将研究定理9.13 在 X 的马尔可夫边界非空情形下的如下推论。

推论 10.1. 设 X 为一个移位空间。若利普希茨$\partial(X)$ 在利普希茨(X)中具有空内部，则X 具有 *TPO*。

证明。 若 int(利普希茨$\partial(X)) = \emptyset$，则定理9.13 蕴含 $P(X, \sigma)$在利普希茨(X)中稠密，因此 X 具有 TPO（参见推论6.6）。□

注意，推论10.1 也可视为定理6.11的一个推论，该定理是针对一般动力系统的可数可最大化族的边界来表述的。我们如下发展脆弱边界的概念（见第6节）：

定义 10.2. 若非索菲克移位空间 X 满足 Lip$\partial(X)$ 在 Lip(X) 中的内部为空，则称其为脆弱。若移位空间 X 满足：对于某个 $n \geq 0$， $\partial_M^n X$ 是脆弱的，则称其为最终脆弱。

以下内容对应于第 1.7 节中的定理 1：

定理 10.3. 每个最终脆弱移位空间都具有 *TPO*。

证明。 根据推论 10.1，每个脆弱移位空间都具有 TPO。若 X 是最终脆弱的，则 $\partial_M^n X$对于某个 $n \geq 0$是脆弱的，因此 $\partial_M^n X$具有 TPO。于是，推论 9.17推出 X 本身也具有 TPO。□

（最终）脆弱移位空间是否存在，乍看之下并不明显，不过事实证明它们确实存在；我们将在第 11 节介绍构造它们的方法。为研究这一类空间，我们先给出以下定义：

定义 10.4。 我们称移位空间 X 满足从属原理[13]，如果每个$f \in$Lip(X) 都有一个从属最大化集。

[13]鉴于其表述采用了利普希茨(X *Lipschitz subordination*)，更准确的术语应为 。如前所述（参见定义 *principle* 。和注记。(b)），从属原理最初由 Bousch [4 5] 提出，适用于 [4 6] Walters 函数这一类函数。

记号 10.5。 对于一个移位空间 X，其子移位为 $Z \subseteq X$，我们记作

$$\mathrm{Lip}_Z^{\subseteq}(X) := \mathrm{Lip}_Z^{\subseteq}(X,\sigma) = \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) \subseteq \mathcal{M}(Z,\sigma)\},$$

并且还引入

$$\mathrm{Lip}_Z^{=}(X) := \{f \in \mathrm{Lip}(X) : \mathcal{M}_{\max}(f) = \mathcal{M}(Z,\sigma)\}.$$

引理 10.6. 设移位空间 X 满足从属原理。若子移位$Z \subseteq X$ 是动力学极小的，则 利普希茨$_Z^{\subseteq}(X)$ = 利普希茨$_Z^{=}(X)$。

证明。 根据定义，$\mathrm{Lip}_Z^{=}(X) \subseteq \mathrm{Lip}_Z^{\subseteq}(X)$ 显然成立。为证明反向包含，设 $f \in \mathrm{Lip}_Z^{\subseteq}(X)$，并令 $Y \subseteq X$ 为 f的一个从属最大化集，则

$$\mathcal{M}_{\max}(f) = \mathcal{M}(Y,\sigma). \tag{10.1}$$

但是 $f \in \mathrm{Lip}_Z^{\subseteq}(X)$，因此 $\mathcal{M}_{\max}(f) \subseteq \mathcal{M}(Z,\sigma)$，换言之 $\mathcal{M}(Y,\sigma) \subseteq \mathcal{M}(Z,\sigma)$，于是 $Y \cap Z \neq \emptyset$。然而 Z 是动力学极小的，因此 $Z \subseteq Y$，所以 $\mathcal{M}(Y,\sigma) = \mathcal{M}(Z,\sigma)$，由此 (10.1) 蕴含 $\mathcal{M}_{\max}(f) = \mathcal{M}(Z,\sigma)$，进而 $f \in \mathrm{Lip}_Z^{=}(X)$，证毕。□

定义 10.7. 若存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $u, w \in \mathbb{W}(X)$，都存在 $v \in \mathbb{W}_N(X)$ 满足 $uvw \in \mathbb{W}(X)$，则称移位空间 X 具有规范性 。若存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 u, $w \in \mathbb{W}(X)$，都存在$v \in \bigcup_{n\le N} \mathbb{W}_n(X)$ 满足 $uvw \in \mathbb{W}(X)$，则称其具有变量规范[14] 。

注记 10.8. 规范性的概念源自 Bowen 的一篇颇具影响力的文章 [15]。所有拓扑传递的 sofic 移位（因而所有拓扑传递的有限型移位）都具有变量规范（参见 [46]）。具有变量规范的移位空间是同步的（即它是拓扑传递的，并且具有一个同步词），参见 [2, 定理 1] 和 [43,引理 3。1]。

变量规范蕴含从属原理:

命题 10.9. 若一个移位空间具有可变规范性，则它满足从属原理。

证明。 设 X 是一个具有可变规范性的移位空间，并设 $N \in \mathbb{N}$ 如定义10.7所述。为证明 X 满足从属原理，取 $f \in \mathrm{Lip}(X)$，不失一般性，假设

$$\beta(f) = 0. \tag{10.2}$$

回顾一下，对于 $\alpha \in (0, 1)$， X 上的距离函数为 $d = d_\alpha$ 记号 8.1中所述的形式，我们断言

$$\sup_{n\ge 1}\sup_{x\in X} S_n f(x) \le \alpha(1-\alpha)^{-1}|f|_{\mathrm{Lip}(X)} + N\,\|f\|_{C(X)}. \tag{10.3}$$

注意，借助引理 10.3，由 4.7可知，存在一个关于 f的从属最大化集，因此 X 满足从属原理。

为了证明见（10.3），注意，若其不成立，则存在 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 与 h

$$S_n f(x) - \alpha(1-\alpha)^{-1}|f|_{\mathrm{Lip}(X)} - N\,\|f\|_{C(X)} > 0, \tag{10.4}$$

[14]我们的定义，尤其是术语 *variable specification*，沿用 [46], 的用法；该文讨论了各种类似规范的条件。变量规范条件在 [2], 和 *almost specification* 中 [43] 实际上被称为规范性（尽管其他作者，尤其是 [70, 81], ，用这个术语表示不同的概念）。

因此定义 $w \in \mathbb{W}(X)$ 为 $w :=^{} x_{[1,n]}$ 并递归应用定义 10.7，便存在

$$x' := wv^{(1)}wv^{(2)}wv^{(3)} \cdots \in X,$$

其中词 $v^{(k)} \in \mathbb{W}(X)$ 满足 $|v^{(k)}| \leq N$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$。然而，我们声称这样的 x' 满足

$$\limsup_{M\to\infty} \frac{1}{M} S_M f(x') \geq \frac{1}{n+N} \left(S_n f(x) - \alpha(1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)} - N \|f\|_{C(X^{}} \right), \tag{10.5}$$

因此，结合 (10.5) 与 (10.4)，以及 $\beta(f) \geq$上极限$_{M\to\infty} \frac{1}{M} S_M f(x')$（例如参见 [39, 命题 2。2]）可得 $\beta(f) > 0$，从而与 (10.2) 矛盾。

因此，要证明该结果，只需证明 (10.5)。为此，先定义

$$i_k := \sum_{j=1}^{k} \left(n + |v^{(j)}| \right) \quad \text{for } k \in \mathbb{N}, \tag{10.6}$$

并注意到

$$d\left(x, \sigma^{i_k}(x')\right) \leq \alpha^n \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}, \tag{10.7}$$

因为 x 和 $\sigma^{i_k}(x')$共享长度为 n 的前缀 w。

我们将通过考察子序列(10.5)上的伯克霍夫和来估计上极限，并首先将其表示为$i_m)_{m=1}^{\infty}$,

$$S_{i_m} f(x') = \sum_{k=1}^{m} S_{n+|v^{(k)}|} f\left(\sigma^{i_k}(x')\right). \tag{10.8}$$

注意，(10.8)中的被加项可以估计为

$$S_{n+|v^{(k)}|} f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) \geq S_n f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) - |v^{(k)}| \, \|f\|_{C(X)} \geq S_n f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) - N \|f\|_{C(X)}. \tag{10.9}$$

为估计(10.9)的右端，利用 f 是利普希茨函数这一事实可得

$$S_n f(x) - S_n f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) \leq |S_n f|_{\mathrm{Lip}(X)} \, d\left(x, \sigma^{i_k}(x')\right), \tag{10.10}$$

但对于 $|f \circ \sigma^i|_{\mathrm{Lip}(X)} \leq \alpha^{-i} |f|_{\mathrm{Lip}(X)}$ $0 \leq i \leq n-1$，因此

$$|S_n f|_{\mathrm{Lip}(X)} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{-i} |f|_{\mathrm{Lip}(X)} \leq \alpha^{1-n} (1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)}, \tag{10.11}$$

因此，结合(10.7)、(10.10)和(10.11)可得

$$S_n f(x) - S_n f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) \leq \alpha(1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)}. \tag{10.12}$$

结合（10.9）与（10.12）可得

$$S_{n+|v^{(k)}|} f\left(\sigma^{i_k}(x')\right) \geq S_n f(x) - \alpha(1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)} - N \|f\|_{C(X)}, \tag{10.13}$$

因此，将（10.13）代入（10.8）可得

$$S_{i_m} f(x') \geq m \left(S_n f(x) - \alpha(1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)} - N \|f\|_{C(X)} \right). \tag{10.14}$$

由（10.6）注意到 $i_m \leq m(n+N)$，界（10.14）给出

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{i_m} S_{i_m} f(x') \geq \frac{1}{n+N} \left(S_n f(x) - \alpha(1-\alpha)^{-1} |f|_{\mathrm{Lip}(X)} - N \|f\|_{C(X)} \right), \tag{10.15}$$

且由于上极限$_{M\to\infty} \frac{1}{M} S_M f(x') \geq$上极限$_{m\to\infty} \frac{1}{i_m} S_{i_m} f(x')$, 我们可知 (10.15) 蕴含所需的估计 (10.5)。□

推论 10.10。假设移位空间 X 具有变量规范性。如果子移位$Z \subseteq X$ 是动力学极小的，那么 利普希茨$_Z^{\subseteq}(X) = $ 利普希茨$_Z^{=}(X)$。

证明。 由引理 10.6 和命题 10.9立即可得。 □

正如我们很快将看到的，动力学极小但非唯一遍历（即支撑多个移位不变概率测度）这一性质，是在移位空间中构造脆弱性的有效机制。首先，我们需要：

推论 10.11。 若移位空间 X 具有变量规范性，且子移位 $Z \subseteq X$ 动力学极小但非唯一遍历，则 利普希茨$_Z^{\subseteq}(X)$ 在 利普希茨(X)中具有空内部。

证明。我们必须证明，每个 $f \in$ 利普希茨$_Z^{\subseteq}(X)$ 都可以在 Lip(X) 中由不属于 Lip$_Z^{\subseteq}(X)$ 的函数逼近。根据推论 10.10，Lip$_Z^{\subseteq}(X) =$Lip$_Z^{=}(X)$，而 Z非唯一遍历，因此 $\mathcal{M}(Z,\sigma)$ 不是单点集。因此，若 $f \in$Lip$_Z^{\subseteq}(X) =$Lip$_Z^{=}(X)$，则f 没有唯一最大化测度。不过，具有唯一最大化测度的利普希茨函数构成 Lip(X) 的一个剩余子集（例如参见 [41, 定理 2.4]）；特别地，由于 Lip(X) 是贝尔空间，该子集稠密[15]，；因此， f 确实可以在 Lip(X) 中由不属于 Lip$_Z^{\subseteq}(X)$ 的函数逼近，如所需。□

我们尤其关注满足以下条件的移位空间 X ： 推论10.11 的假设对马尔可夫边界子移位 $Z = \partial_M X$成立。因此，我们给出以下定义：

定义 10.12。 将具有变量规范且其马尔可夫边界动力学极小但不唯一遍历的移位空间称为样本[16] 移位空间。

若存在 $n \in \mathbb{N}_0$ ，使得迭代马尔可夫边界 $\partial_M^n X$ 是样本移位空间，则称移位空间 X 为最终为样本型。

首先，我们证明样本移位空间是脆弱的，因此具有典型周期优化性质：

定理 10.13。 每个样本移位空间都是脆弱的，因此具有 *TPO*。

证明。 设 X 是一个样本移位空间，并设 $Z = \partial_M X$。由推论10.11可知，

$$\text{Lip}_Z^{\subseteq}(X) = \text{Lip}_{\partial_M X}^{\subseteq}(X) = \text{Lip}_{\partial}^{\subseteq}(X)$$

在 Lip(X) 中具有空内部。现在 Lip$_{\partial}^{\subseteq}(X)$ 和 Lip$_{\partial}(X)$ 在 Lip(X) 中的内部相同，根据引理9.9，因此 Lip$_{\partial}(X)$ 在 Lip(X) 中具有空内部。由此可知， X 是脆弱的（注意， X 显然是非索菲克的，因为它的马尔可夫边界非空）。由推论10.1 （或定理10.3）可知， X 具有 TPO。□

我们很容易推得，最终标本移位空间最终脆弱，因此具有 TPO 性质：

---

[15]借助关于最大化测度典型唯一性的相关文献会很方便，不过直接证明也很简单：若 $f \in$Lip$_Z^{\subseteq}(X) =$ Lip$_Z^{=}(X)$，那么存在两个不同的测度μ，$\nu \in \mathcal{M}(Z,\sigma)$，以及 $g \in$Lip(X)，满足 $\int g\,d\mu > \int g\,d\nu$，使得对所有 $\epsilon > 0$，均有 $f + \epsilon g \notin$Lip$_Z^{=}(X) =$Lip$_Z^{\subseteq}(X)$，但 $f + \epsilon g \to f$在 Lip(X) 中是 $\epsilon \to 0$。[16]这是一个混成术语，其前缀反映了（可变的）规范条件，而末尾音节则是对马尔可夫边界为 $m$inimal、具有 $e$rgodic 测度且 $n$on-unique 的缩略描述。

定理 10.14. 每个最终标本移位空间都是最终脆弱的，并具有 *TPO* 性质。

证明。 如果 X 最终为样本型，那么 $\partial_M^n X$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}_0$ 是样本型，因此 $\partial_M^n X$ 是脆弱的（故 X 最终脆弱），并根据定理 10.13 具有 TPO。由此可得 X 根据推论 9.17 具有 TPO。 □

本节的结果有些抽象，因为迄今我们尚未给出最终脆弱（或样本型）移位空间的具体例子；这一缺乏具体实例的情况将在下一节得到弥补11。

11. TPO-preserving operations on shift spaces

在第 9 节中，我们证明了如果 $\partial_M X$ 具有 TPO，或者更一般地说，某个迭代马尔可夫边界 $\partial_M^n X$ 具有 TPO，那么 X 本身也必定具有 TPO（见定理 9.15 和推论9.17）。证明 sofic 移位具有 TPO（定理9.11）之后，我们通过证明一些值得关注的非索菲克移位空间的马尔可夫边界是有限型移位、因而是 sofic 的，推导出它们具有 TPO（见定理 9.22、推论 9.23和定理9.24）；特别是，这些移位是层级为 $n = 1$的最终索菲克移位空间。这些例子引出了两个问题：层级为 $n \geq 2$ 的最终索菲克移位空间是否存在？是否存在马尔可夫边界为严格索菲克（即 sofic 但非有限型）的移位空间？

本节将通过介绍一种方法，对这两个问题都给出肯定的回答：该方法可以将任意移位空间 Y 实现为某个移位空间的马尔可夫边界 X (其中X 具有一个同步词)；事实上，正如我们将看到的，对于给定的 Y，存在许多这样的 X，且满足 $\partial_M X = Y$。该方法还将引出一些移位空间的构造，使其满足第 10节中提出的条件，也就是说，它们是（最终）标本，因此也是（最终）脆弱的，并且尽管并非最终索菲克，仍具有 TPO。事实上，此处提出的方法还引出了各种作用于移位空间的 保典型周期优化运算，其含义是：若已知某个移位空间 Y 具有 TPO，那么经适当运算后所得的空间也将具有 TPO；因此，这些方法提供了一套从已有 TPO 空间构造新 TPO 空间的程序。

不过，该方法并不局限于从已有系统构造新的 TPO 系统：它还可以从不具备 TPO 性质的空间 X 出发，构造具有 TPO 性质的移位空间 Y(满足 $\partial_M X = Y$)。另一方面，该方法并非总能构造出具有 TPO 的空间；事实上，在第12节中，我们将用它构造一个不具有 TPO 的移位空间，尽管其周期测度在所有不变测度构成的空间中稠密。

起点是下面的定义：

定义 11.1. 设字母表为 A，令 $A' := A \sqcup \{\flat\}$，即由 A 与一个单元素集的不交并组成，该单元素集中的唯一元素记作 $\flat$。若 Y 是字母表 A 上的移位空间，且 $\mathbb{V}$ 是语言 $\mathbb{W}(Y)$ 的子集，则定义 交错 （或 $\mathbb{V}$-交错 ），记作 $Y_{\mathbb{V}}$，为包含所有如下形式序列的、以 A' 为字母表的最小移位空间：

$$\flat v^{(1)} \flat v^{(2)} \flat v^{(3)} \dots \tag{11.1}$$

其中 $v^{(i)} \in \mathbb{V}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$。也就是说， $Y_{\mathbb{V}}$ 是所有形如（11.1）的序列之并集的移位轨道闭包。

符号 $\flat$ 属于 $Y_{\mathbb{V}}$ 的字母表，但不属于 Y 的字母表，因此被称为 $Y_{\mathbb{V}}$ 的魔法符号。

任何 $Y_{\mathbb{V}}$ Y 的交错的一个显著性质是，马尔可夫边界 $\partial_M Y_{\mathbb{V}}$ 包含于 Y中：

引理 11.2。 如果 Y 是任意移位空间，且 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$，那么

(a) 魔法符号是 $Y_{\mathbb{V}}$的同步词。(b) $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y \cap Y_{\mathbb{V}}$。

证明。 (a) 令 $\flat$ 表示 $Y_{\mathbb{V}}$中的魔法符号。 $\mathbb{W}(Y_{\mathbb{V}})$中的元素恰好具有如下形式

$$w\flat w^{(1)}\flat w^{(2)}\flat\cdots\flat w^{(l)}\flat w' \tag{11.2}$$

其中 w 是 $\mathbb{V}$中某个词的后缀， w' 是 $\mathbb{V}$中某个词的前缀，并且对于某个 $l \in \mathbb{N}_0$，有$w^{(1)},\dots,w^{(l)} \in \mathbb{V}$。

因此，若 $u\flat, \flat v \in \mathbb{W}(Y_{\mathbb{V}})$，则 $u = w\flat u^{(1)}\flat u^{(2)}\flat\cdots\flat u^{(m)}$ 对某个后缀 w，即 $\mathbb{V}$ 中某个词的后缀，且 $u^{(1)},\dots,u^{(m)} \in \mathbb{V}$ 对某个 $m \in \mathbb{N}_0$，且 $v = v^{(1)}\flat v^{(2)}\flat\cdots\flat v^{(n)}\flat w'$ 对某个前缀 w'，即 $\mathbb{V}$ 中某个词的前缀，且 $v^{(1)},\dots,v^{(n)} \in \mathbb{V}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}_0$。因此

$$u\flat v = w\flat u^{(1)}\flat u^{(2)}\flat\cdots\flat u^{(m)}\flat v^{(1)}\flat v^{(2)}\flat\cdots\flat v^{(n)}\flat w',$$

其形式为（11.2），因此 $u\flat v \in \mathbb{W}(Y_{\mathbb{V}})$，从而 $\flat$ 是$Y_{\mathbb{V}}$中的同步词。

（b）包含关系 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y_{\mathbb{V}}$ 由马尔可夫边界的定义得出，因此尚需证明 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y$。设 $x \in Y_{\mathbb{V}} \setminus Y$。则 $\flat \subset x$。但 $\flat$ 是 $Y_{\mathbb{V}}$ 中的同步词，故 $\flat \in \mathbb{W}_{<\infty}(Y_{\mathbb{V}})$。因此 $x \notin \partial_M(Y_{\mathbb{V}})$。于是我们已证明 $Y_{\mathbb{V}} \setminus Y \subseteq Y_{\mathbb{V}} \setminus \partial_M Y_{\mathbb{V}}$。由于 $\partial_M Y_{\mathbb{V}} \subseteq Y_{\mathbb{V}}$，从而得到 $\partial_M Y_{\mathbb{V}} \subseteq Y$，即为所求。□

在许多情况下，了解移位空间 Y 本身是交错 $Y_{\mathbb{V}}$ 的子集会很有用；这便引出了以下定义。

定义 11.3. 设 Y 为一个移位空间。若子集 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$ 满足：对于所有 $y \in Y$，都存在一个序列 $(s_j)_{j=1}^{\infty}$，其中 $s_j \to \infty$ 作为 $j \to \infty$，且对于每个 $j \in \mathbb{N}$，前缀 $y_{[1,s_j]}$ 都是 $\mathbb{V}$ 中某个词的后缀，则称该子集为 Y-描述的。

（等价地，若 $\mathbb{W}(Y)$ 是 $\mathbb{V}$ 的后缀闭包，则称 $\mathbb{V}$ 是 Y-描述的；也就是说， Y 是语言包含 $\mathbb{V}$ 中某个词的所有后缀的最小移位空间。）

引理 11.4. 设 Y 为任意移位空间。若 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$ 是 Y-描述的，则 $Y \subseteq Y_{\mathbb{V}}$。

证明。 假设 $y \in Y$。存在一个序列 $s_j \to \infty$，使得

$$y_{[1,s_j]} = u^{(j)}_{\left[|u^{(j)}|-s_j+1,|u^{(j)}|\right]}$$

对于某个 $u^{(j)} \in \mathbb{V}$，对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立。因此 $y_{[1,s_j]}\flat$ 是某个 $y^{(j)} \in Y_{\mathbb{V}}$ 的前缀。因此 $y^{(j)} \to y$，因为 $j \to \infty$，而且根据定义 $Y_{\mathbb{V}}$ 是闭的，所以 $y \in Y_{\mathbb{V}}$。由于 y 是 Y 中的任意元素，可得 $Y \subseteq Y_{\mathbb{V}}$，这正是所需的。□

引理 $\partial_M Y_{\mathbb{V}} \subseteq Y \subseteq Y_{\mathbb{V}}$ 11.2 和 11.4 中确立的双重包含关系意味着，我们现在可以从命题 9.14推出另一个重要结论：若 $\mathbb{V}$ 是Y-描述的，那么相应的交错是一种保 TPO 操作：

定理 11.5。 设 Y 是任意具有 *TPO* 的移位空间。假设 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$ 是 Y-描述的。那么交错 $Y_{\mathbb{V}}$ 也具有 *TPO*。

证明。 由于 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$，引理 11.2(b) 蕴含 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y$。此外，由于 $\mathbb{V}$ 是Y-描述的，引理 11.4 蕴含 $Y \subseteq Y_{\mathbb{V}}$。因此 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y \subseteq Y_{\mathbb{V}}$，且 Y具有 TPO，因此命题 9.14 蕴含 $Y_{\mathbb{V}}$ 具有 TPO。 □

引理 11.2(b) 的以下强化尤其蕴含，所有不含同步词的移位空间都是某个含同步词的移位空间的马尔可夫边界；交错作为算子 ∂_M的（右）逆的含义将在下文进一步探讨，特别是在定理 11.19中。

命题 11.6。 假设 Y 是一个不含同步词的移位空间。如果 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$ 是 Y-描述的，那么 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) = Y$。

证明。根据引理 11.2(b)，我们知道 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) \subseteq Y$，因此只需证明$Y \subseteq \partial_M(Y_{\mathbb{V}})$。假设 $x \in Y$。由于 Y没有同步词，根据 Thomsen [71, 定理 3.1]，则$\partial_M Y = Y$[17]。因此 $x \in \partial_M Y$。根据 $\partial_M Y$的定义，这意味着如果 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 且 $w \sqsubset x$，那么 $w \in \mathbb{W}_\infty(Y)$。根据 $\mathbb{W}_\infty(Y)$ 的定义，这意味着

$$|\{F_Y(uw) : u \in P_Y(w)\}| = \infty. \tag{11.3}$$

现在，$\mathbb{V}$ 是 Y-描述的，因此

$$Y \subseteq Y_{\mathbb{V}} \tag{11.4}$$

根据引理 11.4。由（11.4）我们推得 $w \in \mathbb{W}(Y_{\mathbb{V}})$，并且

$$P_{Y_{\mathbb{V}}}(w) \supseteq P_Y(w). \tag{11.5}$$

此外，对于每个 $u \in P_Y(w)$，

$$F_{Y_{\mathbb{V}}}(uw) \supseteq F_Y(uw) \text{ and } F_{Y_{\mathbb{V}}}(uw) \cap \mathbb{W}(Y) = F_Y(uw). \tag{11.6}$$

因此，根据（11.6），我们知道

$$F_{Y_{\mathbb{V}}}(u_1 w) \neq F_{Y_{\mathbb{V}}}(u_2 w) \tag{11.7}$$

只要 $u_1, u_2 \in P_Y(w)$ 且 $F_Y(u_1 w) \neq F_Y(u_2 w)$。由（11.3）、（11.5）和（11.7）可得

$$|\{F_{Y_{\mathbb{V}}}(uw) : u \in P_{Y_{\mathbb{V}}}(w)\}| \geq |\{F_{Y_{\mathbb{V}}}(uw) : u \in P_Y(w)\}| \geq |\{F_Y(uw) : u \in P_Y(w)\}| = \infty,$$

从而有 $w \in \mathbb{W}_\infty(Y_{\mathbb{V}})$。

由于 w 是出现在 x中的任意词，我们推得 $x \in \partial_M Y_{\mathbb{V}}$。

But x 是 Y中的任意元素，因此我们推得 $Y \subseteq \partial_M Y_{\mathbb{V}}$，即为所求 . □

命题 11.6的以下推论将在第 12 节中用到。在该节中，将证明一个特定的移位空间（定义为一个 $\mathbb{V}$-交错）不具有 TPO，尽管其周期测度在所有不变测度构成的空间中稠密。

[17]由于 [71, 定理3.1] 中的陈述包含关于 Y的拓扑传递性假设，我们在此给出一个简短证明：即使没有该假设，若 $Y \setminus \partial_M Y \neq \emptyset$，则 Y必有一个同步词。若 $y \in Y \setminus \partial_M Y$，则存在 $w \sqsubset y$，使得 $\{F_Y(uw) : u \in P_Y(w)\}$ 具有有限基数$c(w) \geq 1$。若 $c(w) = 1$，则 w 是同步的，而若 $c(w) > 1$，则存在 $w^{(1)} = u^{(1)} w \in \mathbb{W}(Y)$，使得 $F_Y(u^{(1)} w) \neq F_Y(w)$，从而 $c(w^{(1)}) \leq c(w) - 1$。按归纳进行，存在 $n \leq c(w) - 1$，以及词 $w^{(i)} = u^{(i)} w^{(i-1)} \in \mathbb{W}(Y)$，满足对 $1 \leq i \leq n-1$ 有 $1 \leq c(w^{(i+1)}) \leq c(w^{(i)}) - 1$，且 $c(w^{(n)}) = 1$。特别地，$w^{(n)}$ 是 Y中的一个同步词，即为所求。

推论11.7。 假设 Y 是一个动力学极小但非周期的移位空间。如果 $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}(Y)$ 是 Y-描述的，那么 $\partial_M(Y_{\mathbb{V}}) = Y$。

证明。 由命题 11.6立即可得，因为动力学极小的非周期移位空间不存在非同步词（参见引理 8.17）。 □

本节余下部分将讨论以下这种受限的交错形式，它足以用于解决构造具有给定马尔可夫边界的移位空间这一问题（见定理 11.19）。

定义11.8。 设 Y 是一个移位空间。给定子集 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，并且（参见（8.3））$\mathbb{W}_S(Y) = \bigcup_{n\in S} \mathbb{W}_n(Y)$，定义相应的长度约束穿插 $\mathfrak{I}_S(Y$为$\mathbb{W}_S(Y$-交错形式 Y，

$$\mathfrak{I}_S(Y) := Y_{\mathbb{W}_S(Y)}. \tag{11.8}$$

这定义了一个自映射

$$\mathfrak{I}_S : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$$

作用于 $\mathfrak{S}$ 所有移位空间组成的类上，称为 S-交错映射。
在 $S = \mathbb{N}_0$这一特殊情形下，映射$\mathfrak{I}_{\mathbb{N}_0}$ 将简记为 $\mathfrak{I}$，并称为无约束交错插入。

注记 11.9. 对于 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，移位空间 $\mathfrak{I}_S(Y)$是所有形如(11.1)的序列之移位轨道集合的闭包，其中每个词 $v^{(i)}$ 的长度必须属于 S。特别地，当 Y 为单点移位空间 $Y = \{a^\infty\}$ 时，$\mathfrak{I}_S($ $Y)$恰好是S-间隙移位（参见第9节），对应于集合 S，即所有形如 $\flat a^{i_1} \flat a^{i_2} \flat a^{i_3} \ldots$的序列的移位轨道闭包，其中每个 $i_j \in S$。

更一般地，若(Y, σ)是拓扑传递的，且 $y \in Y$ 具有稠密轨道，则$\mathfrak{I}_S(Y)$是(S, y)-间隙移位（在 [68]的意义下）。

首先我们考虑 S 为无穷的情形：

引理 11.10. 设 Y 为一个移位空间，并假设 $S \subseteq \mathbb{N}_0$。若 S 为无穷，则集合 $\mathbb{W}_S(Y)$ $= \bigcup_{n\in S} \mathbb{W}_n(Y)$ 是 Y-描述性的。

证明。 假设 S为无穷。设 $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ 被如此枚举，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$有 $s_j < s_{j+1}$。则对所有 $y \in Y$，序列 $s_j \to \infty$ 并且使得对所有 $j \in \mathbb{N}$有 $y_{[1,s_j]} \in \mathbb{W}_S(Y)$。因此 $\mathbb{W}_S(Y)$是 Y-描述性的。□

因此，使用任意 无穷 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 的长度约束穿插给出马尔可夫边界算子的一个右逆，当限制于那些没有同步词的移位空间时：

推论 11.11. 假设 Y 是一个没有同步词的移位空间。若$S \subseteq \mathbb{N}_0$ 为无穷，则 $\partial_M(\mathfrak{I}_S(Y)) = Y$。

证明。 由于 S 是无限的，引理 11.10 表明 $\mathbb{W}_S(Y)$ 是 Y-描述的。此外，由于 Y不含同步词，命题 11.6 表明 $\partial_M(Y_{\mathbb{W}_S(Y)}) = Y$，换言之 $\partial_M(\mathfrak{I}_S(Y)) = Y$。□

特别地，推论 11.11 的结论在 Y 是动力学极小但非周期时仍然成立。这一结果将用于展示标本（因而是脆弱的）移位空间的例子（见推论 11.26）：

推论 11.12。 设 Y 是一个动力学极小但非周期的移位空间，且 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是无限的。那么 $\partial_M(\mathfrak{I}_S(Y)) = Y$。

证明。 由推论 11.11可直接得出，因为动力学极小的非周期移位空间没有非同步词（参见引理 8.17 ）。 □

以下结论是引理 11.4 和 11.10的简单推论：

推论 11.13。 设 Y 是一个移位空间。如果 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是无限的，那么 $Y \subseteq \mathfrak{I}_S(Y)$。

证明。 假设 S 是无限的。根据引理11.10， $\mathbb{W}_S(Y)$是 Y-描述性的，因此引理11.4 推出 $Y \subseteq Y_{\mathbb{W}_S(Y)} = \mathfrak{I}_S(Y)$。□

如果 S 是有限的，那么 Y 与 $\mathfrak{I}_S(Y)$之间的关系与推论 11.13所述的关系截然不同：

L引理 11.14. 设 Y 是一个移位空间。若 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是有限集，则 $Y \cap \mathfrak{I}_S(Y) = \emptyset$。

证明。 假设 S 是有限集。 $\mathbb{W}(\mathfrak{I}_S(Y))$ 中长度严格大于 $\max S$ 的所有词都包含魔法符号 $\flat$，而 $\mathbb{W}(Y)$ 中没有词包含 $\flat$。因此，若 $y \in Y$，且 $w \sqsubset y$ 满足 $|w| > \max S$，则 $w \notin \mathbb{W}(\mathfrak{I}_S(Y))$，所以 $y \notin \mathfrak{I}_S(Y)$。因此 $Y \cap \mathfrak{I}_S(Y) = \emptyset$。□

推论 11.15. 设 Y 是一个移位空间。若 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是有限集，则 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 是索菲克的 .

证明。 根据引理 8.9，移位空间是索菲克的，当且仅当其马尔可夫边界为空，因此只需证明 $\partial_M \mathfrak{I}_S(Y) = \emptyset$。根据引理 11.2(b),

$$\partial_M \mathfrak{I}_S(Y) = \partial_M Y_{\mathbb{W}_S(Y)} \subseteq Y \cap Y_{\mathbb{W}_S(Y)} = Y \cap \mathfrak{I}_S(Y),$$

但是 $Y \cap \mathfrak{I}_S(Y) = \emptyset$ 根据引理 11.14，因此 $\partial_M \mathfrak{I}_S(Y) = \emptyset$，证毕。 □

推论11.16。 若 y 是某个字母表 A上的任意序列，且 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是有限的，则对应的 (S, y)-间隙子移位 [68] 是索菲克的。

证明。 若 Y表示 y的移位轨道闭包，则 (S, y)-间隙子移位是 $\mathfrak{I}_S(Y)$，结论由推论 11.15 得出。□

现在我们可以证明，对于任意 子集 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，相应的长度约束穿插是一个保TPO算子：

定理 11.17。 若 Y 是具有 *TPO* 的任意移位空间，且 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，则 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 具有 *TPO*。

证明。 若 S 是有限的，则 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 是索菲克的，由推论 11.15可知，因此 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 具有 TPO。若 S 是无限的，则 $\mathbb{W}_S(Y)$ 是 Y-描述的，由引理 11.10可知，因此 $\mathfrak{I}_S(Y) = Y_{\mathbb{W}_S(Y)}$ 根据定理11.5具有 TPO，证毕。□

我们现在聚焦于这样一个问题：将所有移位空间实现为移位空间的马尔可夫边界 Y（其中 X 具有一个同步词）。注意，根据命题11.6（另见推论11.7 和11.12），当 Y 不具有同步词时，该问题已经得到解决。对于一般的 Y，该问题的解决将使用长度约束穿插，不过需要对集合 S作出以下更强的假设：

定义11.18。 无限子集 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，其不同元素枚举为$s_1 < s_2 < \ldots$，称为超线性 ，如果

$$s_{n+1} - s_n < s_{n+2} - s_{n+1} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{11.9}$$

定理 11.19。 如果 Y 是一个移位空间，且 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是超线性的，那么 S-交错 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 是一个移位空间，其马尔可夫边界等于 Y；也就是说， $\partial_M(\mathfrak{I}_S(Y)) = Y$。

证明。 设 $X := \mathfrak{I}_S(Y)$。注意到 $Y \subseteq X$，并且 Y 恰好是 X 中不包含符号 $\flat$ 的序列集合。由引理 11.2（a）， $\flat$ 是 X 的同步词，因此任何包含它的词都不属于 $\mathbb{W}_\infty(X)$，所以 $\partial_M X \subseteq Y$。还需证明 $Y \subseteq \partial_M X$，换言之，

$$\mathbb{W}(Y) \subseteq \mathbb{W}_\infty(X). \tag{11.10}$$

为此，设 w 是 $\mathbb{W}(Y)$ 中的任意词。存在 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $n > N$，则存在 $v^{(n)} \in \mathbb{W}(Y)$，满足 $v^{(n)}w \in \mathbb{W}(Y)$，并且

$$|v^{(n)}w| = s_n + 1.$$

现在 $\flat v^{(n)}w \in \mathbb{W}(X)$，我们希望考察后继集 $F_X(\flat v^{(n)}w)$。我们声称， X 定义中的长度约束意味着 $F_X(\flat v^{(n)}w)$ 包含一个词 $u \in \mathbb{W}_{s_{n+1}-s_n}(X)$，使得

$$u_{s_{n+1}-s_n} = \flat \quad \text{and} \quad u_i \neq \flat \text{ for } 1 \leq i \leq s_{n+1} - s_n - 1.$$

现在我们证明这一断言。由于 $v^{(n)}w \in \mathbb{W}_{s_n+1}(Y)$，它必定是 $\mathbb{W}(Y)$ 中某个长度为 s_{n+1} 的词的前缀；也就是说，存在 $u' \in \mathbb{W}_{s_{n+1}-s_n-1}(Y)$，使得 $v^{(n)}wu' \in \mathbb{W}_{s_{n+1}}(Y)$。根据 X 的定义，可知 $\flat v^{(n)}wu'\flat \in \mathbb{W}(X)$。定义 $u = u'\flat$ 后，我们便看到 $u \in \mathbb{W}_{s_{n+1}-s_n}(X)$、 $u \in F_X(\flat v^{(n)}w)$、 $u_{s_{n+1}-s_n} = \flat$，且对于 $1 \leq i \leq s_{n+1} - s_n - 1$， $u_i = u'_i \neq \flat$，因此 u 确实满足该断言的要求。

另一方面， $F_X(\flat v^{(n)}w)$ 不包含任何形如 $v = v'\flat$ 的词，其中 $|v'| < s_{n+1} - s_n - 1$（论证与上文类似，同样使用长度约束）。

现在，对于 $m > n > N$，我们来比较 $F_X(\flat v^{(n)}w)$ 和 $F_X(\flat v^{(m)}w)$，并论证这两个集合不同。根据上文， $F_X(\flat v^{(n)}w)$ 包含某个词 $u = u'\flat$ where $|u| = s_{n+1} - s_n$，但 $F_X(\flat v^{(m)}w)$ 不包含任何形式为 $v = v'\flat$ where $|v| < s_{m+1} - s_m$ 的词。现在，由于 $s_{n+1} - s_n < s_{m+1} - s_m$ since S 是超线性的，且 $m > n$，因此 u 不属于 $F_X(\flat v^{(m)}w)$，所以集合 $F_X(\flat v^{(n)}w)$ 和 $F_X(\flat v^{(m)}w)$ 不同。

因此 $F_X(\flat v^{(n)}w) \neq F_X(\flat v^{(m)}w)$ 对所有 $m > n > N$，所以集合 $\{F_X(vw) : v \in P_X(w)\}$ 的基数是无限的，因此 $w \in \mathbb{W}_\infty(X)$。但是 $w \in \mathbb{W}(Y)$ 是任意的，所以 $\mathbb{W}(Y) \subseteq \mathbb{W}_\infty(X)$，这就是所需的包含关系（11.10），故结论得证。 □

在所有移位空间这一类上的算子语言中，定理 𝔊 11.19 可以用马尔可夫边界算子的右逆来解释：

推论 11.20. 若 $S \subseteq \mathbb{N}_0$ 是超线性的，则 S-交错映射 $\mathfrak{I}_S : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ 是马尔可夫边界映射 $\partial_M : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ 的一个右逆，即 $\partial_M \circ \mathfrak{I}_S = \mathrm{id}_{\mathfrak{G}}$。

证明。由定理11.19立即可得。 □

注记 11.21。 推论中的超线性长度约束交织 $\mathfrak{I}_S$ （11.20） 并非马尔可夫边界映射的唯一右逆：例如，上下文无关移位 X 在定理9.24的证明中已证明，其马尔可夫边界等于某个有限型移位 Y，然而 X 并不等于该移位的任何长度约束穿插 Y。

尽管定理 11.17 断言，对于完全一般的 $S \subseteq \mathbb{N}_0$，只要 $\mathfrak{I}_S(Y)$ 具有 TPO，那么 Y 也具有 TPO；定理 11.19 的优势在于，它允许通过迭代交错插入构造任意层级的最终索菲克移位： n（由此回答了本节开头提出的两个问题）：

推论 11.22. 假设 Y 是一个 *sofic* 移位，且 $n \in \mathbb{N}_0$。如果 S_i 是$\mathbb{N}_0$的超线性子集，对 $1 \leq i \leq n$，那么

$$X = (\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1})(Y)$$

是层级为 n 的最终索菲克。特别地，移位空间 X 具有 *TPO*。

证明。 由定理 11.19 (或等价地，由推论 11.20)， $\partial_M \circ \mathfrak{I}_{S_i}$ 对每个 $1 \leq i \leq n$，都是$\mathfrak{S}$上的恒等映射$\mathfrak{S}$。因此 $\partial_M^n X = \partial_M^n \circ (\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1})(Y) = Y$是索菲克且非空的，因此 X 是层级为 n的最终索菲克。特别地， X 是最终索菲克，所以定理9.20推出它具有 TPO。 □

推论 11.23. 假设 Y 是一个 *sofic* 移位， S 是 $\mathbb{N}_0$的超线性子集，且 $n \in \mathbb{N}_0$。那么，迭代交错插入 $X = \mathfrak{I}_S^n(Y)$ 是层级为 n 的最终索菲克。特别地，移位空间 X 具有 *TPO*。

证明。 由推论 11.22立即可得，只需取 $S_i = S$ 对所有 $1 \leq i \leq n$。 □

注记 11.24。 第 1 节中的例子涉及构造层级为 n 、其迭代马尔可夫边界为偶移位的最终索菲克移位；这对应于在推论 11.23 中，取 Y为偶移位，并令 $S = \{2^i : \ i \in \mathbb{N}_0\}$。

现在我们将注意力从最终索菲克移位转向第 10 节中的脆弱移位空间和标本移位空间。在这种情况下，无约束交错插入 $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathbb{N}_0}$（对应于非超线性情形 $S = \mathbb{N}_0$）将是关键，因为它保证了规范性 条件：

引理 11.25。 设 Z 是任意一个移位空间，并令 $X = \mathfrak{I}(Z)$ 为相应的无约束交错插入。则 X 具有规范性，因此也具有变量规范。

证明。 令 $\flat$ 表示 X的魔法符号。取 $N = 1$，注意到若 u， $w \in \mathbb{W}(X)$，则 $u\flat w \in \mathbb{W}(X)$，因此词 $v := \flat \in \mathbb{W}_1(X)$ 满足定义10.7的条件。 □

推论 11.26。 设 Z 是一个动力学极小、非唯一遍历的移位空间，并令 $X = \mathfrak{I}(Z)$ 为相应的无约束交错插入。那么 X 是一个样本移位空间。特别地， X 是脆弱的，并且具有 *TPO*。

证明。 由引理11.25， X 具有变量规范。由推论 11.12，的马尔可夫边界等于 Z。因此，关于 Z 的假设意味着 $\partial_M X$ 是动力学极小且非唯一遍历的，所以 X 是标本（参见定义 10.12）。然而，根据定理10.13，标本移位是脆弱的，并且具有 TPO，故结论成立。 □

根据推论 11.26，通过明确选取 $X = \mathfrak{I}(Z)$，可以给出更具体的样本移位空间示例。 Z Oxtoby [63] 最先构造了动力学极小、非唯一遍历的移位空间示例。更一般地，Toeplitz 移位这一类（由 Jacobs 与 Keane 引入 [37]）被证明可提供许多动力学极小、非唯一遍历的移位空间示例（例如参见 [27, 55, 80]）。第 1 节中提到的、定义在字母表 $\{0, 1\}$ 上的具体脆弱移位空间类，就属于

这一类。特别是，我们现在能够证明以下与第 1.6 节中的定理1相对应的结论：

定理 11.27. 存在具有 *TPO* 的移位空间，但其马尔可夫边界不具有 *TPO*。

证明。 任意样本移位空间 X 均具有 TPO，由定理 10.13可知；其马尔可夫边界是动力学极小的，但不是唯一遍历的，因此尤其不包含任何周期轨道，故 $\partial_M X$ 不具有 TPO。根据推论11.26，样本移位空间这一类是非空的。 □

具体的标本移位可用于构造同样具体的最终为样本型移位的例子。推论 11.26的一个推广，以及定理 10.14的一个特例如下：

推论 11.28. 设 Z 是一个动力学极小但非唯一遍历的移位空间。设对于每个 $i \in \mathbb{N}$， S_i 都是 $\mathbb{N}_0$ 的一个超线性子集。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$X_n = (\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1} \circ \mathfrak{I})(Z)$$

是一个最终标本移位空间，并且最终脆弱，且具有 *TPO*。此外，族 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 由两两不同的移位空间组成。

证明。 根据推论 11.26， $\mathfrak{I}(Z)$ 是样本。每个 $X_n = (\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1} \circ \mathfrak{I})(Z)$ 因此都是最终为样本型，因为 $\partial_M^n(\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1} \circ \mathfrak{I})(Z) = \mathfrak{I}(Z)$ 根据推论 11.20。因此，根据定理 X_n ，每个都最终脆弱且具有 TPO10.14。

要证明移位空间 X_n 两两不同，只需注意，如果 $m < n$ ，那么在属于 $X_n = (\mathfrak{I}_{S_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1} \circ \mathfrak{I})(Z)$ 的某些序列中会出现一个（特殊）符号，而该符号不会出现在属于 $X_m = (\mathfrak{I}_{S_m} \circ \cdots \circ \mathfrak{I}_{S_1} \circ \mathfrak{I})(Z)$ 的任何序列中。 □

12. Shift spaces without typical periodic optimization

一个移位空间 X 若没有任何周期轨道，显然就不具有 TPO。更一般地，如果 X 有周期轨道，但 $\mathcal{P}er(X, \sigma)$ 在 * 中并不弱稠密 $\mathcal{E}rg(X, \sigma)$，那么引理 6.7表明 X 不具有 TPO。例如，如果 $X \subseteq \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ 定义为以下形式的序列集合的移位轨道闭包

$$01^{|w^{(1)}|+1} w^{(1)} 01^{|w^{(2)}|+1} w^{(2)} 01^{|w^{(3)}|+1} w^{(3)} \dots$$

其中每个 $w^{(i)} \in \mathbb{W}(Z)$ 都对应某个动力学极小且唯一遍历的非周期子移位 $Z \subseteq \{2, 3\}^{\mathbb{N}}$，那么 X 有同步词 0，而支撑在 $Z \subseteq X$ 上的唯一遍历测度无法用周期轨道测度逼近，因为柱集 $[1]$ 在前一种测度下的测度为零，而在后一种测度下的测度为 $1/2$；因此，这 X 不具有 TPO。

在本节中，我们将证明，即使周期测度在遍历测度集合中稠密，甚至即使它们在所有不变测度的集合中稠密，典型周期优化也未必成立（见下文定理 12.4 ，并参见第 1.2 节中的定理 1）。为简化表述，我们将通过构造一个特定的移位空间 X来说明这一点，我们称之为 魔术莫尔斯移位；该移位空间是在众所周知的莫尔斯移位中加入含有一个额外（同步）符号的某些序列而构成的。

设 θ 表示定义在字母表 $\{0,1\}$ 上的 莫尔斯代换（例如见 [66, 第 7]页），其定义为$\theta(0) = 01$, $\theta(1) = 10$，并通过以下设定以通常方式将其扩展为 $\{0,1\}^*$ 的态射：$\theta(a_1 \dots a_k) = \theta(a_1) \dots \theta(a_k)$。该 莫尔斯序列

$$\omega = 0110100110010110\dots$$

是以符号 0 开头的 θ 的不动点（例如，参见 [66]，了解莫尔斯序列的性质；该序列发表于莫尔斯 [62],，此前曾由普鲁厄 [65]和图厄 [72]研究）。对于 $n \geq 0$，若长度为 2^n 的词 θ_n 定义为

$$\theta_n = \theta^n(0),$$

按照 $\theta^0(0) = 0$ 的约定，则每个 θ_n 都是 ω 的前缀。莫尔斯移位 定义为移位轨道闭包 $Z = \{\sigma^n(\omega) : n \geq 0\}$，众所周知，它是动力学极小且唯一遍历的。令 λ 表示莫尔斯测度，即支撑在 Z 上的唯一 σ-不变测度。

引入一个新符号 $\flat \notin \{0,1\}$，将魔术莫尔斯移位 X 定义为集合中所有形如以下形式的点在 $\{0,1,\flat\}^{\mathbb{N}}$ 中的闭包（该空间通常配备度量 $d = d_\alpha$，其中某个 $\alpha \in (0,1)$）

$$\sigma^n(\theta_{n_1} \flat\, \theta_{n_2} \flat \cdots),$$

其中 $n \geq 0$且 $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ 是一个自然数序列。换言之， X 是$\mathbb{V}$-交错，对应于 Z （参见定义 11.1），其中 $\mathbb{V} = \{\theta_n : n \geq 0\} \subseteq \mathbb{W}(Z)$，魔法符号为 $\flat$。特别地， $\flat$ 是同步词，对应于 X，由引理 11.2(a)，并且 $Z = \partial_M X \subseteq X$ 由推论 11.7，因为 Z 是动力学极小但非周期的，且 $\mathbb{V}$ 是Z-描述的。

对于 $n \in \mathbb{N}, x \in X$，定义经验测度 $E_n(x)$为

$$E_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\sigma^i(x)},$$

注意，这是一个概率测度，但仅当 $\sigma^n(x) = x$时才是 σ-不变的。

在以下分析中，一个便利的工具将是Wasserstein距离（例如参见 [74,75]），作用于博雷尔概率测度的集合：

定义 12.1。 对于紧致度量空间 (Y, d)，其上的*Wasserstein*距离 W on$\mathcal{M}(Y)$定义为

$$W(\mu,\nu) = \max\left\{ \int \phi\, d\mu - \int \phi\, d\nu : \phi \in \mathrm{Lip}(Y), |\phi|_{\mathrm{Lip}(Y)} \leq 1 \right\}. \tag{12.1}$$

Wasserstein距离与弱* 拓扑相一致，并且以下简单性质对我们很有用：

引理 12.2。 若(Y,d) 是紧致度量空间，则 *Wasserstein*距离 W 满足

(a) 若 $\mu,\nu \in \mathcal{M}(Y)$，则 $W(\mu,\nu) \leq$直径(Y)。(b) 若 $x,y \in Y$，则 $W(\delta_x,\delta_y) = d(x,y)$。(c) 若 $n \in \mathbb{N}$，且 $a_i \geq 0$ 对于 $1 \leq i \leq n$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$，且 $\mu_i,\nu_i \in \mathcal{M}(Y)$ 对于$1 \leq i \leq n$，则

$$W\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^n a_i\nu_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i W(\mu_i,\nu_i).$$

证明。 这些结论可由 (12.1) 轻易推出。 □

回顾一下， X 配备了度量 $d = d_\alpha$ ， 其中 $\alpha \in$ （0，1），一个关键估计将涉及莫尔斯测度 λ 与某些经验测度之间的 Wasserstein距离：

引理12.3。 若 λ 是莫尔斯测度，且 $x = \theta_n \flat x'$ 对于某个 $n \in \mathbb{N}$、 $x' \in X$成立，则

$$W(E_{2^n}(x), \lambda) \leq \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{2^n}, \tag{12.2}$$

and

$$W(E_{2^n+1}(x), \lambda) \leq \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{2^n+1}. \tag{12.3}$$

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$， λ 是弱* 极限 $\lim_{M\to\infty} E_{2^n M}(\omega)$，我们可以写成

$$E_{2^n M}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} E_{2^n}\left(\sigma^{m2^n}(\omega)\right), \tag{12.4}$$

因此，只要能够证明

$$W\left(E_{2^n}(x), E_{2^n}\left(\sigma^{m2^n}(\omega)\right)\right) \leq \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{2^n} \tag{12.5}$$

对于 $0 \leq m \leq M-1$，则（12.4）、（12.5）和引理12.2 给出

$$W\left(E_{2^n}(x), E_{2^n M}(\omega)\right) \leq \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} W\left(E_{2^n}(x), E_{2^n}\left(\sigma^{m2^n}(\omega)\right)\right) \leq \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right) \frac{1}{2^n},$$

fo所有 $M \in \mathbb{N}$，因此（12.2）由以下事实可得： $\lambda =$ 极限$_{M\to\infty} E_{2^n M}$（ω ）.

为证明（12.5），将 $E_{2^n}(x)$的支撑中的每个 2^n 点与 $E_{2^n}(\sigma^{m2^n}(\omega))$的支撑中的一个邻近点配对，根据引理 12.2(b)，这些点之间的距离等于相应狄拉克测度之间的Wasserstein距离。具体地，设 $\omega = \omega_1\omega_2\ldots$，使得对所有$n \in \mathbb{N}$， $\omega = \theta^n(\omega) = \theta^n(\omega_1)\theta^n(\omega_2)\cdots$，我们看到，对于所有 $m \geq 0$， $\sigma^{m2^n}(\omega)$的长度为2^n 的前缀或者是 $\theta^n(0)$，或者是 $\theta^n(1)$。

在 $\theta^n(0) = \theta_n$ 是 $\sigma^{m2^n}(\omega)$的长度为2^n 的前缀的情况下，由于 θ_n 也是 $x = \theta_n \flat x'$ 的长度为2^n 的前缀，因此

$$d(\sigma^i(x), \sigma^i(\sigma^{m2^n}(\omega))) \leq \alpha^{2^n - i} \quad \text{for } 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

因此

$$W\left(E_{2^n}(x), E_{2^n}\left(\sigma^{m2^n}(\omega)\right)\right) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} d(\sigma^i(x), \sigma^i(\sigma^{m2^n}(\omega))) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha^{2^n-i} < \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2^n},$$

这尤其意味着（12.5）。

在 $\theta^n(1)$ 是 $\sigma^{m2^n}(\omega)$ 的长度为 2^n 的前缀的情况下，由于 $\theta^n(1) = \theta^{n-1}(1)\theta^{n-1}(0)$ 且 $\theta_n = \theta^{n-1}(0)\theta^{n-1}(1)$，我们看到 $\sigma^{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega))$ 与 x 共享相同的长度为 2^{n-1} 的前缀 $\theta^{n-1}(0) = \theta_{n-1}$，而 $\sigma^{m2^n}(\omega)$ 与 $\sigma^{2^{n-1}}(x)$ 共享相同的长度为 2^{n-1} 的前缀 $\theta^{n-1}(1)$。因此，

$$d\left(\sigma^i(x), \sigma^i(\sigma^{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega)))\right) \leq \alpha^{2^{n-1}-i} \quad \text{for } 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1, \tag{12.6}$$

and

$$d\left(\sigma^i(\sigma^{2^{n-1}}(x)),\sigma^i(\sigma^{m2^n}(\omega))\right)\le\alpha^{2^{n-1}-i}\quad\text{for } 0\le i\le 2^{n-1}-1, \tag{12.7}$$

因此，界（12.6）、（12.7），结合与上述论证类似的论证，可得

$$W\left(E_{2^{n-1}}(x),E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega)))\right)<\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2^{n-1}} \tag{12.8}$$

and

$$W\left(E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(x)),E_{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega))\right)<\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{12.9}$$

Now

$$E_{2^n}(x)=\frac{1}{2}E_{2^{n-1}}(x)+\frac{1}{2}E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(x))$$

and

$$E_{2^n}(\sigma^{m2^n}(\omega))=\frac{1}{2}E_{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega))+\frac{1}{2}E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega))),$$

so

$$\begin{aligned}&W\left(E_{2^n}(x),E_{2^n}\left(\sigma^{m2^n}(\omega)\right)\right)\\&\le\frac{1}{2}W\left(E_{2^{n-1}}(x),E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega)))\right)+\frac{1}{2}W\left(E_{2^{n-1}}(\sigma^{2^{n-1}}(x)),E_{2^{n-1}}(\sigma^{m2^n}(\omega))\right),\end{aligned}$$

因此（12.8）、（12.9）得出所需的不等式（12.5）。

注意到 $E_{2^n+1}(x)=\frac{2^n}{2^n+1}E_{2^n}(x)+\frac{1}{2^n+1}E_1(\flat x')$，由引理 12.2(c) 可得

$$W(E_{2^n+1}(x),\lambda)\le\frac{2^n}{2^n+1}W(E_{2^n}(x),\lambda)+\frac{1}{2^n+1}W(E_1(\flat x'),\lambda),$$

并结合（12.2）以及界 $W(E_1(\flat x')\ \lambda)\le 1$ (见引理 12.2(a)) 得到（12.3）。□

定理 12.4。魔术莫尔斯移位 X 不具有 *TPO* 性质，尽管其周期测度在所有不变测度的集合中弱* 稠密。

证明。为说明 TPO 性质不成立，令 ρ 为X上的任意周期测度。存在一个 ρ的周期词 u，其形式为 $u=\theta_{n_1}\flat\theta_{n_2}\flat\ldots\theta_{n_k}\flat$，其中 $k\in\mathbb{N}$和 n_1、……、 $n_k\in\mathbb{N}$。由于符号 $\flat$没有出现在词 θ_{n_1}、……、 θ_{n_k}中，因此$\rho([\flat])=k/|u|$。记 $z^{(1)}=\flat u^\infty$，并令 $z^{(j+1)}=\sigma^{2^{n_j}+1}(z^{(j)})$ 表示 $1\le j\le k-1$，则 supp(ρ) 中的点$z^{(1)}$、……、 $z^{(k)}$都以符号 $\flat$开头，因此它们与莫尔斯移位$Z\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$的距离为 1，于是

$$\int d(\cdot,Z)\,d\rho\ge\frac{k}{|u|}=\rho([\flat]). \tag{12.10}$$

令 $1\le j\le k-1$ 表示 $y^{(1)}=u^\infty$，并令 $y^{(j+1)}=\sigma^{2^{n_j}+1}(y^{(j)})$ 表示

$$\rho=\frac{1}{|u|}\sum_{j=1}^{k}(2^{n_j}+1)E_{2^{n_j}+1}(y^{(j)}).$$

现在 $W(E_{2^{n_j}+1}(y^{(j)})\ \lambda)\le\underbrace{\binom{1+\alpha}{1-\alpha}}\ \underbrace{\frac{1}{2^{n_j}+1}}$根据 (12.3)，因此引理12.2(c) 得出

$$W(\rho,\lambda)\le\frac{1}{|u|}\sum_{j=1}^{k}(2^{n_j}+1)W(E_{m_j}(y^{(j)}),\lambda)\le\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{k}{|u|}, \tag{12.11}$$

而 (12.10)、(12.11) 合起来得出

$$W(\rho,\lambda) \le \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \int d(\cdot, Z)\, d\rho. \tag{12.12}$$

现在定义 $f := -d(\cdot, Z)$。显然，$f \in \mathrm{Lip}(X)$，其中 $\beta(f) = 0$，且 λ 是唯一的f-最大化测度。不等式（12.12）意味着

$$\int \varphi\, d\rho - \int \varphi\, d\lambda \le |\varphi|_{\mathrm{Lip}(X)} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\beta(f) - \int f\, d\rho\right) \tag{12.13}$$

对所有 $\varphi \in \mathrm{Lip}(X)$ 都成立。若进一步有$|\varphi|_{\mathrm{Lip}(X)} < \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$，则（12.13）结合以下事实$\beta(f) - \int f\, d\rho = \int d(\cdot, Z)\, d\rho > 0$，可得

$$\int \varphi\, d\rho - \int \varphi\, d\lambda < \beta(f) - \int f\, d\rho\,, \tag{12.14}$$

并且 $\beta(f) = \int f\, d\lambda$，因此（12.14）变为

$$\int (f+\varphi)\, d\rho < \int (f+\varphi)\, d\lambda\,, \tag{12.15}$$

这意味着 ρ 不是 $(f+\varphi)$-最大化的。定义

$$B = \left\{ g \in \mathrm{Lip}(X) : \|f-g\|_{\mathrm{Lip}(X)} < \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\},$$

由此可见，若 $g \in B$，则 ρ 不是 g-最大化的。但 ρ 是任意一个周期测度，因此开球 B 中的所有元素都没有周期最大化测度，所以 X 不具有 TPO 性质。

证明定义在 X 上的周期测度在 $\mathcal{M}(X, \sigma)$中稠密的一种方法是注意到，Gelfert与 Kwietniak [32] 的可闭性和可连接性均得到满足，不过我们在此给出一个自包含的证明。

我们首先声称，周期测度在遍历测度集合中稠密。为此请注意，一方面，莫尔斯测度 λ可由集中在周期词为$\theta_n\flat$的周期-(2^n+1)轨道上的周期测度序列* 弱逼近。对于任何其他遍历测度 μ，存在某个$x = \theta_{n_1}\flat\,\theta_{n_2}\flat\ldots \in X$，使其在如下意义下是典型的：$\mu = \lim_{n\to\infty} E_n(x)$；而周期词为$\theta_{n_1}\flat\,\theta_{n_2}\flat\ldots\theta_{n_k}\flat$的周期测度序列 ρ_k 很容易验证满足$\lim_{k\to\infty}\rho_k = \mu$。

如果 $\mu \in \mathcal{M}(X, \sigma)$ 不是遍历的，那么它可以被弱* 逼近为若干个（不一定互不相同的）遍历测度 μ_i的等权重心$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mu_i$，而这些遍历测度又都可以（根据上述论证）被周期测度 ρ_i逼近。若 p 是与 ρ_i对应的轨道的（最小）周期的公倍数，那么这些测度都有长度相同的周期词 w_i p，其中每个 w_i 都以符号 $\flat$开头，而自连接 w_i^n对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 也是 ρ_i的周期词。将这些后续词连接起来，得到词 $w^{(n)} := w_i^n \ldots w_k^n$（长度为 knp），它是某个定义在 X上的周期测度 $\rho^{(k)}$ 的周期词。这些 $\rho^{(k)}$ 收敛到 $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_i$，因此按要求逼近$\mu$。□

References

[1] C. D. Aliprantis 与 K. C. Border，*Infinite-dimensional analysis. A hitchhiker's guide*，第二版，施普林格出版社，柏林，1999年。

[2] A. Bertrand，规范性、同步、平均长度，载于：*‘Coding theory and applications (Cachan, 1986)’* 86 95, 311, 1988 ，第 – 页，

计算机科学讲义，施普林格，柏林，。[3] F. Blanchard 与 G. Hansel，Syst`emes cod´es，
Theoret. Comput. Sci. **44** （1986），17-49。[4] J. Bochi，伯克霍夫平均与李雅普诺夫指数的遍历优化，*Proceedings of the International Congress of Mathematicians Rio de Janeiro 2018. Vol. III. Invited lectures* 1825 ，，–

1846，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，2018年。[5] J. Bochi，李雅普诺夫指数优化，
Presentation slides for ICM 2018，可获取于 https: //personal.science.psu.edu/jzd5895/docs/optimization_LE_talk_ICM.pdf[6]J. Bochi，周期最大化的泛性：遵循 Huang、Lian、Ma、Xu 与 Zhang 对 Contreras 定理的证明，2019年，可获取于：https://personal.science.psu.edu/jzd5895/docs/ Contreras_dapres_HLMXZ.pdf [7] J. Bochi 与 Y. Zhang，关于遍历优化中周期测度稳健性的注记，2015年，可获取于：https://personal.science.psu.edu/jzd5895/docs/lock.pdf [8] J. Bochi 与 Y. Zhang，普遍超连续函数的遍历优化，*Int. Math. Res.*，（），–

Not. **19** 2016 5988 6017
。[9] T. Bousch，鱼没有刺，*Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*，36 （2000），489–508。[10] T. Bousch，Walters 条件，*Ann. Sci. École Norm. Sup.*，34（2001），287–311。[11] T. Bousch，Yuan 与 Hunt 的 th´eor`eme 的新证明，*Bull. Soc. Math. France*，136（2008），227–242。[12] T. Bousch，可求长双动力 syst`emes 的 Ma˜n´e-Conze-Guivarc’h 引理，*Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*，20（2011），1–14。[13] T. Bousch 与 O. Jenkinson，动力非负

C^k *Invent.* 函数的上

Math. **148** 2002 207 217
同调类，，（），–。[14] T. Bousch 与 J. Mairesse，拓扑型迭代函数系统、俄罗斯方块堆与有限性猜想的渐近高度优化，*J. Amer. Math. Soc.*，15（2002年），77–111。[15] R. Bowen，Axiom A 微分同胚的周期点与测度，*Trans. Amer. Math. Soc.*，154 1971 377 397（），–。[16] X. Bressaud 与 A. Quas，极小化测度的逼近速率，*Nonlinearity*，20（2007），845–853。[17] H. Bruin，
Topological and ergodic theory of symbolic dynamics，研究生数学丛书，228，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2022年。[18] V. Climenhaga，移位空间中的规范性与塔，*Comm. Math. Phys.*，364（2018年），441–504。[19] V. Climenhaga 与 D. J. Thompson，规范性之外的内在遍历性：β-移位、S-间隙移位及其因子，
Israel J. Math.，192（2012年），785–817。[20] V. Climenhaga、D. J. Thompson 与 K. Yamamoto，非一致结构系统的大偏差，*Trans. Amer. Math. Soc.*，369（2017），4167–4192。[21] G. Contreras，基态在一般情形下是一条周期轨道，*Invent. Math.*，205（2016），383–412。[22] G. Contreras，曲面上 C^2 Ma˜n´e 猜想的证明，预印本，（arXiv:2408.01009v1），2024。[23] G. Contreras、A. Lopes 与 Ph. Thieullen，圆周扩张映射的李雅普诺夫极小化测度，*Ergodic Theory Dynam. Systems*，21（2001），1379–1409。[24] J. P. Conze 与 Y. Guivarc’h，遍历和的增长与变分原理，未发表手稿，约1995年。[25] T. Dillon，S-图移位的动力学与熵，*Discrete Contin. Dyn. Syst.*，42（2022年），5637– 5663。[26] J. Ding、Z. Li 与 Y. Zhang，论极大化测度周期性的普遍性，*Adv. Math.*，438 2024 109485（），。[27] T. Downarowicz，极小流不变测度的肖凯单纯形，*Israel J. Math.*，74（1991），241–256。[28] H. Furstenberg，

Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory M. B. Porter Lectures ，，普林 1981
斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，。[29] R. Gao、W. Shen 与 R. Zhang，圆周扩张映射上周期优化的典型性，预印本，（arXiv:2501.10949v1），2025年。[30] E. Garibaldi，
Ergodic optimization in the expanding case. Concepts, tools and applications，施普林格数学简报，施普林格，沙姆，2017。[31] E. Garibaldi、A. O. Lopes 与 Ph. Thieullen，论校准次作用与分离子作用，

Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **40** 2009 577 602
。

[32] K. Gelfert & D. Kwietniak，遍历测度与典型点的稠密性，
Dynam. Systems **38** 2018 1745 1767 *Ergodic Theory* , ( ), –
. [33] E. Glasner， *Ergodic theory via joinings*，数学综述与专著第 101 卷，美国数学会，2003 年。[34] W. Huang, Z. Lian, X. Ma, L. Xu & Y. Zhang，关于一类典型映射的遍历优化理论， *J. Eur. Math. Soc.*，
doi: 10 4171 1652 . /JEMS/ B. R. Hunt & E. Ott，混沌系统的最优周期轨道， [35] *Phys. Rev. Lett.*, 76 (1996), 2254–2257。[36] B. R. Hunt & E. Ott，最优周期轨道出现在低周期， *Phys. Rev. E*, 54 1996 328 337 ( ), – . [37] K. Jacobs & M. Keane，托普利茨型 0-1 序列。
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 13 (1969), 123– 131。[38] O. Jenkinson，重心集边界上的频率锁定，
Exp. Math., 9 (2000), 309– 317。[39] O. Jenkinson，遍历优化， *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 15 (2006), 197–224。[40] O. Jenkinson，每个遍历测度都是唯一极大化测度， *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 16 (2006), 383–392。[41] O. Jenkinson，动力系统中的遍历优化， *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 39 (2019), 2593–2618。[42] O. Jenkinson & M. Pollicott，联合谱半径、斯图谟测度与有限性猜想，
Ergodic Theory Dynam. Systems, 38 (2018), 3062–3100。[43] U. Jung，关于开码与双向延续码的存在性，
Trans. Amer. Math. Soc., 363 (2011), 1399–1417。[44] A. Katok & B. Hasselblatt，
Introduction to the modern theory of dynamical systems，剑桥大学出版社，1995年。[45] B. P. Kitchens， *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*，Universitext丛书，施普林格出版社，柏林，1998 [46] 、 D. Kwietniak, M. Lacka & P. Oprocha，类规范性质及其推论概览，载于《动力学与数》，第155–186页， *Contemp. Math.*，第669卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016 [47] J. C. Lagarias & Y. Wang，矩阵集合的广义谱半径有限性猜想， *Linear Algebra Appl.*, 214 (1995), 17–42。[48] Z. Li & Y. Zhang，扩张 Thurston 映射的基态与周期轨道， *Math. Ann.*, 391 (2025), 3913–3985。[49] D. Lind & B. Marcus，
An introduction to symbolic dynamics and coding，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[50] A. O. Lopes & Ph. Thieullen，Anosov 微分同胚的次作用，
Geometric methods in dynamics. II. ´ 287 2003 135 146 ，
Asterisque 第 ( ) 号， – . [51] E. J. McShane，函数值域的扩张， *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40 (1934), 837–842。[52] M. Maesumi，矩阵联合谱半径的最优范数与计算，
Linear Algebra Appl. **428** 2008 2324 2338 , ( ), –
. [53] R. Ma˜n´e，拉格朗日动力系统的极小化测度， *Nonlinearity*, 5 (1992), 623–638。[54] R. Ma˜n´e，拉格朗日系统中极小化测度的典型性质与问题， *Nonlinearity* **9** 1996 273 310 , ( ), – N. G. Markley & M. E. Paul，不具唯一遍历性的近自守符号[55]极小集，*Israel J. Math.*, 34 (1979), 259–272。[56] I. D. Morris，遍历优化中从属原理的一个充分条件，
Bull. Lond. Math. Soc. **39** 2007 214 220 , ( ), –
. [57] I. D. Morris，典型 Hölder 函数的极大化测度熵为零， *Nonlinearity*, 21 (2008), 993–1000。[58] I. D. Morris，间歇圆映射的 Ma ~ ´ ne-Conze-Guivarc'h 引理。
Ergodic Theory Dynam. Systems **29** 2009 1 9 , ( ), – . [59] I. D. Morris，典型连续函数的遍历优化，
Discrete Contin. Dyn. Syst., 27 (2010), 383–388。

[60] I. D. Morris，矩阵序列的马瑟集及其在联合谱半径研究中的应用， *Proc. London Math. Soc.*, 107 (2013), 121–150。[61] I. D. Morris & N. Sidorov，关于与矩阵对族的联合谱半径相关的魔鬼阶梯, *J. Eur. Math. Soc.*, 15 (2013), 1747–1782。[62] M. Morse，负曲率曲面上的复现测地线, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22 (1921), 84–100。[63] J. C. Oxtoby，遍历集， *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 116–136。[64] W. Parry，符号动力系统与单位区间变换， *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122 1966 368 378 ( ), – . [65] M. E. Prouhet，关于数的幂之间若干关系的回忆录，, ( ), . [66] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, 《数学讲义》，第1794卷，施普林格出版社，柏林，2002年。[67] A. Quas & J. Siefken，移位空间上超连续函数的遍历优化， *Ergodic Theory Dynam. Systems* **32** 2012 2071 2082 , ( ), – .

[68] C. Ramirez & A. Somers，(S, w)- 间隙移位及其熵，预印本，(arXiv:2501.08438v1)，2025 年。[69] S. V. Savchenko，有限拓扑马尔可夫链的同调不等式（俄语）， *Funktsional. Anal. i Prilozhen* **33** 1999 3, 91 93 *Funct. Anal. Appl.* **33** 1999 3, 236 第 – 号；译文见 , ( ), 第 – 号238。[70] D. J. Thompson，非正规集、β *Trans.* -变换 *Amer. Math. Soc.* **364** 2012 5395 5414 与近似规范性质，, ( ), – . [71] K. Thomsen，关于同步系统的遍历理论， *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 26 (2006), 1235–1256。[72] A. Thue, *Norske Vid. Selsk. Skr.* 关于 *Mat. Nat. Kl. Christiania* **1** 1912 1 67 某些符号序列中相同部分的相对位置，, , ( ) – . [73] M. Urbański, M. Roy & S. Munday, , , , 第69.1卷， *De Gruyter Exp. Math.*，德格鲁伊特出版社，柏林，2022年。[74] C. Villani， *Topics in optimal transportation*，数学研究生丛书第58卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。[75] C. Villani， *Optimal transport. Old and new*，《数学科学基础丛书》第338卷，施普林格出版社，柏林，2009年。[76] P. Walters，关于某些距离扩张映射的不变测度与平衡态, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 236 (1978), 121–153。[77] P. Walters， *An introduction to ergodic theory*，数学研究生文本丛书第79卷，施普林格出版社，纽约，1982年。[78] N. Weaver， *Lipschitz algebras*，世界科学出版社，2018年。[79] B. Weiss，有限型子移位与 sofic 系统， *Monatsh. Math.*, 77 (1973), 462–474。[80] S. Williams，不具唯一遍历性的 Toeplitz 极小流， *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67 (1984), 95–107。[81] K. Yamamoto，关于规范性质的较弱形式及其应用, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** 2009 3807 3814 [82] G. Yuan & B. R. Hunt，双曲系统的最优轨道， *Nonlinearity*, 12 (1999), 1207–1224。

（ W. Huang ）
School of Mathematical Sciences University of Science and Technology of , China Hefei Anhui 230026 P.R. China
, , ,*Email address*: wenh@mail.ustc.edu.cn （ O. Jenkinson ） School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London, MileEnd Road, London, E1 4NS, UK*Email address*: o.jenkinson@qmul.ac.uk（L. Xu） School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230026 , , P.R. China*Email address*: leoasa@mail.ustc.edu.cn

(Y. Zhang) School of Mathematical Sciences and Big Data Anhui University of Science , ,, and Technology Huainan Anhui 232001 P.R. China
,*Email address*: zhangyw@aust.edu.cn, yiweizhang831129@gmail.com