日志 B　具有非孤立局部完全交零点簇的 OTT 局部化

MAURÍCIO CORRÊA 和 ELAHEH SHAHSAVARIPOUR

摘要。我们为紧复流形 X 上带有简单正规交叉除子 D的 $T_X(-\log D)$ 全局全纯截面建立了对数 Bott 定位公式。零点概形允许包含非孤立的紧致分支，并假设这些分支是局部完全交，且满足自然的 Bott 非退化条件。我们还进一步发展了流理论表述，并在局部完全交情形下，将局部留数项识别为 Coleff–Herrera 流。

arXiv:2603.07225v1 [math.CV] 7 Mar 2026

1. 引言

在复几何中，将特征类局部化到向量场的奇异集处，是一个经典主题。在全纯情形下，Bott 留数公式表明，紧复流形的特征数可以由附着于全纯向量场零点集的局部数据恢复。关键在于，Bott 定理并不局限于孤立零点：它本身就允许存在高维零点分支，前提是这些分支光滑，并且在由法丛上的诱导作用所确定的一阶意义下非退化 [4]。Baum 和 Bott 后来将这一观点从向量场扩展到全纯叶状结构，从而确立了叶状结构情形下特征类的标准留数解释 [2]。

近年来，这一系列思想又发展出了若干拓展。在对数方向，文献 [11] 建立了曲线叶状结构的 Baum–Bott 公式，并通过对数解消得到其奇异簇版本。确定全纯向量场和叶状结构所对应的留数，是一个经典主题，至今仍是该领域最棘手的问题之一。近年来，这些问题取得了重大进展；在这一方向具有代表性的研究成果中，我们提及 [13, 10, 20]。关于向量场指标、叶状结构的留数理论与奇异簇几何之间相互关系的更全面讨论，请参阅 [26, 6, 12]。

本文旨在证明一个适用于零点集非孤立的全局对数向量场的对数 Bott 型局部化定理。我们在带有简单正规交叉除子 D 的紧复流形 X 上进行研究，并考虑一个对数向量场

$$v \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big).$$

我们假设 v 的零点概形是有限个互不相交部分的并

$$Z(v) = \bigsqcup_{j=1}^{m} Z_j$$

紧致、约化、纯维的局部完全交子空间。在每个分支上，Z_j 我们考虑由 v 在余法层上诱导的 Bott作用，并施加自然的非退化条件，即该作用可逆。在

在这些假设下，特征数

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big)$$

局部化于 $Z(v)$的各分支上。所得公式是在更奇异的几何情形下对 Bott非孤立留数定理的对数对应形式。其新意并不只是零点集可能包含正维分支。更重要的是，环境几何具有对数结构，相关丛为 $T_X(-\log D)$，且零点分支允许为局部完全交，因此未必先验光滑。由此，局部留数不仅由横截线性化描述，还由余法丛上的内禀 Bott作用以及沿每个分支光滑轨迹诱导的对数切丛分解共同描述。一个具体例子是 Fulton–MacPherson空间$(\mathbf{P}^2)[2]$，即 $\mathbf{P}^2$ [18]中两个有序不同点的模空间的紧化。在此情形下，边界除子是沿对角线对$\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ 胀开所得的例外除子，而 PGL_3 的一个自然单参数子群诱导出一个全局对数向量场，其零点轨迹在边界内外均包含正维分支。于是我们的定理给出如下显式恒等式

$$\int_{(\mathbf{P}^2)[2]} c_4\big(T_{(\mathbf{P}^2)[2]}(-\log D)\big) = 6,$$

通过在具有非孤立对数零点分支的真正模空间上进行局部化，恢复这一特征数；参见例 5.4。

此外，经过函子性对数解消后，对数局部化定理仍然适用 [11]。更确切地说，若 $\pi : (X, D) \to Y$ 是一个紧正规簇的对数解消，且变换后的对象由 X 上的一个全局对数向量场 $\tilde{v} \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big)$生成，那么在满足主定理的假设时，即 $\tilde{v}$ 的零点概形是有限个紧致、约化、Bott 非退化的局部完全交分支之并时，相应的对数留数便有定义，并可通过局部化计算全局特征数，参见例5.2。

非孤立情形并非只是技术上的推广。即使在具有许多全局向量场或分布的紧致复流形上，正维奇异集也会自然出现。例如，在 Hopf 流形上，当维数至少为三时，维数或余维为一的奇异全纯分布不可能只有孤立奇异点：其奇异集要么为空，要么含有正维分支。这可由 Baum–Bott 型论证推出，并已在 [9] 中得到证明。因此，自然要寻求这样的局部化公式：其局部项不仅支撑在孤立点上，也支撑在紧致的高维分支上。

主定理将 Bott 的非孤立定位原理从光滑非退化零流形推广到对数情形下的紧致约化局部完全交零点簇。同时，它补充了 [11]的对数Baum–Bott理论：该理论通过对数解消，针对叶状结构和奇异簇展开；而本文直接研究光滑对数对，并将全局对数向量场作为基本对象。

本文结构如下。第2节在每个零分支的余法丛上构造 Bott 作用，并表述相应的非退化条件。第3节回顾后文所需的流理论工具，并证明局部贡献的显式 Coleff–Herrera 实现。第4节研究管状

紧致局部完全交子空间的邻域。第5节包含转移论证以及主定理的证明。

设 X 是复维数为 n 的紧复流形， $D \subset X$ 是一个简单正规交叉除子，并考虑对数切丛 $T_X(-\log D)$。一个截面

$$\nu \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big)$$

按定义是一个对数导子。在局部简单正交叉坐标 $D = \{z_1 \cdots z_\ell = 0\}$ 中，它具有如下形式

$$\nu = \sum_{i=1}^{\ell} a_i(z)\, z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{j=\ell+1}^{n} a_j(z)\, \frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad a_i \in \mathscr{O}_X, \tag{1.1}$$

见下文命题 **??**。概形论零点轨迹 $Z(\nu) \subset X$ 由理想层定义

$$\mathscr{I}_{Z(\nu)} := \mathrm{Im}\Big(\Omega^1_X(\log D) \xrightarrow{i_\nu} \mathscr{O}_X\Big), \tag{1.2}$$

其中 i_ν 表示收缩。等价地，在任意局部平凡化 $T_X(-\log D)|_U \simeq \mathscr{O}_U^{\oplus n}$ 中，若 ν 表示为 $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$，则 $\mathscr{I}_{Z(\nu)}|_U = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$。特别地， $Z(\nu)$ 的底层集合为 $\{p \in X \mid \nu(p) = 0\}$。

现在，假设 $Z(\nu)$ 是由紧致、约化、纯维局部完全交解析子空间构成的有限不交并

$$Z(\nu) = \bigsqcup_{j=1}^{m} Z_j, \tag{1.3}$$

其中每个 Z_j 都具有纯复维数 r_j 和余维 $k_j = n - r_j$。记作 $\mathscr{I}_j := \mathscr{I}_{Z_j}$。

由于 Z_j 是约化的，且 ν 在 Z_j 上逐点为零，因此导子 ν 保持 $\mathscr{I}_j$，从而也保持 $\mathscr{I}_j^2$。因此， ν 诱导出余法层的一个 $\mathscr{O}_{Z_j}$-线性自同态

$$A^*_{Z_j} : \mathscr{I}_j/\mathscr{I}_j^2 \longrightarrow \mathscr{I}_j/\mathscr{I}_j^2, \qquad [f] \longmapsto [\nu(f)]. \tag{1.4}$$

由于 Z_j 是局部完全交， $\mathscr{I}_j/\mathscr{I}_j^2$ 局部自由且秩为 k_j，法丛为

$$N_{Z_j/X} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{Z_j}}(\mathscr{I}_j/\mathscr{I}_j^2, \mathscr{O}_{Z_j}). \tag{1.5}$$

对（1.4）取对偶，得到法向自同态

$$A_{Z_j} := (A^*_{Z_j})^\vee : N_{Z_j/X} \longrightarrow N_{Z_j/X}. \tag{1.6}$$

定义 1.1 （Bott 非退化条件）。若 ν 沿 Z_j 是*Bott* 非退化的，即 $A^*_{Z_j}$，等价地说， A_{Z_j} 在 Z_j 上逐点可逆，则称之为如此。

在 Z_j 的光滑点处， $A^*_{Z_j}$ 与 ν 在法坐标下的横截雅可比矩阵一致；参见命题 2.5。

对于局部化公式，需要在 Z_j 上取对数切丛关于由 Z_j 确定的法向方向的商。定义

$$\rho_j : T_X(-\log D)|_{Z_j} \longrightarrow N_{Z_j/X}|_{Z_j}, \qquad \xi \longmapsto \big([f] \mapsto [\xi(f)]\big). \tag{1.7}$$

由引理 2.7可知，这是一个定义良好的全纯丛态射。

定义 1.2. 我们称零分支 Z_j 是对数横截的 ， 如果映射ρ_j 在 Z_j上是满射的。

在此假设下，核

$$K_j := \ker(\rho_j) \subset T_X(-\log D)|_{Z_j} \tag{1.8}$$

是一个秩为 r_j 的全纯向量丛，并且有一个短正合列

$$0 \longrightarrow K_j \longrightarrow T_X(-\log D)|_{Z_j} \xrightarrow{\rho_j} N_{Z_j/X}|_{Z_j} \longrightarrow 0. \tag{1.9}$$

在经典情形下， $D = \varnothing$ 和 Z_j 光滑；更一般地，只要 Z_j 是 (X, D) 的对数光滑子流形，丛 K_j 就与正则轨迹的切丛相同。

取一个 $GL_n(\mathbb{C})$-不变多项式 Φ，定义在 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 上，次数为 n。我们记 e

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) \tag{1.10}$$

表示由不变多项式 Φ 和对数切丛 $T_X(-\log D)$ 确定的特征数。在 Z_j 上，为 K_j 和 $N_{Z_j/X}|_{Z_j}$ 选取厄米度量，其 Chern联络分别为 $\nabla_{K,j}$ 和 $\nabla_{N,j}$，曲率分别为 $\Omega_{K,j}$ 和 $\Omega_{N,j}$。若 ν 沿 Z_j Bott 非退化，则 A_{Z_j} 在 Z_j 上可逆，因此非齐次形式 $\det(A_{Z_j} + \Omega_{N,j})$ 的零次项可逆，进而在微分形式的分次代数中存在逆元；参见引理 2.8。

定义 1.3。 假设满足 Bott 非退化性，且沿 Z_j 满足满射性假设。定义

$$\mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi) := \Big(\Phi(A_{Z_j} + \Omega_{K,j}) \wedge \det(A_{Z_j} + \Omega_{N,j})^{-1}\Big)_{[2r_j]} \in \Omega^{2r_j}(Z_j^{\mathrm{reg}}). \tag{1.11}$$

这里， $(-)_{[2r_j]}$ 表示总次数为 $2r_j$ 的分支。

为在可能奇异的分支上积分，我们使用基本流。对于纯维数为 r 的紧约化解析子空间 $Z \subset X$，定义

$$\langle [Z], \eta \rangle := \int_Z \eta|_Z, \qquad \eta \in \Omega_c^{2r}(X). \tag{1.12}$$

引理 3.1 指出 $[Z]$ 是一个定义良好的闭流。

现在我们可以用最终的内蕴形式陈述局部化定理。

定理 1.4。 在上述既定设置下，假设对于 ν 的零点概形的每个不可约分支 Z_j，以下条件均成立：

(1) Z_j 是紧致、约化、纯维且局部完全交的；*(2)* ν 沿 Z_j 在定义1.1的意义下是*Bott* 非退化的；*(3)* 自然态射

$$\rho_j : T_X(-\log D)|_{Z_j} \to N_{Z_j/X}|_{Z_j}$$

是满射的。

则对每一个次数为 n的$GL_n(\mathbb{C})$-不变多项式 Φ,

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \sum_{j=1}^{m} \langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi) \rangle, \tag{1.13}$$

其中

$$\mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi) = \Big(\Phi(A_{Z_j} + \Omega_{K,j}) \wedge \det(A_{Z_j} + \Omega_{N,j})^{-1}\Big)_{[2r_j]} \in \Omega^{2r_j}(Z_j^{\mathrm{reg}}).$$

在约化局部完全交情形下，局部贡献

$$\langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle$$

具有显式的 Coleff–Herrera 实现。更确切地说，设 $(U_{j,\alpha})_\alpha$ 是 Z_j 的一个邻域的开覆盖，使得在每个 U_j上，理想层 $\mathcal{I}_{Z_j}$ 都由正则序列 $f_{j,\alpha} = (f_{j,\alpha,1}, \dots, f_{j,\alpha,k_j})$生成，并令

$$R_{j,\alpha} := \bar\partial(1/f_{j,\alpha,1}) \wedge \cdots \wedge \bar\partial(1/f_{j,\alpha,k_j}), \qquad \omega_{j,\alpha} := df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j}.$$

选取一个从属于 $(U_{j,\alpha})_\alpha$的单位分解 $(\chi_{j,\alpha})_\alpha$ ，并选取光滑形式

$$\eta_{j,\alpha} \in \mathscr{A}^{2r_j}(U_{j,\alpha})$$

使得

$$\eta_{j,\alpha}|_{Z_j^{\mathrm{reg}} \cap U_{j,\alpha}} = \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi).$$

Then

$$\langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^{k_j}} \sum_\alpha \langle R_{j,\alpha}, \chi_{j,\alpha}\, \eta_{j,\alpha} \wedge \omega_{j,\alpha}\rangle\,. \tag{1.14}$$

该表达式与所选的开覆盖、局部生成元、局部代表元 $\eta_{j,\alpha}$以及单位分解均无关。若 Z_j 光滑，则

$$\langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle = \int_{Z_j} \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi). \tag{1.15}$$

若 $D = \varnothing$ 且每个 Z_j 都光滑，则映射 ρ_j 是通常商映射 $T_X|_{Z_j} \to N_{Z_j/X}$，因此 $K_j \simeq TZ_j$ 且 (1.13 化为 Bott 的非孤立零点公式 [3, 4, 5,26]。若每个 Z_j 都是一个点，则 (1.13) 变为经典孤立零点留数$\Phi(A_p)/\det(A_p)$。

致谢。 我们非常感谢 Francesco Bastianelli 和 Fernando Lourenço 的多次富有洞见的交流。MC 是 INdAM–GNSAGA 的成员。

2. 对数预备知识与余法 Bott 作用

设 X 为复流形， $D \subset X$ 为简单正规交叉除子。若 $p \in X$，且 $(z_1, \dots, z_n)$ 是以 p 为中心的局部全纯坐标，使得

$$D = \{z_1 \cdots z_\ell = 0\} \tag{2.1}$$

在 p的一个邻域内，则层 $T_X(-\log D)$ 局部自由，其框架为 e

$$z_1\partial_{z_1}, \dots, z_\ell\partial_{z_\ell}, \partial_{z_{\ell+1}}, \dots, \partial_{z_n}. \tag{2.2}$$

因此，的每个局部截面$\log D)$ 都具有形式（1.1）。根据定义，$T_X(-\log D)$ 是 $\Omega^1_X(\log D)$的对偶，而在简单正交叉坐标中，后者由以下元素自由生成：

$$\frac{dz_1}{z_1}, \dots, \frac{dz_\ell}{z_\ell}, dz_{\ell+1}, \dots, dz_n, \tag{2.3}$$

参见 [25, §2] 或 [14, §6]。对偶框架正是（2.2）。

下一个引理是余法丛作用背后的基本代数输入。

引理 2.1. 设 $Z \subset X$ 为一个约化解析子空间，并设 $\nu \in H^0(X, T_X(-\text{对数}\, D))$ 满足：对所有 $p \in Z$，都有 $\nu(p) = 0$。于是

$$\nu(\mathscr{I}_Z) \subset \mathscr{I}_Z \qquad \textit{and} \qquad \nu(\mathscr{I}_Z^2) \subset \mathscr{I}_Z^2. \tag{2.4}$$

证明。 设 $f \in \mathscr{I}_Z$。由于 $f|_Z = 0$，对每个 $p \in Z$，都有

$$(\nu(f))(p) = df_p(\nu(p)) = 0. \tag{2.5}$$

由于 Z 是约化的，理想层 $\mathscr{I}_Z$ 恰好是由在 Z上消失的全纯函数构成的层；因此 $\nu(f) \in \mathscr{I}_Z$。根据莱布尼茨法则可得包含关系 $\nu(\mathscr{I}_Z^2) \subset \mathscr{I}_Z^2$。事实上，若 $g = \sum_\nu a_\nu b_\nu$ 且 $a_\nu, b_\nu \in \mathscr{I}_Z$，则

$$\nu(g) = \sum_\nu \big(\nu(a_\nu)b_\nu + a_\nu \nu(b_\nu)\big) \in \mathscr{I}_Z^2. \tag{2.6}$$

□

定义 2.2。 在引理 2.1的假设下，定义法丛 Bott 端同态

$$A_Z^* : \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2 \longrightarrow \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2, \qquad [f] \longmapsto [\nu(f)]. \tag{2.7}$$

引理 2.3。 映射 A_Z^* 定义良好且是 $\mathscr{O}_Z$-线性的。

证明。 引理 2.1 表明 $\nu(\mathscr{I}_Z) \subset \mathscr{I}_Z$ 且 $\nu(\mathscr{I}_Z^2) \subset \mathscr{I}_Z^2$，因此 (2.7) 在商空间上定义良好。令 $a \in \mathscr{O}_X$ 且 $f \in \mathscr{I}_Z$。则

$$\nu(af) = \nu(a)f + a\,\nu(f). \tag{2.8}$$

由于 $f \in \mathscr{I}_Z$，第一项属于 $\mathscr{I}_Z^2$，因此 $[\nu(af)] = a|_Z\,[\nu(f)]$属于 $\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2$。这正是 $\mathscr{O}_Z$-线性性。□

注 2.4（局部完全交情形下的法丛）。 如果 $Z \hookrightarrow X$ 是余维为 k的局部完全交，则$\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2$ 是秩为 k 的局部自由模，其对偶

$$N_{Z/X} := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2, \mathscr{O}_Z) \tag{2.9}$$

就是法丛；参见 [17, §3]。

命题 2.5。 假设 $Z \subset X$ 是局部完全交，并令 $p \in Z$。选取以 $p \in Z$为中心的全纯坐标

$$(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k) \tag{2.10}$$

使得在 p附近有 $Z^{\mathrm{reg}} = \{y_1 = \cdots = y_k = 0\}$。记

$$\nu = \sum_{a=1}^{r} u_a(x,y)\frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_{b=1}^{k} w_b(x,y)\frac{\partial}{\partial y_b}. \tag{2.11}$$

则 $\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2$在 p 处关于余法向基 $[y_1]$，$\dots, [y_k]$ 中的 A_Z^* 的矩阵为

$$\left(\frac{\partial w_b}{\partial y_c}(p)\right)_{1 \le b,c \le k}. \tag{2.12}$$

等价地，作用在 A_Z 上的$N_{Z/X}$ 的对偶自同态矩阵，p 是 (2.12)的转置。

证明。由于 ν沿着 Z消失，每个 w_b 都属于理想 $(y_1, \dots, y_k)$。模$\mathscr{I}_Z^2 = (y_1, \dots, y_k)^2$，可写为

$$w_b(x,y) \equiv \sum_{c=1}^{k} \frac{\partial w_b}{\partial y_c}(x,0)\, y_c \pmod{\mathscr{I}_Z^2}. \tag{2.13}$$

由于 $\nu(y_b) = w_b$，类 $A_Z^*([y_b]) = [\nu(y_b)]$ 由这个线性部分表示。在 p 处取值，得到矩阵（2.12）。对偶化给出了 A_Z 的结论。□

注 2.6（沿边界的对数特征向量）。 在一个 SNC 图式中 rt

$$D = \{z_1 \cdots z_\ell = 0\}, \qquad v = \sum_{i \le \ell} a_i(z)\, z_i \partial_{z_i} + \sum_{i > \ell} a_i(z)\, \partial_{z_i}, \tag{2.14}$$

对于 $i \le \ell$，有 $v(z_i) = a_i(z) z_i$。若 $z_i \in \mathscr{I}_Z$，则 $[z_i] \in \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2$ 是 A_Z^*的一个特征向量，其特征值为 $a_i|_Z$。因此， A_Z^* 记录了横向对数权重。

接下来，我们将证明定义 K_j 时所用的向量丛态射是合理的。

引理 2.7. 设 $Z \subset X$ 是局部完全交。在 Z 上，以下赋值

$$\rho : T_X(-\log D)|_Z \longrightarrow N_{Z/X}|_Z, \qquad \xi \longmapsto \big([f] \mapsto [\xi(f)]\big) \tag{2.15}$$

是一个定义良好的向量丛全纯态射。

证明。 固定 $p \in Z$。对于 $T_X(-\log D)$ 的局部截面 ξ 以及 $f \in \mathscr{I}_Z$，导数 $\xi(f)|_Z$仅取决于类 $[f] \in \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2$。事实上，若 $f' \equiv f$模 $\mathscr{I}_Z^2$，则 $f' - f \in \mathscr{I}_Z^2$，故由莱布尼茨法则可得 $\xi(f' - f) \in \mathscr{I}_Z$。因此， $[\xi(f')] = [\xi(f)]$属于 $\mathscr{O}_Z$。所得映射 $\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2 \to \mathscr{O}_Z$ 是 $\mathscr{O}_Z$-线性的：若 $a \in \mathscr{O}_X$，则

$$\xi(af) = \xi(a) f + a\, \xi(f), \tag{2.16}$$

且第一项在 Z 上消失。因此， $\rho(\xi)$ 是 $N_{Z/X} = \mathscr{H}om(\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Z^2, \mathscr{O}_Z)$ 的截面。由于在 $T_X(-\log D)$ 和 $N_{Z/X}$ 的局部标架下， ρ 的系数是 Z 的局部定义方程的全纯导数，故其全纯性成立。□

引理 2.8. 设 $F \to Y$ 是秩为 k 的复向量丛， $A \in H^0(Y, \mathrm{End}(F))$ 逐点可逆，且 $\Omega \in \Omega^2(Y, \mathrm{End}(F))$ 是任意一个取值于端同态的 2-形式。则

$$\det(A + \Omega) \in \bigoplus_{q=0}^{k} \Omega^{2q}(Y) \tag{2.17}$$

具有可逆的次数 0 项 $\det(A)$，因此在非齐次形式构成的分次代数中有唯一的逆元。

证明。分解

$$\det(A + \Omega) = \det(A)\, \det(\mathrm{Id} + A^{-1}\Omega). \tag{2.18}$$

形式 $A^{-1}\Omega$ 的次数严格为正，因此

$$\eta := \det(\mathrm{Id} + A^{-1}\Omega) - 1 \tag{2.19}$$

也具有严格正次数，并且在有限维分次代数中是幂零的

$$\bigoplus_{q=0}^{\dim Y} \Omega^{2q}(Y).$$

因此

$$(1+\eta)^{-1} = 1 - \eta + \eta^2 - \cdots + (-1)^N \eta^N \tag{2.20}$$

对于 $N \gg 0$。乘以 $\det(A)^{-1}$ 即得到所需的逆元。 □

我们还记录了在适配于处处不消失的对数向量场的流盒中，除子的局部乘积结构。

引理 2.9. 设 $v \in H^0(X, T_X(-\log D))$ 在开集 $U \subset X$ 上处处不消失。那么，每个 $p \in U$ 都有一个邻域 $W \subset U$，它与带有坐标 (w,t) 的 $V \times \Delta$ 双全纯，使得 $v = \partial/\partial t$ 且

$$D \cap W = (D_V \cap V) \times \Delta \tag{2.21}$$

对于解析超曲面 $D_V \subset V$。

证明。 根据全纯流盒定理，在 p 附近收缩后，存在坐标 (w,t) 在 $W \simeq V \times \Delta$ 上，使得 $v = \partial_t$；参见 [26, 第 I 章]。设 $g(w,t)$ 为 $D \cap W$的局部约化方程。由于 v 沿 D是对数的，我们有

$$\partial_t g = v(g) = h\, g \tag{2.22}$$

对某个全纯函数 h （在 W 上）。求解这一关于 t 的一阶线性方程，得到

$$g(w,t) = u(w,t)\, g_0(w), \tag{2.23}$$

其中 u 处处非零，且 $g_0(w) := g(w,0)$。因此 $D \cap W = \{g_0(w) = 0\} \times \Delta$。□

3. Fundamental currents and Coleff–Herrera currents

我们首先回顾约化解析循环的基本流。

引理 3.1。 设 $Z \subset X$ 是一个纯复维数为 r的紧约化解析子空间。那么，以下规则

$$\langle [Z], \eta \rangle := \int_Z \eta|_Z, \qquad \eta \in \Omega^{2r}_c(X), \tag{3.1}$$

定义了一个支撑于 Z上的次数为 $2r$ 的良定义闭流。此外，若 β 是 Z上的光滑顶次形式，则 β 在 Z^{sing} 附近局部可积，并且

$$\langle [Z], \beta \rangle = \int_Z \beta \tag{3.2}$$

定义良好。

证明。 沿约化纯维解析集的积分流是经典结果；参见 [21, 19]。由于 Z^{sing} 在 Z中的复余维至少为 1，它在顶维为 $2r$的实流形 $Z \cup Z^{\mathrm{sing}}$ 中的实余维至少为 2。因此， Z 上的任意光滑 $2r$形式相对于光滑环境体积形式局部有界，因而可在 Z^{sing}上局部可积；参见 [15, §III.3]。 $[Z]$ 的闭性也是同一标准结果的一部分。□

接下来我们回顾与一个局部完全交分量相关联的 Coleff–Herrera 流 t.

在本节中， $Z \subset X$ 是余维为 k 的紧致约化局部完全交解析子空间。设 $U \subset X$ 为 Stein，且设 $f = (f_1, \dots, f_k)$ 是 $\mathscr{O}_X(U)$ 中生成 $\mathscr{I}_{Z|U}$ 的正则序列。对于紧支撑测试形式 $\varphi \in \Omega^n$， $_c{}^{n-k}(U)$ 通过多管极限定义局部 Coleff–Herrera乘积

$$\left\langle \bar\partial\frac{1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \bar\partial\frac{1}{f_k},\ \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} \frac{\varphi}{f_1 \cdots f_k}, \qquad T_\varepsilon := \{|f_1| = \varepsilon_1, \dots, |f_k| = \varepsilon_k\}. \tag{3.3}$$

重叠区域上的行列式变换律以及由此得到的粘合都是经典结果；参见 [8, 23] and [15,§III]。

命题 3.2. [8, 23, 15]。存在一个规范定义的全局流

$$R_Z \in \mathscr{D}'_Z\big(X, \det(N_{Z/X})^\vee\big) \tag{3.4}$$

使得局部地，当 $\mathscr{I}_Z$ 由正则序列 $f = (f_1, \dots, f_k)$生成时，有

$$R_Z|_U = \bar\partial\Big(\frac{1}{f_1}\Big) \wedge \cdots \wedge \bar\partial\Big(\frac{1}{f_k}\Big) \tag{3.5}$$

在 $\det(N_{Z/X})^\vee$ 的诱导平凡化中。

定理 3.3 (Coleff–Herrera–Poincaré–Lelong). [8, 23] [15, §III] 设 $Z \subset X$ 为约化的、余维为 k 的局部完全交。则标量流 $R_Z \wedge df$ 整体良定义，且在 Z 附近等于$(2\pi i)^k[Z]$ 。等价地，对 Z 附近每一个紧支顶次形式 η，

$$\langle [Z], \eta \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^k} \big\langle R_Z, \eta \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \big\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^k} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} \eta \wedge \frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_k}{f_k}. \tag{3.6}$$

4. 紧致局部完全交分支周围的管状邻域

为了整体局部化证明，我们需要收缩到一个紧致局部完全交分支的管状邻域。下述陈述对该论证是充分的，并避免任何不必要的定量估计。

命题 4.1。设 X 是一个复维数为 n 的复流形，且 $Z \subset X$ 是一个纯维数为 r、余维为 $k = n - r \geq 1$的紧致约化局部完全交解析子空间。那么存在：

(1) Z 的一个开邻域 W 和一个光滑函数 $\varphi : W \to [0, \infty)$，使得 $\varphi^{-1}(0) = Z$；

(2) 一个数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个正则值 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，集合

$$U_\varepsilon(Z) := \{x \in W \mid \varphi(x) < \varepsilon\} \tag{4.1}$$

是 Z 的一个具有光滑边界 $\partial U_\varepsilon(Z) = \varphi^{-1}(\varepsilon)$ 的邻域；

(3) 在 Z 上，在 $N_{Z/X}|_Z$ 上选取厄米度量后，$\partial U_\varepsilon(Z)$ 在 Z 上的限制与 $N_{Z/X}|_Z$ 的半径为 $\sqrt{\varepsilon}$ 的球丛典范微分同胚；

(4) 对于 X 上的每个光滑 $2n$-形式 β，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U_\varepsilon(Z)} \beta = 0. \tag{4.2}$$

因此，如果

$$M_\varepsilon := X \setminus \operatorname{int}(U_\varepsilon(Z)), \tag{4.3}$$

then

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M_\varepsilon} \beta = \int_X \beta$$

证明。由于 Z 是余维为 k的局部完全交，Z 的每一点都有一个邻域 U_α，使得 $\mathscr{I}_Z$ 由正则序列 $f_\alpha = (f_{\alpha,1}, \dots, f_{\alpha,k})$生成。对紧集 Z取有限覆盖后，选取一个从属于这些邻域的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$，并令

$$\varphi := \sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{j=1}^{k} |f_{\alpha,j}|^2. \tag{4.4}$$

于是 $\varphi \geq 0$ 且 $\varphi^{-1}(0) = Z$。根据萨德定理，光滑函数 φ 的临界值集合测度为零，因此每个充分小的正则值 ε 都会给出一个光滑

边界 $\partial U_\varepsilon(Z)$。由于次水平集收缩至 Z，它们构成 Z的邻域基。在 Z^{reg} 上，包含映射 $Z^{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$ 是一个实余维数为 $2k$ 的光滑嵌入子流形。光滑管状邻域定理将实法丛零截面的一个邻域与 X中 Z 的一个邻域对应起来。由于 Z是局部完全交， $N_{Z/X}|_Z$ 所对应的实法丛恰好就是这个光滑法丛；缩小邻域后， φ 的等值集就是小的法向球面。这就证明了第三个断言。最后，令 dV 是 X上的任意光滑正体积形式。正余维数的解析子集在 X中具有零 $2n$维测度；参见 [21, 15]。由于当 $\varepsilon \to 0$时， $U_\varepsilon(Z)$递减至 Z ，由 dV 确定的有限测度的上连续性可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{U_\varepsilon(Z)} dV = \int_Z dV = 0. \tag{4.5}$$

若 β 是任意光滑的 $2n$ 形式，则存在 $C > 0$ 使得 $|\beta| \le C\,dV$ 在紧致流形 X 上成立，因此

$$\left|\int_{U_\varepsilon(Z)} \beta\right| \le C\int_{U_\varepsilon(Z)} dV \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{4.6}$$

最后一个结论由下式得出

$$\int_{M_\varepsilon} \beta = \int_X \beta - \int_{U_\varepsilon(Z)} \beta. \tag{4.7}$$

□

5. 定理1的证明1.4

取 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 上的一个厄米度量，并令 ∇^h 为其 Chern联络，曲率为 Ω^h。由标准的 Chern–Weil定理，固定一个定义在 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 上的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-不变多项式 Φ ，其次数为 n。

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \int_X \Phi(\Omega^h). \tag{5.1}$$

因此，我们将使用微分形式 $\Phi(\Omega^h)$ 并在最后恢复(1.13)中的内禀记号。

设 $Z(\nu) = \bigsqcup_{j=1}^m Z_j$ 为由紧致约化局部完全交分支组成的既定分解。对每个 j，选取一个管状邻域 $U_{j,\ \varepsilon} := U_\varepsilon(Z_j)$ 如命题 4.1所述。对于 $\varepsilon > 0$充分小的情形，这些管状邻域两两不交。令

$$M_\varepsilon := X \setminus \operatorname{int}\Big(\bigsqcup_{j=1}^m U_{j,\varepsilon}\Big), \qquad \partial M_\varepsilon = \bigsqcup_{j=1}^m \partial U_{j,\varepsilon}. \tag{5.2}$$

由命题 4.1，

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon} \Phi(\Omega^h). \tag{5.3}$$

令 $U := X \setminus Z(\nu)$。在 U 上，对数全纯向量场

$$\nu \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big)$$

处处不为零。根据全纯流盒定理与引理2.9， U容许由全纯流箱构成的局部有限覆盖

$$W_\alpha \simeq V_\alpha \times \Delta_\alpha \tag{5.4}$$

其坐标为 (w,t)，其中

$$\nu = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{and} \qquad D \cap W_\alpha = (D_\alpha \cap V_\alpha) \times \Delta_\alpha. \tag{5.5}$$

因此，所有局部构造都可以在 $T_X(-\log D)|_{W_\alpha}$ 上进行，就像它是从底空间 V_α 拉回的对数丛一样。

在每个 W_α 上，选择 $T_X(-\log D)|_{W_\alpha}$ 上的光滑联络 ∇^α，使其在 Bott 意义下是基本的，也就是说，在乘积平凡化下，其联络矩阵中没有 dt 分量，也没有 dt 分量。具体而言，在截面 $V_\alpha \times \{0\}$ 上选取一个光滑标架，并沿着 t 和 t 将其作常值延拓，同时令 t 和 t 协变导数为零。接着，选取一个从属于 $\{W_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$，使得每个 ρ_α 只依赖于 w 变量。通过下式在 $T_X(-\log D)|_U$ 上定义全局 Bott 联络

$$\nabla^B := \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha. \tag{5.6}$$

由于微分 $d\rho_\alpha$ 没有 dt、dt 分量，联络 ∇^B 在每个流盒上仍然是基本的。因此，其曲率 Ω^B 是从 $(2n-2)$ 维实底空间 V_α 拉回的，故

$$\Phi(\Omega^B) \equiv 0 \qquad \text{on } U \tag{5.7}$$

由次数的原因可知。这就是通常的 Bott 消灭论证 [3, 5, 26]。考虑 ∇^B 与 ∇^h之间的转化项。对于

$$\nabla^t := \nabla^B + t(\nabla^h - \nabla^B) \tag{5.8}$$

曲率为 Ω^t 的情形，定义

$$\Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h) := n \int_0^1 \Phi\big(\nabla^h - \nabla^B, \Omega^t, \dots, \Omega^t\big)\, dt \in \Omega^{2n-1}(U). \tag{5.9}$$

Then

$$d\,\Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h) = \Phi(\Omega^h) - \Phi(\Omega^B) = \Phi(\Omega^h) \qquad \text{on } U \tag{5.10}$$

由 [7, 5] 给出。对 M_ε 积分并应用 Stokes 定理，得到

$$\int_{M_\varepsilon} \Phi(\Omega^h) = \sum_{j=1}^m \int_{\partial U_{j,\varepsilon}} \Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h). \tag{5.11}$$

结合式（5.3），我们将定理归结为局部边界极限

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \sum_{j=1}^m \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_{j,\varepsilon}} \Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h). \tag{5.12}$$

现在固定一个维数为 r、余维为 $k = n - r$ 的分支 $Z := Z_j$，并证明其边界极限等于 $\langle [Z], \mathrm{Res}_Z(\Phi) \rangle$。

取一个相对紧开子集 $V \Subset Z$。在 V 上，管域边界典范地是一个光滑球丛

$$\pi_\varepsilon : S_\varepsilon(N_{Z/X}|_V) \longrightarrow V. \tag{5.13}$$

定义纤维积分

$$\alpha_{\varepsilon,V} := (\pi_\varepsilon)_* \Big(\Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h)|_{S_\varepsilon(N_{Z/X}|_V)} \Big) \in \Omega^{2r}(V). \tag{5.14}$$

Then

$$\int_{\partial U_\varepsilon(Z)\cap\pi_\varepsilon^{-1}(V)} \Theta_\Phi(\nabla^B,\nabla^h) = \int_V \alpha_{\varepsilon,V}. \tag{5.15}$$

由于 V 是任意的，且 Z^{sing} 在 Z 中至少有一阶余维，因此只需确定 $\alpha_{\varepsilon在V}$ 的紧子集上的光滑极限， Z 然后利用引理 [Z] 3.1，通过穷竭逼近传递到流 。

在 V 上选取该正合序列的一个厄米正交分裂

$$0 \longrightarrow K_Z \longrightarrow T_X(-\log D)|_V \xrightarrow{\rho} N_{Z/X}|_V \longrightarrow 0, \tag{5.16}$$

其存在是因为我们处于光滑范畴，在 V 上。利用所选厄米度量在 $N_{Z/X}|_V$ 上的指数映射，将 V 在 X 中的一个邻域等同于 $N_{Z/X}|_V$ 中零截面的一个邻域。在局部坐标 (x,y)（适应于$V=\{y=0\}$），命题 2.5 给出

$$\nu(x,y) = \nu_{\|}(x,y) + A_Z(x)y + R(x,y), \tag{5.17}$$

其中 $\nu_{\|}(x,y)$ 在 K_Z 中取值，项 $A_Z(x)y$ 是一阶法向部分，并且

$$R(x,y) = O(|y|^2) \tag{5.18}$$

在法向变量中。Bott 非退化性意味着 $A_Z(x)$ 对每个 $x\in V$ 均可逆。

当 $\varepsilon>0$ 充分小时，向量场

$$\nu_s(x,y) := \nu_{\|}(x,y) + A_Z(x)y + sR(x,y), \qquad 0\le s\le 1, \tag{5.19}$$

在球丛 $S_\varepsilon(N_{Z/X}|_V)$ 上处处不为零。事实上，由于 A_Z 可逆且 V 相对紧，线性项 $A_Z(x)y$ 在紧致球丛上与零保持一致的正距离，而将球面限制得足够小之后，$R(x,y)=O(|y|^2)$ 会变得任意小。因此，边界积分是同伦不变量，可以用其线性法向模型替代 ν

$$\nu_{\mathrm{lin}}(x,y) := \nu_{\|}(x,0) + A_Z(x)y. \tag{5.20}$$

这是 Bott 的证明中的标准约化步骤；参见 [4, 5, 26]。保留分裂（5.16）。在线性模型上，可以选择联络 ∇^B 使得沿着 V，相对于

$$T_X(-\log D)|_V \simeq K_Z \oplus N_{Z/X}|_V,$$

即

$$\nabla^B|_V = \nabla_K \oplus \nabla_N, \tag{5.21}$$

其中， ∇_K 和 ∇_N 分别是所选厄米度量在 K_Z 和 $N_{Z/X}|_V$ 上的 Chern联络。因此，相应的曲率矩阵具有如下形式

$$\Omega^B|_V = \begin{pmatrix} \Omega_K & 0 \\ 0 & \Omega_N \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

经过纤维逐点缩放 $y=\varepsilon u$后，球丛 $S_\varepsilon(N_{Z/X}|_V)$ 被识别为固定的单位球丛 $S_1(N_{Z/X}|_V)$。在此识别下，法向线性项变为 $A_Z(x)u$，而高阶项缩放后仅贡献 $O(\varepsilon)$，由（5.18）可知。因此，转化项形式的拉回可展开为一个级数，其系数光滑地依赖于 $x\in V$和角变量$u\in S_1(N_{Z/X}|_x)$，且其首项恰为与配对 $(A_Z(x),\Omega_K(x),\Omega_N(x))$相关联的普适 Bott 形式。

更具体地说，对球面 $S_1(N_{Z/X|_X}) \simeq S^{2k-1}$积分后，只有总纤维次数为 $2k-1$ 的分支保留下来；逐纤维应用 Bott 的经典球面积分恒等式可得

$$\int_{S_1(N_{Z/X|_X})} \lim_{\varepsilon\to 0} \Theta_\Phi(\nabla^B, \nabla^h) = \Big(\Phi(A_Z+\Omega_K)\wedge \det(A_Z+\Omega_N)^{-1}\Big)_{[2r]}(x). \tag{5.23}$$

等价地，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_{\varepsilon,V}(x) = \Big(\Phi(A_Z+\Omega_K)\wedge \det(A_Z+\Omega_N)^{-1}\Big)_{[2r]}(x). \tag{5.24}$$

由于对 x 的依赖是光滑的，且在 V的紧子集上一致收敛，因此在 V上光滑收敛。根据定义 1.3，右侧恰好是 $\mathrm{Res}_Z(\Phi)|_V$。

因此，对每个相对紧的 $V \Subset Z$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V \alpha_{\varepsilon,V} = \int_V \mathrm{Res}_Z(\Phi). \tag{5.25}$$

取一个穷竭 $V_1 \Subset V_2 \Subset \cdots \Subset Z$，由相对紧开子集组成，其并集为 Z。由于 Z^{sing} 在纯 2 维空间 $2r$中的实余维数至少为Z，由引理 $_Z(\Phi)$ 3.1 Z^{sing} 可知，Res在附近局部可积。因此

$$\langle [Z], \mathrm{Res}_Z(\Phi)\rangle = \int_Z \mathrm{Res}_Z(\Phi) = \lim_{\nu\to\infty}\int_{V_\nu} \mathrm{Res}_Z(\Phi). \tag{5.26}$$

在每个 V_ν 上，我们已知由（5.25）可知，边界积分收敛到留数积分。先对固定的 $\varepsilon\to 0$ 取极限 ν，再取穷竭极限，得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial U_\varepsilon(Z)} \Theta_\Phi(\nabla^B,\nabla^h) = \langle [Z], \mathrm{Res}_Z(\Phi)\rangle. \tag{5.27}$$

对每个分支重复此过程 Z_j 并代入（5.12），恰好得到

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \sum_{j=1}^m \langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle = \sum_{j=1}^m \int_{Z_j^{\mathrm{reg}}} \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi). \tag{5.28}$$

这就证明了等式（1.13）。如果将 K_j和 $N_{Z_j/X|Z_j}$ 上的厄米度量和 Chern联络替换为其他选择，相应的留数形式之差是 $2r_j$ 上的恰当形式；根据底空间 Z_j^{reg} 上的转化项 Z_j，见 [7, 5, 22]。由于 $[Z_j]$是闭的，与 $[Z_j]$ 配对会消去恰当形式。因此，留数之和是内在的，正如定理 1.4所断言。

局部贡献的局部 Coleff–Herrera 表达式。 现在，我们将约化局部完全交分支的局部贡献改写为显式的局部形式。由于 Z_j 仅被假设为局部完全交，一般无法选择全局定义方程。因此，Coleff–Herrera 实现必须写在局部覆盖上，并通过变换律粘合。

假设定理 1.4 的假设成立，设 $Z_j \subset X$ 是 ν 的零点概形的一个余维为 k_j、维数为 r_j 的约化局部完全交分支。选取 Z_j 的一个邻域的开覆盖 $(U_{j,\alpha})_\alpha$，使得对每个 U_j，理想层 $\mathcal{I}_{Z_j}$ 都由一个正则序列生成

$$f_{j,\alpha} = (f_{j,\alpha,1},\dots,f_{j,\alpha,k_j}).$$

在交叠处 $U_{j,\alpha}\cap U_{j,\beta}$ 有

$$f_{j,\alpha} = g_{\alpha\beta} f_{j,\beta},$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 是一个可逆全纯矩阵。相应的局部 Coleff–Herrera 流

$$R_{j,\alpha} := \bar{\partial}(1/f_{j,\alpha,1}) \wedge \cdots \wedge \bar{\partial}(1/f_{j,\alpha,k_j}) \tag{5.29}$$

满足变换律

$$R_{j,\alpha} = (\det g_{\alpha\beta})^{-1} R_{j,\beta},$$

且局部Jacobi形式满足

$$df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j} = \det(g_{\alpha\beta})\, df_{j,\beta,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\beta,k_j} \mod \mathcal{I}_{Z_j}.$$

因此，集合 $(R_{j,\alpha})_\alpha$ 规范地定义了与 Z_j 相关联的全局Coleff–Herrera流，并且局部有

$$(2\pi i)^{k_j}[Z_j] = R_{j,\alpha} \wedge df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j}. \tag{5.30}$$

Let

$$\mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi) = \left(\Phi(A_{Z_j} + \Omega_{K,j}) \wedge \det(A_{Z_j} + \Omega_{N,j})^{-1}\right)_{[2r_j]} \in \Omega^{2r_j}(Z_j^{\mathrm{reg}})$$

be t定义1.3中的留数形式。在每个U_j上，α 取一个光滑闭形式

$$\eta_{j,\alpha} \in \mathscr{A}^{2r_j}(U_{j,\alpha})$$

使得

$$\eta_{j,\alpha}|_{Z_j^{\mathrm{reg}} \cap U_{j,\alpha}} = \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi).$$

最后，令 $(\chi_{j,\alpha})_\alpha$ 为在 Z_j的某个邻域上从属于 $(U_{j,\alpha})_\alpha$ 的光滑单位分解。

命题5.1。 采用上述记号，有

$$\langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^{k_j}} \sum_\alpha \left\langle R_{j,\alpha}, \chi_{j,\alpha}\eta_{j,\alpha} \wedge df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j} \right\rangle. \tag{5.31}$$

该表达式与所选覆盖、所选生成元$f_{j,\alpha}$、局部代表元$\eta_{j,\alpha}$以及单位分解无关。

证明。 由（5.30），在每个U_j上，有α

$$(2\pi i)^{k_j}[Z_j] \wedge \eta_{j,\alpha} = R_{j,\alpha} \wedge \eta_{j,\alpha} \wedge df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j}.$$

乘以$\chi_{j,\alpha}$ 并对 α求和，得到

$$(2\pi i)^{k_j} \sum_\alpha \chi_{j,\alpha}[Z_j] \wedge \eta_{j,\alpha} = \sum_\alpha R_{j,\alpha} \wedge \chi_{j,\alpha}\eta_{j,\alpha} \wedge df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j}.$$

由于$\sum_\alpha \chi_{j,\alpha} = 1$ 在 Z_j 附近，并且每个$\eta_{j,\alpha}$ 在$Z_j^{\mathrm{reg}} \cap U_j$上限制为$_{Z_j}(\Phi)$ 的Res$_\alpha$，左侧恰好是

$$(2\pi i)^{k_j} \langle [Z_j], \mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\rangle.$$

这就证明了（5.31）。所选生成元的独立性由 Coleff–Herrera 流的变换律以及雅可比因子相应的变换律得出。局部代表元 $\eta_{j,\alpha}$ 的独立性是显然的，因为只有它们在 Z_j^{reg} 上的限制对与 $[Z_j]$ 的配对有贡献。□

将（5.31）对所有分支求和并利用定理 1.4，即可得到全局流理论表达式

$$\int_X \Phi\big(T_X(-\log D)\big) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi i)^{k_j}} \sum_{\alpha} \Big\langle R_{j,\alpha}, \chi_{j,\alpha}\, \eta_{j,\alpha} \wedge df_{j,\alpha,1} \wedge \cdots \wedge df_{j,\alpha,k_j} \Big\rangle .$$

若 Z_j 光滑，则可选取管状收缩 $\tau_j : U_j \to Z_j$，并取如下形式的局部代表元

$$\eta_{j,\alpha} = \tau_j^{*}\big(\mathrm{Res}_{Z_j}(\Phi)\big)|_{U_{j,\alpha}},$$

从而 上述公式便化为通常的在 Z_j 上对留数形式积分 .

例 5.2. 设 $Y := \mathbb{P}(1,1,1,k)$，其中 $k \geq 2$，并令 $\pi : (X, D) \to Y$ 为 $[0:0:0:1]$ 处孤立商奇点的自然解消。因此

$$X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)\big), \qquad D \simeq \mathbb{P}^2, \qquad N_{D/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k).$$

选取常数 a、b、$c \in \mathbb{C}^*$，使得

$$a \neq b, \qquad c \neq ka, \qquad c \neq kb, \tag{5.32}$$

并考虑对角向量场

$$\xi = az_0\partial_{z_0} + az_1\partial_{z_1} + bz_2\partial_{z_2} + cz_3\partial_{z_3}.$$

它在 Y 上诱导出一维叶状结构，其对数拉回定义了一个整体截面

$$\widetilde{\xi} \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big).$$

~我们证明，ξ 的零点概形由一条光滑有理曲线和一个孤立非退化点组成。在坐标图 $\{z_0 \neq 0\}$ 上，取坐标

$$u_1 = \frac{z_1}{z_0}, \qquad u_2 = \frac{z_2}{z_0}, \qquad \tau = \frac{z_3}{z_0^k},$$

可得

$$\widetilde{\xi} = (b-a)u_2\partial_{u_2} + (c-ka)\tau\partial_{\tau}. \tag{5.33}$$

因此，零点轨迹在此处由 $u_2 = \tau = 0$ 给出，其中 u_1 任意。相同的描述也适用于 $\{z_1 \neq 0\}$，且这两部分粘合成一条光滑有理曲线

$$C = \overline{\{z_2 = 0,\ z_3 = 0\}} \subset X.$$

从几何上看，C 是特选截面 $\{z_3 = 0\}$ 内的直线 $\{z_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$。在坐标图 $\{z_2 \neq 0\}$ 上，取坐标

$$v_0 = \frac{z_0}{z_2}, \qquad v_1 = \frac{z_1}{z_2}, \qquad \eta = \frac{z_3}{z_2^k},$$

有

$$\widetilde{\xi} = (a-b)v_0\partial_{v_0} + (a-b)v_1\partial_{v_1} + (c-kb)\eta\partial_{\eta}.$$

由（5.32），该坐标图包含一个唯一的孤立零点，

$$p = \{v_0 = v_1 = \eta = 0\}.$$

接下来验证例外除子上不存在对数零点。在 $\{z_0 \neq 0\}$上，记 $\sigma = \tau^{-1}$，于是 $D = \{\sigma = 0\}$ 且 $\tau\partial_{\tau} = -\sigma\partial_{\sigma}$。由于 $T_X(-\log D)$的局部标架为 ∂_{u_1}，∂_{u_2}，$\sigma\partial_{\sigma}$，方程（5.33）变为

$$\widetilde{\xi} = 0 \cdot \partial_{u_1} + (b-a)u_2\partial_{u_2} + (ka-c)(\sigma\partial_{\sigma}).$$

由于 $ka - c \neq 0$，这个截面沿 $\sigma = 0$ 不消失。在 $\{z_2 \neq 0\}$ 上，记$\rho = \eta^{-1}$，类似地可得

$$\widetilde{\xi} = (a-b)v_0\partial_{v_0} + (a-b)v_1\partial_{v_1} + (kb-c)(\rho\partial_\rho),$$

并且沿着 D 仍然没有零点。因此

$$Z(\widetilde{\xi}) = C \sqcup \{p\}, \qquad Z(\widetilde{\xi}) \cap D = \varnothing. \tag{5.34}$$

分支 C 是 Bott 非退化的。事实上，在坐标图 (5.33) 上有 $C = \{u_2 = \tau = 0\}$，且横向线性作用的特征值为 $b-a$ 和 $c-ka$，二者均非零~，由 (5.32) 可知。在孤立点 p处，ξ 的线性部分的特征值为 $a-b$、$a-b$和$c-kb$，同样均非零。因此，(5.34) 的两个分支均满足定理所述的非退化条件。

现在我们计算 $\Phi = c_3$的局部贡献。由于 C 是一个一维光滑对象，且横向作用可逆，局部留数化简为 T_C的第一陈类。因此

$$\int_C \mathrm{Res}_C(c_3) = \int_{\mathbb{P}^1} c_1(T_{\mathbb{P}^1}) = 2. \tag{5.35}$$

在孤立点 p 处，局部贡献就是通常的 Poincaré–Hopf 指标：

$$\int_{\{p\}} \mathrm{Res}_p(c_3) = 1. \tag{5.36}$$

因此

$$\sum_{Z \subset Z(\widetilde{\xi})} \int_Z \mathrm{Res}_Z(c_3) = 2 + 1 = 3. \tag{5.37}$$

接下来讨论整体项。令 $h = \pi^* c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)$ 和 $\xi = c_1\big(\mathcal{O}_X(1)\big)$。那么，$X$ 的 Chow 环由 h 和 ξ 生成，关系为

$$h^3 = 0, \qquad \xi^2 - kh\,\xi = 0. \tag{5.38}$$

由于例外截面的类为 $D = \xi - kh$，可得

$$h^2 D = 1, \qquad D^2 = -khD, \qquad D^3 = k^2. \tag{5.39}$$

由相对 Euler 序列以及 π的切丛序列，可得 s

$$c_1(T_X) = 2D + (k+3)h, \qquad c_2(T_X) = 6hD + 3(k+1)h^2, \qquad c_3(T_X) = 6h^2 D.$$

由于 D 是光滑的，

$$c\big(T_X(-\log D)\big) = \frac{c(T_X)}{1+D},$$

因此

$$c_3\big(T_X(-\log D)\big) = c_3(T_X) - c_2(T_X)D + c_1(T_X)D^2 - D^3. \tag{5.40}$$

我们分别计算式（5.40）中的四项。首先，

$$\int_X c_3(T_X) = \int_X 6h^2 D = 6.$$

接下来，

$$\int_X c_2(T_X)D = \int_X \big(6hD + 3(k+1)h^2\big)D = 6\int_X hD^2 + 3(k+1)\int_X h^2 D = 3 - 3k,$$

由（5.39）。同样，

$$\int_X c_1(T_X)D^2 = \int_X \big(2D + (k+3)h\big)D^2 = 2\int_X D^3 + (k+3)\int_X hD^2 = k(k-3),$$

最后

$$\int_X D^3 = k^2.$$

代入（5.40），得到

$$\int_X c_3\big(T_X(-\log D)\big) = 6 - (3-3k) + k(k-3) - k^2 = 3. \tag{5.41}$$

结合（5.37）和（5.41），我们得出

$$\int_X c_3\big(T_X(-\log D)\big) = \int_C \mathrm{Res}_C(c_3) + \int_{\{p\}} \mathrm{Res}_p(c_3) = 2 + 1 = 3.$$

因此，在这个具体的三维例子中，对数 Bott 局部化公式成立，其中有一个非孤立的光滑分支和一个孤立点。

例 5.3。设

$$X = \mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]} \times \mathbb{P}^1_{[y_0:y_1]} \times \mathbb{P}^m_{[u_0:\cdots:u_m]}, \qquad D = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times H_\infty,$$

其中 $m \geq 2$ 和 $H_\infty = \{u_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^m$。于是 $\dim X = m+2 \geq 4$。考虑作用在 X 上的代数 $\mathbb{C}^*$-作用：

$$\lambda \cdot \big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [u_0 : \cdots : u_m]\big) = \big([x_0 : \lambda x_1], [y_0 : \lambda y_1], [u_0 : \cdots : u_m]\big).$$

设 v 为其无穷小生成元。则 v 是 X上的全局全纯向量场。在仿射图

$$t = \frac{x_1}{x_0}, \qquad w = \frac{y_1}{y_0},$$

上有

$$v = t\partial_t + w\partial_w.$$

由于该作用保持垂直除子 D，向量场 v 与 D相切，因此

$$v \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big).$$

v 的零点轨迹即为该作用的不动点轨迹，也就是

$$Z(v) = \bigsqcup_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \{0,\infty\}} F_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},$$

其中

$$F_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \{x = \varepsilon_1,\ y = \varepsilon_2\} \times \mathbb{P}^m \simeq \mathbb{P}^m.$$

因此，$Z(v)$ 的每个连通分支都有正维数 m，且在 X中的余维为 2。固定一个分支 $F := F_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$。由于两个法向方向分别来自两个 $\mathbb{P}^1$因子，因此有

$$N_{F/X} \simeq \mathcal{O}_F^{\oplus 2}.$$

法向自同态 A_F 的特征值为

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1, & \varepsilon_1 = 0, \\ -1, & \varepsilon_1 = \infty, \end{cases} \qquad \lambda_2 = \begin{cases} 1, & \varepsilon_2 = 0, \\ -1, & \varepsilon_2 = \infty. \end{cases}$$

事实上，在 0 附近，诱导场为 $t\partial_t$，而在 ∞ 附近，当 $s = 1/t$ 时，它为 $-s\partial_s$。此外，

$$K_F := \ker\big(T_X(-\log D)|_F \to N_{F/X}\big) \simeq T_{\mathbb{P}^m}(-\log H_\infty).$$

设 $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$。由于

$$c\big(T_{\mathbb{P}^m}(-\log H_\infty)\big) = \frac{c(T_{\mathbb{P}^m})}{1+h} = \frac{(1+h)^{m+1}}{1+h} = (1+h)^m,$$

由此可得

$$c_m(K_F) = h^m, \qquad \int_F c_m(K_F) = 1.$$

取 $\Phi = c_{m+2} = c_{\dim X}$。由于 $N_{F/X}$ 是秩为 2 的平凡向量丛，其形式陈根为 $y_1 = y_2 = 0$。若 x_1、……、x_m 是 K_F 的形式陈根，则

$$\mathrm{Res}_F(c_{m+2}) = \left[\frac{x_1\cdots x_m(\lambda_1+y_1)(\lambda_2+y_2)}{(\lambda_1+y_1)(\lambda_2+y_2)}\right]_{[2m]} = x_1\cdots x_m = c_m(K_F).$$

因此

$$\int_F \mathrm{Res}_F(c_{m+2}) = 1.$$

由于 $Z(\nu)$ 有四个连通分支，

$$\sum_F \int_F \mathrm{Res}_F(c_{m+2}) = 4.$$

另一方面，

$$T_X(-\log D) \simeq p_1^* T_{\mathbb{P}^1} \oplus p_2^* T_{\mathbb{P}^1} \oplus q^* T_{\mathbb{P}^m}(-\log H_\infty),$$

so

$$c\big(T_X(-\log D)\big) = (1+2\eta_1)(1+2\eta_2)(1+h)^m,$$

其中 $\eta_i = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ 位于第 i 个 $\mathbb{P}^1$因子上。因此

$$c_{m+2}\big(T_X(-\log D)\big) = 4\,\eta_1\eta_2 h^m,$$

从而

$$\int_X c_{m+2}\big(T_X(-\log D)\big) = 4.$$

因此，全局特征数等于局部对数留数之和。

例5.4。我们简要记录一个真正的模形式例子，它具有非空边界和非孤立零点轨迹。令

$$X := (\mathbb{P}^2)[2] \cong \mathrm{Bl}_\Delta(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2), \qquad D := E,$$

其中 $\Delta \subset \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 是对角线，E 是例外除子。因此，X 是 $\mathbb{P}^2$中两个不同点的有序构形模空间的Fulton–MacPherson紧化，并且

$$X \setminus D \cong \mathrm{Conf}_2(\mathbb{P}^2).$$

特别地，$\dim X = 4$。

考虑 PGL_3 的单参数子群 $\lambda\cdot[u_0 : u_1 : u_2] = [u_0 : u_1 : \lambda u_2]$。由于对角线是不变的，该作用可提升到 X，并保持 D。令$\nu \in H^0\big(X, T_X(-\log D)\big)$ 为诱导的对数向量场。$\mathbb{P}^2$ 中的不动点集为

$$L := \{u_2 = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \qquad \text{and} \qquad p := [0:0:1].$$

因此，X 上的 ν 的零点轨迹并非孤立。事实上，它包含边界之外的正维分支，即 $L\times L$、$L\times\{p\}$、$\{p\}\times L$的闭包，以及

边界 $D = E$内也包含正维分支。更确切地说，在$L \subset \Delta$上可得到两个固定截面

$$E|_L \cong \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}|_L),$$

对应于 L的切向与法向方向，而在不动点 p 上，整个纤维 $E_p \cong \mathbb{P}(T_p\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{P}^1$ 均为不动的。应用定理 1.4 ，取 $\Phi = c_4 = c_{\dim X}$，可得

$$\int_X c_4\big(T_X(-\log D)\big) = \sum_{F \subset Z(v)} \int_F \mathrm{Res}_F(c_4).$$

另一方面，由对数 Gauss–Bonnet 定理，

$$\int_X c_4\big(T_X(-\log D)\big) = \chi(X \setminus D) = \chi\big(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{P}^2)\big).$$

由于

$$\chi\big(\mathrm{Conf}_2(\mathbb{P}^2)\big) = \chi(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) - \chi(\Delta) = 9 - 3 = 6,$$

我们得出

$$\sum_{F \subset Z(v)} \int_F \mathrm{Res}_F(c_4) = 6.$$

尽管利用针对 Fulton–MacPherson 空间发展的经典爆破和交理论方法，可以计算出这个数值 [18, 24, 1], ，但本次计算的意义并不相同。具体而言，这里直接运用我们在真正的模空间上得到的对数局部化公式，并且关键的几何依据是正维零分支的出现，其中也包括位于边界除子上的分支。

参考文献

[1] P. Aluffi, 《爆破的陈类》, 《剑桥哲学学会数学论文集》148 (2010), 第2期, 227–242。[2] P. Baum 和 R. Bott, 《全纯叶状结构的奇点》, 《微分几何杂志》7 (1972), 第3–4期, 279–342。[3] R. Bott, 《向量场与特征数》, 《密歇根数学杂志》14 (1967), 第2期, 231–244。[4] R. Bott, 《全纯向量场的留数公式》, 《微分几何杂志》1 (1967), 第3–4期, 311–330。[5] R. Bott 和 L. W. Tu, 《代数拓扑中的微分形式》, 《数学研究生文本》82, Springer, 纽约, 1982。[6] J.-P. Brasselet、J. Seade 和 T. Suwa, 《奇异簇上的向量场》, 数学讲义1987, Springer, 柏林、海德堡, 2009。[7] S.-S. Chern 和 J. Simons, 《特征形式与几何不变量》, 《数学年刊》（第2辑）99 (1974), 第1期, 48–69。[8] N. R. Coleff 和 M. E. Herrera, 《与亚纯形式相关的残余流》, 数学讲义633, Springer, 柏林, 1978。[9] M. Corrêa、A. M. Ferreira 和 A. Fernández-Pérez, 《Hopf 流形上全纯分布的分类》, 《数学年刊》365 (2016), 第1期, 579–593。[10] M. Corrêa 和 F. Lourenço, 《高维叶状结构的 Baum–Bott 留数的确定》, 《亚洲数学杂志》23 (2019), 第3期, 527–538。[11] M. Corrêa、F. Lourenço 和 D. Machado, 《曲线叶状结构的对数 Baum–Bott 留数》, 预印本, arXiv:2411.04015。[12] M. Corrêa 和 J. Seade, 《指标与留数：从 Poincaré–Hopf 到 Baum–Bott, 以及 Marco Brunella》, 载于《奇点几何与拓扑手册第八卷》, J. L. Cisneros-Molina、Lê D˜ung Tráng 和 J. Seade 编, Springer, 尚, 2026, 第441–489页。[13] M. Corrêa 和 T. Suwa, 《论 Baum–Bott 留数的函子性》, 预印本, arXiv:2501.15133。[14] P. Deligne, 《具有正则奇点的微分方程》, 数学讲义163, Springer, 柏林, 1970。[15] J.-P. Demailly, 《复解析与微分几何》, 在线手稿, 格勒诺布尔第一大学, 2012。

[16] J.-P. Demailly 和 M. Passare，《残余流与基本类》，《数学科学通报》**119** (1995)，第1期，85–94。[17] G. Fischer，《复解析几何》，数学讲义**538**，Springer，柏林，1976。[18] W. Fulton 和 R. MacPherson，《构形空间的紧化》，《数学年刊》（第2辑）**139**(1994)，第1期，183–225。[19] R. Harvey 和 B. Shiffman，《全纯链的刻画》，《数学年刊》（第2辑）**99** (1974)，第3期，553–587。[20] L. Kaufmann、R. Lärkäng 和 E. Wulcan，《Baum–Bott余留流》，预印本，arXiv:2302.08887。[21] J. R. King，《解析簇所定义的流》，《数学学报》**127** (1971)，第3–4期，185–220。[22] S. Kobayashi，《复向量丛的微分几何》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987。[23] M. Passare，《留数、流及其与全纯函数理想的关系》，《斯堪的纳维亚数学》**62**(1988)，第1期，75–152。[24] D. Petersen，《Fulton–MacPherson紧化的 Chow 环》，《密歇根数学杂志》**66**(2017)，第1期，195–202。[25] K. Saito，《对数微分形式与对数向量场理论》，《东京大学理学部纪要，IA数学》**27**(1980)，第2期，265–291。[26] T. Suwa，《局部化视角下的复解析几何》，Birkhäuser，巴塞尔，2005。

MAURÍCIO CORRÊA，巴里大学，E. Orabona街 4 号，I-70125 巴里，意大利电子邮件地址，M. Corrêa： mauricio.barros@uniba.it, mauriciomatufmg@gmail.comELAHEH SHAHSAVARIPOUR，巴里大学，E. Orabona街 4 号，I-70125 巴里，意大利电子邮件地址，ElahehShahsavaripour： e.shahsavaripour@gmail.com