arXiv:2603.07232v1 [math.CO] 7 Mar 2026

关于距离整数图与距离拉普拉斯整数图

S. Pirzada[a], Ummer Mushtaq[a], Leonardo de Lima[b]

[a]克什米尔大学数学系，印度斯利那加[b]巴拉那联邦大学一般与应用管理系，巴西

摘要

设 G 为一个具有 n 个顶点的连通图， $D(G)$和 $D^L(G)$分别为与 G相关联的距离矩阵和距离拉普拉斯矩阵。若图G 的 D（分别为D^L）的所有特征值均为整数，则称其为 D整数图（分别为D^L整数图）。本文给出了若干条件，在这些条件下，图 $aK_m \nabla C_n$ 和$K_{p,\ p} \nabla C_n$ 是距离整数图。我们还给出了关于 m、 n 的条件，在这些条件下，哑铃图 $\boldsymbol{DB}$ $(W_{m,\ n})$ 是 D^L整数图。

关键词：距离矩阵，距离拉普拉斯矩阵，距离整数图，拉普拉斯距离整数图*2020*年数学主题分类：05C50

1. 引言

我们考虑一个连通简单图 $G = (V,\ E)$，其中 V 表示基数为 n 的顶点集， E 表示边集。图 G的邻接矩阵记为 $A(G) = a_{ij}$，它是一个方阵；若顶点 v_i 与 v_j相邻，则其对应元素为 $a_{ij} = 1$，否则为 $a_{ij} = 0$ 。如果每个顶点的度都相同，则称该图为正则图。若 M 表示与图 G相关联的矩阵，则当 M 的所有特征值均为整数时，称 G 为 M-整数图。图 G 的 M-谱包含其矩阵 M的所有特征值及其相应的重数。令 $d_G(i,\ j)$ 表示

电子邮件地址：pirzadasd@kashmiruniversity.ac.in (S. Pirzada), ummermushtaq1995@gmail.com (Ummer Mushtaq),leonardo.delima@ufpr.br (Leonardo de Lima)

顶点 v_i 和 v_j. 之间的最短路径长度。图 G的距离矩阵记为 $D(G)$，其第 (i,j) 个元素为 $d_G(i,j)$。注意， $D(G)$ 是对称矩阵，因此其特征值均为实数。用 $Tr(G)$ 表示图 G 的传输矩阵，它是 $D(G)$ 各行元素之和构成的对角矩阵。图 G 的距离拉普拉斯矩阵定义为 $D^L(G) = Tr(G) - D(G)$。图 G的补图记为 $\overline{G}$，它与 G具有相同的顶点集；当且仅当两个顶点在 G中不相邻时，它们在补图中相邻。两个图 G_1和 G_2的并记为 $G_1 \cup G_2$，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$。两个图 G_1和 G_2的联 $G_1 \nabla G_2$是由 $G_1 \cup G_2$ 通过添加从 G_1 中的顶点到 G_2中的顶点的所有可能边得到的图。通常， K_n 表示完全图， C_n 表示圈，而 $K_{p,q}$ 表示以 $p+q$ 个顶点为顶点的完全二部图。给定 $m \geq 2$和 $n \geq 3$，广义轮图 $W_{m,n}$是通过图的联 $K_m \nabla C_n$得到的图。哑铃图记为 $DB(W_{m,n})$，它由两个广义轮图 $W_{m,n}$的副本构成，并将一个副本中的 m 个顶点与另一个副本中对应的顶点 [11]连接而成。更多定义和记号请参见 [15]。

在谱图论中，一个基本问题是识别这样一类图：与图相关联的矩阵的所有特征值均为整数。1974年，Harary 和 Schwenk[7] 提出了整数谱图的概念，使这一研究方向备受关注，并推动了该领域的大量研究。2002年，Balaliska等 [5]全面综述了有关整数谱图的研究成果。更多见解和研究结果，请参阅 [1, 2, 5, 6, 13, 18]。

关于 D-整数谱图， [16]的计算结果指出，顶点数不超过9的图中仅有 49 D-整数谱图。D-整数谱图十分罕见，这促使研究者对具有此性质的图进行刻画，已有一些文献探讨了这一课题。在 [8], ，Ilić刻画了整循环图的距离谱，并证明了它们具有 D-整数性。2015年，Pokorný等人[16] 刻画了若干类图中的 D-整数谱图，包括完全分裂图、多重完全分裂型图、扩展完全分裂型图和多重扩展完全分裂型图；他们还证明了非平凡树不具有D-整数性。同年，Yang和Wang[19] 为完全 r-部图的 D-整数性建立了充要条件$K_{p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots p_r} \cong K_{a_1p_1,\ a_2p_2,\ \ldots\ldots a_sp_s}$ ，并为 $s = 1$，2、3、4生成了许多新的D-整数谱图类。2016年，Zhao 等人 [21] 给出了判定完全图的 D^Q-整数性的充要条件

r-部图，例如$K_{p_1,\ p_2,\ .....p_r} \cong K_{a_1p_1,\ a_2p_2,\ .....a_sp_s}$，并为 $s=1$，2、3引入了新的 D^Q-整数谱图类。随后，2017年，da Silva等人[17] 借鉴Pokorný的研究 [16]，考察了多种图中的 D^L-整数性以及距离无符号拉普拉斯特征值的整数性，包括完全分裂图、多重完全分裂型图、扩展完全分裂型图和多重扩展完全分裂型图。该领域的更多见解和进展见 [9, 14]。2023年，Lu 等人 [13] 得到了所有 D-整数广义轮图 $aK_m\nabla C_n$。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们完整刻画了形式为 $aK_m\nabla C_n$ and $K_{p,p}\nabla C_n$, 的所有 D-整数谱图，并证明不存在 D-整数谱哑铃图。第 3 节中，我们推导出所有 D^L-整数谱哑铃图 $\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$。

2. $aK_m\nabla C_n$ and$\overline{K_{p,p}}\nabla C_n$ 的 D-整数谱

本节将给出广义图 $aK_m\nabla C_n$ and $K_{p,p}\nabla C_n$ 的距离谱。我们用 $EGW(a,m,n)$ 表示 $aK_m\nabla C_n$，并完整确定所有 D-整数谱 $EGW(a,m,n)$ 图。以下观察结果将在后文中用到。

引理 2.1。 [4] 圈 C_n 的邻接谱为

$$\left\{2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) : k=1,2,\ldots,n-1\right\}.$$

引理 2.2。 [4] 设 M 是一个 n 阶方阵，可按分块形式写为

$$M=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{k1} & M_{k2} & \ldots & M_{kk} \end{pmatrix}$$

其中 $M_{ij},\ 1\le i,\ j\le k$, 是 $n_i\times m_j$矩阵，其各行的行和均为 c_{ij}。令 $M=[c_{ij}]_{k\times k}$。那么， M 的特征值也是 M的特征值。

引理 2.3。 [20] 设 M 如引理 2.2 中所定义，且满足$M_{ij} = s_{ij}J_{n_i,\ n_j}$对 $i \neq j$成立，并且 $M_{ii} = s_{ii}J_{n_i,\ n_i} + p_iI_{n_i}$。 那么， M 的商矩阵为 $B = b_{ij}$，其中当 $i \neq j$时，$b_{ij} = s_{ij}n_j$，且 $b_{ii} = s_{ii}n_i + p_i$。此外，

$$\sigma(M) = \sigma(B) \cup \left\{p_1^{n_1-1}, p_2^{n_2-1}, \ldots, p_k^{n_k-1}\right\},$$

其中， $\sigma(A)$表示矩阵 A的谱。

下面的引理给出了$K_m \nabla C_n$的距离谱。

引理 2.4. $K_m \nabla C_n$ 的距离谱为

$$\left\{ -2^{m-1}, (m+n-3) \pm \sqrt{(m+n-3)^2 - (3mn - 8m - 4n + 8)}, \right.$$
$$\left. -2 - 2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) : k = 1, 2, \ldots, n-1 \right\}.$$

证明. 考虑$W_{m,n} = K_m \nabla \overline{C_n}, m \geq 1, n \geq 3$，它是顶点数为 m 的空图与顶点数为 n 的二正则圈图的图的联。$W_{m,n}$ 的距离矩阵可写为

$$D(W_{m,n}) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

其中， $A = 2(J - I)_{m\times m}$, $B = J_{m\times n}$, $C = J_{n\times m}$, $D = 2(J - I)_{n\times n} - A(C_n)$， 且$J_{m,n}$是全 1 矩阵， $A(C_n)$是圈 C_n的邻接矩阵。

设 $V(K_m) = \{\overline{v_1, v_2, \ldots, v_m}\}$ 和 $V(C_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 分别为图 K_m 和 C_n的顶点集。那么$W_{m,n}$ 的顶点集为 $V(W_{m,n}) = V(K_m) \cup V(C_n)$。

由于$\overline{K_m}, m \geq 2$ 是一个阶数为 m 的空图，在 $D(W_{m,n})$ 中，顶点 $v_i \in K_m$, $i = 1, 2, \ldots, m$ 之间的最短距离为 2。设 e_m 为长度为 m 的全一向量，即 $e_m = (1, 1, \ldots, 1)^T$。在 $D(W_{m,n})$ 中，分块矩阵 A 有一个对应于特征值 $2m-2$ 的特征向量 $[e_m \quad 0_n^T]_{(m+n)\times 1}$，而其余对应于重数为 $m-1$ 的特征值 -2 的特征向量均与 $[e_m \quad 0_n^T]_{(m+n)\times 1}$正交。
此外， $A(C_n)$ 的全一向量 $e_n = (1, 1, \ldots, 1)^T$是对应于特征值 2 的特征向量，其余特征向量与$e_n$正交。在 $D(W_{m,\ n})$ 中，分块矩阵 D 有一个特征向量
$[0_m^T \quad e_n]_{(m+n)\times 1}$

对应于特征值 $2n-4$，而对应于特征值 $-2-2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$、$k=1,2,\ldots,n-1$ 的其余特征向量与 $[0_m^T \quad e_n]_{(m+n)\times 1}$ 正交。其余两个距离特征值为$\{(m+n-3)\pm\sqrt{(m+n-3)^2-(3mn-8m-4n+8)}\}$，它们是商矩阵 $\begin{bmatrix} 2m-2 & n \\ m & 2n-4 \end{bmatrix}$ 的特征多项式的零点。证明完毕。

□

在下面的引理中，我们求出 a 个空图 K_m 与圈 C_n 的图的联的距离谱。

引理2.5。扩展的 $EGW(a,m,n)$ 的距离谱由以下特征值组成

$$\left\{ -2^{(am-1)}, (am+n-3)\pm\sqrt{(am+n-3)^2-(3amn-8am-4n+8)}, \right.$$
$$\left. -2-2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k=1,2,\ldots,n-1 \right\}.$$

证明。考虑图 $aK_m\nabla C_n,\ a\geq\overline{2,m}\geq 1, n\geq 3$，它是 a 个有 m 个顶点的空图 K_m 与有 n 个顶点的二正则圈图的图的联。$aK_m\nabla C_n$ 的距离矩阵可写为

$$D(a\overline{K_m}\nabla C_n)=\left(\begin{array}{cccc|c} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1a} & J_{a\times n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2a} & J_{a\times n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{a1} & X_{a2} & \ldots & X_{aa} & J_{a\times n} \\ \hline J_{n\times a} & J_{n\times a} & \ldots & J_{n\times a} & 2(J-I)_{n\times n}-A(C_n), \end{array}\right)$$

其中

$$X_{ij}=\begin{cases} 2(J-I)_{a\times a}, & \text{if } i=j \\ 2J_{a\times a}, & \text{if } i\neq j, \end{cases}$$

J 是全 1 矩阵，$A(C_n)$ 是圈 C_n 的邻接矩阵 .

设 $V_p(\overline{K_m})=\{u_1^p,u_2^p,\ldots,u_m^p\}$ 和 $V(C_n)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 分别为图 p^{th} 的 K_m副本的顶点集，其中 $1\leq p\leq a$，且 C_n。顶点

集 $aK_m\overline{\nabla}C_n$ 为 $V(aK_m\overline{\nabla}C_n) = \cup_{p=1}^{a}V_p(K_m) \cup V(C_n)$。

设 $v_m^1 = (1, 1, \ldots\ldots, 1)^T$ 为长度为 m 的全一向量。那么在矩阵 $D(aK_m\nabla C_n)$ 中， v_m^1 是对应于特征值 $2m-2$ 的分块 X_{11} 的一个特征向量，而对应于 -2、代数重数为 $m-1$ 的其余特征值均与 v_m^1 正交。在这种情况下， -2 是 $D(aK_m\nabla C_n)$ 的一个特征值，其重数为 $m-1$，相应的特征向量与 $[v_m^1 \ , 0_n^T, \ldots, 0_m^T, 0_n^T]_{(am+n)\times 1}$ 正交。类似地，对于每个对角分块矩阵 X_{ii}， $1 \le i \le a$， -2 是 $D(aK_m\nabla C_n)$ 的一个特征值，其重数为 $m-1$，相应的特征向量与

$$[0_m^T, 0_m^T, \ldots, v_m^i \quad \ldots, 0_m^T, 0_n^T]_{(am+n)\times 1}.$$

此外， $A(C_n)$与$2(J-I)_{n\times n}$ 分别以全一向量 $e_n = (1, 1, \ldots, 1)^T$ 作为对应于特征值2和 $2n-2$的特征向量。于是，分块$2(J-I)_{n\times n} - A(C_n)$有一个特征向量 e_n 对应于特征值 $2n-4$. 因此， $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n})$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 是 $D(aK_m\nabla C_n)$的特征值，且相应的向量与 $[0_m^T, 0_m^T, \ldots, 0_m^T, e_n]_{(am+n)\times 1}$正交。

这样，我们得到 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n})$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 以及重数为 $am-a$ 的 -2 作为 $D(aK_m\nabla C_n)$的特征值。其余的特征值是商矩阵的特征值

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2m-2 & 2m & \ldots & 2m & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2m & 2m & \ldots & 2m-2 & n \\ \hline n & n & n & n & 2n-4 \end{array}\right)_{(a+1)\times(a+1)}.$$

由引理 2.3 可知， -2 显然是上述矩阵的一个特征值，重数为 $a-1$；其余两个特征值是下列矩阵的特征多项式的零点

$$\begin{bmatrix} 2am-2 & n \\ am & 2n-4 \end{bmatrix}.$$

综合以上结果， $D(aK_m \nabla C_n)$ 的完整谱为

$$\left\{ -2^{(am-1)}, (am+n-3) \pm \sqrt{(am+n-3)^2 - (3amn - 8am - 4n + 8)}, \right.$$
$$\left. -2 - 2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) : k = 1, 2, \ldots, n-1 \right\}.$$

□

现在，我们得到以下结果。

定理 2.6. 图 $K_m \nabla C_n$ 有 $m+n$ 个顶点，当且仅当下列条件之一成立时，是 D-整的：
(i) $n = 3$, $m = 1$, *(ii)* $n = 3$, $m = 4$, *(iii)* $n = 4$, $m = 2$, *(iv)* $n = 6$, $m = 4$, *(v)* $n = 6$, $m = 12$.

证明。由引理 2.4 可知， $K_m \nabla C_n$ 的距离谱由特征值 -2（重数为 $m-1$）以及 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n})$ $k = 1$， 2， ……， $n-1$ 组成，其余两个特征值为

$$(m+n-3) \pm \sqrt{(m+n-3)^2 - (3mn - 8m - 4n + 8)}.$$

显然，$(m+n-3) \pm \sqrt{(m+n-3)^2 - (3mn - 8m - 4n + 8)}$为整数，当且仅当$(m+n-3)^2 - (3mn - 8m - 4n + 8)$是完全平方数。此外，显然，对于任意 $1 \leq k \leq n-1$， $2cos(\frac{2k\pi}{n})$为整数当且仅当 $n \in \{3, 4, 6\}$。因此， $K_m \nabla C_n$ 是 D-整的，当且仅当$(m+n-3)^2 - (m - 4n + 8)$是完全平方数且 $n \in \{3, 4, 6\}$。

证明充分性只需进行简单计算，这表明当条件 (i)、(ii)、(iii) 或 (iv) 成立时， $K_m \nabla C_n$ 变为 D-整图。现在来探讨必要性。设 $t = (m+n-3)^2 - (3mn - 8m - 4n + 8) = c^2$。我们考虑以下三种情形。

情形 1. 设 $n = 3$。于是，我们有 $t = m^2 - m + 4 = c^2$，也就是 $m^2 - m + 4 - c^2 = 0$。由此得到 $m = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2 - 15}}{2}$。由于 m 是一个整数，这只有在 $4c^2 - 15$ 是奇完全平方数时才可能。设 $4c^2 - 15 = p^2$。这意味着 $4c^2 - p^2 = 15$, 进而意味着 $(2c - p)(2c + p) = 15$，因此 $c = 4$ 或 $c = 2$。将 c的值代回，得到 $m = 4$ 或$m = 1$。

情况 2. 设 $n = 4$。我们有 $t = (m+1)^2 - 4m + 8 = c^2$，即 $8 = c^2 - (m-1)^2$。由此得到 $8 = (c+1-m)(c-1+m)$。现在， $8 = 8 \times 1 = 2 \times 4$。

对于情形 $(c+1-m)(c-1+m) = 8 \times 1$，我们有 $2c = 9$，这是不可能的。对于情形 $(c+1-m)(c-1+m) = 2 \times 4$，我们有 $c = 3$，由此得到 $m = 2$。

情况 3. 设 $n = 6$。因此，我们有 $t = (m+3)^2 - 10m + 16 = c^2$，即，$21 = c^2 - (m-2)^2$。我们有 $21 = 3 \times 7 = 1 \times 21$。现在，对于情形 $(c-m+2)(c+m-2) = 1$，我们有 $c = 11$，由此得到 $m = 12$。对于情形 $(c-m+2)(c+m-2) = 3 \times 7$，我们有 $c = 5$，由此得到 $m = 4$。 □

定理2.7. 设 $a \geq 1$ 和 $n \geq 3$。则具有 $am+n$ 个顶点的扩展图 $EGW(a, m, n)$ 是 D-整的，当且仅当有序三元组 $(a, m, n) \in S$，其中

$$S = \{(1,4,3),(4,1,3),(2,2,3),(1,1,3),(1,2,4),(2,1,4),(1,4,6),(2,2,6),(4,1,6),\\ (1,12,6),(2,6,6),(3,4,6),(4,3,6),(6,2,6),(12,1,6)\}$$

证明。 根据引理 2.4 和引理 2.5， $aK_m \nabla C_n$ 的距离谱由特征值 $\overline{-2}$ 组成，其重数为 $am-1$；此外还有 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n})$ k =1、2、.....、$n-1$，剩余两个特征值为

$$(am+n-3) \pm \sqrt{(am+n-3)^2 - (3amn - 8am - 4n + 8)}.$$

显然，当且仅当 $(am+n-3)^2 - (3amn-8am-4n+8)$ 是完全平方数时，$(m+n-3) \pm \sqrt{(am+n-3)^2 - (3amn - 8am - 4n + 8)}$ 是整数。此外，显然，对于任意 $1 \leq k \leq n-1$， $2\overline{cos}(\frac{2k\pi}{n})$ 是整数当且仅当 $n \in \{3,4,6\}$。因此，扩展图 $EGW(a、m、n)$ 是 D-积分图，当且仅当 $(am+n-3)^2 - (3amn - 8am - 4n + 8)$ 是完全平方数且 $n \in \{3,4,6\}$。
令 $t = (am+n-3)^2 - (3amn - 8am - 4n + 8) = c^2$。我们考虑以下三种情形。

情形 1. 设 $n = 3$。于是，我们有 $t = (am)^2 - am + 4 = c^2$，即 $(am)^2 - am + 4 - c^2 = 0$。由此得到 $am = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2-15}}{2}$。~~由于 am~~ 是一个整数，而这仅当 $4c^2 - 15$ 是奇完全平方数时才可能。我们假设 $4c^2 - 15 = p^2$，其中 p 为某个正整数。则 $4c^2 - p^2 = 15$，即 $(2c-p)(2c+p) = 15$。由于 $15 = 1 \times 15 = 5 \times 3$，由此得到 $c = 4$ 或 $c = 2$。将 c 的值代入 $am = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2-15}}{2}$，我们得到 $am = 4$ 或 $am = 1$。由于 $4 = 4 \times 1 = 2 \times 2 = 1 \times 4$，因此 a 和 m 的可能值为 $a = 1$、 $m = 4$ 或 $a = 4$、 $m = 1$ 或 $a = 2$、 $m = 2$。类似地， $am = 1$给出的可能值为 $a = 1$、 $m = 1$。因此，对于 $n = 3$，可能的扩展距离整图 $EGW(a, m, n)$ 为

$EGW(1,\ 4,\ 3)$ $EGW(4,\ 1,\ 3)$ $EGW(2,\ 2,\ 3)$ $EGW(1,\ 1,\ 3)$。

情况 2. 设 $n = 4$。我们有 $t = (am + 1)^2 - 4am + 8 = c^2$，即 $(am - 1)^2 + 8 = c^2$。由此得到 $c^2 - (am - 1)^2 = 8$。现在通过因式分解，我们得到 $(c - am + 1)(c + am - 1) = 2 \times 4 = 1 \times 8$。于是 c的可能值为 3。将 $c = 3$的值回代，我们得到 $am = 2$。

由于 $2 = 1 \times 2 = 1 \times 2$，因此，与 $n = 4$ 对应的 a 和 m 的可能取值为 $a = 1,\ \ m = 2$ 或 $a = 1,\ \ m = 1$。因此，对于 $n = 4$，可能的扩展距离整图为 $EGW(1,\ 2,\ 4)$ 和 $EGW(2,\ 1,\ 4)$。

情况 3。 设 $n = 6$。在这种情况下，我们有 $t = (am+3)^2-10am+16 = c^2$，即 $(am - 2)^2 + 21 = c^2$。由此得到 $(c - am + 2)(c + am - 2) = 1 \times 21 = 3 \times 7$。这里 c 的可能取值为 5 和 11。将 c 的值代回，可得 $am = 4$ 和 $am = 12$。由于 $12 = 1\times12 = 2\times6 = 3\times4 = 4\times3 = 6\times2 = 12\times1$和 $4 = 1\times4 = 2\times2 = 4\times1$，因此，与 $n = 6$ 对应的 a和 m的可能取值为$a = 1$、 $m = 4$ 或 $a = 4$、 $m = 1$或 $a = 2$、 $m2$ 或 $a = 1$、 $m = 12$ 或 $a = 2$、 $m =$6 或 $a = 3$、 $m = 4$或 $a = 4$、 $m = 3$或 $a = 6$、 $m = 2$或 $a = 12$、 $m = 1$。因此，对于 $n = 6$，可能的扩展距离整图 $EGW(a, m, n)$ 为EGW(1, 4, 6) EGW(2, 2, 6) EGW(4, 1, 6) EGW(1, 12, 6) EGW(2, 6, 6),EGW(3, 4, 6), EGW(4, 3, 6), EGW(6, 2, 6), EGW(12, 1, 6)。□

下面的观察给出了图 $K_{p,p}\nabla C_n$ 的距离谱。

定理 2.8. $K_{p,p}\nabla C_n$ 的距离谱为

$$\left\{ -2^{2p-2}, -2 - 2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k = 1, 2, \ldots, n-1, \frac{2n + 3p - 6 \pm \sqrt{(2n + 3p - 6)^2 - 16pn + 48p + 16n - 32}}{2} \right\}$$

事实 1. 由正整数组成的有序三元组（a, b, c）称为勾股数，如果 $a^2 + b^2 = c^2$。注意，（3, 4,5）是其中一个分量为 4 的唯一勾股数。

下面的结果给出了图 $K_{p,p}\nabla C_n$ 为 D-整图的充要条件。

定理 2.9。 图 $K_{p,\ p}\nabla C_n$ 是 D-整图，当且仅当 ***(i)*** $n = 3$, $p =1$ 且 ***(ii)*** $n = 6$, $p = 4$。

证明。 根据定理 2.8，图 $K_{p,\ p}\nabla C_n$ 的距离谱包含重数为 $2p-2$ 的特征值 -2，以及 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n})$，其中 k 从 1 取到 $n-1$。此外，剩余的两个特征值为

$$\frac{2n+3p-6\pm\sqrt{(2n+3p-6)^2-16pn+48p+16n-32}}{2}.$$

显然，当且仅当 $(2n+3p-6)^2-16pn+48p+16n-32$ 是完全平方数时，$2n+3p-6\pm\sqrt{(2n+3p-6)^2-16pn+48p+16n-32}$ 才会得到整数值。此外，显然，对于任意 $1\leq k\leq n-1$，当且仅当 n 属于集合 $\{3,4,6\}$ 时，$2\cos(\frac{2k\pi}{n})$ 才会得到整数值。因此，当且仅当 $(2n+3p-6)^2-16pn+48p+16n-32$ 是完全平方数且 n 属于集合 $\{3,4,6\}$ 时，图 $K_{p,\ p}\nabla C_n$ 才是 D-整图。令 $t=(2n+3p-6)^2-16pn+48p+16n-32=c^2$。现在，我们讨论 n 的以下三种情形。

情况 1. 设 $n=3$。那么，我们有 $t=(3p)^2+4^2=c^2$。由于等式两边的每一项都是完全平方数，且左边是两个完全平方数之和，其中一个数 4^2，，因此根据事实 1， $3p$应等于 3，这意味着 p等于 1。因此，这种情况下唯一可能的距离整图是 $K_{1,\ 1}\nabla C_3$。

情况 2. 设 $n=4$。在这种情况下，我们有 $t=(3p+2)^2-16p+32=c^2$，也就是说， $9p^2-4p+36=c^2$。由此可得 $p=\frac{4\pm\sqrt{4c^2-1040}}{18}$。我们先考察满足 $4c^2-1040$ 为完全平方数的 c 的取值。假设$4c^2-1040=q^2$。那么 $(2c-q)(2c+q)=1040$。将 1040 写成两个因数乘积的各种可能方式为

$$\begin{aligned}1040=1\times1040=2\times520=4\times260=8\times130=10\times104\\=20\times52=40\times26=16\times65=80\times13=5\times208.\end{aligned}$$

我们排除可能性 $1040=1\times1040=2\times520=8\times130=40\times26=16\times65=80\times13=10\times104=5\times208$，因为这些数对的和都不是4的倍数。因此我们只考虑两种情形，即$(2c-q)(2c+q)=1040=4\times260$与$(2c-q)(2c+q)=1040=20\times52$。对于情形$(2c-q)(2c+q)=4\times260$，我们得到 $4c=264$，从而推出 $c=66$；而对于情形$(2c-q)(2c+q)=20\times52$，我们有 $c=18$。将这些 c 的值代入$p=\frac{4\pm\sqrt{4c^2-1040}}{18}$，我们得到 $p=\frac{20}{18}$ 与 $p=\frac{132}{18}$，这是荒谬的。因此，对于 $n=4$，不存在使$K_{p,p}\nabla C_n$ 为距离整的 p的值。**情况 3.** 设 $n=6$。此时，我们有 $t=(3p+6)^2-48p+64=c^2$，即

$9p^2-12p+100=c^2$。由此得到 $p=\frac{12\pm\sqrt{4c^2-3456}}{18}$。继续采用与情况 2 相同的方法，我们发现 p 的唯一整数值是4。因此，此情形下唯一可能的 D整图是$K_{4,4}\nabla C_6$。至此证明完成。

□

接下来，我们证明不存在 D-整数哑铃图。

引理 2.10。 *[10]* 哑铃图 $\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$的距离谱由以下特征值组成：

$$\left\{-4^{m-1},0^{m-1},\frac{1}{2}[-(m+n+4)\pm\sqrt{(m+n+4)^2-16m}],\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[(5m+5n-8)\pm\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}],-2-2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right);k=2,\ldots,n\right\},$$

其中，特征值 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n});\ k=2$、3、……、 n的重数均为2。

定理 2.11。 不存在 D-整数哑铃图。

证明。 根据引理 2.10，哑铃图 $\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$ 的 D-谱为：

$$\left\{-4^{m-1},0^{m-1},\frac{1}{2}[-(m+n+4)\pm\sqrt{(m+n+4)^2-16m}],\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[(5m+5n-8)\pm\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}],-2-2cos(\frac{2k\pi}{n});k=2,\ldots,n\right\},$$

其中，特征值 $-2-2cos(\frac{2k\pi}{n});\ k=2,3,\ldots,n$的重数均为 2。

由于 $-(m+n+4)$ 和 $(m+n+4)^2-16m$ 具有相同的奇偶性，且 $(5m+5n-8)$ 和 $25m^2+25n^2-14mn$ 也具有相同的奇偶性，因此只需找出使 $\frac{1}{2}[-(m+n+4)\pm\sqrt{(m+n+4)^2-16m}$ 和 $\frac{1}{2}[(5m+5n-8)\pm\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}]$均为完全平方数的 m 和 n 的取值。由于 $cos\frac{2k\pi}{n}$ 仅当 $n\in\{3,4,6\}$时才是整数，因此，$DB(W_{m.n})$ 是 D-整数，当且仅当 $\sqrt{(m\mp n+4)^2-16m}$ 且

$\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}$为整数，其中 $n \in \{3,4,6\}$。假设 $t=(m+n+4)^2-16m=c^2$。我们考虑以下三种情形。情形 1。令 $n=3$。我们有 $t=(m+7)^2-16m=c^2$，即 $48=c^2-(m-1)^2$，这等价于 $48=(c-(m-1))(c+(m+1))$。由于 $48=1\times 48=2\times 24=3\times 16=6\times 8=4\times 12$，48 的因子和应为 2 的倍数。因此，我们只考虑 $(c-(m-1))(c+(m-1))=4\times 12$、$(c-(m-1))(c+(m-1))=2\times 24$和 $(c-(m-1))(c+(m-1))=6\times 8$。由此得到 $c=8$、$c=13$ 和 $c=7$。将 c 的值代回，我们得到 $m=2$、$m=5$ 和 $m=12$是 m 唯一可能的整数值。现在，当 $m=2$、5、12 和 $n=3$ 时，$\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}$ 不是完全平方数。因此，在这种情形下，$\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$ 不是D-整数。

情况 2。

设 $n=4$。则 $t=(m+8)^2-16m=c^2$，即 $64=(c-m)(c+m)$。因此，c 的可能取值为 8，10 和 17。对应这些取值，m 的可能取值为 15 和 6。但~~对于 $m=6$，15 和~~ $n=4$，我们注意到 $\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}$ 不是完全平方数。因此，在这种情形下，$\boldsymbol{DB}(W_{m,\ n})$ 不是 D-整数。

情况 3。

对于 $n=6$，我们看到 $t=(m+2)^2+96=c^2$。由此得到，$(c-(m+2))(c+(m+2))=96$。仿照上述情形进行类似推导，我们发现不存在正整数值 m，使得~~$\sqrt{(m+n+4)^2-16m}$~~ 和$\sqrt{25m^2+25n^2-14mn}$ 均为整数。因此，在这种情形下不存在距离整数哑铃图。 □

3. $\boldsymbol{D^L}$-整数哑铃图

本节中，我们找出所有可能的距离拉普拉斯整哑铃图。我们证明，这一族中只有 8 个离散图。下面的结果给出了哑铃图的距离拉普拉斯谱。

引理 3.1. [9] 哑铃图 $\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$ 的距离拉普拉斯谱由以下特征值组成

$$\left\{0, 3m+3n, (5m+3n)^{m-1}, (5m+3n-4)^{m-1}, \left\{(3m+5n-2)^{n-1}+2cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}^2;\right.$$
$$\left. k=1,2,\ldots,n-1, \frac{1}{2}\left[(9m+9n-4) \pm \sqrt{(3m-3n-4)^2+4mn}\right]\right\}$$

现在，我们证明只有 9 个距离拉普拉斯积分哑铃图。

定理 *3.2.* 仅有的 D^L-积分哑铃图为 $\boldsymbol{DB}(W_4,3)$, $\boldsymbol{DB}(W_5,3)$,$\boldsymbol{DB}(W_5,4)$ $\boldsymbol{DB}(W_6,4)$, $\boldsymbol{DB}(W_{14},4)$,$\boldsymbol{DB}(W_7,6)$, $\boldsymbol{DB}(W_8,6)$, $\boldsymbol{DB}(W_{12},6)$ 和$\boldsymbol{DB}(W_{19},6)$。

证明。 哑铃图 $\boldsymbol{DB}(W_{m,n})$ 的 D^L-谱见引理 3.1。由于 $(9m+9n-4)$ 和 $(3m-3n-4)^2$ 具有相同的奇偶性，因此，$\frac{1}{2}\left[(9m+9n-4) \pm \sqrt{(3m-3n-4)^2+4mn}\right]$ 是整数，当且仅当 $(3m-3n-4)^2+4mn$ 是完全平方数。此外，$cos\frac{2k\pi}{n}$ 是整数仅当 $n \in \{3,4,6\}$成立。因此， $DB(W_{m.n})$ 是 D^L-积分的，当且仅当$\sqrt{(3m-3n-4)^2+4mn}$ 是整数，其中 $n \in \{3,4,6\}$。假设$t=(3m-3n-4)^2+4mn=c^2$。我们考虑以下三种情形。

情形 1. 设 $n=3$。在这种情形下，我们有 $t=(3m-11)^2+48=c^2$，即 $48=c^2-(3m-11)^2,$，这等价于 $48=(c-(3m-11))(c+(3m-11))$。由于 $48=1\times48=2\times24=3\times16=6\times8=4\times12$，因此 48 的因子之和应为 2 的倍数。因此，我们只考虑 $(c-(3m-11))(c+(3m-11))=4\times12$、$(c-(3m-11))(c+(3m-11))=2\times24$ 和 $(c-(3m-11))(c+(3m-11))=6\times8$。由此得到 $c=8$、$c=13$ 和 $c=7$。将 c 的值代回后，我们得到 $m=4$ 和 $m=5$ 是 m 唯一可能的整数值。因此，当 $n=3$ 时，唯一的距离拉普拉斯整数哑铃图是 $DB(W_4,3)$ 和 $DB(W_5,3)$。

情况 2。设 $n=4$。这里，我们有 $t=(3m-16)^2+16m=c^2$，即，$9m^2-80m+256-c^2=0$。由此可得，$m=\frac{80\pm\sqrt{36c^2-2816}}{18}$。由于 m 是一个整数，因此 $36c^2-2816$ 应为完全平方数。设 $36c^2-2816=p^2$，即 $(6c-p)(6c+p)=2816$。因子 $(6c-p)$ 和 $(6c+p)$ 的不同可能情况为

$$2816=4\times704=2\times1408=1\times2816=256\times11=128\times22$$
$$2816=64\times44=32\times88=16\times176=8\times352.$$

情形 $(6c-p)(6c+p) = 1\times2816$、$(6c-p)(6c+p) = 256\times46$、$(6c-p)(6c+p) = 128\times22$ 和 $(6c-p)(6c+p) = 2\times1408$ 均不可能，因为这些因子的和不是 6 的倍数。对于情形 $(6c-p)(6c+p) = 8\times52$，$c = 30$，与 $c = 30$ 对应的 m 唯一可能的正整数值为 $m = 14$。类似地，对于情形 $(6c-p)(6c+p) = 16\times176$、$(6c-p)(6c+p) = 32\times8$、$(6c-p)(6c+p) = 64\times44$ 和 $(6c-p)(6c+p) = 4\times704$，$m$ 唯一可能的整数值为 5 和 6。因此，当 $n = 4$ 时，唯一的距离拉普拉斯积分哑铃图为 $DB(W_5,4)$ $DB(W_6,4)$ 和 $DB(W_{14},4)$。

情况 3。取 $n = 6$，可得 $t = (3m-22)^2 + 24m = c^2$，即 $(3m-18)^2 + 160 = c^2$。这给出 $c^2 - (3m-18)^2 = 160$，从而推出 $(c-(3m-18))(c+(3m-18)) = 160$。现在，将 160 写成两个因数乘积的不同方式为

$$160 = 1\times160 = 5\times32 = 10\times16 = 20\times8 = 40\times4 = 80\times2.$$

前两种情形 $160 = 1\times160 = 5\times32$和 $1605 = 5\times32$不可能，因为这些因数之和不是 2 的倍数。对于情形 $160 = 10\times16$，与$c = 13$ 对应的 m 唯一可能的正整数值为 $m = 7$。对于 $(c-(3m-18))(c+(3m-18)) = 20\times8$，有 $c = 14$。代回 c 的值，得 $m = 8$。同理，对于剩下的两种情形，m 的值分别为 12 和 19。因此，当 $n = 6$ 时，唯一的 D^L-积分哑铃图为 $DB(W_{7,\,6})$、$DB(W_{8,\,6})$、$DB(W_{12,\,6})$ 和 $DB(W_{19,\,6})$。

□

致谢。S. Pirzada 的研究由 NBHM- DAE 研究项目（编号 NBHM/02011/20/2022）资助。Leonardo de Lima 的研究部分由 CNPq 拨款 305988/2025-5 资助。

数据可用性 本文不涉及数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

利益冲突。作者声明，他们不存在利益冲突。

参考文献

[1] A. Ahmady, J.P. Bell, B. Mohar，整 Cayley 图与群，SIAM 离散数学期刊**28** (2014) 685–701。[2] M. Aouchiche, P. Hansen，图的距离谱：综述，《线性代数及其应用》**458** (2014) 301–386。[3] K.T. Balińska, D. Cvetković, Z. Radosavljević, S.K. Simić, D. Stevanović，关于整数谱图的综述，贝尔格莱德大学电气工程学院数学系列出版物**13** (2002年) 42–65。[4] A. E. Brouwer, W. H. Haemers，图的谱，Universitext。柏林：施普林格，(2012年)。[5] F.C. Bussemaker, D. Cvetković，恰有 13 个连通三次整图，电气工程学院数学与物理系列出版物**544** (1976) 43–48。[6] T. Cheng, L.H. Feng, G.H. Yu, C. Zhang，半二面体群上的整 Cayley 图，应用分析与离散数学**17** (2023年) 334–356。[7]F. Harary, A.J. Schwenk，哪些图具有整谱？，载于：《图与组合学》（编者：R. Bari 和 F. Harary），载于：数学讲义，施普林格，柏林，**406**(1974年) 45–51。[8] A. Ilić，整循环图的距离谱与距离能量，《线性代数及其应用》**433** (2010) 1005–1014。[9] S. Kaliyaperumal, K. Desikan，哑铃图的距离（无符号）拉普拉斯谱，组合学汇刊**12** (2023年) 207–216。[10] S. Kaliyaperumal, K. Desikan，超哑铃图的 D-谱，预印本 (2022) https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1763398/v1。[11] S. Kaliyaperumal, K. Desikan，利用拉普拉斯矩阵的对称 1-逆求广义轮图和哑铃图的电阻距离。Proyecciones（安托法加斯塔）**42** (1)(2023年) 145–166。[12] L. Lu, Q.X. Huang, X.Y. Huang，二面体群上的整 Cayley 图，代数组合学杂志**47**(2018) 585–601。

[13] J.Y. Lu、W.J. Liu、L. Lu，距离积分广义轮图，离散数学 **346** （2023年）1–7。[14] S. Paul，图的连接并的距离拉普拉斯谱，《亚洲欧洲数学杂志》 **15**（2022年）1–8。[15] S. Pirzada，《图论导论》，Universities Press，Orient BlackSwan，海得拉巴（2012年）。[16] M. Pokorný、P. Hıc、D. Stevanović、M. Milosević，论距离积分图，离散数学 **338** （2015年）1784–1792。[17] C.M. Jr. da Silva、M.A.A. de Freitas、R.R. Del-Vecchio， D^L-整数谱图与D^Q-整数谱图，《当代数学》**45**（2017年）58–67。[18] L.G. Wang、X.L. Li、C. Hoede，完全 r 部整数谱图，离散数学 **283** （2004年）231–241。[19] R.S. Yang、L.G. Wang，距离整数完全 r部图，Filomat**29**（2015年）739–749。[20] L. You、M. Yang、W. So、W. Xi，关于等商矩阵的谱及其应用，《线性代数及其应用》**577**（2019年）21–40。739–749。[21] S. Zhao、D. Li、J.X. Meng，距离无符号拉普拉斯整数谱完全 r部图，《新疆大学学报（自然科学版）》**33** （2016年）153–160。