arXiv:2603.07239v1 [math.DG] 7 Mar 2026

复环面上全纯线丛的非交换变形与 SYZ 变换

Kazushi Kobayashi*

摘要

将给定的 n 维复环面 X^n 视为平凡环面纤维化 $X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$，我们可以基于 SYZ构造得到一个镜像对偶的复化辛环面 $\check{X}^n$ 。在 2000 年代中期，作为研究 X^n 非交换变形的一部分，Kajiura 考察了通过沿纤维定义的泊松双向量 θ 对 $X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 进行（实）非形式变形量子化而得到的非交换复环面 X^n_θ。特别地，他构造了 X^n上全纯线丛的非交换变形 $L_\theta \to X^n_\theta$，以及由这些对象构成的曲弯 dg-范畴。另一方面，与这一非交换变形相联系，我们可以通过适当的同构对其进行扭曲，从而构造 X^n 上的平凡全纯线丛的非平凡变形。本文从这一角度出发，将 L_θ 的构造推广到更一般的情形。此外，我们还研究定义在 X^n_θ 的镜像伙伴上的对象，这些对象与上述扩展后的非交换对象互为镜像对偶。

目录

1 引言 **2**

1.1 背景.2 1.1.1 同调镜像对称与 SYZ构造 2 1.1.2 关于 X^n 非交换变形的问题 4 1.2 动机.4 1.3 其他相关工作.5 1.4 主要结果与本文计划.6 1.5 记号.8

*福冈教育大学教育学院数学系，日本福冈县宗像市赤间文教町1-1，邮编811-4192。电子邮箱: kobayashi- k@fukuoka-edu.ac.jp。2020年数学主题分类：14F08、14J33、58B34（主要），53D37、53C08（次要）。关键词：环面、同调镜像对称、SYZ 变换、非交换几何、gerbe。

2 预备知识 **8**
2.1 复环面及其镜像伙伴.8 2.2 X^n 上的全纯线丛.13 ˇ 2.3 X^n 中带有酉局部系统的仿射拉格朗日子流形 16

3 与 X^n 18的非交换变形相关联的全纯线丛的变形
3.1 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的非交换变形.19 3.2 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的非交换变形的歧义. 24
3.3 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间.35

ˇ4 X^n 39上Fukaya范畴对象的变形
4.1 $\mathcal{L}$的变形39 4.2 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间.44

5 结论 48

6 附录 516.1 τ_1 型的 gerbe 变形.51 6.1.1 复几何方面.52 6.1.2 辛几何方面.57 6.2 τ_2 型的 gerbe 变形.59 6.2.1 复几何方面.60 6.2.2 辛几何方面.62

1 引言

1.1 背景

1.1.1 同调镜像对称与SYZ构造

ˇ设 X^n 是一个 n 维复环面， X^n 是 X^n的镜像伙伴。同调镜像对称 [34] 预言，在 Bondal-Kapranov-Kontsevich 构造 [8, 34]的意义下， X^n 上的凝聚层的有界导出范畴 $D^b(Coh(X^n))$ 与 ˇ X^n [13] 上的 Fukaya 范畴 $Fuk(\check{X}^n)$ 的增强三角范畴 $Tr(Fuk(\check{X}^n))$ 之间存在一个等价:

$$D^b(Coh(X^n)) \cong Tr(Fuk(\check{X}^n)). \tag{1}$$

迄今，人们已开展了多项关于环面的同调镜像对称的研究（[35, 14, 24, 25, 1], 等），其研究始于椭圆曲线的情形 [45]。另一方面，正如例如 [19, 27, 23] 中所讨论的，考察命题 (1) 的非交换类比也是一个有趣的问题。本文关注的主要对象是由泊松双向量 a 所导致的 X^n 的（实）非形式变形量子化所对应的非交换变形 X^n_θ，其中 X^n

该泊松双向量 Π_θ 对应于 [21]中类型为 θ_3 的非交换变形。当然，在此语境下，θ 是一个非交换参数。本文旨在对象层面讨论 X_θ^n 与其镜像伙伴 $\check{}\, X_\theta^n$ 之间命题 (1) 的非交换类比。

在讨论同调镜像对称时，考虑 SYZ构造 [46] 是合理的。下面我们简要说明这种方法为何合理。

Strominger-Yau-Zaslow 提出的 SYZ构造猜想指出，每一对卡拉比-丘流形的镜像对（M，$\check{}M$）都可实现为特殊拉格朗日环面纤维化 $\pi:\ M\to B$、$\check{}\pi:\ M\to B$，且它们定义在同一个基空间B上。此外，在这一构造中，每个点$b\in B$上的纤维 $\pi^{-1}(b)$ 和$\check{}\pi^{-1}(b)$ 通过T对偶相关联，也就是说，环面 $\pi^{-1}(b)$ 是环面$\check{}\pi^{-1}(b)$ 的对偶。例如，在此背景下，我们可以将镜像对（X^n，$\check{}X^n$）视为平凡环面纤维化 $X^n\to\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$、$\check{}X^n\to\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$。这里，我们回顾一下，[40] 中提出的傅里叶-穆凯变换给出了一个等价

$$D^b(Coh(X^n))\cong D^b(Coh(\hat{X}^n)),\tag{2}$$

^其中，X^n 是给定阿贝尔簇 X^n的对偶。类似地，T对偶会产生所谓的 SYZ 变换，它是沿着 π 的纤维进行的傅里叶-穆凯变换的类比：$M\to B$，$\check{}\pi:\check{}M\to B$（见 [36, 2]）。通过 SYZ 变换，可以更轻松地明确描述 Fukaya范畴中每个对象的镜像，反之亦然。

另一方面，预期 $D^b(Coh(X^n))$由一个 dg-范畴 DG_{X^n} 生成，该范畴由 X^n上的全纯线丛组成：

$$Tr(DG_{X^n})\cong D^b(Coh(X^n)).$$

至少已知，当 X^n 是阿贝尔簇时，它能够分裂生成 $D^b(Coh(X^n))$（见 [43, 1]）。

综上所述，作为一种基于 SYZ构造证明（1）中（X^n，$\check{}X^n$）的同调镜像对称的思路示例，我们得到如下步骤（例如见 [14, 23]）。首先，通过考虑 SYZ 变换等方法，寻找 DG_{X^n} 中全纯线丛的镜像。其次，聚焦于 DG_{X^n} 以及 $Fuk(\check{}X^n)$的全子范畴 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{}X^n)$，该子范畴由第一步中得到的对象组成，并验证$DG_{X^n}$ 和$Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{}X^n)$实际上分别生成 $D^b(Coh(X^n))$和 $Tr(Fuk(\check{}X^n))$：

$$Tr(DG_{X^n})\cong D^b(Coh(X^n)),\tag{3}$$
$$Tr(Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n))\cong Tr(Fuk(\check{X}^n)).\tag{4}$$

在此背景下，我们应使这些生成元 DG_{X^n} 和 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{}X^n)$尽可能小。最后，证明存在一个等价

$$DG_{X^n}\cong Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)\tag{5}$$

作为 A_∞-范畴。特别地，由陈述 (3)、(4)、(5) 可自动推出 $(X^n,\ \check{}X^n)$ 的同调镜像对称 (1)。

1.1.2 A 关于非交换变形问题 ns of X^n

本文还讨论了关于 X^n 的非交换变形这一问题。一般而言，对于上述意义下由 Π_θ 对 X^n 进行的非交换变形，我们可以通过用适当的同构对平凡全纯线丛 $\mathcal{O}_{X^n} \to X^n$ 进行扭曲，构造出它的非平凡变形。具体来说，假设 $\mathcal{O}_{X^n}$ 的平凡转移函数 1 经同构变为 $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$，其中 φ 不是常函数，并且 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ 表示 X^n 的（实）局部坐标系。那么，尽管 1 不受与 Π_θ 相关的莫亚尔星积影响，$\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ 却会受到莫亚尔星积的非平凡影响。这一事实导致了下文所解释的 DG_{X^n} 中对象的非交换变形存在歧义。设 E 为 DG_{X^n} 的一个对象，即 $E \to X^n$ 是一个全纯线丛。我们将与从 X^n 到 X^n_θ 的变形相关联的 E 的非交换变形记作 E_θ（对 X^n 上的其他全纯线丛，也采用这一记法，包括 θ）。那么，对于某个与 $\mathcal{O}_{X^n}$ 同构的全纯线丛 $L \to X^n$，尽管总存在一个同构 $E \cong E \otimes L$，E_θ 和 $(E \otimes L)_\theta$ 却并不同构。

1.2 动机

X^n 的经典例子之一是 X^n 的变形，即 X^n 的复结构变形。作为其他更复杂的例子，我们还可以考虑 X^n 的非交换变形和 gerbe 变形。由于我们关注的是与 X^n 的（实）非形式变形量子化相关联的 X^n 的非交换变形，因此我们来考虑一个局部表示为如下形式的泊松双向量

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}(\theta_1)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + (\theta_2)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}(\theta_3)_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \tag{6}$$

这里，$\theta_1 = ((\theta_1)_{ij})$、$\theta_3 = ((\theta_3)_{ij})$ 是阶数为 n 的实交错矩阵，$\theta_2 = ((\theta_2)_{ij})$ 是阶数为 n 的实矩阵，而 $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ 表示局部定义的坐标系，其中

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

此外，事实上请注意，泊松双向量 (6) 是全局定义的。为简单起见，对于每个 $i = 1$、2、3，我们将除 θ_i 外的参数均为平凡值时，由泊松双向量 (6) 对 X^n 进行（实）非形式变形量子化所对应的 X^n 的非交换变形称为 θ_i 型非交换变形。

现在我们介绍一些先前的研究。历史上，首先，文献 [44] 研究了椭圆曲线上的 θ_2 型非交换变形。请注意

在椭圆曲线上， θ_1 型和 θ_3 型非交换变形都是平凡的。随后，文献 [19], 讨论了非交换二维环面（ θ_2 型非交换变形）的同调镜像对称。作为将这类研究推广到高维情形的工作，文献 [21], 针对每个 $i=1$（2、3），将与 θ_i 型非交换变形相关的 DG_{X^n} 变形构造为曲弯 dg-范畴（另见 [20]）。这一背景下的（非平凡）曲率，本质上源于 DG_{X^n} 中线丛的全纯性在这些 X^n 型非交换变形下不一定得以保留。特别是，包括高维情形在内，文献 [23][1] 研究了与 θ_2 型非交换变形镜像对偶的描述。另一方面，目前尚未研究与 θ_1 型和 θ_3 型非交换变形镜像对偶的描述。

关于这些先前的研究，本文聚焦于类型 θ_3 的非交换变形，即考虑泊松双向量

$$\Pi_\theta := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$$

通过使用一个固定的 $\theta = (\theta_{ij})$ 阶实交错矩阵 n （我们将在小节 1.3 的最后稍微讨论类型 θ_1 的非交换变形）。我们进一步将由 X^n 和泊松双向量 Π_θ 组成的对记为 X^n_θ。当然，这正是小节 1.1 中提到的 X^n_θ 的定义。

这里，让我们再次明确说明本文的主要目的。首先，针对小节 1.1 中解释的与歧义相关的问题，将 X^n 上在 [21] 中构造的全纯线丛的非交换变形推广到更一般的情形。其次，确定这类扩展后的非交换对象及其镜像的模空间（定理 3.7、定理 4.4）。特别地，我们在定理 4.5 中验证了，辛几何一侧的模空间可自然地与复几何一侧的模空间相识别。我们也可以将这一结果视为 SYZ 变换的一种推广：该变换将由 X^n 中带有酉局部系统的仿射拉格朗日子流形组成的 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$ 与 DG_{X^n} 联系起来，并推广到包含非交换参数 θ 的情形。

1.3 其他相关工作

尽管本文关注的主要对象是 X^n的非交换变形，但一般而言， X^n 的非交换变形与 X^n的 gerbe 变形密切相关。坦率地说，我们预期这类对应关系可由傅里叶-穆凯变换来描述。特别地，这也是将等价关系 (2) 推广到包含变形参数的情形。例如，在 [5], 中，通过聚焦于与形式变形量子化相关的非交换

[1]严格来说，在 [23], 中，基于SYZ构造，研究了没有奇异纤维的Calabi-Yau流形的一般镜像对。

变形，研究了非交换复环面的傅里叶-穆凯伙伴。另一方面，鉴于 [5], ，文献 [42] 讨论了非形式参数下非交换复环面的 Fourier-Mukai 伙伴（另见 [6, 7]）。

在此，为了评述本文与我们先前的论文 [31], 等之间的关系，让我们考虑一个局部表示为如下形式的B场

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(\tau_1)_{ij}dx_i\wedge dx_j+(\tau_2)_{ij}dx_i\wedge dy_j+\frac{1}{2}(\tau_3)_{ij}dy_i\wedge dy_j\right), \tag{7}$$

其中 $\tau_1=((\tau_1)_{ij})$、 $\tau_3=((\tau_3)_{ij})$是 n阶实交错矩阵，而 $\tau_2=((\tau_2)_{ij})$是 n阶实矩阵。注意，B场(7)实际上是整体定义的。与泊松双向量 Π_θ的情形类似，对每个 $i=1$、2、3，我们将与B场(7)相关联的 X^n 的gerbe 变形，在除 τ_i 以外的参数均为平凡的情形下，称为 τ_i型gerbe 变形。例如，我们先前论文 [31] 和 [30] 中所处理的gerbe 变形分别是 τ_1 型与 τ_2型gerbe 变形。特别地，我们可以预期，非交换复环面 X^n_θ（θ_3型非交换变形）的傅里叶-穆凯伙伴，就是我们先前论文 [31] 中所处理的gerbe 变形复环面（ τ_1型gerbe 变形）。

然而，在本研究期间，我们发现，尽管相关论文 [31, 30] 已经发表，但两篇论文在构造此类 gerbe 变形（变形对象的全纯性）时都存在类似错误。本文还将说明如何修正这些错误（见第6节）。

此外，分别与 τ_1 型和 τ_2 型 gerbe 变形镜像对偶的描述，已在 [31] 和 [30], 中研究。另一方面，尽管构造与 τ_3 型 gerbe 变形相关的 X^n 上全纯线丛的变形并不困难，但目前尚未讨论辛几何一侧的对应情形。因此，连同 θ_1 型、θ_2 型和 θ_3 型非交换变形，在辛几何一侧对应情形尚未得到充分理解的情况包括 θ_1 型非交换变形和 τ_3 型 gerbe 变形。事实上，要理解这些情形，我们需要考虑与 X^n 的辛结构相关的泊松结构变形。一般而言，这个问题与 X^n 的变形量子化密切相关，即对 Fuk（X^n）中对象进行某种变形量子化。相关讨论将在 [32] 中另行展开。

1.4 主要结果与本文结构

作为 $Fuk(\check{}X^n)$ 的一个对象，我们取一对由仿射拉格朗日 $\check{}$ 子流形 L in X^n 和沿其定义的酉局部系统 $\mathcal{L}$ 组成的对象 $(L,\mathcal{L})$。通过 SYZ 变换，我们可以得到一个全纯线丛 $E(L,\mathcal{L})\to X^n$，而这些 $E(L,\mathcal{L})$ 构成了小节 1.1 中提到的 dg-范畴 DG_{X^n}。本文聚焦于小节 1.1 中所阐释的歧义所引发的问题，

我们首先构造每个 $E(L,\mathcal{L})$ 的非交换变形 $E(L,\mathcal{L})_\theta$，它与从 X^n 到 X^n_θ 的变形相关。接着，尽管我们可以预期 $E(L,\mathcal{L})_\theta$ 的模空间 $\mathcal{M}_\theta$ 同胚于一个实环面，本文将明确给出这个实环面的具体形式。该结果见定理 3.7。

另一方面，当我们考虑与每个 $E(L,\mathcal{L})_\theta$ 镜像对偶的对象时，需要谨慎处理。现在，在从 $\check{}X^n$ 到 $\check{}X^n_\theta$（X^n_θ 的镜像伙伴）的变形过程中，辛形式保持不变。换言之，自然可以认为每个 L 在此变形下保持不变。相较之下，B场会被一个依赖于 θ 的 B场 B_θ 扭曲。不幸的是，存在这样的情况：给定的 L 不满足 [14,定义 1.1]（[14, 定义 1.1] 给出了 Fukaya 范畴中对象的定义）中所述的要求：

$$[B_\theta] \notin H^2(L,\mathbb{Z}).$$

这意味着我们无法在通常的 Fukaya 范畴中讨论对象（L, $\mathcal{L}$）的变形。为了解决这一问题，本文采用我们此前论文 [31] 中提出的如下思路：不使用“通常的”线丛（酉局部系统），而是在每个 L 上使用一个“扭曲的”线丛，该线丛与平坦 gerbe 相关联，其 1-联络由 $B_\theta|_L$ 决定。实际上，基于这一思路，我们可以构造与从 $\check{}X^n$ 到 $\check{}X^n_\theta$ 的变形相关联的每个（L, $\mathcal{L}$）的变形（L, $\mathcal{L}_\theta$）。此外，与复几何一侧类似，我们指定（L, $\mathcal{L}_\theta$）的模空间 $\mathcal{M}^\vee_\theta$。这一结果见定理 4.4。最后，在定理 4.5 中，通过比较 $\mathcal{M}^\vee_\theta$ 与 $\mathcal{M}_\theta$，我们将（X^n, $\check{}X^n$）上的 SYZ 变换推广到包含非交换参数 θ 的情形。

本文安排如下。第 2 节回顾环面同调镜像对称的基础知识。复几何方面的主要讨论见第 3 节。在第 3.1 小节中，我们回顾全纯线丛的非交换变形 $E(L,\mathcal{L})$，该变形是在[21] 中构造的，与从 X^n 到 X^n_θ的变形相关联。在第 3.2 小节中，我们深入讨论第 1.1 小节所阐述的歧义所引发的问题。特别是针对这一问题，我们将第 3.1 小节中介绍的全纯线丛非交换变形 $E(L,\mathcal{L})$推广到更一般的情形。在第 3.3 小节中，我们具体刻画这些扩展后的非交换对象 $E(L,\mathcal{L})_\theta$ 的模空间，相关结果见定理 3.7。辛几何方面的主要讨论见第 4 节。在第 4.1 小节中，我们基于先前论文 [31]中提出的思想，构造每个 $(L,\mathcal{L})$的变形 $(L,\mathcal{L}_\theta)$。这些 $(L,\mathcal{L}_\theta)$也是非交换对象 $E(L,\mathcal{L})_\theta$的镜像。在第 4.2 小节中，我们具体刻画变形对象 $(L,\mathcal{L}_\theta)$的模空间，相关结果见定理 4.4。此外，作为定理 4.4 和定理 3.7 的推论，我们在定理 4.5 中将 $(X^n,\check{}X^n)$上的 SYZ 变换推广到包含非交换参数 θ 的情形。第 5 节从傅里叶-穆凯对偶和广义复几何的角度，讨论本文与我们先前论文 [31] 之间的关系。

第 6 节说明如何修正我们先前研究[31, 30]中的错误。特别是，第 6.1 小节和第 6.2小节分别致力于修正 [31]和 [30], 中的错误。

1.5 记号

本文通篇使用以下记号。

设 M为光滑流形， E为 M上的向量丛。则 TM与 T^*M分别表示 M上的切丛与 M上的余切丛。此外，我们将 E 的整体截面空间记为 $\Gamma(M,E)$，或简记为$\Gamma(E)$。但在例外情形下，我们也用 $\Gamma(E)$表示在 M 中某个开集上局部定义的 E 的截面空间。

另一方面， $M(n;\mathbb{R})$、对称矩阵$(n;\mathbb{R})$与交替形式$(n;\mathbb{R})$分别表示 n阶实矩阵的集合、 n阶实对称矩阵的集合以及 n阶实交错矩阵的集合（我们在此意义下使用记号 $M(n;\mathbb{Z})$等）。此外，对每个 $i=1,..,n$，我们将第 i个分量为1的 n 阶初等列向量记为 $\boldsymbol{e}_i$。 与 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$的情形类似，除非另有说明，当我们使用某类向量时，均将其视为列向量。

2 预备知识

本节回顾环面的同调镜像对称基础。具体而言，在定义给定复环面的镜像伙伴时，我们采用广义复几何的框架 [18, 16]辅助。

2.1 复环面及其镜像伙伴

本小节旨在说明如何通过广义复几何的框架定义给定复环面的镜像伙伴。

设 T 为一个 $n\in\mathbb{N}$ 阶复矩阵，满足 $\mathrm{Im}T$ 正定且 $\det T\neq 0$[2]。我们将 n维复环面 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)$记为$X^n$:

$$X^n:=\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n),$$

事实上，这个 X^n 可以如下被视为一个 n维复流形。我们固定一个足够小的 $\epsilon>0$, 并令

$$O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}:=\left\{\ [x+Ty]\in X^n\ \middle|\ \frac{l_j-1}{3}-\epsilon<x_j<\frac{l_j}{3}+\epsilon,\right.$$
$$\left.\frac{m_k-1}{3}-\epsilon<y_k<\frac{m_k}{3}+\epsilon,\ j,k=1,\dots,n\right\}$$

[2]虽然定义 n维复环面 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)$时无需假设条件 $\det T\neq 0$ ，但在下文所述的设定中，若 $\det T=0$，其镜像伙伴便不存在。不过，实际上至少已有两种方法可以避免这一问题。详情请参见 [28]。

是 X^n中的子集，其中 l_j、 $m_k = 1$、2、3，一个 d

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

此外，为简化记号，对于每个开集 $O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}$ ，其中 X^n，我们令

$$l := (l_1 \cdots l_n), \quad m := (m_1 \cdots m_n),$$

并将 $O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}$ 记作 O^l_m:

$$O^l_m := O^{l_1\cdots l_n}_{m_1\cdots m_n}.$$

这些开集 O^l_m 构成的族 $\{O^l_m\}_{(l;m)\in I}$ 给出了 X^n的一个开覆盖:

$$X^n = \bigcup_{(l;m)\in I} O^l_m,$$

其中

$$I := \Big\{(l;m) = (l_1 \cdots l_n; m_1 \cdots m_n) \mid l_1, \cdots, l_n, m_1, \cdots, m_n = 1, 2, 3\Big\}.$$

然后，我们为每个 O^l_m 局部定义复坐标系 z ： $=x + Ty \in \mathbb{C}^n$，其中

$$z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

特别地，非平凡的坐标变换局部由平移 $z \mapsto z + \boldsymbol{e}_1$，……， $z \mapsto z + \boldsymbol{e}_n$、 $z \mapsto z + T\boldsymbol{e}_1$，……， $z \mapsto z + T\boldsymbol{e}_n$给出，显然它们是全纯的。此外，忘记其复结构后，我们可以将 X^n 视为一个 $2n$维实环面 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \approx (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$。在此背景下，由于开集 O^l_m 中的每个点 $[z = x + Ty]$ 都可以表示为（$[x]$， $[y]$），因此我们可以将（x， y） $\in \mathbb{R}^{2n}$ 解释为每个 O^l_m的坐标系。

现在，我们希望定义 X^n 的镜像伙伴。然而，通常很难为给定的卡拉比-丘流形找到镜像伙伴；若还要考虑它的变形（非交换变形、gerbe 变形等），就更加困难。鉴于此，本文采用广义复几何框架，以寻找 X^n 及其非交换变形的镜像伙伴。具体而言，根据 [22]，我们将 X^n 的复结构所诱导的广义复结构及其 β-场变换视为广义复流形，并考察它们的镜像变换，从而确定与它们镜像对偶的复化辛环面，其中 X^n及其非交换变形也被视为广义复流形。

我们考虑一个线性映射

$$\mathcal{I}_T : \Gamma(TX^n \oplus T^*X^n) \to \Gamma(TX^n \oplus T^*X^n)$$

其局部表达式为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_T \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t \right) \\
&\quad \begin{pmatrix} -XY^{-1} & -Y - XY^{-1}X & O & O \\ Y^{-1} & Y^{-1}X & O & O \\ O & O & (Y^{-1})^t X^t & -(Y^{-1})^t \\ O & O & Y^t + X^t (Y^{-1})^t X^t & -X^t (Y^{-1})^t \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$X := \mathrm{Re}T, \quad Y := \mathrm{Im}T,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \quad dx := \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}, \quad dy := \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_n \end{pmatrix},$$

并且 M^t表示给定矩阵 M的转置。我们看到，线性映射$\mathcal{I}_T$ 是由X^n的复结构诱导的广义复结构。

˘ 我们将 X^n的镜像伙伴定义为 X^n 。一般而言，对于一个配备了 T^{2n}上的广义复结构 $\mathcal{I}$的 $2n$维实环面 T^{2n}，其与 $\mathcal{I}$ 镜像对偶的、定义在 T^{2n} 上的广义复结构 ˘$\mathcal{I}$ 定义为

$$\check{\mathcal{I}} = M_{(n)}\, \mathcal{I}\, M_{(n)}, \tag{9}$$

其中

$$M_{(n)} := \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & O & O & I_n \\ O & O & I_n & O \\ O & I_n & O & O \end{pmatrix},$$

I_n 是 n阶单位矩阵，并注意 $M^{-1}{}_{(n)} = M_{(n)}$ （见 [3, 4, 22,28]）[3]。我们将在本小节末尾解释此定义的含义。根据镜像变换（9），我们可以计算广义复

[3]严格来说， [22] 中讨论的对象是 $2n$维平坦广义 K¨ahler 环面；关于这一概念的定义，详见 [22] 。本文讨论的环面可以视为此类对象的实例。

ˇ结构 $\mathcal{I}_T$，它在局部与 $\mathcal{I}_T$ 镜像对偶，如下所示:

$$\begin{aligned}
&\check{\mathcal{I}}_T\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t,\frac{\partial}{\partial\check{y}}^t,d\check{x}^t,d\check{y}^t\right)\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t,\frac{\partial}{\partial\check{y}}^t,d\check{x}^t,d\check{y}^t\right)\\
&\quad\begin{pmatrix}
-XY^{-1} & O & O & -Y-XY^{-1}X\\
O & -X^t(Y^{-1})^t & Y^t+X^t(Y^{-1})^tX^t & O\\
O & -(Y^{-1})^t & (Y^{-1})^tX^t & O\\
Y^{-1} & O & O & Y^{-1}X
\end{pmatrix}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

在这里,

$$\frac{\partial}{\partial\check{x}}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial\check{y}}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix},\quad d\check{x}:=\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^n\end{pmatrix},\quad d\check{y}:=\begin{pmatrix}dy^1\\ \vdots\\ dy^n\end{pmatrix}$$

与.....相关联

$$\check{x}:=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad \check{y}:=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

它们是一个 $2n$ 维实环面 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}\approx(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\times(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ 的局部坐标，具体含义如下。与复几何一侧类似，我们固定一个足够小的 $\epsilon>0$，并取 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ 的一个开覆盖 $\{\check{O}^l_m\}_{(l;m)\in I}$，该覆盖是通过将 $(x,\ y)$ 替换为 $(\check{x},\ \check{y})$ 得到的，即

$$\begin{aligned}
\check{O}^l_m:=\Bigg\{\begin{pmatrix}[\check{x}]\\ [\check{y}]\end{pmatrix}\in(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\times(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\ \Big|\ &\frac{l_j-1}{3}-\epsilon<x^j<\frac{l_j}{3}+\epsilon,\\
&\frac{m_k-1}{3}-\epsilon<y^k<\frac{m_k}{3}+\epsilon,\ j,k=1,\dots,n\Bigg\}.
\end{aligned}$$

族 $\{\check{O}^l_m\}_{(l;m)\in I}$ 给出了 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ 的一个开覆盖:

$$\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}=\bigcup_{(l;m)\in I}\check{O}^l_m.$$

然后，我们局部地为每个ˇ O^l_m 定义坐标系$(\check{x},\ \check{y})\in\mathbb{R}^{2n}$，而非平凡的坐标变换则局部由阶为 $2n$ 的初等列向量所对应的平移给出。另一方面，该表示

(10)中的矩阵可改写为

$$\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ O & -\mathrm{Re}(-(T^{-1})^t) & I_n & O \\ (\mathrm{Re}(-(T^{-1})^t))^t & O & O & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} O & O & O & -((\mathrm{Im}(-(T^{-1})^t))^{-1})^t \\ O & O & (\mathrm{Im}(-(T^{-1})^t))^{-1} & O \\ O & -\mathrm{Im}(-(T^{-1})^t) & O & O \\ (\mathrm{Im}(-(T^{-1})^t))^t & O & O & O \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ O & \mathrm{Re}(-(T^{-1})^t) & I_n & O \\ -(\mathrm{Re}(-(T^{-1})^t))^t & O & O & I_n \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中，假设 $\det T \neq 0$，可得 $\det(Y + XY^{-1}X) \neq 0$，并且

$$\mathrm{Re}(-(T^{-1})^t) = -((Y + XY^{-1}X)^{-1})^t X^t (Y^{-1})^t,$$
$$\mathrm{Im}(-(T^{-1})^t) = ((Y + XY^{-1}X)^{-1})^t.$$

因此，当我们根据镜像变换（9）定义 X^n 的镜像伙伴时，它由配备以下复化辛结构的 $2n$维实环面 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ 给出。令两个矩阵$\omega^\vee$ 和$B^\vee$ 分别为

$$\underline{\omega}^\vee = \mathrm{Im}(-(T^{-1})^t)$$

and

$$\underline{B}^\vee = \mathrm{Re}(-(T^{-1})^t),$$

由于（10）中的表示矩阵最终被证明是矩阵（11），我们看到，广义复结构（10）由辛形式

$$\omega^\vee := d\check{x}^t \underline{\omega}^\vee d\check{y}$$

和B场

$$B^\vee := d\check{x}^t \underline{B}^\vee d\check{y}.$$

利用这些 $\omega^\vee$ 和 $B^\vee$，我们定义复化辛形式 $\tilde{\omega}^\vee$ 为

$$\tilde{\omega}^\vee = \mathbf{i}\omega^\vee + B^\vee = d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)d\check{y},$$

其中 $\mathbf{i} := \sqrt{-1}$。下文将此复化辛环面记作

$$\check{X}^n := \Big(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\ \tilde{\omega}^\vee = d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)d\check{y}\Big).$$

现在我们解释镜像变换（9）的含义。我们可以将 $\check{X}^n$视为平凡环面纤维化 $\check{X}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$；（$[\check{x}]$，$[\check{y}]$）$\mapsto [\check{x}]$，同样地，$X^n$也可以视为平凡环面纤维化 $X^n \approx$（$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$）$\times$（$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$）$\to$

$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$；（$[x]$，$[y]$）$\mapsto [x]$ 通过识别 $X^n \approx \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \approx (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$。特别地，$y$ 和 $\check{}y$ 是这些平凡环面纤维化的纤维的局部坐标。尽管本文使用记号 x 和 $\check{}x$，但从SYZ构造的角度来看，我们可以将平凡环面纤维化 $X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 和 $\check{} X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 视为同一基空间 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$上的平凡环面纤维化，即，我们可以将 x 与 $\check{}x$识别。镜像变换（9）描述了这些平凡环面纤维化的纤维之间的T对偶。

2.2 X^n上的全纯线丛

本小节旨在说明一类全纯线丛，预计它们将生成 X^n上的凝聚层有界导出范畴。

我们如下定义一类带有可积联络的全纯线丛 $E_A \to X^n$ $\nabla_{(A,p,q)}$。事实上，我们首先将这些对象构造为 X^n 上的带联络的光滑复线丛，稍后再讨论它们的全纯性。任取 $A \in M(n;\ \mathbb{Z})$，

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

并将它们固定下来。我们定义一个映射 j_A：$(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\times$（只需为 $\boldsymbol{e}_1$、.....、$\boldsymbol{e}_n$、$T\boldsymbol{e}_1$、.....、$T\boldsymbol{e}_n$ 以及 $\mathbb{C}^n$中的元素定义这样的映射，因为 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ 由 $\boldsymbol{e}_1$、.....、$\boldsymbol{e}_n$、$T\boldsymbol{e}_1$、.....、$T\boldsymbol{e}_n$生成），其定义为

$$\begin{aligned} j_A(\boldsymbol{e}_i, z) &= \exp\left(2\pi \mathbf{i} \boldsymbol{e}_i^t A^t \left(T - \bar{T}\right)^{-1} (z - \bar{z})\right) = \exp\left(2\pi \mathbf{i} \boldsymbol{e}_i^t A^t y\right), \\ j_A(T\boldsymbol{e}_i, z) &= 1, \end{aligned}$$

其中 $i = 1,$ ....., n, $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\backslash\{0\}$，并注意到 $z = x + Ty$。对于任意 $k,l = 1,$ ....., n，容易验证映射 j_A 满足以下关系

$$j_A(\boldsymbol{e}_l, z + \boldsymbol{e}_k) j_A(\boldsymbol{e}_k, z) = j_A(\boldsymbol{e}_k, z + \boldsymbol{e}_l) j_A(\boldsymbol{e}_l, z), \tag{12}$$
$$j_A(T\boldsymbol{e}_l, z + \boldsymbol{e}_k) j_A(\boldsymbol{e}_k, z) = j_A(\boldsymbol{e}_k, z + T\boldsymbol{e}_l) j_A(T\boldsymbol{e}_l, z), \tag{13}$$
$$j_A(T\boldsymbol{e}_l, z + T\boldsymbol{e}_k) j_A(T\boldsymbol{e}_k, z) = j_A(T\boldsymbol{e}_k, z + T\boldsymbol{e}_l) j_A(T\boldsymbol{e}_l, z), \tag{14}$$

也就是说，以下各项均定义良好：

$$\begin{aligned} &j_A(\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_l, z) := j_A(\boldsymbol{e}_l, z + \boldsymbol{e}_k) j_A(\boldsymbol{e}_k, z), \\ &j_A(\boldsymbol{e}_k + T\boldsymbol{e}_l, z) := j_A(T\boldsymbol{e}_l, z + \boldsymbol{e}_k) j_A(\boldsymbol{e}_k, z), \\ &j_A(T\boldsymbol{e}_k + T\boldsymbol{e}_l, z) := j_A(T\boldsymbol{e}_l, z + T\boldsymbol{e}_k) j_A(T\boldsymbol{e}_k, z). \end{aligned}$$

一般而言，映射 j_A 称为我们要处理的光滑复线丛 E_A 的自守因子，而光滑复函数

$j_A(\boldsymbol{e}_1,\ z)$……，$j_A(\boldsymbol{e}_n,\ z)$，$j_A(T\boldsymbol{e}_1,\ z)$……，$j_A(T\boldsymbol{e}_n,\ z)$本质上是它的转移函数。特别地，关系式（12）、（13）、（14）对应于上循环条件。利用这个 j_A，我们来定义 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ 在$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 上的作用：

$$\begin{aligned}\big(z,t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} &\longmapsto \big(z+\boldsymbol{e}_i, j_A(\boldsymbol{e}_i,z)t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C},\\ \big(z,t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} &\longmapsto \big(z+T\boldsymbol{e}_i, j_A(T\boldsymbol{e}_i,z)t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\end{aligned}$$

对每个 $i=1,$ ……，n。于是，我们可以将光滑复线丛$E_A \to X^n$ 获得为 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 关于 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$的作用的商：

$$\mathrm{Tot}(E_A) := \big(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\big)/\big(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n\big),$$

其中，Tot($\mathcal{E}$) 表示光滑流形上的向量丛 $\mathcal{E}$ 的全空间。此后，对于每个 $i=1,$ ……，n，通过识别 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$；$z=x+Ty \mapsto (x,\ y)$，我们分别将 $j_A(\boldsymbol{e}_i,\ z)$ 和 $j_A(T\boldsymbol{e}_i,\ z)$ 记作 $j_A(\boldsymbol{e}_i,\ x,\ y)$ 和 $j_A(T\boldsymbol{e}_i,\ x,\ y)$，因为从 SYZ图景的角度来看，使用实坐标系（$x,\ y$）比使用复坐标系 $z=x+Ty$ 更为方便：

$$j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y) := j_A(\boldsymbol{e}_i,z), \quad j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y) := j_A(T\boldsymbol{e}_i,z).$$

此外，利用 p、$q \in \mathbb{R}^n$，我们在局部上于 $\Gamma(E_A)$ 上定义微分算子 $\nabla_{(A,p,q)}$，其定义为

$$\nabla_{(A,p,q)} = d + \omega_{(A,p,q)}, \quad \omega_{(A,p,q)} = -2\pi\mathbf{i}\Big(\Big(x^tA^t+p^t\Big)+q^tT\Big)dy, \tag{15}$$

其中，d 表示外微分。我们可以很容易地验证，这个 $\nabla_{(A,p,q)}$与 E_A的转移函数相容，也就是说，它是 E_A的自守因子j_A，因此微分算子 $\nabla_{(A,p,q)}$ 确实在E_A上定义了一个联络。我们将带有联络$\nabla_{(A,p,q)}$ 的光滑复线丛 $E_A \to X^n$ 记为 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$，即 $E^{\nabla}_{(A,p,q)} := (E_A,\ \nabla_{(A,p,q)})$。

为了研究每个 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$的全纯性，我们按照 [9]回顾联络可积性的定义。设 X 是一个紧致的 K¨ahler 流形，并考虑其上带有联络 D 的光滑复向量丛 E。在此背景下，$D^{(0,1)}$ 表示 D的 (0,1)-部分。

定义 2.1 ([9, 定义 1.4.1])。若联络 D 满足$(D^{(0,1)})^2=0$，则称其为可积的。

因此，(E,D) 可以视为 X 上的全纯向量丛，前提是 D 可积。

现在，我们给出以下命题，不附证明，因为类似的陈述已在 [29,命题 3.1] 中得到证明。

命题2.2. 对于给定的三元组$(A,p,q) \in M(n;\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，联络 $\nabla_{(A,p,q)}$ 是 $E_A \to X^n$ 上的可积联络，当且仅当

$$AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C}).$$

在假设 $AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C})$成立的情况下，根据定理5.7] （另见 [23]），我们看到全纯线丛 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 构成一个dg-范畴DG_{X^n}，这是一个推论。一般而言，对于任意 A_∞-范畴 $\mathscr{A}$，我们可以利用Bondal-Kapranov-Kontsevich 构造 [8, 34] 构造增强三角范畴 $Tr(\mathscr{A})$。我们预期，dg-范畴DG_{X^n} 按照 Bondal-Kapranov-Kontsevich 构造的意义，生成 X^n 上的凝聚层的有界导出范畴 $D^b(Coh(X^n))$:

$$Tr(DG_{X^n}) \cong D^b(Coh(X^n)).$$

至少已知，当 X^n 是阿贝尔簇时，它分裂生成 $D^b(Coh(X^n))$（见 [43, 1]）。

这里，我们依据 [20], 中的第 3.2 小节，给出当 $T = \mathbf{i} \cdot I_n$ 且 A 正定时，$E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的全局全纯截面的局部表达式（显然，这些 A 和 T 满足条件 $AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C})$）。注意，$\#(\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n) = \det A \in \mathbb{N}$。在这种情况下， $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的全局全纯截面$\xi_{(A,p,q)}$ 在局部表示为

$$\xi_{(A,p,q)}(x,y) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n} C_m \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right),$$

$$\xi_{(A,p,q,l,m)}(x) := \exp\left(-\pi(x^t-(-Al+m-p)^t(A^{-1})^t)A(x-A^{-1}(-Al+m-p)) - 2\pi\mathbf{i}(x+l)^t q\right),$$

其中，对每个 $m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$都有 $C_m \in \mathbb{C}$。换言之，此时空间 $\Gamma(X^n, E^{\nabla}_{(A,p,q)})$是一个$(\det A)$维的 $\mathbb{C}$向量空间，而这个 $\mathbb{C}$向量空间$\Gamma(X^n, E^{\nabla}_{(A,p,q)})$的一组基为

$$\left\{ \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right) \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n \right\}.$$

事实上，对于每个 $m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$，我们都可以验证，局部定义的光滑函数 $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right)$ 满足这些关系

$$\begin{aligned}
&j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right)\right)\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x+\gamma_i)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right),\\
&j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right)\right)\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t (y+\boldsymbol{e}_i)\right),\\
&\left(\bar\partial + \omega^{(0,1)}_{(A,p,q)}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{(A,p,q,l,m)}(x)\, \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right)\right) = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\bar{\partial}$, $\omega^{(0,1)}{}_{(A,p,q)}$ 分别表示 d 和$\omega_{(A,p,q)}$的 (0,1)-部分，以及 $i = 1,\ldots,n$。此外，对于每一对 $(l,m) \in \mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n)$，$\xi_{(A,p,q,l,m)}$ 都属于 $\mathbb{R}^n$ 上的施瓦茨空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，因为每个 $\xi_{(A,p,q,l,m)}$ 都是一个高斯函数。

ˇ2.3 X^n 中的带酉局部系统的仿射拉格朗日子流形

ˇ 本小节旨在给出定义在 X^n 上、与全纯线丛 $E_{(A}^{\nabla}{}_{,p,q)}$ 镜像对偶的对象。

在开始主要讨论之前，我们先回顾给定复化辛流形上的 Fukaya 范畴对象的定义（例如参见 [14, 定义 1.1] ）。设 $M_{\omega,B} := (M, \mathbf{i}\omega + B)$ 是一个复化辛流形，其中 M 是一个偶数维实流形，ω 是 M 上的辛形式，B 是 M 上的B场。对于这个 $M_{\omega,B}$，$M_{\omega,B}$ 上的 Fukaya 范畴的一个对象由一个位于 $M_{\omega,B}$ 中的拉格朗日子流形 L 组成，即 $M_{\omega,B}$ 中满足以下条件的子流形 L

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M, \quad \omega\Big|_L = 0,$$

以及一个带有酉联络 $\nabla_{\mathcal{L}}$ 的光滑复线丛 $\mathcal{L} \to L$，使得

$$\Omega_{\nabla_{\mathcal{L}}} = 2\pi\mathbf{i}B\Big|_L, \tag{16}$$

其中$\Omega_{\nabla_{\mathcal{L}}}$ 表示 $\nabla_{\mathcal{L}}$的曲率形式。

注 2.3. 正如 [14, 注 1.19]，中所指出的，实际上只需考虑这些条件

$$\Omega_{\nabla_{\mathcal{L}}} = 0, \tag{17}$$

$$B\Big|_L = 0 \tag{18}$$

而不用(16) 对$\check{}X^n$的要求。鉴于这一事实，下文在考虑$\check{}X^n$上的*Fukaya*范畴的对象时，我们使用条件(17)、(18) 。

我们取 $A \in M(n;\mathbb{Z})$,

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

任意选取并固定它们。我们考虑一个 n 维仿射子流形

$$\tilde{L}_{(A,p)} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ A\check{x} + p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{2n} \right\}$$

位于 $\check{X}^n$ 的覆盖空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中（我们可以将 $(\check{x},\ \check{y})$ 视为 $\check{X}^n$ 的覆盖空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 的坐标），并在 X^n 中定义一个 n 维仿射子流形 $\check{L}_{(A,p)}$，如下:

$$L_{(A,p)} = \pi\left(\tilde{L}_{(A,p)}\right),$$

其中 $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \check{X}^n$ 是覆盖映射。我们进一步取带有平坦联络的平凡复线丛 $\mathcal{O}_{(A,p)} \to L_{(A,p)}$

$$\nabla^{\vee}_{(A,p,q)} := d + \omega^{\vee}_{(A,p,q)}, \quad \omega^{\vee}_{(A,p,q)} := 2\pi \mathbf{i} q^t d\check{x}$$

根据注 2.3，并设 $\mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)} := (\mathcal{O}_{(A,p)},\ \nabla^{\vee}_{(A,p,q)})$。我们将 n 维仿射子流形 $L_{(A,p)}$ in X^n 与带有平坦联络的平凡复线丛 $\mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 所组成的对记为 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$，即 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)} :=(L_{(A,p)},\ \mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)})$。于是有如下命题成立。这里省略其证明，因为类似的论述已在 [29] 的第 4.1 小节中得到证明。

命题 2.4。对于给定的三元组 $(A、\ p、\ q) \in M(n;\ \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，对 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 给出 *Fukaya*范畴 *over* $\check{X}^n$ 中的一个对象，当且仅当

$$AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C}).$$

˘ 我们将 Fukaya范畴中满足条件 $AT \in$ 对称矩阵$(n;\ \mathbb{C})$ 的对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 所构成的、关于 X^n 的全子范畴记为 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$。

通过比较命题2.2与命题 2.4，我们立即得到以下命题，它表明对象

$$E^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

DG_{X^n} 中的对象与

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

$Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$ 中的对象，对于给定的三元组 $(A,p,q)\ \in M(n;\ \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，互为镜像对偶。

命题 2.5。对于给定的三元组$(A,p,q) \in M(n;\ \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，联络 $\nabla_{(A,p,q)}$ 是 $E_A \to X^n$ 上的可积联络，当且仅当这一对 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 给出了 $\check{X}^n$ 上 *Fukaya*范畴的一个对象。

下文中，我们假设

$$AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C}).$$

我们对 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$与 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$之间的对应关系补充两点说明。

首先，我们来谈谈 SYZ 变换。如第 2.1 小节所述，我们可以将复化辛环面 $\check{X}^n$ 视为平凡环面纤维化 $\check{}\ X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$；$([\check{x}],\ [\check{y}]) \mapsto [\check{x}]$。于是，我们可以将每个仿射

拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ 视为 $\check{X}^n$ 中的截面 $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \check{X}^n$; $[\check{x}] \mapsto ([\check{x}], [A\check{x}+p])$ 的图形，其中 $\check{X}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$。特别地，对应关系

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)} \longmapsto E^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

有时被称为 SYZ 变换（见 [36, 2]）。

作为第二点，我们从同调镜像对称的观点，解释小节 2.2 中给出的整体全纯截面 $\xi_{(A,p,q)}$ 的一种诠释，因此我们假设 $T = \mathbf{i}\cdot I_n$ 且 A 是正定的。这里，为简单起见，我们令 $q := 0 \in \mathbb{R}^n$。我们可以把集合 $\pi^{-1}(L_{(A,p)}) = (\pi^{-1}\circ\pi)(\tilde{L}_{(A,p)})$ 视为

$$\pi^{-1}\left(L_{(A,p)}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ A\check{x}+p+Al-m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{2n} \right\},$$

其中 $l \in \mathbb{Z}^n$ 和 $m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$ 对应于出现在 $\xi_{(A,p,0)}$的局部表达式中的那些量。另一方面，在复几何一侧，空间 $\Gamma(X^n, E^{\nabla}_{(A,p,0)})$ 可以等同于从平凡全纯线丛 $E^{\nabla}_{(O,0,0)} \to X^n$ 到 $E^{\nabla}_{(A,p,0)}$的全纯映射空间，并且 $E^{\nabla}_{(O,0,0)}$ 对应于仿射拉格朗日子流形

$$L_{(O,0)} = \pi\left(\tilde{L}_{(O,0)}\right) = \pi\left(\left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{2n} \right\}\right)$$

在 $\check{X}^n$ 中。在这种情况下，坦率地说，高斯函数 $\xi_{(A,p,0,0,m)}(x)$ 的轴 $x = A^{-1}(m-p)$ $(l=0 \in \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n)$ 对应于 $L_{(A,p)}$ 和 $L_{(O,0)}$ 在 X^n中的交点：

$$L_{(A,p)} \cap L_{(O,0)} = \left\{ \begin{pmatrix} [A^{-1}(m-p)] \\ [0] \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\times(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \approx \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \approx \check{X}^n \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n \right\},$$

$$\#\left(L_{(A,p)} \cap L_{(O,0)}\right) = \#\left(\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n\right) = \det A = \dim_{\mathbb{C}}\Gamma\left(X^n, E^{\nabla}_{(A,p,0)}\right).$$

3 与 X^n的非交换变形相关联的全纯线丛的变形

在说明本节的目的之前，我们先简要介绍 X^n 上的泊松双向量。取矩阵 $\theta_1 = ((\theta_1)_{ij})$、 $\theta_3 = ((\theta_3)_{ij}) \in$ 交替形式$(n;\mathbb{R})$，以及$\theta_2 = ((\theta_2)_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$。利用它们，我们考虑一个局部表示为下式的泊松双向量

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(\theta_1)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j} + (\theta_2)_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}(\theta_3)_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}\wedge\frac{\partial}{\partial y_j}\right). \tag{19}$$

特别地，矩阵 θ_1、 θ_2、 θ_3 是常矩阵，而非平凡的坐标变换是由基本列向量所作的平移。

因此，事实上，泊松双向量(19)在 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n} \approx (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \approx X^n$上是整体定义的。

取任意矩阵 $\theta = (\theta_{ij}) \in$ 交替形式$(n;\mathbb{R})$，并将其固定。下文将讨论在 $\theta_3 = \theta$ 和 $\theta_1 = \theta_2 = O$的情形下，由泊松双向量 (19) 对 X^n 进行的非形式变形量子化所关联的 X^n 的非交换变形：

$$\Pi_\theta := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \theta_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} \tag{20}$$

该情形在 [21] 中进行了讨论（在 [21] 中，这种变形称为类型 θ_3 ）。

一般而言，对于上述意义下的 X^n 变形，我们可以通过合适的同构对平凡全纯线丛$E^{\nabla}_{(O,0,0)} \to X^n$ 进行扭曲，从而构造其非平凡变形。本节从这一角度出发，将 [21] 中构造的全纯线丛 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的非交换变形推广至更一般的情形。特别地，我们将在定理 3.7 中明确这类扩展的非交换对象的模空间。

3.1 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$的非交换变形

我们将对 $(X^n,\ \Pi_\theta)$ 记为 X^n_θ：$X^n_\theta := (X^n,\ \Pi_\theta)$，即 X^n_θ是一个泊松流形。本小节主要旨在解释全纯线丛 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的非交换变形，该变形是在从 X^n 到 X^n_θ的变形下构造的，并与 [21] 相关联。然而，在本文中，我们不假设 X^n 是标准复环面，尽管标准复环面 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbf{i}\mathbb{Z}^n)$ 仅在 [21][4]中得到处理。

我们首先简要回顾 X^n_θ 的形式变形量子化以及 X^n_θ的非形式变形量子化。我们考虑如下形式幂级数环，其形式参数为 $\hbar$：

$$C^\infty(X^n)[[\hbar]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} f_i \hbar^i \;\middle|\; f_0,\ f_1,\ \cdots \in C^\infty(X^n) \right\}.$$

那么，泊松流形 X^n_θ 的形式变形量子化是一个对（非交换代数）$(C^\infty(X^n)[[\hbar]],\ \star)$，其中 $\star$：$C^\infty(X^n)[[\hbar]] \times C^\infty(X^n)[[\hbar]] \to C^\infty(X^n)[[\hbar]]$ 是一个 $\hbar$-双线性结合乘积，满足以下条件：当我们记

$$f \star g = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(f,g)\hbar^i$$

对于 $f, g \in C^\infty(X^n)$，以下关系

$$C_0(f,g) = fg, \quad C_1(f,g) = \frac{\hbar}{2\pi}\{f,g\}$$

[4]严格来说，我们的讨论主要基于 [21], 中的第 4 节，而该节仅讨论了标准复结构。

成立。这里，$\{\cdot,\cdot\}: C^\infty(X^n) \times C^\infty(X^n) \to C^\infty(X^n)$ 是由泊松双向量 Π_θ定义的泊松括号，而这个乘积 $\star$ 称为星乘积。此外，由于现在 θ 是一个常矩阵，我们可以将星乘积 $\star$ 明确地表示为莫亚尔星积:

$$f \star g = f \exp\left(\frac{\hbar}{2\pi}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\theta_{ij}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y_i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_j}}\right) g, \tag{21}$$

其中 $f, g \in C^\infty(X^n)$。注意，莫亚尔星积 (21) 是全局定义的，因为与常矩阵 θ 相关联的泊松双向量 Π_θ 是全局定义的。另一方面，通过在莫亚尔星积 (21) 中将 $\hbar$ 替换为 $\mathbf{i}$或 $-\mathbf{i}$ 而得到的模型，对应于 X^n_θ的非形式变形量子化的典型例子。在本文中，我们根据 [21]关注情形$\hbar = -\mathbf{i}$：

$$f \star g = f \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2\pi}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\theta_{ij}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y_i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_j}}\right) g, \tag{22}$$

其中 $f, g \in C^\infty(X^n)$。 X^n_θ的这一非形式变形量子化可视为如 [11]中那样的非交换环面。在此意义上，此后我们将配备非交换乘积 (22) 的泊松流形 X^n_θ 解释为非交换环面。

一般而言，在计算莫亚尔星积时，使用下述公式是有效的（该公式有时称为“Bopp移位”）。我们假设 $f,g \in C^\infty(X^n)$ 可如下表示（泰勒展开），其中 ϵ, $\delta \in \mathbb{R}^n$为适当的常向量:

$$f(y+\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial y}^t \epsilon\right)^k f(y), \quad g(y+\delta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{\partial}{\partial y}^t \delta\right)^l g(y).$$

于是我们有

$$f(y) \star g(y) = f\left(y - \frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right) g(y) = f(y) g\left(y + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right) \tag{23}$$

因为我们可以把 $f(y) \star g(y)$ 视为

$$f(y)\exp\left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y}}^t\left(-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right) g(y) = f(y)\exp\left(\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}^t\left(\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right) g(y)$$

而 $f(y+\epsilon)$、 $g(y+\delta)$ 可以分别解释为

$$f(y+\epsilon) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial y}^t \epsilon\right) f(y), \quad g(y+\delta) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial y}^t \delta\right) g(y),$$

。

根据 [21], ，我们考虑与从 X^n 到 X_θ^n的变形相关联的全纯线丛 $E_{(A,p,q)}^{\nabla}$ 的非交换变形。一般而言，空间 $\Gamma(X^n,E_{(A,p,q)}^{\nabla})$可视为 $C^\infty(X^n)$上的模。因此，自然地考虑 $\Gamma(X^n, E_{(A,p,q)}^{\nabla})$也相对于 X_θ^n的非形式变形量子化而被量子化，该量子化由莫亚尔星积(22)描述。让我们考虑自守因子 j_A的如下变形（见 [21]中的第 4 节），其中 $i=1,\dots,n$ （每个 $j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y)$在此非交换变形下保持不变）：

$$j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)\mapsto j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y):=\exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax\right)j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)=\exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right),j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y)$$

$$\mapsto j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y):=j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y)=1.$$

事实上，对于每个 $i=1,\dots,n$，我们有

$$j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\exp\left(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax\right)j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}=1,$$

也就是说，相对于莫亚尔星积 (22)，每个 $j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)$ 的逆为 $\exp(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax)j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}$:

$$j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}=\exp\left(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax\right)j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}.$$

此外，我们有

$$j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x+\boldsymbol{e}_j,y)\star j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j,x,y)=j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j,x+\boldsymbol{e}_i,y)\star j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y),\qquad(24)$$

其中 $i,\ j=1,\dots,n$，这一结果表明上循环条件成立。因此，映射 $j_{\theta,A}$ 在 X_θ^n 上定义了一个光滑复线丛，记作 $E_{\theta,A}\to X_\theta^n$，或简记为 $E_{\theta,A}$ 。另一方面，作为联络1-形式 $\omega_{(A,p,q)}$ 的变形，我们应考虑1-形式$\omega_{\theta,(A,p,q)}$ ，其局部定义为

$$\begin{aligned}\omega_{\theta,(A,p,q)}&=\omega_{(A,p,q)}+\pi\mathbf{i}x^tA^t\theta Adx\\&=-2\pi\mathbf{i}\Big(\left(x^tA^t+p^t\right)+q^tT\Big)dy+\pi\mathbf{i}x^tA^t\theta Adx.\end{aligned}$$

实际上，这个1-形式 $\omega_{\theta,(A,p,q)}$ 满足以下关系

$$\omega_{\theta,(A,p,q)}(x+\boldsymbol{e}_i,y)$$
$$=j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\overset{\star}{\wedge}\omega_{\theta,(A,p,q)}(x,y)\overset{\star}{\wedge}j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}+j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\overset{\star}{\wedge}dj_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1},$$
$$\omega_{\theta,(A,p,q)}(x,y+\boldsymbol{e}_i)$$
$$=j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\overset{\star}{\wedge}\omega_{\theta,(A,p,q)}(x,y)\overset{\star}{\wedge}j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}+j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\overset{\star}{\wedge}dj_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)^{-1}$$

对于每个 $i=1,\ .....,\ n$。这里，我们使用记号 $\omega_{\theta,\ (A,p,q)}(x,\ y)$，而不是$\omega_{\theta,\ (A,p,q)}$ ，以指定坐标系 $(x,\ y)\in\mathbb{R}^{2n}$，并且 $\overset{\star}{\wedge}$ 是

与莫亚尔星积的楔积 (22)。因此，在 $\Gamma(E_{\theta,\ A})$ 上由下式定义的微分算子$\nabla_{\theta,\ (A,p,q)}$

$$\nabla_{\theta,(A,p,q)} = d + \omega_{\theta,(A,p,q)}$$

在 $E_{\theta,A}$ 上给出一个联络。我们将带有联络 $\nabla_{\theta,(A,p,q)}$ 的光滑复线丛 $E_{\theta,A} \to X^n_\theta$ 记为 $E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q)}$，即 $E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q)} := (E_{\theta,A}, \nabla_{\theta,(A,p,q)})$。

我们考虑 $E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q)}$ 的全纯性。联络$\nabla_{\theta,(A,p,q)}$ 的曲率形式 $\Omega_{\theta,(A,p,q)}$ 局部表示为

$$\begin{aligned}\Omega_{\theta,(A,p,q)} &= d\omega_{\theta,(A,p,q)} + \omega_{\theta,(A,p,q)} \overset{\star}{\wedge} \omega_{\theta,(A,p,q)} \\ &= -2\pi\mathbf{i} dx^t A^t dy + \pi\mathbf{i} dx^t A^t \theta A dx.\end{aligned}$$

现在，我们给出如下命题（参见 [21, 命题 4.1]）。

命题 3.1. *(0,2)* 部分 $\Omega^{(0,2)}_{\theta\ \ A\ ,(,p,q)}$ 为零当且仅当 $A^t\theta A = O$。

证明. (0,2) 部分 $\Omega^{(0,2)}_{\theta\ \ A\ ,(,p,q)}$ 结果为

$$\Omega^{(0,2)}_{\theta,(A,p,q)} = \pi\mathbf{i} d\bar{z}^t ((T-\bar{T})^{-1})^t T^t A^t \theta A T (T-\bar{T})^{-1} d\bar{z}$$

因为我们假设 $AT \in$ 对称矩阵$(n;\ \mathbb{C})$。注意 $\theta \in$ 交替形式$(n;\ \mathbb{R})$ 以及 $\det T(T-\bar{T})^{-1} \neq 0$。因此，$((T-\bar{T})^{-1})^t T^t A^t \theta A T (T-\bar{T})^{-1} \in$ 对称矩阵$(n;\ \mathbb{C})$ 当且仅当$A^t\theta A = O$。证明完毕。

□

作为一个例子，我们重点考察 $E^{\nabla}_{\theta\ ,\ (A,p,q)}$ 且 $\det A \neq 0$ 的情形。根据假设 $\det A \neq 0$，显然，条件 $A^t\theta A = O$ 等价于条件$\theta = O$。换言之，若 θ 非平凡，则 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的全纯性在与 θ 相关联的非交换变形下并不保持。关于这类情形，在 [21], 中，作为与 θ 相关联的 DG_{X^n} 的变形（在$T = \mathbf{i}\cdot I_n$ 的情形下，即 $X^n = \mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbf{i}\mathbb{Z}^n)$），有人提出考虑由$E^{\nabla}_{\theta\ ,\ (A,p,q)}$ 构成的曲弯 dg-范畴，而不是通常的 dg-范畴。

我们来讨论全局全纯截面 $\xi_{(A,p,q)}$ 的变形，它属于由 X^n 变形到 X^n_θ 所关联的 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$；这里假设 $T = \mathbf{i}\cdot I_n$ 且 A 正定（另见 [20] 中的第 3.2 小节）。总之，$\xi_{(A,p,q)}$ 变形为如下形式，其中对每个 $m \in \mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n$，$C_m \in \mathbb{C}$：

$$\begin{aligned}\xi_{\theta,(A,p,q)}(x,y) &:= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n} C_m \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \xi_{\theta,(A,p,q,l,m)}(x)\ \exp\left(2\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t y\right), \\ \xi_{\theta,(A,p,q,l,m)}(x) &:= \exp\left(-\pi\mathbf{i}(-Al+m)^t\theta A x\right)\xi_{(A,p,q,l,m)}(x).\end{aligned}$$

我们可以验证，这$\xi_{\theta,(A,p,q)}$ 满足这些关系

$$\begin{aligned}j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i, x, y) \star \xi_{\theta,(A,p,q)}(x,y) &= \xi_{\theta,(A,p,q)}(x+\boldsymbol{e}_i, y), \\ j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \star \xi_{\theta,(A,p,q)}(x,y) &= \xi_{\theta,(A,p,q)}(x, y+\boldsymbol{e}_i),\end{aligned}$$

其中 $i=1,\dots,n$，并注意到对于每一对 $(l,m)\in\mathbb{Z}^n\times(\mathbb{Z}^n/A\mathbb{Z}^n)$，都有 $\xi_{\theta,(A,p,q,l,m)}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$。此外，显然，当 $\theta=O$: $\xi_{\theta=O,(A,p,q)}=\xi_{(A,p,q)}$ 时，$\xi_{\theta,(A,p,q)}$ 与 $\xi_{(A,p,q)}$ 重合。因此，$\xi_{\theta,(A,p,q)}$ 确实是 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$的整体截面。

下面，为准备第 3.2 小节中的论证，我们通过同构对 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 进行扭曲。任取一个 $\mathcal{A}\in\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$，并将其固定。考虑如下自守因子 $j_{(A;\mathcal{A})}$：$(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)\times\mathbb{C}^n\cong(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^\times$，其中 $i=1,\dots,n$:

$$
\begin{aligned}
&j_{(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y):=j_A(\boldsymbol{e}_i,x,y),\\
&j_{(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y):=\exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right)j_A(T\boldsymbol{e}_i,x,y).
\end{aligned}
$$

利用这个 $j_{(A;\mathcal{A})}$，我们定义 $\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ 上的作用如下:

$$
\begin{aligned}
\big(x+Ty,t\big)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\ &\longmapsto\ \big((x+Ty)+\boldsymbol{e}_i,j_{(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)t\big)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},\\
\big(x+Ty,t\big)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\ &\longmapsto\ \big((x+Ty)+T\boldsymbol{e}_i,j_{(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)t\big)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}
\end{aligned}
$$

对每个 $i=1,\dots,n$，于是我们可以通过对 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ 取 $\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n$ 的作用的商，得到光滑复线丛 $E_{(A;\mathcal{A})}\to X^n$：

$$
\mathrm{Tot}(E_{(A;\mathcal{A})}):=(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C})/(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n).
$$

此外，$\Gamma(E_{(A;\mathcal{A})})$ 上如下局部定义的微分算子 $\nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与上述 $\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n$ 的作用相容，也就是说，它定义了 $E_{(A;\mathcal{A})}$ 上的一个联络:

$$
\nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})}=d+\omega_{(A,p,q;\mathcal{A})},\quad \omega_{(A,p,q;\mathcal{A})}=\omega_{(A,p,q)}-\mathbf{i}y^t\mathcal{A}dy.
$$

我们很容易验证，这个 $\nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 是 $E_{(A;\mathcal{A})}$上的可积联络，因为 $AT\in\mathrm{Sym}(n;\mathbb{C})$，$\mathcal{A}\in\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$。我们将带有可积联络 $\nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的全纯线丛 $E_{(A;\mathcal{A})}\to X^n$ 记作 $E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$，即 $E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}:=(E_{(A;\mathcal{A})},\ \nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})})$。

事实上，存在一个同构 $\varphi_{\mathcal{A}}:\ E^{\nabla}_{(O,0,0)}\xrightarrow{\sim}E^{\nabla}_{(O,0,0;\mathcal{A})}$，其局部表达式为

$$
\varphi_{\mathcal{A}}(y)=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y\right),\tag{25}
$$

因此我们有

$$
E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q)}\otimes E^{\nabla}_{(O,0,0;\mathcal{A})}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q)}\otimes E^{\nabla}_{(O,0,0)}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q)}.
$$

在此论证中，注意到 $E^{\nabla}_{(O,0,0)}$ 是X^n上的平凡全纯线丛。

3.2 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$的非交换变形的歧义

本小节旨在研究由同构（25）引出的 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的非交换变形所产生的歧义。正如第 3.1 小节末尾所验证的，对于给定的 $\mathcal{A}\in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$，我们有 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$。类似于$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$的情形，我们可以构造与从 X^n 到 X^n_θ 的变形相关联的 $E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的变形$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$。另一方面，一般而言，尽管总存在一个同构$E^{\nabla}_{(A,p,q)}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$，$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$ 和$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 却不一定彼此同构。本小节将深入讨论这一歧义。

下面，我们假设

$$\det\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\neq 0$$

以便讨论上文[5], 中所解释的问题，并令

$$\mathcal{A}^\theta:=\mathcal{A}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}=\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\mathcal{A}$$

为简单起见[6]。在本小节中，我们首先考虑每个 $j_{(A;\mathcal{A})}$ 的变形$j_{\theta,\ (A;\mathcal{A})}$，作为$j_{\theta,\ A}$到包含非平凡参数 $\mathcal{A}\in$对称矩阵$(n;\ \mathbb{R})$这一设定的推广。至少在假设$\det\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\neq$0下，与$j_{\theta,\ (A;\mathcal{A})}$ 相容的每个 $\nabla_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的变形，除平坦联络部分外是唯一确定的（另见引理 3.4）。其他情形似乎更为复杂，因此本文不予（也无法）处理这些情形。

我们给出$E^{\nabla}_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}\to X^n_\theta$ 的严格定义，它是与从 X^n 到 X^n_θ的变形相关联的 $E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}\to X^n$ 的量子化。我们定义映射$j_{\theta,\ (A;\mathcal{A})}$：$(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)\times\mathbb{C}^n\cong(\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^\times$ 如下

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)=\exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right),\\
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right),
\end{aligned}$$

其中 $i=1,\dots,n$。显然，在 $\theta=O$ 的情况下，即 $j_{\theta=O,(A;\mathcal{A})}=j_{(A;\mathcal{A})}$，$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 与 $j_{(A;\mathcal{A})}$ 重合；而在 $\mathcal{A}=O$ 的情况下，即$j_{\theta,(A;\mathcal{A}=O)}=j_{\theta,A}$，$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 与 $j_{\theta,A}$ 重合。通过直接计算，我们发现

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\exp\left(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta Ax-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)=1,\\
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right)=1
\end{aligned}$$

[5]例如，若 $\theta\in M(n;\mathbb{R})\backslash M(n;\mathbb{Q})$，且 $\mathcal{A}$通过使用 $M\in$对称矩阵$(n;\ \mathbb{Z})$ 描述为 $\mathcal{A}=2\pi M$，则假设 $\det\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\neq 0$ 自动成立。[6]注意，$\det\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)=\det\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\neq 0$。

对每个 $i=1,\ldots,n$ 都成立。这意味着，对于莫亚尔星积 (22)，每个 $j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)$ 的逆以及每个 $j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)$ 的逆均为

$$\exp\left(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A x - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right)$$

and

$$\exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta A x - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right),$$

分别为:

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} = \exp\left(\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A x - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right),$$
$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} = \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta A x - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right).$$

现在给出以下引理。

引理 3.2。我们有

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x+\boldsymbol{e}_j, y)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_j, x, y) = j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_j, x+\boldsymbol{e}_i, y)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y), \tag{26}$$

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y+\boldsymbol{e}_j)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x, y) = j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x+\boldsymbol{e}_i, y)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y), \tag{27}$$

其中 $i, j = 1, \ldots, n$。此外，等式

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y+\boldsymbol{e}_j)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x, y) = j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x, y+\boldsymbol{e}_i)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \tag{28}$$

对任意 $i, j = 1, \ldots, n$ 成立，当且仅当

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z}).$$

证明。我们任取 $i, j = 1, \ldots, n$，并将它们固定。

等式 (26) 就是等式 (24) 本身，因为

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_1, x, y) = j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_1, x, y),\ \ldots,\ j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_n, x, y) = j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_n, x, y).$$

我们可以如下证明等式 (27)。特别地，这里我们还以左端的计算为例，说明如何使用“Bopp移位”（其他情形也可以类似地计算）。由公式 (23)，我们有

$$\begin{aligned} &j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y+\boldsymbol{e}_j)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x, y) \\ &= \exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A x + 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\left(y - \frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\right)\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta A x + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right), \end{aligned} \tag{29}$$

并且由于

$$2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\left(-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\theta\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\right) = \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}^t\left(-\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right),$$

局部表达式 (29) 最终为

$$\exp\left(\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right)+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\left(y-\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)\right)\right)$$
$$=\exp\Bigg(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j+\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right)$$
$$+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\Bigg).$$

另一方面，右侧结果为

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j,x+\boldsymbol{e}_i,y)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\\
&=\exp\Bigg(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta A\boldsymbol{e}_i+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta A\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\\
&\quad+\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right)\Bigg)\\
&=\exp\Bigg(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j+\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta Ax+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

因此，左端与右侧相一致，由此可知等式 (27) 成立。

接下来考虑等式 (28) 何时成立。经过直接计算，左端可改写为

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y+\boldsymbol{e}_j)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j,x,y)\\
&=\exp\Bigg(\left(\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\boldsymbol{e}_j\right)+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

另一方面，右侧可改写为

$$
\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_j, x, y+\boldsymbol{e}_i) \star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \\
&= \exp\left(\left(\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_i + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\boldsymbol{e}_i\right) + \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right)\right) \\
&= \exp\left(\left(-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j\right) + \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_j - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta\theta Ax + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_j^t\mathcal{A}^\theta y\right)\right).
\end{aligned}
$$

因此，等式 (28) 成立当且仅当存在一个 $m_{ij}\in\mathbb{Z}$ 使得

$$
\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\boldsymbol{e}_j = -\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j + 2\pi\mathbf{i}m_{ij},
$$

即，

$$
\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j + \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\boldsymbol{e}_j - \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{e}_i^t\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\boldsymbol{e}_j = m_{ij}.
$$

该条件等价于

$$
\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t + \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}^\theta - \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z})
$$

因为如何选取这一对 (i,j) 是任意的。这里请注意，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t + \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}^\theta - \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\mathcal{A}\theta\mathcal{A}\left(\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\right)^t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\mathcal{A}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^t\left(\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\right)^t \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)\mathcal{A}\left(\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\right)^t \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\left(\mathcal{A}\theta\mathcal{A}+2\pi\mathcal{A}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^t - 2\pi\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)\mathcal{A}\right)\left(\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\right)^t \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t.
\end{aligned}
$$

因此，事实上，等式 (28) 成立当且仅当

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z}).$$

□

注 3.3. 根据 $\mathcal{A}^\theta$的定义，显然当 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = O$时，$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t = O$。另一方面，也存在一对$(\theta, \mathcal{A}) \in$交替形式$(n;\ \mathbb{R}) \times$对称矩阵$(n;\ \mathbb{R})$满足

$$\det\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) \neq 0, \quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z})\backslash\{O\}.$$

以下是其中一个例子。我们考虑 $n = 2$的情形，并取

$$\theta := \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{2m}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(2;\mathbb{R}), \quad \mathcal{A} := 4\pi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(2;\mathbb{R}),$$

其中 $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$。于是我们有

$$\det\left(I_2 + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) = \frac{-2-2\sqrt{1+m^2}}{m^2} \neq 0,$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \in M(2;\mathbb{Z})\backslash\{O\}.$$

坦率地说，引理 3.2 指出，当且仅当$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 时，映射定义因子的自守性

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z}).$$

此后，我们假设

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t \in M(n;\mathbb{Z}). \tag{30}$$

利用$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$，我们定义 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ 在 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 上的作用如下

$$\begin{aligned}
&\big(x+Ty,t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \ \longmapsto\ \big((x+Ty)+\boldsymbol{e}_i, j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C},\\
&\big(x+Ty,t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \ \longmapsto\ \big((x+Ty)+T\boldsymbol{e}_i, j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)t\big) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}
\end{aligned}$$

对于每个 $i = 1,\ldots,n$。然后，我们可以将光滑复线丛$E_{\theta,(A;\mathcal{A})} \to X^n_\theta$定义为 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 关于 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ 的作用的商：

$$\mathrm{Tot}(E_{\theta,(A;\mathcal{A})}) := (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})/(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n).$$

我们在局部定义一个微分算子$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$，作用于 $\Gamma(E_{\theta,(A;\mathcal{A})})$：

$$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = d + \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})},$$
$$\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \pi \mathbf{i} x^t A^t \left(I_n + \frac{1}{\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A dx - 2\pi \mathbf{i} x^t A^t \left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) dy + \mathbf{i} y^t \mathcal{A}\theta A dx - \mathbf{i} y^t \mathcal{A} dy.$$

与小节 3.1 类似，我们有时使用记号 $\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y)$ 来指定坐标系 $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$。
于是有如下引理。

引理 3.4. 自守因子$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 和 *1*-形式 $\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$满足关系式

$$\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x+\boldsymbol{e}_i, y) = j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) \overset{\star}{\wedge} j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} + j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} d j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1}, \tag{31}$$

$$\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x, y+\boldsymbol{e}_i) = j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) \overset{\star}{\wedge} j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} + j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} d j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1}, \tag{32}$$

其中 $i = 1, \ldots, n$。

证明。 任取一个 $i = 1, \ldots, n$，并将其固定。我们来验证关系式 (31) 成立。通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) \overset{\star}{\wedge} j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} + j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} d j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t \theta\mathcal{A}\theta A dx - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t \theta\mathcal{A} dy + \pi \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t \theta A dx - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t dy \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) + \pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t \left(I_n + \frac{1}{\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A dx - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t \left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) dy \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x+\boldsymbol{e}_i, y),
\end{aligned}$$

因此，关系式 (31) 确实成立。类似地，我们可以进行如下计算：

$$\begin{aligned}
&j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) \overset{\star}{\wedge} j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} + j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y) \overset{\star}{\wedge} d j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i, x, y)^{-1} \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) + \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}\theta\mathcal{A}\theta A dx - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}\theta\mathcal{A} dy \\
&\quad + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}\theta A dx - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1} dy \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A dx \\
&\quad - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) dy \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x,y) + \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta A dx - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A} dy \\
&= \omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(x, y+\boldsymbol{e}_i).
\end{aligned}$$

因此，关系式 (32) 也成立。 □

由引理 3.4，我们看到微分算子$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与自守因子 $j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$相容，即微分算子$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在 $E_{\theta,(A;\mathcal{A})}$上定义了一个联络。然后，尽管我们可以局部计算$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的曲率形式 $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ ，但这略显复杂。显式地，我们有如下结果。

引理 3.5. 曲率形式$\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的$\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 局部表示为

$$\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)\theta Adx-2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)dy+\frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy.$$

证明。 我们可以验证

$$\begin{aligned} d\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} &= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta Adx-2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)dy+\mathbf{i}dy^t\mathcal{A}\theta Adx-\mathbf{i}dy^t\mathcal{A}dy \\ &= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\theta Adx-2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)dy+\mathbf{i}dx^tA^t\theta\mathcal{A}dy. \end{aligned}$$

这里，注意到 $dx^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Adx$ 和 $dy^t\mathcal{A}dy$ 为零，因为 $A^t\theta^t\mathcal{A}\theta A, \mathcal{A}\in$ 是对称矩阵$(n;\mathbb{R})$。此外，我们有

$$\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = -\frac{\mathbf{i}}{4\pi}dx^tA^t\theta\mathcal{A}\theta\mathcal{A}\theta Adx+\frac{\mathbf{i}}{2\pi}dx^tA^t\theta\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy+\frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy.$$

因此，

$$\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = d\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}+\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$$

可计算如下:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} &= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\theta Adx - \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dx^tA^t\theta\mathcal{A}\theta\mathcal{A}\theta Adx \\
&\quad - 2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)dy + \mathbf{i}dx^tA^t\theta\mathcal{A}dy + \frac{\mathbf{i}}{2\pi}dx^tA^t\theta\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy \\
&= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)\theta Adx \\
&\quad - 2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)dy + \mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta\mathcal{A}dy \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy \\
&= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)\theta Adx - 2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\left(I_n-\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)dy \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy \\
&= \pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)\theta Adx - 2\pi\mathbf{i}dx^tA^t\left(I_n-\left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)dy \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

我们将带有联络 $E_{\theta,(A;\mathcal{A})}\to X^n_\theta$ 的光滑复线丛 $\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 记为 $E^\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$, 即 $E^\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} := (E_{\theta,(A;\mathcal{A})},\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})})$。

为便于后文使用，我们想解释 $E^\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$与$E^\nabla_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$ 彼此同构的定义。

在解释这一点之前，我们先回顾交换情形。设 M 是一个复流形，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个开覆盖。我们在 M 上取两个全纯向量丛 $\mathcal{E}^\nabla=(\{\varphi_{ij}\}_{i,j\in I},\{\bar\partial+\omega_i^{(0,1)}\}_{i\in I})$、$\mathcal{F}^\nabla=(\{\psi_{ij}\}_{i,j\in I},\{\bar\partial+\xi_i^{(0,1)}\}_{i\in I})$，其中 $\{\varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$、$\{\psi_{ij}\}_{i,j\in I}$ 是转移函数族，而 $\{\bar\partial+\omega_i^{(0,1)}\}_{i\in I}$、$\{\bar\partial+\xi_i^{(0,1)}\}_{i\in I}$ 是全纯结构。于是，如果存在一族可逆态射（可逆的局部定义的光滑函数）$\{\phi_i:\mathcal{E}^\nabla|_{U_i}\to\mathcal{F}^\nabla|_{U_i}\}_{i\in I}$，满足以下条件，我们就称 $\mathcal{E}^\nabla$ 与 $\mathcal{F}^\nabla$ 同构。首先，对于任意 i、$j=1,\dots,n$，等式 $\phi_j\varphi_{ij}=\psi_{ij}\phi_i$ 成立。其次，对于每个 $i=1,\dots,n$，关系 $\bar\partial\phi_i+\xi_i^{(0,1)}\wedge\phi_i-\phi_i\wedge\omega_i^{(0,1)}=0$ 均成立。

根据这个定义，如果存在一个可逆的局部定义光滑

满足条件的函数 φ

$$
\begin{aligned}
&j_{\theta,(B;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\varphi(x,y)=\varphi(x+\boldsymbol{e}_i,y)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y),\\
&j_{\theta,(B;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\varphi(x,y)=\varphi(x,y+\boldsymbol{e}_i)\star j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y),\\
&\bar{\partial}\varphi+\omega^{(0,1)}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\varphi-\varphi\overset{\star}{\wedge}\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}=0,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

其中 $i=1,\ldots,n$，我们称 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$ 同构，并记作

$$
E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\cong E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}.
$$

特别是在这种情况下，φ 称为从 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$到 $E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$的同构：

$$
\varphi:E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\xrightarrow{\sim}E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}.
$$

这里，我们对这个定义作一点说明。如 [21] 中所讨论的（另见[23]），实际上我们可以将由非交换对象 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 构成的曲弯 dg-范畴视为 dg-范畴 DG_{X^n}的变形来构造。从本质上说，在此语境下，曲率由 $\Omega^{(0,2)}_{\theta\ A}$，（$p$，$q$；$\mathcal{A}$）给出，而一般而言，$\Omega^{(0,2)}_{\theta\ A}$，（$p$，$q$；$\mathcal{A}$）不一定为零；也就是说，$E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的全纯性在从 X^n 到X^n_θ的非交换变形下不一定保持。另一方面，对于给定的曲弯 dg-范畴 $\mathscr{C}$，我们可以将具有相同（固定）曲率的对象所构成的 dg-范畴视为 $\mathscr{C}$的一个全子范畴。对于这个 dg-范畴，我们可以对每个态射空间取上同调。现在假设 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与$E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$ 具有相同的曲率。我们将此语境下从 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 到 $E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$ 的态射空间的第 0 阶上同调[7] 记为 $H^0(E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})},E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})})$。那么，$H^0(E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})},E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})})$ 的一个非平凡代表元给出一个同构 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\xrightarrow{\sim}E^{\nabla}_{\theta,(B,u,v;\mathcal{A})}$（条件 (33) 表明该代表元属于相应微分的核）。

正如本小节开头所指出的，一般而言，$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}\ncong E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 尽管 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$。然而，例外地，存在一种情形，使得关系 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}\cong E^{\nabla}_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在从 X^n 到 X^n_θ的变形下得以保持。我们现在解释这一例子。取$(A,p,q)\in M(n;\mathbb{Z})\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}\in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$，并将它们固定。于是，若 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A}=O$，由引理 3.5 可知 $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\Omega_{\theta,(A,p,q)}$ 重合。因此，可以预期在此情形下$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$ 彼此同构。事实上，这一预期是正确的，如下面的命题所示（参见注 4.2）。

[7]事实上，此处的态射空间是将 DG_{X^n} 的态射空间中的通常乘积替换为莫亚尔星积（22）而得到的。详情请参见 [23] 。

命题 3.6. 假设 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A}=O$。则我们有$E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q)}\cong E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q;\mathcal{A})}$，其中同构$\varphi_{\theta,\mathcal{A}}$：$E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q)}\xrightarrow{\sim}E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 可局部表示为

$$\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right).$$

证明。 我们可以证明，这个可逆的局部定义的光滑函数

$$\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y):=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)$$

满足以下关系

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)=\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x+\boldsymbol{e}_i,y)\star j_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,x,y),\tag{34}$$

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)=\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y+\boldsymbol{e}_i)\star j_{\theta,A}(T\boldsymbol{e}_i,x,y),\tag{35}$$

$$\bar{\partial}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}+\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}-\varphi_{\theta,\mathcal{A}}\overset{\star}{\wedge}\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q)}=0,\tag{36}$$

其中 $i=1,\dots,n$。任取一个 $i=1,\dots,n$，并将其固定。

首先，我们考虑等式（34）。根据$j_{\theta,A}$ 和 $j_{\theta,(A;\mathcal{A})}$的定义，只需证明等式

$$\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)=\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x+\boldsymbol{e}_i,y)\star\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)$$

成立。左端结果为

$$\begin{aligned}
&\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)\\
&=\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}\left(y-\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)^t\mathcal{A}\left(y-\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}\left(y-\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)\right)\right)\\
&=\exp\Bigg(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty+\left(\frac{\mathbf{i}}{8}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A\boldsymbol{e}_i+\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

另一方面，右侧结果为

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x+\boldsymbol{e}_i,y)\star\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)\\
&=\exp\left(\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A\boldsymbol{e}_i+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\right)\\
&\quad\star\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)\\
&=\exp\Bigg(\left(\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta\mathcal{A}\left(y+\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)+\frac{\mathbf{i}}{2}\left(y+\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)^t\mathcal{A}\left(y+\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}\left(y+\frac{1}{2}\theta A\boldsymbol{e}_i\right)\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A\boldsymbol{e}_i+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax\right)+2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\Bigg)\\
&=\exp\Bigg(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty+\left(\frac{\mathbf{i}}{8}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A\boldsymbol{e}_i+\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

因此，确实，等式

$$\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)=\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x+\boldsymbol{e}_i,y)\star\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty\right)$$

成立。

接下来，我们考虑等式 (35)。注意到

$$\mathcal{A}^\theta=\mathcal{A}\left(I_n+\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{-1}=\mathcal{A}\left(I_n-\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)=\mathcal{A}$$

由于 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A}=O$，所以我们有

$$j_{\theta,(A;\mathcal{A})}(T\boldsymbol{e}_i,x,y)=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right).$$

因此，等式 (35) 成立当且仅当等式

$$\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y+\boldsymbol{e}_i)=\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)$$

成立。通过直接计算，尽管我们看到

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right)\star\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y)\\
&=\exp\Bigg(\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right)\\
&\quad+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}\left(y-\frac{1}{4\pi}\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i\right)^t\mathcal{A}\left(y-\frac{1}{4\pi}\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i\right)+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}\left(y-\frac{1}{4\pi}\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i\right)\right)\Bigg),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

事实上，局部表达式 (37) 结果是 b e

$$\exp\left(\left(\frac{\mathbf{i}}{2}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}\theta Ax+\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}y\right)+\left(\frac{\mathbf{i}}{2}x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta Ax+\frac{\mathbf{i}}{2}y^t\mathcal{A}y+\mathbf{i}x^tA^t\theta\mathcal{A}y\right)\right)$$
$$=\varphi_{\theta,\mathcal{A}}(x,y+\boldsymbol{e}_i)$$

因为我们假设 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A}=O$。

最后，我们验证 $\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}$ 满足关系 (36)。根据 $\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}$ 的定义，我们有

$$\bar{\partial}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}=\mathbf{i}\Big(x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A-y^t\mathcal{A}\theta A\Big)\varphi_{\theta,\mathcal{A}}dx^{(0,1)}+\mathbf{i}\Big(y^t\mathcal{A}+x^tA^t\theta\mathcal{A}\Big)(-T^{-1})\varphi_{\theta,\mathcal{A}}dx^{(0,1)}.$$

另一方面，根据假设 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A}=O$, $\omega_{\theta\ \ A}^{(0,1)}{}_{(,\ p,\ q;\ \mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}-\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}\overset{\star}{\wedge}\omega_{\theta\ \ A}^{(0,1)}{}_{(,\ p,\ q)}$ 可得

$$\begin{aligned}
&\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}-\varphi_{\theta,\mathcal{A}}\overset{\star}{\wedge}\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q)}\\
&=\mathbf{i}\left(-x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A+y^t\mathcal{A}\theta A+\frac{1}{4\pi}\Big(y^t\mathcal{A}+x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\Big)\theta\mathcal{A}\theta A\right)\varphi_{\theta,\mathcal{A}}dx^{(0,1)}\\
&\quad+\mathbf{i}\left(-x^tA^t\theta\mathcal{A}-y^t\mathcal{A}-\frac{1}{4\pi}\Big(y^t\mathcal{A}+x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\Big)\theta\mathcal{A}\right)(-T^{-1})\varphi_{\theta,\mathcal{A}}dx^{(0,1)}\\
&=\mathbf{i}\Big(-x^tA^t\theta^t\mathcal{A}\theta A+y^t\mathcal{A}\theta A\Big)\varphi_{(\mathcal{A},\theta)}dx^{(0,1)}+\mathbf{i}\Big(-y^t\mathcal{A}-x^tA^t\theta\mathcal{A}\Big)(-T^{-1})\varphi_{\theta,\mathcal{A}}dx^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

因此，我们看到

$$\bar{\partial}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}+\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\overset{\star}{\wedge}\varphi_{\theta,\mathcal{A}}-\varphi_{\theta,\mathcal{A}}\overset{\star}{\wedge}\omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q)}=0,$$

也就是说，$\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}$ 满足关系 (36)。 □

显然，命题 3.6 中的同构 $\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}$ 是同构 (25) 在非交换情形下的推广，即通过在命题 3.6 中考虑 $\varphi_{\theta,\ \mathcal{A}}$ 对应的情形 $\theta=O$，我们可以得到同构 (25):

$$\varphi_{\theta=O,\mathcal{A}}=\varphi_{\mathcal{A}}.$$

3.3 $E^{\nabla}_{\theta\ ,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$的模空间

本小节旨在明确 $E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在固定矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$, $\mathcal{A}\in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$ 的情况下的模空间。更确切地说，在下述定理 3.7 中，对于固定矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$, $\mathcal{A}\in$ 对称矩阵 $(n;\mathbb{R})$，我们确定关于 $p, q, p', q'\in\mathbb{R}^n$ 的条件，使得 $E^{\nabla}_{\theta\ ,\ (A,p,q;\mathcal{A})}\cong E^{\nabla}_{\theta\ ,(A,p',q';\mathcal{A})}$。特别地，该结果也用于第 4 节，以构造与每个 $E^{\nabla}_{\theta\ ,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$ 镜像对偶的对象。

定理 3.7。 我们任意取矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$，$\mathcal{A} \in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{R})$ 并将其固定。则两个对象 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$，$E^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 彼此同构，

$$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \cong E^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})},$$

当且仅当存在 k、 $l \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & O \\ -A^t\theta\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}.$$

证明。 我们来显式计算态射 ϕ_θ： $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \to E^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$，也就是说，只需计算一个满足这些条件的局部定义的光滑函数 ϕ_θ

$$\phi_\theta(x+\boldsymbol{e}_i, y) = \exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right) \star \phi_\theta(x,y) \star \exp\left(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t y\right), \tag{38}$$

$$\phi_\theta(x, y+\boldsymbol{e}_i) = \exp\left(\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t \mathcal{A}^\theta y\right) \star \phi_\theta(x,y) \star \exp\left(-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t \mathcal{A}^\theta y\right), \tag{39}$$

$$\bar\partial\phi_\theta + \omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})} \overset{\star}{\wedge} \phi_\theta - \phi_\theta \overset{\star}{\wedge} \omega^{(0,1)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = 0, \tag{40}$$

其中 $i = 1, \ldots, n$。我们任取 $i = 1, \ldots, n$，并将其固定。

首先，我们考虑条件(39)。由公式(23)，我们看到 ϕ_θ可以局部表示如下（傅里叶展开）：

$$\phi_\theta(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_{\theta,k}(x) \exp\left(2\pi\mathbf{i}k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)y\right), \tag{41}$$

其中$\phi_{\theta,k}$ 是 x的局部定义的光滑函数。于是，事实上我们有

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right) \star \phi_\theta(x,y) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_{\theta,k}(x) \exp\left(\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y + 2\pi\mathbf{i}k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\left(y - \frac{1}{4\pi}\theta(\mathcal{A}^\theta)^t\boldsymbol{e}_i\right)\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_{\theta,k}(x) \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}k^t\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i + \mathbf{i}\left(\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta + 2\pi k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\right)y\right),
\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right) \star \phi_\theta(x,y) \star \exp\left(-\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_{\theta,k}(x) \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}k^t\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i + \mathbf{i}\left(\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta + 2\pi k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\right)\left(y - \frac{1}{4\pi}\theta(\mathcal{A}^\theta)^t\boldsymbol{e}_i\right) - \mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta y\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_{\theta,k}(x) \exp\left(-\mathbf{i}k^t\theta\mathcal{A}\boldsymbol{e}_i + 2\pi\mathbf{i}k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)y\right) \\
&= \phi_\theta(x, y+\boldsymbol{e}_i).
\end{aligned}$$

因此，局部表达式 (41) 确实满足条件 (39)。

接下来，我们考虑条件 (40)。我们令 t

$$\alpha^{\theta} := \mathcal{A}(-T^{-1} - \theta A).$$

根据 $\omega_{\theta\ A}^{(0,1)}{}_{,(,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\omega_{\theta\ A}^{(0,1)}{}_{,(,p',q';\mathcal{A})}$ 的定义，现在只需考虑如下关系：

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\phi_{\theta} + \left(-\mathbf{i}y^{t}\alpha^{\theta} - 2\pi\mathbf{i}\left(p'^{t}(-T^{-1}) - q'^{t}\right)\right) dx^{(0,1)} \overset{\star}{\wedge} \phi_{\theta} \\ - \phi_{\theta} \overset{\star}{\wedge} \left(-\mathbf{i}y^{t}\alpha^{\theta} - 2\pi\mathbf{i}\left(p^{t}(-T^{-1}) - q^{t}\right)\right) dx^{(0,1)} = 0. \qquad (42)\end{aligned}$$

此外，将局部表达式 (41) 代入关系式 (42)，我们得到如下微分方程组，其中 $i = 1,\ldots,n$：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_{\theta,k}}{\partial x_i}(x) + \Bigg(2\pi\mathbf{i}k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\left(\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)(-T^{-1}) - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\theta A\right) \\ - 2\pi\mathbf{i}\left(\left(p'^{t} - p^{t}\right)(-T^{-1}) - q'^{t} + q^{t}\right)\Bigg)\boldsymbol{e}_i\ \phi_{\theta,k}(x) = 0.\end{aligned}$$

因此，我们得到解

$$\begin{aligned}\phi_{\theta,k}(x) = C_k\ \exp\Bigg(2\pi\mathbf{i}\left(k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right) - p'^{t} + p^{t}\right)T^{-1}x \\ - 2\pi\mathbf{i}\left(-\frac{1}{2\pi}k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta\mathcal{A}\theta A + q'^{t} - q^{t}\right)x\Bigg),\end{aligned}$$

其中 $C_k \in \mathbb{C}$ 为任意常数。为简单起见，我们令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{(p,p')} &:= \left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{t}k - p' + p, \\ \boldsymbol{b}_{(q,q')} &:= -\frac{1}{2\pi}A^{t}\theta^{t}\mathcal{A}\theta^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^{t}k + q' - q,\end{aligned}$$

即，

$$\phi_{\theta,k}(x) = C_k\ \exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{a}_{(p,p')}^{t}T^{-1}x - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{b}_{(q,q')}^{t}x\right).$$

最后，我们考虑条件 (38)。与条件 (39) 的情形类似，我们可以如下计算：

$$\begin{aligned}&\exp\left(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^{t}A^{t}y\right)\star\phi_{\theta}(x,y)\star\exp\left(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^{t}A^{t}y\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\phi_{\theta,k}(x)\ \exp\left(-2\pi\mathbf{i}k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A\boldsymbol{e}_i + 2\pi\mathbf{i}k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)y\right).\end{aligned}$$

另一方面，显然

$$\phi_{\theta}(x + \boldsymbol{e}_i, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\phi_{\theta,k}(x + \boldsymbol{e}_i)\ \exp\left(2\pi\mathbf{i}k^{t}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)y\right).$$

因此，如果存在 k、 $l \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{a}^t_{(p,p')}T^{-1} - 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{b}^t_{(q,q')} = -2\pi\mathbf{i}k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A - 2\pi\mathbf{i}l^t,$$

也就是说，若存在 $k, l \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & O \\ -A^t\theta\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix},$$

那么对任意 $k' \neq k$ $(k' \in \mathbb{Z}^n)$，我们应取 $C_{k'} = 0$：

$$\phi_\theta(x,y) = C\exp\left(-2\pi\mathbf{i}\left(k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)\theta A + l^t\right)x + 2\pi\mathbf{i}k^t\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)y\right),$$

其中 $C := C_k \in \mathbb{C}$。否则，为了构造满足条件 (38)、(39)、(40) 的 ϕ_θ，我们必须对任意 $k \in \mathbb{Z}^n$ 设定 $C_k = 0$；也就是说，满足条件 (38)、(39)、(40) 的 ϕ_θ 是唯一的 $\phi_\theta = 0$。证明完毕。

特别地，该定理的陈述意味着，对于固定矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$、 $\mathcal{A} \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$，$E^\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间与 $2n$ 维实环面同胚

$$\mathbb{R}^{2n}\Big/\begin{pmatrix} \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & O \\ -A^t\theta\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)^t & I_n \end{pmatrix}\mathbb{Z}^{2n}.$$

□

我们将固定矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$、 $\mathcal{A} \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ 对应的非交换对象 $E^\nabla_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的同构类集合（模空间）记为

$$\mathcal{M}_\theta(A;\mathcal{A}).$$

我们评述若干与定理 3.7 相关的结果。根据阿佩尔-洪贝特定理，对于由满足适当条件的 $\mathbb{C}^n$ 上的厄米度量 H 与半表示 U： $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n \to U(1)$ 所构成的给定对，我们可以在 $X^n = \mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$上定义全纯线丛。此外，相应的自守因子可由这些$H$ 与 U显式描述。再者，当我们关注 X^n [33]上的射影平坦（半齐次）丛时，阿佩尔-洪贝特定理可推广到高秩情形。在我们先前的结果 [29], 中，利用复环面上单的射影平坦丛的分类结果 [38, 定理 6.1], [39, 命题 6.17 (1)], ，研究了 X^n 上（某些）单的射影平坦丛的半表示（它们不能由第一陈特征标确定），包括高秩情形[8]。该结果亦被用于确定

[8]准确地说，我们需要将格 $\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ $\mathbb{C}^n$ $2\pi\ \mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{C}^n$ 重新缩放为格 ( ) in，以使我们的设定与 [29] 中的论证相对应。

$Fuk(\check{X}^n)$中对应于半表示 [29]的数据。定理 3.7 在情形 $\theta = O$ 下的陈述可视为 [29,定理 3.4]的特例。另一方面，当我们考虑椭圆曲线的情形，即情形 $n = 1$ 时，泊松双向量(19)中对应于 θ_1、$\theta_3 \in$ 交替形式$(n;\mathbb{R})$的项消失，因此它变为

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\theta_2)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

X^1 在 [44] 中所处理的非交换变形，本质上与由该泊松双向量给出的非形式变形量子化相关联，并且 [44,命题 2.1 (b)] 是此情形下定理 3.7 的一个类比。

4 X^n上 Fukaya 范$\check{}$畴对象的一个变形

在本节中，我们构造 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$的对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的变形，这些对象与非交换对象$E^{\nabla}_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$镜像对偶，并研究它们的一些性质。特别地，定理 3.7 的类比在定理 4.4 中给出，以及 SYZ 变换的一个推广

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)} \ \longmapsto \ E^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

到包含非交换参数 θ 的设定在定理 4.5 中给出。

4.1 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$的一个变形

本小节的目的是构造 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$的对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$的变形，该变形与从$\check{X}^n$ 到 X^n_θ的镜像伙伴的变形相关联。这一构造基于我们先前论文 [31]中提出的一个想法。

为了实现这一目的，我们首先需要根据镜像变换 (9) 考虑 X^n_θ 的镜像伙伴。在复几何这一侧，泊松双向量 Π_θ （见公式 (20)）引起了 β-场变换

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_T(\Pi_\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t\right)
\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & -\theta \\ O & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix}
\mathcal{I}_T
\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & \theta \\ O & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{43}$$

从广义复几何的角度来看，这是 $\mathcal{I}_T$ 在 X^n 上的变换（关于 $\mathcal{I}_T$ 的定义详情，见公式 (8)）。因此，我们可以计算

$$\begin{aligned}&\check{\mathcal{I}}_T(\Pi_\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t,\frac{\partial}{\partial\check{y}}^t,d\check{x}^t,d\check{y}^t\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t,\frac{\partial}{\partial\check{y}}^t,d\check{x}^t,d\check{y}^t\right)\begin{pmatrix}I_n&O&O&O\\O&I_n&O&O\\O&O&I_n&O\\O&-\theta&O&I_n\end{pmatrix}\check{\mathcal{I}}_T\begin{pmatrix}I_n&O&O&O\\O&I_n&O&O\\O&O&I_n&O\\O&\theta&O&I_n\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{44}$$

通过镜像变换 (9)（定义 $\check{}\ \mathcal{I}_T$ 的细节见公式 (10)）。这一事实表明，X^n_θ 的镜像伙伴是一个 $2n$ 维实环面 $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$，其复化辛形式 $\tilde{\omega}^\vee_\theta$ 是通过用依赖于 θ 的 B场扭曲 $\tilde{\omega}^\vee$ 而得到的：

$$\tilde{\omega}^\vee_\theta:=\tilde{\omega}^\vee+\frac{1}{2}d\check{y}^t\theta d\check{y}=\mathbf{i}\omega^\vee+\left(B^\vee+\frac{1}{2}d\check{y}^t\theta d\check{y}\right).$$

特别要注意，辛形式 $\omega^\vee$ 保持不变。为方便后续讨论，我们记

$$B^\vee_\theta:=\frac{1}{2}d\check{y}^t\theta d\check{y},$$

即，

$$\tilde{\omega}^\vee_\theta=\mathbf{i}\omega^\vee+\left(B^\vee+B^\vee_\theta\right).$$

下文中，我们将这个复化辛环面（即通过使用镜像变换 (9) 得到的 X^n_θ 的镜像伙伴）记为

$$\check{X}^n_\theta:=\left(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\ \tilde{\omega}^\vee_\theta=d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)d\check{y}+\frac{1}{2}d\check{y}^t\theta d\check{y}\right).$$

当然，我们可以将 $\{\check{O}^l_m\}_{(l;m)\in I}$ 视为 $\check{}\ X^n_\theta$ 的一个开覆盖。

我们构造与从 X^n 到 X^n_θ 的变形相关联的 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{}X^n)$ 中对象 $\mathcal{L}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形。它们也是非交换对象 $E^\nabla_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$ 的镜像。

开始主要讨论之前，我们需要先作一条说明。正如第 2.3 小节开头所回顾的，我们通常取一个带有酉联络 $\nabla_{\mathcal{L}}$ 的光滑复线丛$\mathcal{L}\to L$，并且该联络满足条件 (16)：

$$\Omega_{\nabla_{\mathcal{L}}}=2\pi\mathbf{i}B\Big|_L$$

作为给定复化辛流形上的 Fukaya范畴的一个对象$M_{\omega,\ B}$，其中 L是$M_{\omega,\ B}$中的一个拉格朗日子流形，而 $\Omega_{\nabla_{\mathcal{L}}}$ 表示 $\nabla_{\mathcal{L}}$ 的曲率形式（另见注 2.3）。这里请注意，当且仅当存在这样的酉联络 $\nabla_{\mathcal{L}}$ 时，

$$[B]\in H^2(L,\mathbb{Z}).\tag{45}$$

ˇˇ另一方面，在从 X^n 到 X^n_θ的变形过程中，尽管辛形式 $\omega^\vee$ 保持不变，B场 $B^\vee$ 却被 $B^\vee_\theta$扭曲。特别地，我们看到

$$2\pi\mathbf{i}\big(B^\vee + B^\vee_\theta\big)\Big|_{L_{(A,p)}} = \pi\mathbf{i}d\check{x}^t A^t\theta A d\check{x}$$

根据假设 $AT \in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{C})$。这意味着，自然地考虑$L_{(A,p)}$ 被保持，而 $\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 被变形为某种对象。然而，一般而言，对于给定的 θ，存在这样一种情形：ˇ X^n_θ 中给定的拉格朗日子流形$L_{(A,p)}$ 不满足完整性条件(45)：

$$\big[B^\vee + B^\vee_\theta\big] \notin H^2(L_{(A,p)},\mathbb{Z})$$

尽管我们可以考虑依赖于 θ的每个$E^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形$E^\nabla_{\theta\,,(A,p,q;\mathcal{A})}$ （例如考虑 $\theta \in M(n;\mathbb{R})\backslash M(n;\mathbb{Q})$且 $A = I_n \in M(n;\mathbb{Z})$的情形）。为了克服这一问题，在我们先前的论文[31], 中，我们提出采用每个拉格朗日子流形 L上与1-联络为 $2\pi\mathbf{i}B|_L$的平坦 gerbe 相关联的“扭曲”线丛，而不是“通常的”线丛。鉴于这些事实，在本文中，我们基于这一想法[9]构造对象 $\mathcal{L}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形。此外，我们能够将 [31] 中提出的想法应用于我们的设定，或许并非巧合。我们在第5节中解释本文与 [31] 之间的关系。

此后，为简单起见，我们将辛环面（$\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\omega^\vee$）记为ˇ$X^n_{\omega^\vee}$。利用B场 $B^\vee + B^\vee_\theta$，我们在拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ 上如下定义一个平坦gerbe。事实上， $B^\vee$ 的作用在 $L_{(A,p)}$上消失，即，

$$B^\vee\Big|_{L_{(A,p)}} = 0$$

由于我们假设 $AT \in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{C})$，因此本质上只需考虑 $B^\vee_\theta$ 仅在 $L_{(A,p)}$上的作用。此外，请注意，本小节所给出的平坦gerbe也可视为在ˇ $X^n_{\omega^\vee}$ 上整体定义的、其1-联络为 $2\pi\mathbf{i}(B^\vee + B^\vee_\theta)$的平坦gerbe到 $L_{(A,p)}$的限制。让我们考虑 $L_{(A,p)}$的一个开覆盖。通过取 I的一个适当子集 I'，我们可以构造 $L_{(A,p)}$的一个开覆盖 $\{\check{O}^l_m(A,p)\}_{(l;m)\in I'}$：

$$\check{O}^l_m(A,p) := \check{O}^l_m \cap L_{(A,p)},$$

其中 $(l;m) \in I'$。我们令

$$B^\vee_{\theta,A} := B^\vee_\theta\Big|_{L_{(A,p)}},$$

即，

$$B^\vee_{\theta,A} = \frac{1}{2}d\check{x}^t A^t\theta A d\check{x}.$$

[9]严格来说，我们并未讨论本方案与在ˇX^n_θ 上定义（某种类似物的）Fukaya范畴所需的一些结构之间的兼容性。不过，我们的方案或许实际上与这些要求兼容。另请参见 [31] 中的小节 5.4。

对于$B^{\vee}_{\theta,A}$，我们取一个1-形式$\beta^{\vee}_{\theta,A}$，其局部表示为

$$\beta^{\vee}_{\theta,A}=\frac{1}{2}\check{x}^t A^t\theta A d\check{x},$$

显然，$B^{\vee}_{\theta,A}=d\beta^{\vee}_{\theta,A}$。有时，为了指定坐标系 $\check{}x$，我们使用记号 $\beta^{\vee}_{\theta,A}(\check{}x)$，而不使用 $\beta^{\vee}_{\theta,A}$。对于每个 $i=1,\dots,n$，我们在局部定义 $\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)$，使得

$$\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)=\beta^{\vee}_{\theta,A}(\check{x}+\boldsymbol{e}_i)-\beta^{\vee}_{\theta,A}(\check{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A d\check{x}.$$

现在，任取 $i=1,\dots,n$ 以及点 $([\check{}x],[A\check{}x+p])$、$([\check{}x+\boldsymbol{e}_i],[A(\check{}x+\boldsymbol{e}_i)+p])\in L_{(A,p)}$，存在 $(l;m)$、$(l';m')\in I'$，使得 $([\check{}x],[A\check{}x+p])\in\check{}O^l_m(A,p)$，$([\check{}x+\boldsymbol{e}_i],[A(\check{}x+\boldsymbol{e}_i)+p])\in\check{}O^{l'}_{m'}(A,p)$。因此，我们将包含 $([x]\ [Ax+p]$ $O^{l'}_{m'}\ A\ p$ $[x+\boldsymbol{e}_i]\ [A\ x+\check{}\,,\check{}\,)$ 的开集 $\check{}\,\boldsymbol{e}_i\ +p]$ $O_{[\check{x}]}$ $O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_i]}$ $\omega^{\vee}_{\theta\,A}\ \boldsymbol{e}_1\ \dots\ \omega^{\vee}_{\theta\,A}\ \boldsymbol{e}_n$ $O^l_m(A,p)$ 以及包含 $(\check{}\,,(\check{}\,))$ 的开集 $\check{}\,(\,,)$ 分别记为 $\check{}$ 和 $\check{}$。于是，$,(),,()$ 可视为分别定义在 $\check{}\,O_{[\check{x}]}\cap\check{}O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_1]},\dots,\check{}O_{[\check{x}]}\cap\check{}O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_n]}$ 上的 1- 形式。对于每个 $i=1,\dots,n$，考虑一个函数

$$\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}):=\exp\Big(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A\check{x}\Big)$$

定义在 $\check{}\,O_{[\check{x}]}\cap\check{}O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_i]}$ 上，并满足微分方程

$$\big(d+2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)\big)\,\big(\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\check{x})\big)=0.$$

我们进一步定义 $\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{}\,x)$ 如下

$$\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})=\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}+\boldsymbol{e}_j)\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j,\check{x}),$$

其中 $i,j=1,\dots,n$。现在，利用它们，我们考虑定义在 $\check{}\,O_{[\check{x}]}\cap\check{}O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_i]}\cap\check{}\,O_{[\check{x}+\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j]}$ 上的如下常值函数，其中 $i,j=1,\dots,n$:

$$\alpha^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j):=\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})^{-1}\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j,\check{x}+\boldsymbol{e}_i)\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\check{x})=\exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t A^t\theta A\boldsymbol{e}_j\Big).$$

此外，我们有如下关系

$$2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)+2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j)-2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=\alpha^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)d\alpha^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)^{-1}=0,$$

其中

$$\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j):=\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)+\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_j),$$

以及 $i,j=1,\dots,n$。为简单起见，令

$$\alpha^{\vee}_{\theta,A}:=\Big\{\alpha^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\Big\}_{i,j=1,\dots,n},\quad \nabla^{\vee}_{\theta,A}:=\Big\{d+2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)\Big\}_{i=1,\dots,n}.$$

总结上述论证可知，数据 $(\alpha^{\vee}_{\theta,\,A},\ \nabla^{\vee}_{\theta,\,A},\ 2\pi\mathbf{i}B^{\vee}_{\theta,\,A})$ 在 $L_{(A,p)}$ 上定义了 Hitchin-Chatterjee [12, 17] 意义下的平坦 gerbe $\check{}\mathcal{G}^{\nabla}_{\theta,\,A}$：

$$\check{\mathcal{G}}^{\nabla}_{\theta,A}:=\Big(\alpha^{\vee}_{\theta,A},\ \nabla^{\vee}_{\theta,A},\ 2\pi\mathbf{i}B^{\vee}_{\theta,A}\Big).$$

这里，族 $\nabla^{\vee}_{\theta,\,A}$ 给出了 $L_{(A,p)}$ 上 gerbe 的一个 0-联络，该 gerbe 由族 $\alpha^{\vee}_{\theta,\,A}$ 确定；而全局定义的 2-形式 $2\pi\mathbf{i}B^{\vee}_{\theta,\,A}$ 是与 0-联络 $\nabla^{\vee}_{\theta,\,A}$ 相容的 1-联络。

注 4.1. 最初，*gerbe* 被引入为满足适当条件的层叠 [15]，而 *Hitchin-Chatterjee* 则在 [12, 17] 中给出了 *gerbe* 的微分几何解释。如上所述，平坦 *gerbe* $\check{\mathcal{G}}^{\nabla}_{\theta,A}$ 的定义基于 *Hitchin-Chatterjee* 的工作 [12, 17]。设 X 为一个光滑流形，$\mathscr{A}$ 为 X 上的一个阿贝尔层。我们将 X 上的一个 $\mathscr{A}$*-gerbe* $\mathscr{G}$ (视为层叠)，并取一个元素 $\alpha \in H^2(X,\mathscr{A})$，它对应于 $\mathscr{G}$。然后，正如 [37, 命题 2.1.3.3]，中所证明的，已知 $\mathscr{G}$ 上的扭曲层可以解释为 *Căldăraru* [10] 意义下 X 上的 α-扭曲层。

我们考虑 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{X}^n)$ 中每个对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的变形，它与 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 镜像对偶。如上所述，自然应考虑 $L_{(A,p)}$ 保持不变，因为辛形式 $\omega^{\vee}$ 在从 $\check{X}^n$ 到 $\check{X}^n_\theta$ 的变形过程中保持不变。因此，我们只需考虑 $\mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的变形，它可实现为 $L_{(A,p)}$ 上如下的 $\alpha^{\vee}_{\theta,A}$-扭曲光滑复线丛（另见注 4.1）。首先，平凡转移函数族按如下方式扭曲，其中 $j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 是从 $\mathbb{Z}^n\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的映射，而 $i=1,\cdots,n$：

$$\begin{aligned} 1 \mapsto j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) &:= \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\check{x}\right)\xi^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) \\ &= \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{4\pi}\boldsymbol{e}_i^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t\check{x} - \pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\theta A\check{x}\right). \end{aligned}$$

此外，$j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})$ 由 $j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}+\boldsymbol{e}_j)j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_j,\check{x})$ 定义：

$$j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x}) := j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}+\boldsymbol{e}_j)j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_j,\check{x}),$$

其中 $i, j = 1,\ldots,n_\circ$ 根据假设 (30)，我们很容易验证映射 $j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}$：$\mathbb{Z}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^\times$ 满足这些关系

$$j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})^{-1}j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_j,\check{x}+\boldsymbol{e}_i)j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) = \alpha^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,$$

其中 $i, j = 1,\ldots,n_\circ$ 它们意味着映射 $j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}$ 定义了 $L_{(A,p)}$ 上的一个 $\alpha^{\vee}_{\theta,A}$-扭曲光滑复线丛，因此简记为 $\mathcal{O}_{\theta,(A,p;\mathcal{A})}\to L_{(A,p)}$ 或 $\mathcal{O}_{\theta,(A,p;\mathcal{A})}$。另一方面，作为 1-形式 $\omega^{\vee}_{(A,p,q)}$ 的变形，我们考虑 1-形式 $\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$，它局部定义为

$$\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \omega^{\vee}_{(A,p,q)} + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}\check{x}^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t d\check{x} = 2\pi\mathbf{i}q^t d\check{x} + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}\check{x}^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t d\check{x}.$$

实际上，这个 1-形式 $\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 满足关系

$$\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(\check{x}+\boldsymbol{e}_i) = \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(\check{x}) + j^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x})dj^{\vee}_{\theta,(A;\mathcal{A})}(\boldsymbol{e}_i,\check{x})^{-1} - 2\pi\mathbf{i}\omega^{\vee}_{\theta,A}(\boldsymbol{e}_i)$$

对每个 $i = 1, \ldots, n$都成立。此外，为了指明坐标系 $\check{x}$，我们使用记号 $\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}(\check{x})$，而不是$\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 。因此，

$$\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} := d + \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$$

给出了 $\mathcal{O}_{\theta,(A,p,;\mathcal{A})}$ 上的一个联络。这里，我们令 $\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} := (\mathcal{O}_{\theta,(A,p;\mathcal{A})}, \nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})})$。 $\check{}$ 我们将拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ in X^n_θ 与带有联络 $\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的 $\alpha^{\vee}_{\theta,A}$-扭曲光滑复线丛这一对记为 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$: $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} := (L_{(A,p)}, \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})})$。

注 4.2. 当我们在情形 $\mathcal{A} = O$ 下将 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = (L_{(A,p)}, \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})})$ 记为 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)} = (L_{(A,p)}, \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)})$ 时，显然在假设 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = O$ 下，$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$ 等同。这一事实表明，在情形 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = O$ 下，$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q)}$ 一致。这也是辛几何一侧命题 *3.6* 的一个类似结果。

联络 $\Omega^{\vee}_{\theta}$的$_{(A,p,q;\mathcal{A})}$ 曲率形式$\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在局部表示为

$$\begin{aligned}\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} &= d\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} + \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \wedge \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} + 2\pi\mathbf{i}B^{\vee}_{(\theta,A)} \\ &= \frac{\mathbf{i}}{4\pi} d\check{x}^t \mathcal{A}^\theta \theta \left(\mathcal{A}^\theta\right)^t d\check{x} + \pi\mathbf{i} d\check{x}^t A^t \theta A d\check{x}.\end{aligned}$$

在此背景下，有时将 2-形式 $d\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} + \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \wedge \omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 称为 $\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ [26]的局部曲率形式。于是，我们可以很容易地验证等式

$$\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} - d\omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = 2\pi\mathbf{i}\big(B^{\vee} + B^{\vee}_{\theta}\big)\Big|_{L_{(A,p)}}$$

成立，而这是将条件 (16) 推广到包含变形参数 θ的情形。

4.2 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$的模空间

本小节旨在确定固定矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$、 $\mathcal{A} \in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$下 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间。特别地，在定理 4.4 中，我们证明辛几何方面的定理 3.7 的类似结果。此外，通过使用定理 3.7 和定理 4.4，在定理 4.5 中，我们给出了 SYZ 变换的推广

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)} \longmapsto E^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

到包含非交换参数 θ 的设定。

首先，我们给出如下引理。

引理 4.3. 对于给定的参数 $(A,p,q) \in M(n;\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$,

$$\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{B})}$$

当且仅当

$$\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{B})}$$

成立。

证明。 我们首先回顾 $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 和 $\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$的定义。根据引理 3.5 中的计算, $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在局部可表示为

$$\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \pi\mathbf{i}dx^t A^t \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)\theta A dx - 2\pi\mathbf{i}dx^t A^t \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A}\right)^2\right)dy + \frac{\mathbf{i}}{4\pi}dy^t\mathcal{A}\theta\mathcal{A}dy.$$

另一方面，正如在第 4.1 小节末尾所验证的，$\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 在局部可表示为

$$\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \frac{\mathbf{i}}{4\pi}d\check{x}^t\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t d\check{x} + \pi\mathbf{i}d\check{x}^t A^t\theta A d\check{x}.$$

特别地，我们看到，在 $\mathcal{A}=O$ 的情形下，$\Omega^{(0,2)}_{\theta\ A\ ,(,p,q;\mathcal{A})}$ 和 $\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 由同一个矩阵 $A^t\theta A \in$ 交替形式$(n;\mathbb{R})$ 决定:

$$\Omega^{(0,2)}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \pi\mathbf{i}\left(dx^{(0,1)}\right)^t A^t\theta A dx^{(0,1)}, \quad \Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \pi\mathbf{i}d\check{x}^t A^t\theta A d\check{x}.$$

注意， $\mathcal{A}^\theta\theta(\mathcal{A}^\theta)^t$ 和 $\mathcal{B}^\theta\theta(\mathcal{B}^\theta)^t$ 结果为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\theta\theta\left(\mathcal{A}^\theta\right)^t &= \left(I_n + \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^{-1}\mathcal{A}\theta\mathcal{A} \\ &= \left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^2\right)^{-1}\mathcal{A}\theta\mathcal{A}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^\theta\theta\left(\mathcal{B}^\theta\right)^t &= \mathcal{B}\theta\mathcal{B}\left(I_n + \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{B}\right)^{-1}\left(I_n - \frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{B}\right)^{-1} \\ &= \mathcal{B}\theta\mathcal{B}\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{B}\right)^2\right)^{-1},\end{aligned}$$

分别。因此， $\mathcal{A}^\theta\theta(\mathcal{A}^\theta)^t = \mathcal{B}\theta(\mathcal{B})^t$ 当且仅当

$$\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{A}\theta\right)^2\right)^{-1}\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = \mathcal{B}\theta\mathcal{B}\left(I_n - \left(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{B}\right)^2\right)^{-1},$$

即， $\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = \mathcal{B}\theta\mathcal{B}$。换句话说，$\Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \Omega^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{B})}$ 成立这一条件等价于等式 $\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = \mathcal{B}\theta\mathcal{B}$ 成立。此外，根据 $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$的定义，显然，
$\mathcal{A}\theta\mathcal{A} = \mathcal{B}\theta\mathcal{B}$ 成立当且仅当 $\Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = \Omega_{\theta,(A,p,q;\mathcal{B})}$ 成立。证明至此完成。 □

现在，基于 [29], 两个固定矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$、$\mathcal{A} \in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{R})$ 以及p, q, p', $q' \in \mathbb{R}^n$，我们给出 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 彼此同构的定义如下。若存在一个辛自同构$\Phi\colon \check{} X^n_\theta \xrightarrow{\sim} \check{} X^n_\theta$ 使得

$$\Phi^{-1}\left(L_{(A,p')}\right) = L_{(A,p)}, \tag{46}$$
$$\Phi^{*}\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})} \cong \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}, \tag{47}$$

我们称 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 同构，并记作

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \cong \mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}.$$

这里，我们给出辛几何一侧定理 3.7 的对应结论。

定理 4.4. 任取矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$、$\mathcal{A} \in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{R})$ 并将其固定。则两个对象$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 和$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 彼此同构，

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \cong \mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})},$$

当且仅当存在 $k, l \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}.$$

证明。由于两个拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ 和$L_{(A,p')}$ 是利用固定矩阵 $A \in M(n;\mathbb{Z})$ 定义的仿射子流形，我们可以取映射

$$\Phi = \mathrm{id}_{\check{X}^n_\theta}$$

作为一个辛自同构 $\Phi\colon \check{} X^n_\theta \xrightarrow{\sim} \check{} X^n_\theta$，它在仅考虑 $L_{(A,p)} = L_{(A,p')}$ 的情况下满足条件 (46)。特别地，$L_{(A,p)} = L_{(A,p')}$ 成立，当且仅当存在 $k \in \mathbb{Z}^n$ 使得 $p' = p + k$。于是条件 (47) 化为

$$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \cong \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})},$$

因此，只需讨论何时

$$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,(A,p,q;\mathcal{A})} \cong \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,(A,p',q'\,\mathcal{A}} \qquad L_{(A,p)} = {}_{,;;)}\text{ 在)上成立。}$$

$L_{(A,p'}$下面，我们显式计算同构 φ：$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,,(A,p,q;\mathcal{A})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,,(A,p',q';\mathcal{A})}$。通过求解微分方程

$$d\varphi + 2\pi\mathbf{i}q'^t d\check{x} \wedge \varphi - \varphi \wedge 2\pi\mathbf{i}q^t d\check{x} = 0$$

这等价于$\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}\varphi - \varphi\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} = 0$，我们得到局部表示为

$$\varphi(\check{x}) = C\,\exp\left(-2\pi\mathbf{i}(q'^t - q^t)\check{x}\right),$$

其中 $C \in \mathbb{C}$ 是一个任意常数。此外，尽管我们需要考虑使 φ与对应于$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 和$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,,(A,p',q';\mathcal{A})}$的自守因子相容的条件，但这很容易，因为$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta\,,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 与

$\mathcal{O}^{\nabla}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 当我们忽略它们的微分结构$\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$, $\nabla^{\vee}_{\theta,(A,p',q';\mathcal{A})}$ 时。也就是说，我们可以考虑等式

$$\varphi(\check{x}+\boldsymbol{e}_i)=\varphi(\check{x}) \tag{48}$$

对每个 $i=1,\ldots,n$ 都成立。显然，对于每个固定的 $i=1,\ldots,n$，我们看到

$$\varphi(\check{x}+\boldsymbol{e}_i)=\exp\left(-2\pi\mathbf{i}(q'^t-q^t)\boldsymbol{e}_i\right)\varphi(\check{x}).$$

因此，若存在 $l\in\mathbb{Z}^n$ 使得 $q'-q=l$，则关系 (48) 成立，因为 $\exp(-2\pi\mathbf{i}(q'^t-q^t)\boldsymbol{e}_i)=\exp(-2\pi\mathbf{i}l^t\boldsymbol{e}_i)=1$，此时，同构 φ 在局部可表示为

$$\varphi(\check{x})=C\,\exp\left(-2\pi\mathbf{i}l^t\check{x}\right)$$

其中 $C\neq 0$。若非如此，我们必须令 $C=0$，以满足关系 (48)，因为存在 $i=1,\ldots,n$ 使得 $\exp(-2\pi\mathbf{i}(q'^t-q^t)\boldsymbol{e}_i)\neq 1$。证明完毕。

特别地，该定理的陈述意味着，对于固定矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$，$\mathcal{A}\in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$，$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间与 $2n$ 维实环面同胚

$$\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}\approx\left(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n\right)\times\left(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n\right).$$

□

我们将对象的同构类集合（模空间）$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$ 对于固定矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$、$\mathcal{A}\in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{R})$记为

$$\mathcal{M}^{\vee}_{\theta}(A;\mathcal{A}).$$

作为结论，对于固定矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$、$\mathcal{A}\in$ 对称矩阵$(n;\mathbb{R})$，根据定理 3.7 和定理 4.4，我们看到 $E^{\nabla}_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间和 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,\ (A,p,q;\mathcal{A})}$ 的模空间都同胚于 $2n$ 维实环面。因此，我们得到以下定理，这也是关于（X^n_θ，$\check{}X^n_\theta$）的同调镜像对称表述的一部分。

定理 4.5。任取矩阵 $A\in M(n;\mathbb{Z})$、$\mathcal{A}\in$ 对称矩阵（$n;\mathbb{R}$），并将其固定。则 $\mathcal{M}^{\vee}_{\theta}(A;\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{M}_{\theta}(A;\mathcal{A})$ 之间存在一个双射。

证明。这本质上是定理 3.7 和定理 4.4 的一个推论。根据定理 3.7 和定理 4.4，很容易验证由下式定义的映射

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\ \longmapsto\ E^{\nabla}_{\theta,(A,(I_n-(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A})^2)^tp,-A^t\theta(I_n-(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A})^2)^tp+q;\mathcal{A})}$$

诱导出一个双射 $\mathcal{M}^{\vee}_{\theta}(A;\mathcal{A})\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}_{\theta}(A;\mathcal{A})$。实际上，由下式定义的映射

$$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}\ \longmapsto\ \mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,((I_n-(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A})^2)^{-1})^tp,A^t\theta p+q;\mathcal{A})}.$$

诱导出一个映射 $\mathcal{M}_{\theta}(A;\mathcal{A})\to\mathcal{M}^{\vee}_{\theta}(A;\mathcal{A})$，这是上述映射 $\mathcal{M}^{\vee}_{\theta}(A;\mathcal{A})\to\mathcal{M}_{\theta}(A;\mathcal{A})$ 的逆映射。 □

最后，结合定理 4.5 与引理 4.3，我们看到对应关系

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})} \longmapsto E^{\nabla}_{\theta,(A,(I_n-(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A})^2)^t p,-A^t\theta(I_n-(\frac{1}{2\pi}\theta\mathcal{A})^2)^t p+q;\mathcal{A})}$$

是对 SYZ 变换的推广

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)} \longmapsto E^{\nabla}_{(A,p,q)}$$

将镜像对 $(X^n, \check{X}^n)$ 推广至包含非交换参数 θ 的情形。

5 总结

本文基于 [21]，构造了 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的变形$E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$，其中包括同构 (25) 所产生的歧义的影响。此外，我们计算了对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$，它们与非交换对象 $E^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 镜像对偶；实际上，它们之间的 SYZ 变换也在定理 4.5 中得到了明确描述。

另一方面，正如第 4.1 小节所述，变形对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{\theta,(A,p,q;\mathcal{A})}$ 的构造基于我们先前论文 [31] 中提出的想法。我们能够将 [31] 中提出的想法应用于当前情形，或许并非巧合；看来二者通过傅里叶-穆凯变换相关。下面，我们借助广义复几何简要阐释这一观点。

作为一个玩具模型，我们首先聚焦于椭圆曲线镜像对（$X^1, \check{X}^1$）。注意，X^1 并未按照本文所述的意义发生变形[10]，因为 $\Pi_\theta = 0$。一般而言，我们可以考虑 $D^b(Coh(X^1))$ 上的 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用（忽略平移）。另一方面，在辛几何一侧，通过同调镜像对称，$D^b(Coh(X^1))$ 上的这个 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用被转化为 $\check{X}^1$ 上的 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用。具体而言，对于给定的元素 $g \in SL(2;\mathbb{Z})$，我们可以定义辛自同构 $\varphi_g : \check{X}^1 \xrightarrow{\sim} \check{X}^1$，其定义为 $\varphi_g(\check{x}) = g\check{x}$；这个 φ_g 在 $Fuk(\check{X}^1)$ 和 $Tr(Fuk(\check{X}^1))$ 上诱导自等价：

$$\left(L_{(A,p)},\ \mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)}\right) \longmapsto \left(\varphi_g\left(L_{(A,p)}\right),\ \left(\varphi_g^{-1}\right)^*\mathcal{O}^{\nabla}_{(A,p,q)}\right).$$

特别地，一个生成元

$$g_{FM} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$$

对应于 $D^b(Coh(X^1))$ 上的傅里叶-穆凯变换及其镜像变换 $\varphi_{g_{FM}} : \check{X}^1 \xrightarrow{\sim} \check{X}^1$。这里，我们将

[10]如 [44], 中所述，我们可以考虑与泊松双向量（19）相关联的 X^1 的（非平凡）非交换变形，使得 $\theta_2 \in M(n;\mathbb{R})$且 $\theta_1 = \theta_3 = O$。

公式 (8)、(10) 中相对于标准基的表示矩阵分别记为相同的记号 $\mathcal{I}_T$、$\check{}\mathcal{I}_T$。然后，从广义复几何的角度来看，$\check{}$辛自同构 $\varphi_{g_{FM}}$ 诱导了如下变换 $\mathcal{I}_T$:

$$\check{\mathcal{I}}_T \longmapsto \hat{\check{\mathcal{I}}}_T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \check{\mathcal{I}}_T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且由镜像变换 (9)，我们有

$$M_{(1)} \hat{\check{\mathcal{I}}}_T M_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{I}_T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，自然可以预期该变换

$$\mathcal{I}_T \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{I}_T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应于 $D^b(Coh(X^1))$上的傅里叶-穆凯变换，从广义复几何的观点来看。

现在，基于这个玩具模型，让我们考虑如下变换:

$$\mathcal{I}_T \longmapsto \hat{\mathcal{I}}_T := \begin{pmatrix} O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \\ O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \end{pmatrix} \mathcal{I}_T \begin{pmatrix} O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \\ O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \end{pmatrix}$$

这个变换似乎对应于傅里叶-穆凯变换。事实上，我们可以将 $\mathcal{I}_T$ 解释为由 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n \oplus T^t\mathbb{Z}^n)$的复结构诱导的广义复结构，而 $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n \oplus T^t\mathbb{Z}^n)$是 X^n 的对偶（ X^1的对偶即 X^1 本身）。此外，我们有

$$M_{(n)} \hat{\mathcal{I}}_T M_{(n)} = \begin{pmatrix} O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \\ O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \end{pmatrix} \check{\mathcal{I}}_T \begin{pmatrix} O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \\ O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \end{pmatrix} \quad (49)$$

通过镜像变换 (9)。为简单起见，我们令

$$\hat{\check{\mathcal{I}}}_T := \begin{pmatrix} O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \\ O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \end{pmatrix} \check{\mathcal{I}}_T \begin{pmatrix} O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \\ O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \end{pmatrix}.$$

ˆ 等式 (49) 的右侧表明，变换 ˇ $\mathcal{I}_T \mapsto {}^{\check{}}\mathcal{I}_T$ 由如下定义的映射诱导

$$\check{x} \longmapsto \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} \check{x}, \tag{50}$$

这是将 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用 $\varphi_{g_{FM}}$ 推广到高维情形下 ˇX^1 的结果。这里请注意，它不再是 ˇX^n 上的辛自同构。

让我们考虑镜像对 $(X^n_\theta,\ {}^{\check{}}X^n_\theta)$ 上述变换。与 $\mathcal{I}_T$ 和 $\mathcal{I}_T$ 的情形类似，我们分别用 $\mathcal{I}_T(\Pi_\theta)$、ˇ$\mathcal{I}_T(\Pi_\theta)$ 表示公式 (43)、(44) 中相对于标准基的表示矩阵。通过直接计算，我们得到等式

$$\begin{aligned} &M_{(n)} \left\{ \begin{pmatrix} O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \\ O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \end{pmatrix} \mathcal{I}_T(\Pi_\theta) \begin{pmatrix} O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \\ O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \end{pmatrix} \right\} M_{(n)} \\ &= \begin{pmatrix} O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \\ O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \end{pmatrix} \check{\mathcal{I}}_T(\Pi_\theta) \begin{pmatrix} O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \\ O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

成立。这个等式表明，镜像变换 (9) 在上述意义下与两个傅里叶-穆凯变换均相容。此外，我们还有

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \\ O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \end{pmatrix} \check{\mathcal{I}}_T(\Pi_\theta) \begin{pmatrix} O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \\ O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ -\theta & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix} \hat{\check{\mathcal{I}}}_T \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ \theta & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ˆˇ 而右侧可以在我们之前论文 [31] 的背景下，解释为辛几何一侧中 $\mathcal{I}_T$ 的 B场变换。另一方面，在复几何一侧，我们有

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} O & O & O & I_n \\ O & O & -I_n & O \\ O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \end{pmatrix} \mathcal{I}_T(\Pi_\theta) \begin{pmatrix} O & O & O & -I_n \\ O & O & I_n & O \\ O & -I_n & O & O \\ I_n & O & O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ -\theta & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix} \hat{\mathcal{I}}_T \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ \theta & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ˆ 这里，右侧可以在我们之前论文 [31] 的背景下，解释为 $\mathcal{I}_T$ 的 B场变换。因此，总结以上讨论，我们可以预期，非交换复环面 X_θ^n 的傅里叶-穆凯伙伴，是按照 [31] 的意义对 X^n 的傅里叶-穆凯伙伴进行 gerbe 变形所得的结果。特别地，在辛几何一侧，$L_{(A,p)}$ 上的平坦 gerbe $\check{\mathcal{G}}_{\theta,\ A}^{\nabla}$ 与 [31] 中的平坦 gerbe 通过映射 (50) 相关联。我们将在第 6.1 小节的最后再次讨论这一描述。

最后，我们对几项相关工作作一番评论。在 [5], 中，研究者聚焦于与形式变形量子化相关的非交换变形，考察了非交换复环面的傅里叶-穆凯伙伴。另一方面，鉴于 [5], , [42] 讨论了非形式参数下非交换复环面的傅里叶-穆凯伙伴（另见 [6, 7]）。

6 附录

正如第 5 节所述，我们先前的论文 [31]与本文密切相关，而 [30], 则讨论了 X^n 的另一种 gerbe 变形。然而，在本研究期间，我们发现两篇文章 [31, 30] 中都存在类似错误，尽管它们已经发表。本节将对这些错误加以修正。

为说明细节，我们来考虑 X^n 上的一个 B场，它在局部可表示为

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(\tau_1)_{ij}dx_i\wedge dx_j+(\tau_2)_{ij}dx_i\wedge dy_j+\frac{1}{2}(\tau_3)_{ij}dy_i\wedge dy_j\right), \qquad (51)$$

其中，τ_1、$\tau_3\in$ Alt(n; $\mathbb{R}$) 和 $\tau_2\in M(n;\ \mathbb{R})$。具体而言，[31], 讨论了 τ_1 型的情形，即 $\tau_1\in$ Alt($n;\mathbb{R}$) 且 $\tau_2=\tau_3=O$ 的情形；而在 [30], 中，我们聚焦于 τ_2 型的情形，即 $\tau_2\in M(n;\ \mathbb{R})$ 且 $\tau_1=\tau_3=O$的情形。无论如何，在这些论文中，我们使用的平坦 gerbe，其 1-联络由 B场 (51) 决定。然而，严格来说，在这一语境下，我们应当考虑 1-联络由 B场 (51) 的 (0,2) 部分决定的平坦 gerbe，而非 [31, 30]中采用的平坦 gerbe。特别是，尽管 [31, 命题 5.6] 和 [30, 命题 4.4]都指出，每个 $E^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 的全纯性在相应的 gerbe 变形下得以保持，但实际上，正确地考察后我们得出的结论是，这些陈述同样不正确。本节将修正这些论证。

6.1 类型为 τ_1的 gerbe 变形

我们取任意一个 $\tau\in$ 交替形式($n;\mathbb{R}$)，并将其固定。在本小节中，我们修订了 [31] 中给出的若干结果。

6.1.1 复几何方面

考虑 $\tau_1 = \tau$ 和 $\tau_2 = \tau_3 = O$的情形下的B场(51)，并将其记为 ${}_\tau B$:

$$ {}_\tau B := \frac{1}{2} dx^t \tau dx. $$

从广义复几何的角度来看，此 B场 ${}_\tau B$ 会在 X^n 上引起 $\mathcal{I}_T$ 的 B场变换:

$$ \begin{aligned} &\mathcal{I}_T({}_\tau B) \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t \right) \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ -\tau & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix} \mathcal{I}_T \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ \tau & O & I_n & O \\ O & O & O & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

于是，以下命题成立。

命题 6.1. 与 *B*场 ${}_\tau B$ 相关联的 *B*场变换保持 X^n 上的广义复结构 $\mathcal{I}_T$，即

$$ \mathcal{I}_T({}_\tau B) = \mathcal{I}_T $$

当且仅当 $\tau = O$。

证明。 为简便起见，我们设

$$ I_T := \begin{pmatrix} -XY^{-1} & -Y - XY^{-1}X \\ Y^{-1} & Y^{-1}X \end{pmatrix}, \quad {}_\tau \underline{B} := \begin{pmatrix} \tau & O \\ O & O \end{pmatrix}. $$

于是，我们可以证明以下陈述：等式

$$ \begin{pmatrix} I_{2n} & O \\ -{}_\tau \underline{B} & I_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_T & O \\ O & -I_T^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2n} & O \\ {}_\tau \underline{B} & I_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_T & O \\ O & -I_T^t \end{pmatrix} \tag{52} $$

成立当且仅当 $\tau = O$。这里，等式（52）成立当且仅当 ${}_\tau B I_T + I_T^t {}_\tau B = O$因为我们可以计算出

$$ \begin{pmatrix} I_{2n} & O \\ -{}_\tau \underline{B} & I_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_T & O \\ O & -I_T^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{2n} & O \\ {}_\tau \underline{B} & I_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_T & O \\ -({}_\tau \underline{B} I_T + I_T^t {}_\tau \underline{B}) & -I_T^t \end{pmatrix}, $$

并且矩阵 ${}_\tau B I_T \pm I_T^t {}_\tau B$最终为

$$ {}_\tau \underline{B} I_T + I_T^t {}_\tau \underline{B} = \begin{pmatrix} -\tau XY^{-1} - (Y^{-1})^t X^t \tau & -\tau(Y + XY^{-1}X) \\ -(Y^t + X^t (Y^{-1})^t X^t)\tau & O \end{pmatrix}. $$

因此，我们可以考虑以下两个条件

$$ -\tau XY^{-1} - (Y^{-1})^t X^t \tau = O, \tag{53} $$

$$ -\tau(Y + XY^{-1}X) = O. \tag{54} $$

如第 2.1 小节所述，现在，$\det(Y + XY^{-1}X) \neq 0$ 因为 $\det T \neq 0$。因此，条件 (54) 表明 $\tau = O$，于是条件 (53) 自动满足。反之，显然，当 $\tau = O$ 时，两个条件 (53)、(54) 都得到满足。因此，等式 (52) 成立当且仅当$\tau = O$。

□

另一方面，根据 ${}_\tau B$ 的定义，(0,2) 部分${}_\tau B^{(0,2)}$的消失等价于 $\tau \in$ 对称矩阵$(n; \mathbb{R})$，即 $\tau = O$（注意 $\tau \in$ 交替形式$(n; \mathbb{R})$）。因此，作为命题 6.1 的推论，我们立即得到如下结果。

推论 6.2. 与 *B*场 ${}_\tau B$ 相伴的 *B*场变换保持 X^n 上的广义复结构 $\mathcal{I}_T$，即

$$\mathcal{I}_T({}_\tau B) = \mathcal{I}_T$$

当且仅当 (*0,2*) 部分 ${}_\tau B^{(0,2)}$ 消失。

下面，我们给出其 1-联络由 ${}_\tau B^{(0,2)}$ 决定的平坦 gerbe 的严格定义。我们令

$$\Lambda(T, \tau) := ((T - \bar{T})^{-1})^t T^t \tau T (T - \bar{T})^{-1},$$

即，

$${}_\tau B^{(0,2)} = \frac{1}{2} d\bar{z}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z}.$$

对于 ${}_\tau B^{(0,2)}$，我们取一个局部表示为如下形式的 1-形式 ${}_\tau\beta$

$${}_\tau\beta = \frac{1}{2} \bar{z}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z},$$

并且显然 ${}_\tau B^{(0,2)} = \bar{\partial}{}_\tau\beta$。有时我们用记号 ${}_\tau\beta(z)$ 代替 ${}_\tau\beta$，以指定复坐标系 z。对于每个 $i = 1$、.....、 n，我们局部定义 ${}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i)$、 ${}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i)$ 如下：

$$\begin{aligned}
{}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i) &= {}_\tau\beta(z + \boldsymbol{e}_i) - {}_\tau\beta(z) = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_i^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z}, \\
{}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i) &= {}_\tau\beta(z + T\boldsymbol{e}_i) - {}_\tau\beta(z) = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_i^t \bar{T}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z},
\end{aligned}$$

分别如此。现在，对于任意的 $i = 1, \ldots, n$ 以及点 $[z]$, $[z + \boldsymbol{e}_i] \in X^n$，存在 $(l; m), (l'; m') \in I$ 使得 $[z] \in O^l_m$, $[z+\boldsymbol{e}_i] \in O^{l'}_{m'}$，因此我们将包含 $[z]$ 的开集 O^l_m 和包含 $[z+\boldsymbol{e}_i]$ 的开集 $O^{l'}_{m'}$ 分别记为 $O_{[z]}$ 和$O_{[z+\boldsymbol{e}_i]}$。我们在此意义下使用记号 $O_{[z+T\boldsymbol{e}_1]}, \ldots, O_{[z+T\boldsymbol{e}_n]}$。那么， ${}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_1) \ldots, {}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_n)$, ${}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_1) \ldots, {}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_n)$ 可分别视为定义在 $O_{[z]} \cap O_{[z+\boldsymbol{e}_1]}, \ldots, O_{[z]} \cap O_{[z+\boldsymbol{e}_n]}$, $O_{[z]} \cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_1]}, \ldots, O_{[z]} \cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_n]}$上的 1-形式。我们来考虑对每个 $i = 1, \ldots, n$局部定义的下列函数：

$${}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i, z) := \exp\Big(-\pi \mathbf{i} \boldsymbol{e}_i^t \Lambda(T, \tau) \bar{z}\Big), \quad {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i, z) := \exp\Big(-\pi \mathbf{i} \boldsymbol{e}_i^t \bar{T}^t \Lambda(T, \tau) \bar{z}\Big).$$

由于它们满足微分方程

$$\left(\bar{\partial}+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)\right)\left(\xi_{\tau}(\gamma_i,z)\right)=0,\quad \left(\bar{\partial}+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)\right)\left({}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,z)\right)=0,$$

我们可以将 ${}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i,\ z)$ 和 ${}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,\ z)$ 分别视为 $O_{[z]}\cap O_{[z+\boldsymbol{e}_i]}$ 上平凡复线丛的全纯截面，其配备的全纯结构分别为 $\bar{}\partial+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $\partial+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)$。我们进一步定义 ${}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\ z)$、${}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,\ z)$、${}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\ z)$、${}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,\ z)$ 为

$$\begin{aligned}
&{}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)={}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)={}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)={}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)={}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_j,z),
\end{aligned}$$

其中 i、$j=1,\ \ldots\ldots,\ n$。现在，利用它们，我们考虑以下局部定义的常值函数，其中 i、$j=1,\ \ldots\ldots,\ n$:

$${}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i,z)=\exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_i,z)=\exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)\bar{T}\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_{\tau}\xi(\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,z)=\exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar{T}^t\Lambda(T,\tau)\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_{\tau}\xi(T\boldsymbol{e}_i,z)=\exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar{T}^t\Lambda(T,\tau)\bar{T}\boldsymbol{e}_j\Big).$$

特别地，当且仅当 $\Lambda(T,\ \tau)\ \notin$ 对称矩阵$(n;\ \mathbb{R})$ 时，它们才非平凡。这些 ${}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$、${}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\ T\boldsymbol{e}_j)$、${}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$、${}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\ T\boldsymbol{e}_j)$ 可以分别视为定义在 $O_{[z]}\cap O_{[z+\boldsymbol{e}_i]}\cap O_{[z+\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j]}$、$O_{[z]}\cap O_{[z+\boldsymbol{e}_i]}\cap O_{[z+\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j]}$、$O_{[z]}\cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_i]}\cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j]}$、$O_{[z]}\cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_i]}\cap O_{[z+T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j]}$ 上的平凡复线丛的全纯截面，它们配备了平凡全纯结构。此外，我们有以下关系

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_j)-2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\bar{\partial}{}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)^{-1}=0,\\
&2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_j)-2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j)={}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\bar{\partial}{}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)^{-1}=0,\\
&2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_j)-2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\bar{\partial}{}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)^{-1}=0,\\
&2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_j)-2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j)={}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\bar{\partial}{}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)^{-1}=0,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&{}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)+{}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_j),\quad {}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i)+{}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_j),\\
&{}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)+{}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_j),\quad {}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j):={}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)+{}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_j),
\end{aligned}$$

以及 $i,\ j=1,\ldots,n$。为简单起见，让我们pu t

$${}_{\tau}\alpha:=\Big\{{}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\ {}_{\tau}\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j),\ {}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\ {}_{\tau}\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\Big\}_{i,j=1,\ldots,n},$$

$${}_{\tau}\nabla:=\Big\{\bar{\partial}+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(\boldsymbol{e}_i),\ \bar{\partial}+2\pi\mathbf{i}_{\tau}\omega(T\boldsymbol{e}_i)\Big\}_{i=1,\ldots,n}.$$

综合上述论证，我们看到数据（${}_\tau\alpha, {}_\tau\nabla, 2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}$）按 Hitchin-Chatterjee [12, 17] 的意义在 X^n 上定义了一个平坦 gerbe ${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$：

$$ {}_\tau\mathcal{G}^\nabla := \Big({}_\tau\alpha,\ {}_\tau\nabla,\ 2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}\Big). $$

这里，族 ${}_\tau\nabla$ 给出了 X^n 上由族 ${}_\tau\alpha$所确定的 gerbe 上的一个 0-联络，而整体定义的 2-形式 $2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}$ 是与 0-联络 ${}_\tau\nabla$相容的 1-联络。

如上所述，${}_\tau\alpha$非平凡当且仅当 $\Lambda(T,\tau) \notin$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$，并且条件 $\Lambda(T,\tau) \in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$等价于条件 $\tau \in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$，即 $\tau = O$（注意 $\tau \in$对称矩阵$(n;\mathbb{R})$）。因此，利用 ${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$对$X^n$作扭转，与考虑与 ${}_\tau B$ 相关联的 $\mathcal{I}_T$的 B场变换 $\mathcal{I}_T({}_\tau B)$，本质上是相同的（见命题 6.1 与推论 6.2）。于是，当我们把这个 gerbe 变形复环面记为 ${}_\tau X^n$时，下列记号是有意义的：

$$ {}_\tau X^n = \Big(X^n,\ \mathcal{I}_T({}_\tau B)\Big). $$

与从 X^n 到 ${}_\tau X^n$的变形相对应，我们可以将每个全纯线丛 $E^\nabla_{(A,p,q)}$ 扭曲为 X^n 上的以下带联络的 ${}_\tau\alpha$-扭曲光滑复线丛。首先，转移函数族，即自守因子 j_A，按如下方式扭曲，其中 $i = 1, \dots, n$，并注意 $\exp(2\pi\mathbf{i}e_i^tA^t(T-\bar{T})^{-1}(z-\bar{z})) = \exp(2\pi\mathbf{i}e_i^tA^ty)$：

$$
\begin{aligned}
&j_A(\boldsymbol{e}_i,\ z)\\
&\mapsto {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z) := {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z)j_A(\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)\bar{z} + 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\left(T-\bar{T}\right)^{-1}(z-\bar{z})\right),\\
&j_A(T\boldsymbol{e}_i,\ z)\\
&\mapsto {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z) := {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z)j_A(T\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\left(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar{T}^t\Lambda(T,\tau)\bar{z}\right).
\end{aligned}
$$

我们进一步定义

$$
\begin{aligned}
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z),
\end{aligned}
$$

然后，我们可以很容易地验证映射 ${}_\tau j_A: (\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\times$满足以下关系

$$
\begin{aligned}
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z) = {}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z) = {}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z) = {}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z) = {}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,
\end{aligned}
$$

其中 $i,\ j = 1,\dots,n$。这表明映射 ${}_\tau j_A$在 X^n上定义了一个 ${}_\tau\alpha$-扭曲光滑复线丛，因此我们将其记作 ${}_\tau E_A \to X^n$ 或 ${}_\tau E_A$

为简便起见。此外，正如稍后将要解释的，我们可以验证，形式为 (15) 的微分算子再次定义了 ${}_\tau E_A$上的一个联络。不过，由于在此语境下我们考虑的是依赖于 τ 的变形，因此将这个微分算子记作 ${}_\tau\nabla_{(A,p,q)} = d + {}_\tau\omega_{(A,p,q)}$。容易验证，1-形式${}_\tau\omega_{(A,p,q)}$ 对每个 $i = 1, \dots, n$都满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
{}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x + \boldsymbol{e}_i, y) &= {}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x, y) + {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i, z) d_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i, z)^{-1} - 2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i),\\
{}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x, y + \boldsymbol{e}_i) &= {}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x, y) + {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i, z) d_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i, z)^{-1} - 2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i).
\end{aligned}
$$

这里，我们使用记号 ${}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x, y)$ 代替 ${}_\tau\omega_{(A,p,q)}$，以指定坐标系 $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$；对于每个 $i = 1, \dots, n$，请注意，平移 $x \mapsto x + \boldsymbol{e}_i$, $y \mapsto y + \boldsymbol{e}_i$ 分别对应于平移 $z \mapsto z + \boldsymbol{e}_i$, $z \mapsto z + T\boldsymbol{e}_i$。我们将带有联络 ${}_\tau\nabla_{(A,p,q)}$ 的 ${}_\tau\alpha$- 扭曲光滑复线丛 ${}_\tau E_A \to X^n$ 记为 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$，即 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)} := ({}_\tau E_A, {}_\tau\nabla_{(A,p,q)})$。

下面考察 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$的全纯性。联络 ${}_\tau\nabla_{(A,p,q)}$ 的曲率形式 ${}_\tau\Omega_{(A,p,q)}$ 在局部表示为

$$
\begin{aligned}
{}_\tau\Omega_{(A,p,q)} &= d_\tau\omega_{(A,p,q)} + {}_\tau\omega_{(A,p,q)} \wedge {}_\tau\omega_{(A,p,q)} + 2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}\\
&= -2\pi\mathbf{i} dx^t A^t dy + \pi\mathbf{i} d\bar{z}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z}.
\end{aligned}
$$

现在，我们准备如下命题。

命题 6.3. *(0,2)* 部分 ${}_\tau\Omega^{(0,2)}{}_{(A,p,q)}$ 消失当且仅当 $\tau = O$。

证明. (0,2) 部分 ${}_\tau\Omega^{(0,2)}{}_{(A,p,q)}$ 结果为

$$
\begin{aligned}
{}_\tau\Omega^{(0,2)}_{(A,p,q)} &= 2\pi\mathbf{i} d\bar{z}^t ((T - \bar{T})^{-1})^t (AT)^t (T - \bar{T})^{-1} d\bar{z} + \pi\mathbf{i} d\bar{z}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z}\\
&= \pi\mathbf{i} d\bar{z}^t \Lambda(T, \tau) d\bar{z}
\end{aligned}
$$

因为我们假设 $AT \in$ 对称矩阵$(n; \mathbb{C})$。由 $\Lambda(T, \tau)$ 的定义，显然 $\Lambda(T, \tau) \in$ 对称矩阵$(n; \mathbb{C})$ 当且仅当 $\tau \in$ 对称矩阵 $(n; \mathbb{R})$，即 $\tau = O$ （注意 $\tau \in$ 交替形式 $(n; \mathbb{R})$ ）。证毕。 □

由 [41, 引理 2.18、引理 2.19]， ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$ 成为 X^n 上带联络的 ${}_\tau\alpha$-扭曲全纯线丛，当且仅当${}_\tau\Omega^{(0,2)}{}_{(A,p,q)}$ 为零。因此，命题 6.3 表明，当我们考虑非平凡的 gerbe 变形，即情形 $\tau \neq O$时， ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$ 不是全纯的。

6.1.2 辛几何侧

我们首先利用镜像变换 (9) 计算 ${}_\tau X^n$ 的镜像伙伴。由此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\check{\mathcal{I}}_T({}_\tau B)\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t, \frac{\partial}{\partial\check{y}}^t, d\check{x}^t, d\check{y}^t\right)\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial\check{x}}^t, \frac{\partial}{\partial\check{y}}^t, d\check{x}^t, d\check{y}^t\right)\begin{pmatrix} I_n & O & O & O\\ O & I_n & O & O\\ -\tau & O & I_n & O\\ O & O & O & I_n\end{pmatrix}\check{\mathcal{I}}_T\begin{pmatrix} I_n & O & O & O\\ O & I_n & O & O\\ \tau & O & I_n & O\\ O & O & O & I_n\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

这意味着辛形式 $\omega^\vee$ 保持不变，而 B场 $B^\vee$ 被扭曲为

$${}_\tau B^\vee := \frac{1}{2} d\check{x}^t \tau d\check{x}.$$

令

$${}_\tau\tilde{\omega}^\vee := \tilde{\omega}^\vee + {}_\tau B^\vee = \mathbf{i}\omega^\vee + \left(B^\vee + {}_\tau B^\vee\right).$$

下文将这个复化辛环面（通过使用镜像变换 (9) 得到的 ${}_\tau X^n$ 的镜像伙伴）记为

$${}_\tau\check{X}^n := \left(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\ {}_\tau\tilde{\omega}^\vee = d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)d\check{y} + \frac{1}{2}d\check{x}^t\tau d\check{x}\right).$$

我们构造对象 $\mathcal{L}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形，其中 $Fuk_{\mathrm{sub}}(\check{}X^n)$ 与 ${}_\tau\alpha$-扭曲光滑复线丛 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$ 镜像对偶。可以合理地认为， $L_{(A,p)}$ 保持不变，而 $\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 变形为某个对象，因为辛形式 $\omega^\vee$ 保持不变，而 B场 $B^\vee$ 被 ${}_\tau B^\vee$ 扭曲。无论如何，在考虑 $\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形时，我们应谨慎处理条件 (45)。例如，在 $\tau \in M(n;\mathbb{R})\setminus M(n;\mathbb{Q})$ 的情况下，很容易验证

$$\left[B^\vee + {}_\tau B^\vee\right] \notin H^2(L_{(A,p)},\mathbb{Z})$$

$\check{}$ 对任意的拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ in ${}_\tau X^n$ 都成立。因此，正如第 4.1 小节所讨论的，采用扭曲线丛作为每个 $\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的变形是自然的。事实上，由于我们假设 $AT \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{C})$， $B^\vee$ 对 $L_{(A,p)}$ 的影响消失了，因此本质上只需考虑 ${}_\tau B^\vee$ 对 $L_{(A,p)}$ 的影响。此外，请注意，这里给出的平坦 gerbe 也可以看作是在 $X^n_{\omega^\vee}$ 上全局定义的平坦 gerbe 限制到 $L_{(A,p)}$ 后的结果；该平坦 gerbe 的 1-联络为 $2\pi\mathbf{i}(B^\vee + {}_\tau B^\vee)$。我们设

$${}_\tau B^\vee_A := {}_\tau B^\vee\Big|_{L_{(A,p)}},$$

即,

$${}_\tau B^\vee_A = \frac{1}{2} d\check{x}^t \tau d\check{x}.$$

对于 ${}_\tau B_A^\vee$，取一个局部表示为

$$ {}_\tau\beta_A^\vee = \frac{1}{2}\check{x}^t\tau d\check{x}, $$

并且显然有 ${}_\tau B_A^\vee = d_\tau\beta_A^\vee$。我们有时使用记号 ${}_\tau\beta_A^\vee(\check{x})$ 来代替 ${}_\tau\beta_A^\vee$，以便指明坐标系 $\check{x}$。然后，与 $\check{\mathcal{G}}_{\theta,A}^\nabla$, ${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$ 的情形类似，局部表示的数据 ${}_\tau\alpha_A^\vee := \{{}_\tau\alpha_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\}_{i,j=1,\dots,n}$, ${}_\tau\nabla_A^\vee = \{d + 2\pi\ {}_\tau\omega_A^\vee\ \boldsymbol{e}_i\ \}_{i=1\ \dots\ n}$:i( ),,:

$$ {}_\tau\alpha_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) := {}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})^{-1}{}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_j,\check{x}+\boldsymbol{e}_i){}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) = \exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\tau\boldsymbol{e}_j\Big), $$
$$ {}_\tau\omega_A^\vee(\boldsymbol{e}_i) := {}_\tau\beta_A^\vee(\check{x}+\boldsymbol{e}_i) - {}_\tau\beta_A^\vee(\check{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i^t\tau d\check{x} $$

并且 $2\pi\mathbf{i}_\tau B_A^\vee$ 在 Hitchin-Chatterjee [12, 17] 的意义下，于 $L_{(A,p)}$ 上定义了一个平坦 gerbe ${}_\tau\check{\mathcal{G}}_A^\nabla$：

$$ {}_\tau\check{\mathcal{G}}_A^\nabla := \Big({}_\tau\alpha_A^\vee,\ {}_\tau\nabla_A^\vee,\ 2\pi\mathbf{i}_\tau B_A^\vee\Big), $$

其中

$$ {}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) := \exp\Big(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\tau\check{x}\Big), \quad {}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x}) := {}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}+\boldsymbol{e}_j){}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_j,\check{x}) $$

对任意 $i, j = 1,\dots,n$。特别地，族 ${}_\tau\nabla_A^\vee$ 给出了 $L_{(A,p)}$ 上由族 ${}_\tau\alpha_A^\vee$ 所确定的 gerbe 之上的一个 0-联络，而整体定义的 2-形式 $2\pi\mathbf{i}_\tau B_A^\vee$ 是与该 0-联络 ${}_\tau\nabla_A^\vee$ 相容的 1-联络。

我们利用平坦 gerbe ${}_\tau\check{\mathcal{G}}_A^\nabla$ 对每个 $\mathcal{O}_{(A,p,q)}^\vee \to L_{(A,p)}$ 进行扭曲

$$ {}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) := {}_\tau\xi_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) = \exp\Big(-\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\tau\check{x}\Big), $$

其中 $i = 1,\dots,n$。我们进一步定义

$$ {}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x}) := {}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}+\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_j,\check{x}) $$

对任意 $i, j = 1,\dots,n$，显然映射 ${}_\tau j_A^\vee$ 满足以下关系

$$ {}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\check{x})^{-1}{}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_j,\check{x}+\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\check{x}) = {}_\tau\alpha_A^\vee(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1 $$

根据 ${}_\tau\alpha_A^\vee$ 的定义。因此，映射 ${}_\tau j_A^\vee$ 在 $L_{(A,p)}$ 上定义了一个 ${}_\tau\alpha_A^\vee$-扭曲光滑复线丛，简记为 ${}_\tau\mathcal{O}_{(A,p)} \to L_{(A,p)}$ 或 ${}_\tau\mathcal{O}_{(A,p)}$。另一方面，很自然地可以认为，$\mathcal{O}_{(A,p)}$ 上的联络 $\nabla_{(A,p,q)}^\vee$ 保持不变：

$$ {}_\tau\omega_{(A,p,q)}^\vee := \omega_{(A,p,q)}^\vee, \quad {}_\tau\nabla_{(A,p,q)}^\vee := d + {}_\tau\omega_{(A,p,q)}^\vee. $$

事实上，我们有如下关系

$$ {}_\tau\omega^\vee_{(A,p,q)}(\check{x}+\boldsymbol{e}_i)={}_\tau\omega^\vee_{(A,p,q)}(\check{x})+{}_\tau j^\vee_A(\boldsymbol{e}_i,\check{x})d_\tau j^\vee_A(\boldsymbol{e}_i,\check{x})^{-1}-2\pi\mathbf{i}_\tau\omega^\vee_A(\boldsymbol{e}_i) $$

对每个 $i=1,\cdots\cdots,n$，我们使用记号 ${}_\tau\omega^\vee_A(\check{x})$，而不使用 ${}_\tau\omega^\vee_A$，以指定坐标系 $\check{x}$。这里，令 ${}_\tau\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}:=({}_\tau\mathcal{O}_\theta,{}_{(A,p)},{}_\tau\nabla^\vee_{(A,p,q)})$。将 $L_{(A,p)}$ 中的拉格朗日子流形与带有联络 ${}_\tau\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 的 ${}_\tau\alpha^\vee_A$-扭曲光滑复线丛 ${}_\tau\check{X}^n$ 这一对记作 ${}_\tau\mathcal{L}^\nabla_{(A,p,q)}:{}_\tau\mathcal{L}^\nabla_{(A,p,q)}:=(L_{(A,p)},{}_\tau\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)})$.

联络 ${}_\tau\nabla^\vee_{(A,p,q)}$ 的曲率形式 ${}_\tau\Omega^\vee_{(A,p,q)}$ 在局部表示为

$$ {}_\tau\Omega^\vee_{(A,p,q)}=d_\tau\omega^\vee_{(A,p,q)}+{}_\tau\omega^\vee_{(A,p,q)}\wedge{}_\tau\omega^\vee_{(A,p,q)}+2\pi\mathbf{i}_\tau B^\vee_A=\pi\mathbf{i}d\check{x}^t\tau d\check{x}. $$

那么我们很容易验证等式

$$ {}_\tau\Omega^\vee_{(A,p,q)}=2\pi\mathbf{i}\big(B^\vee+{}_\tau B^\vee\big)\Big|_{L_{(A,p)}} $$

成立。特别地，我们看到 ${}_\tau\boldsymbol{\Omega}^{(0,2)}{}_{(A,\ p,\ q)}$ 和 ${}_\tau\Omega^\vee_{(A,p,q)}$ 由同一个矩阵 $\tau\in\mathrm{Alt}(n;\mathbb{R})$ 决定：

$$ {}_\tau\Omega^{(0,2)}_{(A,p,q)}=\pi\mathbf{i}\left(dx^{(0,1)}\right)^t\tau dx^{(0,1)},\quad {}_\tau\Omega^\vee_{(A,p,q)}=\pi\mathbf{i}d\check{x}^t\tau d\check{x}. $$

我们简要说明 ${}_\tau\check{\mathcal{G}}^\nabla_A$ 与 $\check{\mathcal{G}}^\nabla_{\theta,A}$ 之间的关系。为简单起见，我们假设 $\det A\neq 0$。记 X^n 的傅里叶-穆凯伙伴为 $\hat{}X^n$，即 $\hat{}X^n=\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n\oplus T^t\mathbb{Z}^n)$。其镜像伙伴 $\check{}\hat{}X^n$ 的辛形式由 $\hat{}\omega^\vee:=d\check{}x^t(\omega^\vee)^td\check{}y$给出，而 $\hat{}\omega^\vee$ 在映射 (50) 下的拉回与 $\omega^\vee$一致。此外，$\check{}X^n_{\omega^\vee}$ 中的每个拉格朗日子流形 $L_{(A,p)}$ 都通过映射 (50) 映到辛环面 $X^n_{\hat{\omega}^\vee}:=\check{}(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\hat{}\omega^\vee)$中的拉格朗日子流形 $L_{(-A^{-1},A^{-1}p)}$。我们来考察由 B场 ${}_\theta B^\vee$给出的 $\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee}\check{}$的 gerbe 变形。记由 ${}_\theta B^\vee$ 确定的 $\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee}$ 上的平坦 gerbe 为 ${}_\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla$，也就是说，${}_\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla|_{L_{(-A^{-1},A^{-1}p)}}={}^\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla_{-A^{-1}\circ}$ 随后，通过直接计算可知，映射 (50) 下 ${}_\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla$ 的拉回[11] 在 $L_{(A,p)}$上的限制与 $\check{\mathcal{G}}^\nabla_{\theta,A}$一致。我们可以预期，这种描述对应于从非交换复环面 X^n_θ 到 $\hat{}$ gerbe 变形复环面 ${}_\theta X^n$的傅里叶-穆凯变换。

6.2 类型 τ_2的 gerbe 变形

我们取任意一个 $\tau\in M(n;\mathbb{R})$，并将其固定。在本小节中，我们修订了 [30] 中的若干结果。

[11]当我们将 ${}_\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla$ 视为数据（${}_\theta\alpha^\vee$，${}_\theta\nabla^\vee$，$2\pi\mathbf{i}_\theta B^\vee$）时，与其他示例类似 $\check{}\check{}\check{}$（${}_\theta\alpha^\vee\in H^2$（$\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee}$，$C^\infty(\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee})^\times$），${}_\theta\nabla^\vee$ 是此 gerbe 上的 0-联络，$C^\infty(\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee})^\times$ 是 $\hat{}X^n_{\hat{\omega}^\vee}$ 上处处不为零的光滑函数的 $\check{}$ 层），我们称数据（$\check{}X^n_{\omega^\vee}$上的平坦 gerbe）为由映射（50）拉回 ${}_\theta\alpha^\vee$、${}_\theta\nabla^\vee$、$2\pi\mathbf{i}_\theta B^\vee$ 所得的、由映射（50）拉回 ${}_\theta\check{\mathcal{G}}^\nabla$ 的数据。

6.2.1 复几何侧

考虑 $\tau_2 = \tau$ 和 $\tau_1 = \tau_3 = O$ 时的 B场 (51)，并将其记为 ${}_\tau B$:

$$ {}_\tau B := dx^t \tau dy. $$

这里，严格来说，在 [30], 中请注意，此 ${}_\tau B$ 中的 τ 被替换为 τ^t。从广义复几何的角度看，这个 B场 ${}_\tau B$ 会在 X^n 上对 $\mathcal{I}_T$ 进行 B场变换:

$$ \begin{aligned} &\mathcal{I}_T({}_\tau B)\left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}^t, \frac{\partial}{\partial y}^t, dx^t, dy^t\right) \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ O & -\tau & I_n & O \\ \tau^t & O & O & I_n \end{pmatrix} \mathcal{I}_T \begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ O & \tau & I_n & O \\ -\tau^t & O & O & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

于是，下述结论成立。由于其证明与命题 6.1 和推论 6.2 的证明类似，我们省略证明。

命题 6.4。 与 *B*场 ${}_\tau B$ 相关联的 *B*场变换保持 X^n 上的广义复结构 $\mathcal{I}_T$，即

$$ \mathcal{I}_T({}_\tau B) = \mathcal{I}_T $$

当且仅当 $\tau^t T \in$ 对称矩阵$(n;\ \mathbb{C})$。

推论6.5。 与 *B*场 ${}_\tau B$ 相关联的 *B*场变换保持 X^n 上的广义复结构 $\mathcal{I}_T$，即

$$ \mathcal{I}_T({}_\tau B) = \mathcal{I}_T $$

当且仅当 (*0,2*)-部分 ${}_\tau B^{(0,2)}$ 消失时。

下面，我们给出平坦 gerbe 的严格定义，其 1-联络由 ${}_\tau B^{(0,2)}$ 决定。我们设

$$ \Lambda(T,\tau) := ((T-\bar{T})^{-1})^t \tau^t T (T-\bar{T})^{-1}, $$

即,

$$ {}_\tau B^{(0,2)} = d\bar{z}^t \Lambda(T,\tau) d\bar{z}. $$

对于 ${}_\tau B^{(0,2)}$，取一个 1-形式 ${}_\tau \beta$，它在局部可表示为

$$ {}_\tau \beta = \bar{z}^t \Lambda(T,\tau) d\bar{z}, $$

并且显然 ${}_\tau B^{(0,2)} = \bar{\partial}_\tau \beta$。我们有时使用记号 ${}_\tau \beta(z)$ 来代替 ${}_\tau \beta$，以指定复坐标系 z。于是，局部表示的数据 ${}_\tau \alpha := \{{}_\tau \alpha(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\ {}_\tau \alpha(\boldsymbol{e}_i,\ T\boldsymbol{e}_j)\ {}_\tau \alpha(T\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\ {}_\tau \alpha(T\boldsymbol{e}_i,\ T\boldsymbol{e}_j)\}_{i,\ j=1,\ \ldots,\ n}$,

$${}_\tau\nabla := \{\bar\partial + 2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i),\ \bar\partial + 2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i)\}_{i=1,\dots,n}:$$

$${}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) := {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t(\Lambda(T,\tau)-\Lambda(T,\tau)^t)\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j) := {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t(\Lambda(T,\tau)-\Lambda(T,\tau)^t)\bar T\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) := {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar T^t(\Lambda(T,\tau)-\Lambda(T,\tau)^t)\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j) := {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\Big(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar T^t(\Lambda(T,\tau)-\Lambda(T,\tau)^t)\bar T\boldsymbol{e}_j\Big),$$

$${}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i) := {}_\tau\beta(z+\boldsymbol{e}_i) - {}_\tau\beta(z) = \boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)d\bar z,$$

$${}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i) := {}_\tau\beta(z+T\boldsymbol{e}_i) - {}_\tau\beta(z) = \boldsymbol{e}_i^t\bar T^t\Lambda(T,\tau)d\bar z$$

并且 $2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}$ 定义了一个平坦 gerbe ${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$，其含义参见 Hitchin-Chatterjee [12, 17]，定义在 X^n 上：

$$ {}_\tau\mathcal{G}^\nabla := \Big({}_\tau\alpha,\ {}_\tau\nabla,\ 2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}\Big),$$

其中

$$\begin{aligned}
&{}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z) := \exp\Big(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)\bar z\Big),\\
&{}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z) := \exp\Big(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar T^t\Lambda(T,\tau)\bar z\Big),\\
&{}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) = {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) = {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) = {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) = {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_j,z),
\end{aligned}$$

对于任意 $i, j = 1,\dots,n$。特别地，族 ${}_\tau\nabla$ 在 X^n 上的 gerbe 上给出了一个 0-联络，该联络由族 ${}_\tau\alpha$确定，而全局定义的 2-形式 $2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}$ 是与 0-联络${}_\tau\nabla$ 相容的 1-联络。此外，当我们将这个 gerbe 变形复环面记为 ${}_\tau X^n$时，记号

$$ {}_\tau X^n = \Big(X^n,\ \mathcal{I}_T({}_\tau B)\Big).$$

是有意义的，因为我们有命题 6.4 和推论 6.5。

我们利用平坦 gerbe ${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$对每个 $E^\nabla_{(A,p,q)} \to X^n$ 进行扭曲。考虑一个映射 ${}_\tau j_A\colon (\mathbb{Z}^n\oplus T\mathbb{Z}^n)\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^\times$，其定义为

$${}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z) := {}_\tau\xi(\boldsymbol{e}_i,z)j_A(\boldsymbol{e}_i,z) = \exp\left(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\Lambda(T,\tau)\bar z + 2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t\left(T-\bar T\right)^{-1}(z-\bar z)\right),$$
$${}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,\ z)\colon = {}_\tau\xi(T\boldsymbol{e}_i,\ z)j_A(T\boldsymbol{e}_i,\ z) = \text{指数}\left(-2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^t\bar T^t\Lambda(T,\ \tau)\bar z\right),$$

其中 $i=1,\dots,n$，并注意到 $\exp(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^t(T-\bar T)^{-1}(z-\bar z)) = \exp(2\pi\mathbf{i}\boldsymbol{e}_i^tA^ty)$。我们进一步定义

$$\begin{aligned}
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z+\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z),\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z) := {}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z+T\boldsymbol{e}_j){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z),
\end{aligned}$$

然后，我们可以很容易地验证映射 ${}_\tau j_A$ 满足这些关系

$$
\begin{aligned}
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z)={}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z+\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z)={}_\tau\alpha(\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z)={}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)\cdot 1,\\
&{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i+T\boldsymbol{e}_j,z)^{-1}{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_j,z+T\boldsymbol{e}_i){}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z)={}_\tau\alpha(T\boldsymbol{e}_i,T\boldsymbol{e}_j)\cdot 1
\end{aligned}
$$

根据 ${}_\tau\alpha$ 的定义，其中 $i,\,j=1,\dots,n$。因此，映射 ${}_\tau j_A$ 在 X^n 上定义了一个 ${}_\tau\alpha$ 扭曲光滑复线丛，简记为 ${}_\tau E_A\to X^n$ 或 ${}_\tau E_A$。另一方面，自然地考虑 E_A 上的联络 $\nabla_{(A,p,q)}$ 保持不变:

$$
{}_\tau\omega_{(A,p,q)}:=\omega_{(A,p,q)},\quad {}_\tau\nabla_{(A,p,q)}:=d+{}_\tau\omega_{(A,p,q)}.
$$

事实上，我们有以下关系

$$
\begin{aligned}
&{}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x+\boldsymbol{e}_i,y)={}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x,y)+{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z)d{}_\tau j_A(\boldsymbol{e}_i,z)^{-1}-2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(\boldsymbol{e}_i),\\
&{}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x,y+\boldsymbol{e}_i)={}_\tau\omega_{(A,p,q)}(x,y)+{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z)d{}_\tau j_A(T\boldsymbol{e}_i,z)^{-1}-2\pi\mathbf{i}_\tau\omega(T\boldsymbol{e}_i).
\end{aligned}
$$

对每个 $i=1,\dots,n$ 均成立。为明确指定坐标系（x,y）$\in\mathbb{R}^{2n}$，我们使用记号 ${}_\tau\omega_{(A,p,q)}$（x,y），而非 ${}_\tau\omega_{(A,p,q)}$。这里，对每个 $i=1,\dots,n$，注意，平移 $x\mapsto x+\boldsymbol{e}_i$，$y\mapsto y+\boldsymbol{e}_i$ 分别对应于平移 $z\mapsto z+\boldsymbol{e}_i$，$z\mapsto z+T\boldsymbol{e}_i$。我们将带有联络 ${}_\tau\nabla_{(A,p,q)}$ 的 ${}_\tau\alpha$ 扭曲光滑复线丛 ${}_\tau E_A\to X^n$ 记作 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$，即 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}:=({}_\tau E_A,{}_\tau\nabla_{(A,p,q)})$。

我们来考虑 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$的全纯性。联络 ${}_\tau\nabla_{(A,p,q)}$的曲率形式${}_\tau\Omega^{(A,p,q)}$在局部可表示为

$$
\begin{aligned}
{}_\tau\Omega_{(A,p,q)}&=d{}_\tau\omega_{(A,p,q)}+{}_\tau\omega_{(A,p,q)}\wedge{}_\tau\omega_{(A,p,q)}+2\pi\mathbf{i}_\tau B^{(0,2)}\\
&=-2\pi\mathbf{i}dx^tA^tdy+2\pi\mathbf{i}d\bar{z}^t\Lambda(T,\tau)d\bar{z}.
\end{aligned}
$$

于是下述命题成立，我们省略其证明，因为它可以与命题 6.3 类似地证明。

命题 6.6. *(0,2)*部分${}_\tau\Omega^{(0,2)}{}_{(A,p,q)}$为零，当且仅当 $\tau^tT\in$对称矩阵$(n;\mathbb{C})$。

与类型 τ_1的 gerbe 变形情形类似，由 [41, 引理 2.18、引理 2.19]可知，${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$成为$X^n$ 上带有联络的 ${}_\tau\alpha$-扭全纯线丛，当且仅当${}_\tau\Omega^{(0,2)}{}_{(A,p,q)}$ 为零。因此，命题 6.6 表明，在假设 $\tau^tT\notin$对称矩阵$(n;\mathbb{C})$下考虑由${}_\tau\mathcal{G}^\nabla$给出的变形时，${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$ 不是全纯的。

6.2.2 辛几何侧

首先，我们利用镜像变换 (9) 计算 ${}_\tau X^n$ 的镜像伙伴。结果，$\check{}\,\mathcal{I}_T({}_\tau B)$ 关于标准

基的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ \underline{B}^\vee\tau^t - \tau(\underline{B}^\vee)^t & -\underline{B}^\vee & I_n & O \\ (\underline{B}^\vee)^t & O & O & I_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} O & O & O & -((\underline{\omega}^\vee)^{-1})^t \\ O & O & (\underline{\omega}^\vee)^{-1} & (\underline{\omega}^\vee)^{-1}\tau - \tau^t((\underline{\omega}^\vee)^{-1})^t \\ \underline{\omega}^\vee\tau^t - \tau(\underline{\omega}^\vee)^t & -\underline{\omega}^\vee & O & O \\ (\underline{\omega}^\vee)^t & O & O & O \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} I_n & O & O & O \\ O & I_n & O & O \\ -\underline{B}^\vee\tau^t + \tau(\underline{B}^\vee)^t & \underline{B}^\vee & I_n & O \\ -(\underline{B}^\vee)^t & O & O & I_n \end{pmatrix}.$$

这意味着辛形式 $\omega^\vee$ 和 B场 $B^\vee$ 分别受到如下扭曲

$$ {}_\tau\omega^\vee := -d\check{x}^t\underline{\omega}^\vee\tau^t d\check{x}$$

and

$$ {}_\tau B^\vee := -d\check{x}^t\underline{B}^\vee\tau^t d\check{x},$$

。令

$$ {}_\tau\tilde{\omega}^\vee := \tilde{\omega}^\vee + \mathbf{i}_\tau\omega^\vee + {}_\tau B^\vee = \mathbf{i}\big(\omega^\vee + {}_\tau\omega^\vee\big) + \big(B^\vee + {}_\tau B^\vee\big).$$

此后，我们将这个复化辛环面（通过镜像变换（9）得到的${}_\tau X^n$ 的镜像伙伴）记作

$$ {}_\tau\check{X}^n := \Big(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n},\ {}_\tau\tilde{\omega}^\vee = d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)d\check{y} - d\check{x}^t(-(T^{-1})^t)\tau^t d\check{x}\Big).$$

最后，我们讨论与 ${}_\tau E^\nabla_{(A,p,q)}$镜像对偶的对象。尽管这里不假设拉格朗日子流形在 [30], 中是仿射的，但我们只关注仿射拉格朗日子流形。考虑拉格朗日子流形

$$ {}_\tau L_{(A,p)} := \left\{ \begin{pmatrix} [\check{x}] \\ [(A+\tau^t)\,\check{x} + p] \end{pmatrix} \in {}_\tau\check{X}^n \right\}$$

在${}_\tau\check{}X^n$ 中，将其视为每个 $L_{(A,p)}$的变形；实际上， ${}_\tau\omega^\vee$ 在这个${}_\tau L_{(A,p)}$ 上消失，因为 $AT \in \mathsf{Sym}(n;\,\mathbb{C})$:

$$ {}_\tau\omega^\vee\Big|_{{}_\tau L_{(A,p)}} = d\check{x}^t\omega^\vee\left(A+\tau^t\right)d\check{x} - d\check{x}^t\omega^\vee\tau^t d\check{x} = 0.$$

另一方面，在 [30], 中我们得出，每个 $\mathcal{O}^\nabla_{(A,p,q)}$ 在从 X^n 到 ${}_\tau X^n$的变形过程中都保持不变:

$$ 2\pi\mathbf{i}_\tau B^\vee\Big|_{{}_\tau L_{(A,p)}} = 2\pi\mathbf{i}d\check{x}^t B^\vee\left(A+\tau^t\right)d\check{x} - 2\pi\mathbf{i}d\check{x}^t B^\vee\tau^t d\check{x} = 0,$$

其中，右侧的 0 被解释为平坦联络 $\nabla^{\vee}_{(A,p,q)}$ 的曲率形式。此外，值得注意的是，复几何一侧的变形可以解释为与 ${}_{\tau}E^{\nabla}_{(O,0,0)}$ 的张量积。

这一构造的动机来自生成元在 $D^b(Coh(X^1))$上的 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$$

该作用对应于与次数为 $d \in \mathbb{Z}$的全纯线丛 $E^{\nabla}_{(d,0,0)}$ 作张量积，而 τ 的完整性则源于这一作用的完整性。从同调镜像对称的角度来看，我们可以将其解释为在$\check{}$ X^1 上的 $SL(2;\mathbb{Z})$-作用，该作用定义如下：

$$\check{x} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \check{x}$$

与 $g_{FM} \in SL(2;\mathbb{Z})$的情形类似（见第5节）。特别地，$\check{}X^1$ 中给定拉格朗日子流形 $L_{(a,p)}$ 的斜率 $a \in \mathbb{Z}$ 会平移至与这一 $SL(2;\mathbb{Z})$作用相关联的 $a+d \in \mathbb{Z}$。

然而，对于一般情形 $\tau \in M(n;\mathbb{R})$，或许 [30] 给出的辛几何一侧的描述并非最优。一般而言，当我们将$\check{}X^n$ 视为平凡环面纤维化$\check{}$ $X^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 时，$\check{}$ X^n 带有一种叶状结构，其叶片即为纤维；$([\check{}x],\ [\check{}y]) \mapsto [\check{}x]$。着眼于这一观点，对于一般的 $\tau \in M(n;\mathbb{R})$，将辛几何一侧的变形解释如下似乎更为自然：不仅辛结构发生改变，叶状结构也按照 [23], 的意义发生改变，而每个对象 $\mathcal{L}^{\nabla}_{(A,p,q)}$ 也会变形为与这种改变相关联的对象。

致谢

我谨感谢 Hiroshige Kajiura 就非交换变形相关问题进行的讨论。本研究受 JSPS KAKENHI 项目（编号 25K17251）资助。

参考文献

[1] M. Abouzaid, I. Smith, 四维环面的同调镜像对称，《杜克数学杂志》, 152.3 (2010), 373-440.[2] D. Arinkin, A. Polishchuk, *Fukaya*范畴与傅里叶变换, AMS 高等数学 IP 研究丛书, 2001, 23: 261-274.[3] O. Ben-Bassat, 镜像对称与广义复流形: 第一部分：向量丛、旋量与膜上的变换,《几何与物理杂志》, 56(4), 533-558, 2006.

[4] O. Ben-Bassat, 镜像对称与广义复流形: 第二部分：环面丛的可积性与变换, 《几何与物理杂志》, 56(7), 1096-1115, 2006.[5] O. Ben-Bassat, J. Block, T. Pantev, 非交换环面与傅里叶-穆凯对偶, 《数学汇刊》143.2 (2007): 423-475.[6] J. Block, 非交换几何中模范畴的对偶与等价 *I*, 《纪念 Raoul Bott 数学遗产文集》, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 50, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, RI, 2010, pp.311-339. MR 2648899 1.[7] J. Block, 非交换几何中模范畴的对偶与等价 *II*: 全纯非交换环面的穆凯对偶, arXiv: math.QA/0604296.[8] A. Bondal, M. Kapranov, 增强三角范畴, 《苏联数学文集》70:93-107, 1991. [9] S.B. Bradlow, 具有整体截面的全纯向量丛的特殊度量与稳定性, 《微分几何杂志》, 33(1), 169-213.[10] A.H. C˘ald˘araru, 卡拉比-丘流形上扭曲层的导出范畴, 康奈尔大学, 2000.[11] A. Connes, M. Rieffel, 非交换二维环面上的杨-米尔斯理论, Contemp. Math., 62:237-265, 1987.[12] D.S. Chatterjee, 关于格尔伯, 牛津大学三一学院哲学博士学位论文 (1998).[13] K. Fukaya, 莫尔斯同伦, A^∞*A*∞范畴与弗洛尔同调, 收录于：GARC几何与拓扑研讨会 '93论文集（首尔, 1993）。Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. 首尔国立大学，首尔 (1993).[14] K. Fukaya, 阿贝尔簇的镜像对称与多重西塔函数, J. Alg. Geom. 11, 393-512 (2002).[15] J. Giraud, 非阿贝尔上同调 ´, Grundlehren 179, 施普林格（柏林，1971）。[16] M. Gualtieri, 广义复几何, 博士论文，牛津大学，2003，arXiv: math.DG/0401221.[17] N. Hitchin, 特殊拉格朗日子流形讲义, 镜像对称、向量丛与拉格朗日子流形冬季学校（剑桥，马萨诸塞州，1999）（C. Vafa 和 S.-T. Yau 编），AMS/IP 高等数学研究丛书，第 23 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001，页码 151-182.[18] N. Hitchin, 广义卡拉比-丘流形, 《数学季刊》, 2003, 54.3: 281-308.

[19] H. Kajiura, 非交换二维环面上的同调镜像对称, arXiv: hep-th/0406233.
[20] H. Kajiura, θ函数的星乘积公式, 《数学物理快报》75.3 (2006): 279-292.
[21] H. Kajiura, 高维非交换复环面上的全纯线丛范畴, 《数学物理杂志》48.5 (2007).[22] H. Kajiura, 非交换环面与镜像对称, 收录于《算子代数新进展》, RIMS Kˆ oKyˆ uroku 第1587卷，第27–72页。RIMS，京都大学，2008.[23] H. Kajiura, 关于*Fukaya*范畴的一些变形, 载于《辛、泊松与非交换几何》，收录于《MSRI出版物》第62卷，剑桥大学出版社，纽约，2014年，第93-130页.
[24] A. Kapustin, D.O. Orlov, 顶点代数、镜像对称与D膜:复环面的情形, 《数学物理通讯》233. 1 (2003): 79-136.[25] A. Kapustin, D.O. Orlov, 镜像对称、导出范畴与D膜讲义, 《俄罗斯数学调查》59(5) (2004): 907.[26] M. Karoubi, 扭曲丛与扭曲K理论, 《非交换几何专题》第16卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2012年。223-257.[27]E. Kim, H. Kim, 镜像对偶与非交换环面, 《物理学杂志A：数学与理论》42.1 (2008): 015206.[28] K. Kobayashi, 关于环面的同调镜像对称的评注, 《几何与物理杂志》164 (2021): 104190.[29] K. Kobayashi,环面上镜像函子的双射性, 《京都数学杂志》62(3) (2022) 655-682.[30] K. Kobayashi, 复环面的*gerbe*变形与同调镜像对称, 《古代数学杂志》46(3) (2023) 291-323.[31] K. Kobayashi, 复环面上广义复结构的B场变换, 《几何与物理杂志》206 (2024): 105336.[32] K. Kobayashi, 复化辛环面上泊松结构的变形与同调镜像对称, 正在编写中.[33] S. Kobayashi, 复向量丛的微分几何, 普林斯顿大学出版社，1987.[34] M. Kontsevich, 镜像对称的同调代数, 收录于《国际数学家大会论文集》第 1 、 2 卷（苏黎世，1994 ），Birkh¨ auser，1995年，第120-139页。

[35] M. Kontsevich, Y. Soibelman, 同调镜像对称与环面纤维化, 收录于《辛几何与镜像对称》（首尔，2000），第203-263页。World Sci. Publishing，新泽西州里弗埃奇，2001年.[36] N.C. Leung, S.T. Yau, E. Zaslow, 从特殊拉格朗日到厄米–杨-米尔斯：通过傅里叶-穆凯变换, Adv. Theor. Math. Phys. 4: 13191341, 2000.[37] M. Lieblich, 扭曲层的模空间, 《杜克数学杂志》138 (2007), no. 1, 23-118.[38] Y. Matsushima, 海森堡群与复环面上的全纯向量丛, 《名古屋数学杂志》第61卷 (1976), 161-195.[39] S. Mukai, 阿贝尔簇上的半齐次向量丛, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), no. 2, 239-272. ˆ[40] S. Mukai, 对偶 $D(X)$ 与 $D(X)$ 及其在皮卡层中的应用, 《名古屋数学杂志》81 (1981): 153-175.[41] A. Perego, 扭曲向量丛的小林–希钦对应, 《复流形》8(1) (2021) 1-95.[42] N. Okuda, 非交换复环面的傅里叶-穆凯变换, arXiv: math.AG/2301.03745.[43] D.O. Orlov, 关于三角范畴的生成元与维数的评注, 《莫斯科数学杂志》9.1 (2009): 143-149.[44]A. Polishchuk, A. Schwarz, 非交换二维环面上的全纯向量丛范畴, 《数学物理通讯》236(1), 135-159.[45] A. Polishchuk, E. Zaslow, 范畴镜像对称: 椭圆曲线, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443-470 (1998).[46] A. Strominger, S.T. Yau, E. Zaslow, 镜像对称即T对偶, 《核物理 B 辑》 479: 243-259, 1996.