arXiv:2603.07251v1 [math.NT] 7 Mar 2026

{±1}加权零和常数

Krishnendu Paul, Shameek Paul*

Government General Degree College Gopiballavpur-II, P.O. Beliaberah, Dist. Jhargram, 721517, India

Ramakrishna Mission Vivekananda Educational and Research Institute, P.O. Belur Math, Dist. Howrah, 711202, India

摘要

设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$。若序列 $S = (x_1, \ldots, x_k)$属于 $\mathbb{Z}_n$，且存在 $a_1, \ldots, a_k \in A$ 以及 $b_1, \ldots, b_k \in B$ 使得 $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ 且 $b_1a_1 + \cdots + b_ka_k = 0$，则称其为$(A, B)$-加权零和序列。常数$E_{A,B}(n)$定义为满足以下条件的最小正整数 k： $\mathbb{Z}_n$ 中的每个长度为 k 的序列都含有一个长度为 n的(A, B)-加权零和子序列。当 $A = \{\pm 1\}$ 且 $B = \{1\}$时，我们确定常数$E_{A,B}(n)$以及相关常数$C_{A,B}(n)$和$D_{A,B}(n)$。

1 引言

集合 X 中长度为 k的序列 S，是指集合 X^k的一个元素。子序列始终指非空子序列。本文中， M 表示给定环上的有限模。以下定义见 [4]。

设 R 为一个环，且 A， B 是 $R \setminus \{0\}$的非空子集。 M中的序列$S = (x_1, \ldots\ldots, x_k)$称为$(A, B)$-加权零和序列，如果存在 $a_1, \ldots\ldots, a_k \in A$和 $b_1, \ldots\ldots, b_k \in B$，使得 $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$且$b_1a_1 + \cdots + b_ka_k = 0$。

常数 $D_{A,B}(M)$ 是满足以下条件的最小正整数 k： 每个在 M 中长度为 k 的序列都含有一个 (A, B)- 加权零和子序列。常数 $C_{A,B}(M)$ 是满足以下条件的最小正整数 k： 每个在 M 中长度为 k 的序列都含有一个由连续项组成的 (A, B)-加权零和子序列。

*电子邮箱地址： krishnendupaul@ggdcgopi2.ac.in, shameek.paul@rkmvu.ac.in

常数 $E_{A,B}(M)$ 是满足以下条件的最小正整数 k ：每个在 M 中长度为 k 的序列都含有一个长度为 $|M|$ 的 (A,B)-加权零和子序列。

我们用 $D_A(M)$ 表示常数 $D_{A,B}(M)$，其中 $B=\{0\}$。我们以类似的方式定义常数 $C_A(M)$ 和 $E_A(M)$。此外，我们用 $D(M)$ 表示常数 $D_{\mathbf{1}}(M)$，并以类似的方式定义 $C(M)$ 和 $E(M)$。

对于每个满足 $n\geq 2$ 的 $n\in\mathbb{N}$，我们将环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 记为 $\mathbb{Z}_n$。在 $M=R=\mathbb{Z}_n$ 的情况下，我们在上述常数的记号中用符号 n 替换符号 M。

设 $S=(x_1,\ldots,x_k)$ 是 M 中的一个序列，且 $x\in M$。我们将 S 按 x 平移得到的序列定义为 $S+x=(x_1+x,\ldots,x_k+x)$。我们将集合 $\{1\}$ 记为 $\mathbf{1}$。

观察 1.1。假设模 M 中的序列 S 是一个 $(A,\mathbf{1})$-加权零和序列。那么，S 的每个平移也都是 $(A,\mathbf{1})$-加权零和序列，因为下列恒等式成立。

$$a_1(x_1+x)+\cdots+a_k(x_k+x)=a_1x_1+\cdots+a_kx_k+(a_1+\cdots+a_k)x.$$

因此，要证明序列 S 含有一个 $(A,\ \mathbf{1})$-加权零和子序列，只需证明其某个平移 S 也满足这一点。

本文给出以下结果:
设 $M=R=\mathbb{Z}_n$ 和 $A=\{\pm 1\}$。则

- We have $C_{A,\mathbf{1}}(n)=2C_A(n)$ and $D_A(n)+1\leq D_{A,\mathbf{1}}(n)\leq 2D_A(n)$.
- When n is odd, we have $E_{A,\mathbf{1}}(n)=2n-1$.
- When n is even, we have $E_A(n)\leq E_{A,\mathbf{1}}(n)\leq n-2+D_{A,\mathbf{1}}(n)$.

设 M 是一个有限的 $\mathbb{Z}_2$-模。则 $\{\pm 1\}=\{1\}$，并且我们有

$$C_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=2C(M),\ D_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=D(M)+1,\ \text{and}\ E_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=E(M).$$

由此，我们可以证明，若 $M=\mathbb{Z}_2^r$，则

$$C_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=2^{r+1},\ D_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=r+2,\ \text{and}\ E_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=2^r+r.$$

2 一些下界

给定一个环 R，令 R^* 表示环 R的单位群。

观察 2.1. 设 T是 M中的一个（A, B）-加权零和序列。若 $A \subseteq R^*$ 或 $B \subseteq R^*$ 成立，则 T 的长度至少为二，因为 $0 \notin A \cup B$。

命题 2.2。 若 $A \subseteq R^*$ 或 $B \subseteq R^*$，则 $C_{A,\ B}(M) \geq 2C_A(M)$。

证明。 设 $k = C_A(M)$，且设 $S' = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ 是 M中的一个序列，它不含任何由连续项组成的 A-加权零和子序列。令$S = (0, x_1, 0, x_2, 0, \ldots, 0, x_{k-1}, 0)$ 为从 S'得到的序列，即在交替位置插入零。假设 S 含有一个由连续项组成的 (A, B)-加权零和子序列。那么根据观察 2.1，我们得到矛盾：S' 含有一个由连续项组成的 A-加权零和子序列。由于 S 的长度为 $2k-1$，因此可得 $C_{A,\ B}(M) \geq 2k$。

□

命题 2.3。 如果 $A \subseteq R^*$ 或 $B \subseteq R^*$，那么 $D_{A,\ B}(M) \geq D_A(M) + 1$。

证明。 设 $k = D_A(M)$，且设 $S' = (x_1, \ldots, x_{k-1})$ 是 M中的一个序列，它不含任何 A-加权零和子序列。设 $S = (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0)$。假设 S 有一个 (A, B)-加权零和子序列。由观察 2.1 可得矛盾：S' 含有一个 A-加权零和子序列。由于S 的长度为 k，因此 $D_{A,\ B}(M) \geq k + 1$。

□

3 当 $A = \{\pm 1\}$ 且 $B = \{1\}$时的上界

对于 a, $b \in \mathbb{Z}$，我们将集合 $\{x \in \mathbb{Z} \colon a \leq x \leq b\}$ 记为 $[a, b]$。我们用 $|X|$ 表示有限集合 X中的元素个数。对于 M中的序列 T和 T'，我们用$T + T'$表示 T与 T'的连接。对于 M中的序列 $S = (x_1, \ldots, x_k)$，我们称 S的和为 $\sum S = x_1 + \cdots + x_k$。

观察 3.1。 令 $A = \{\pm 1\}$，并设 S 是 M 中的一个序列。假设 S 存在两个不相交子序列，记为 T 和 T'，使得 S 是 $T + T'$ 的一个排列，且序列 T 和 T' 的和与长度相同。那么 S 是一个 $(A, 1)$-加权零和序列。

定理 3.2。 令 $A = \{\pm 1\}$。我们有 $C_{A,\ 1}(M) = 2C_A(M)$。

证明。令 $k = C_A(M)$，并设 $S = (x_1, \ldots, x_{2k})$ 是 M 中的一个序列。对每个 $i \in [1, k]$，令 $y_i = x_{2i-1} - x_{2i}$。考虑序列 $S' = (y_1, \ldots, y_k)$。由于 $C_A(M) = k$，我们看到 S' 有一个由连续项组成的 A- 加权零和子序列 T'。因此，我们看到存在 i、$j \in [1, k]$，使得 $i \leq j$ 且 $T' = (y_i, \ldots, y_j)$。令 $T = (x_{2i-1}, x_{2i}, \ldots, x_{2j-1}, x_{2j})$。由于 $A = \{\pm 1\}$，我们看到 T 是一个由连续项组成的 $(A, 1)$-加权零和子序列

，属于 S。因此可得 $C_{A,\,\mathbf{1}}(M) \leq 2k$。由于 $A \subseteq R^*$，由命题 2.2 可知结论成立。 □

我们使用格路径给出下一个结果的组合证明。

引理 3.3。我们有 $\binom{2k}{k} > 2^k$。

证明。令 $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} :\ x + y = k\}$，令 $\mathcal{L}$ 为所有从 (0，0) 到 (k, k) 的格路径构成的集合，并令 $\mathcal{L}'$ 为所有从 (0，0) 到 D中某一点的格路径构成的集合。 $\mathcal{L}$中有 $\binom{2k}{k}$ 条路径，因为 $\mathcal{L}$ 中的路径对应于长度为 $2k$ 、重量为 k的二进制串。 $\mathcal{L}'$中有 2^k 条路径，因为 $\mathcal{L}'$ 中的路径对应于长度为 k的二进制串。 $\mathcal{L}$ 中的每条路径都经过 D中的唯一一点。因此，我们得到一个从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}'$的满射。此外， $\mathcal{L}$ 中至少存在两条路径，它们映射到 $\mathcal{L}'$ 中的那条路径；该路径对应于一个长度为 k、重量为 1 的二进制串。

□

定理 3.4. 设 $A = \{\pm 1\}$，并设 k 使得 $2^k \geq |M|$。则有$D_{A,\mathbf{1}}(M) \leq 2k$。

证明. 设 $S = (x_1, \ldots, x_{2k})$ 为 M 中的一个序列。由引理 3.3 可知$\binom{2k}{k} > 2^k$。由于 $2^k \geq |M|$，从而有 $\binom{2k}{k} > |M|$。因此，存在 S 的两个互不相同的、长度为 k 的子序列 T' 与 T''，使得 T' 与 T'' 具有相同的和。设 T 为 S 的子序列，其各项为 T' 与 T'' 的公共项。由于子序列 $T' - T$ 与 $T'' - T$ 不相交，且它们具有相同的和与长度，由观察 3.1 可知， S 具有一个 $(A, \mathbf{1})$-加权零和子序列。由此可得 $D_{A,\mathbf{1}}(M) \leq 2k$。

□

观察 3.5。 设 $A = \{\pm 1\}$。假设 char R 是 n。当 n 为偶数时， M 中的每个 (A,**1**)-加权零和序列的长度都是偶数。当 n 为奇数时， M 中长度为 n 的每个 (A,**1**)-加权零和序列都是零和序列。

定理 3.6。 设 char R 为偶数， m 为偶数，并且 $A = \{\pm 1\}$。那么， M 中长度为 $m - 2 + D_{A,\mathbf{1}}(M)$ 的每个序列都含有一个长度为 m的$(A, \mathbf{1})$-加权零和子序列。

证明。 设 S 是 M 中的一个长度为 $m - 2 + d$ 的序列，其中 $d = D_{A,\mathbf{1}}(M)$。令 r 为最大的整数，使得 S 包含 r 对重复项。设 T是 S 中由这 r 对重复项构成的子序列，并令 $S' = S - T$。

假设 T 至少有 m 个项。在这种情况下，我们可以通过取 S 中的 $m/2$ 对重复项，找到一个长度为 m 的$(A,\ \mathbf{1})$-加权零和子序列

项，它们来自 T。由于 T 的长度为偶数，我们可以假设 T 至多有$m-2$ 个项。因此，S' 至少有 d 个项。

设 T' 是 S'的一个极大（A，$\mathbf{1}$）加权零和子序列。设 T' 的长度为 l。由观察 3.5 可知，l 是偶数。由于 $S'-T'$ 至多有 $d-1$ 项，且由于 $S'-T'=(S-T)-T'=S-(T+T')$，可知 $T+T'$ 至少有 $m-1$ 项。

由此可知，T至少有 $m-l-1$ 项。由于 T的长度是偶数，可知 T 至少有 $m-l$ 项。由于 $m-l$ 是偶数，我们可以从 T中添加 $(m-l)/2$对重复项到子序列 T' 中，从而得到 S 的一个（A，$\mathbf{1}$）加权零和子序列，其长度为 $l+(m-l)=m$。 □

推论 *3.7*。设 $A=\{\pm 1\}$。假设 *char* R 是偶数且 $m=|M|$ 是偶数。则有 $E_A(M)\leq E_{A,\mathbf{1}}(M)\leq m-2+D_{A,\mathbf{1}}(M)$。特别地，由此可知，若 $D_{A,\mathbf{1}}(M)=D_A(M)+1$，则 $E_{A,\mathbf{1}}(M)=E_A(M)$。

证明。显然，我们有 $E_A(M)\leq E_{A,\mathbf{1}}(M)$。此外，由定理 3.6 可知$E_{A,\mathbf{1}}(M)\leq m-2+D_{A,\mathbf{1}}(M)$。因此，若 $D_{A,\mathbf{1}}(M)=D_A(M)+1$，则可知$E_{A,\mathbf{1}}(M)\leq m-1+D_A(M)$。容易看出，$m-1+D_A(M)\leq E_A(M)$。由此可得 $E_{A,\mathbf{1}}(M)=E_A(M)$。 □

4 $R=\mathbb{Z}_2$ 和 $A=\{1\}$

观察 4.1。设 $R=\mathbb{Z}_2$，并设 S 是 M 中的一个偶数长度序列。若 S 是一个零和序列，则 S 是一个（$\mathbf{1}$，$\mathbf{1}$）-加权零和序列。

定理 4.2。设 $R=\mathbb{Z}_2$。则 $C_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=2C(M)$，$D_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=D(M)+1$，以及 $E_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=E(M)$。

证明。设 S 是 M 中一个长度为 $D(M)+1$的序列。那么，序列 S 有一个零和子序列 T。设 x 是 T 的一个项，且 $S'=S-(x)$。由于 S' 的长度为 $D(M)$，我们看到 S' 有一个零和子序列 T'。由于 x 是 T 中的一个项，而不是 T' 中的项，我们看到 $T\neq T'$。

假设 T 和 T' 的长度都是奇数。设 U 是 S 的子序列，其项为 T 和 T' 中不同时属于 T 和 T' 的那些项。由于 U 的长度与 T 和 T' 的长度之和具有相同的奇偶性，我们看到 U 的长度为偶数。由于 $R=\mathbb{Z}_2$，我们看到 $\sum U=\sum T+\sum T'$。

因此，U是一个零和序列。因此，由观察 4.1 可知，S有一个（$\mathbf{1}$，$\mathbf{1}$）-加权零和子序列。由此可得，$D_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)\leq D(M)+1$。因此，利用命题 2.3 可知，$D_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(M)=D(M)+1$。所以根据

推论 3.7 可知，$E_{1,\ 1}(M) = E(M)$。此外，由定理 3.2 可知，$C_{1,\ 1}(M) = 2C(M)$。 □

设 M 是一个有限 R-模。由于 $\mathbb{Z}_2$ 是一个域，我们看到 $M = \mathbb{Z}_2^r$，其中r是 M的维数。由 [3] 的定理 3.1、4.1 和 5.2，我们可以推出 $C(M) = 2^r$、$D(M) = r+1$以及 $E(M) = 2^r + r$。因此，由定理 4.2 可得$C_{1,1}(M) = 2^{r+1}$、$D_{1,1}(M) = r+2$以及$E_{1,1}(M) = 2^r + r$。

5 $M = R = \mathbb{Z}_n$ 与 $A = \{\pm 1\}$

由 [1] 我们看到，若 $D_A(n) = k$，则 $2^k > n$。因此，由命题 2.3 和定理 3.4，我们看到 $D_A(n)+1 \le D_{A,1}(n) \le 2D_A(n)$。当 n 为奇数时，由观察 3.5 可得 $E_{A,1}(n) = E(n) = 2n-1$。当 n 为偶数时，推论 3.7 表明 $E_A(n) \le E_{A,1}(n) \le n-2+D_{A,1}(n)$。特别地，若$D_{A,1}(n) = D_A(n)+1$，则$E_{A,1}(n) = E_A(n)$。此外，由定理 3.2 我们看到$C_{A,1}(n) = 2C_A(n)$。

注 5.1. 我们可以验证，$\mathbb{Z}_6$中的序列 $S = (0, 1, 2, 4)$ 不含 $(A, 1)$-加权零和子序列。因此，$D_{A,\ 1}(6) \ge 5$。设S 是 $\mathbb{Z}_6$中一个长度为五的序列。由于 $\binom{5}{2} = 10 > 6$，我们可以找到 S 中两个长度为二且和相同的子序列。因此，S 含有一个 $(A, 1)$-加权零和子序列。由此可见，$D_{A,\ 1}(6) = 5$。

由 [1] 可知，$D_A(6) = 3$。因此，我们有 $D_{A,\ 1}(6) = D_A(6)+2$。考虑 $\mathbb{Z}_4$ 中的序列 $(0, 1, 2)$ 和 $\mathbb{Z}_8$ 中的序列 $(0, 1, 2, 4)$，并采用与上一段类似的论证，我们可以证明$D_{A,\ 1}(4) = D_A(4)+1$，且 $D_{A,\ 1}(8) = D_A(8)+1$。

6 总结

设 $M = R = \mathbb{Z}_n$ 和 $A = \{\pm 1\}$。文献 [2] 中证明了，当 n 是 2的幂 时，$C_A(n) = n$。据我们所知，对于其他 n （除了 n 的某些较小取值外），$C_A(n)$ 的值尚不清楚。因此，由定理 3.2 可知，当 n 是 2的幂 时，$C_{A,\ 1}(n) = 2n$。

我们尚未找到任何使得 $D_{A,\ 1}(n) \ge D_A(n)+3$ 成立的 n 值。我们认为，只要 n 是 2的幂，就有 $D_{A,\ 1}(n) = D_A(n)+1$。我们还认为，对于每个偶数 n，都有 $E_{A,\ 1}(n) = E_A(n)$。

设 $|M| = m$，且 m 是 char R 的倍数。在 [4] 中证明了$D_{A,\ B}(M) \le E_{A,\ B}(M) \le 2m-1$，并且 $C_{A,\ B}(M) \le m^2$。此外，在 [4] 中证明了 $D_{1,\ 1}(n) = E_{1,\ 1}(n) = 2n-1$，以及 $C_{1,\ 1}(n) = n^2$。当 $A = \{\pm 1\}$ 时，我们

为相应的 $(A,\ \mathbf{1})$-加权零和常数得到了小得多的上界。

参考文献

[1] S. D. Adhikari、陈永高、J. B. Friedlander、S. V. Konyagin 和 F. Pappalardi，《零和问题的贡献》，离散数学 **306**(2006年)，1-10。[2] S. Mondal、K. Paul 和 S. Paul，《论一种不同的加权零和常数》，离散数学. **346**(2023年)，113350。[3] S. Mondal、K. Paul 和 S. Paul，《论$\mathbb{Z}_n$的单位加权零和常数》，$Integers$**24** (2024年)，#A38。[4] K. Paul 和 S. Paul，《双重加权零和常数》，arXiv:2311.00090v3 [math.NT]