arXiv:2603.07257v1 [math.CA] 7 Mar 2026

一类具有分形性质且包含奇异函数子类的处处非单调函数

S. O. KLYMCHUK 和 M. V. PRATSIOVYTYI

摘要。我们研究一类定义在线段 $[0,1]$ 上的连续函数 f，其定义等式为

$$f(x)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

其中 $||q^*_{ik}||$ 给定为无限正随机矩阵（$i=0,\ 1,\ 2;\ \ k\in N$）；$\beta_{0k}=0,\ \beta_{1k}=q_{0k}$，$\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}$；（$\varepsilon_k$）为给定的数值序列，使得 $0\leqslant\varepsilon_k\leqslant 1$；$g_{0k}=\dfrac{1+\varepsilon_k}{3}=g_{2k}$，$g_{1k}=\dfrac{1-2\varepsilon_k}{3}$，$\delta_{0k}=0,\ \ \delta_{1k}\overline{=g_{0k}},\ \ \delta_{2k}=g_{0k}+g_{1k},\ \ k\in N$。

我们给出了函数严格单调性、非单调性和处处非单调性、不可微性及奇异性的判据。我们关注这些函数水平集的性质。

1. 引言

令 $A_3=\{0,1,2\}$ 表示三进制（3 进制）数字系统的字母表，$L_3=A_3\times A_3\times\ldots$ 表示由该字母表构成的序列空间，$Q_3^*=|q_{ik}|$ 表示一个无限正随机矩阵（$i=0,1,2;\ \ k=1,2,\ldots$），即

$$Q_3^*=\begin{pmatrix} q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0k} & \cdots\\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} & \cdots\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} & \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $q_{ik}>0$, $q_{0k}+q_{1k}+q_{2k}=1$。该矩阵定义了数 Q_3^* 的表示 s

$$[0;1]\ni x=\beta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

其中 $\beta_{0k}=0$, $\beta_{1k}=q_{0k}=\beta_{0k}+q_{0k}$ 和 $\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}=\beta_{1k}+q_{1k}$。

注意，当 $q_i\equiv q_{i1}=q_{i2}=\ldots=q_{ik}=\ldots$，其中 $i\in A_3$ 且 $k\in N$ 时，我们得到由三个正数 q_0、q_1、q_2确定的 Q_3-进制表示。在$q_0=q_1=q_2=\dfrac{1}{3}$ 的情况下，这种表示与经典三进制表示一致。

–

另给定一个实数序列（ε_k），使得 $0\leqslant\varepsilon_k\leqslant 1$；令 $g_{0k}=\dfrac{1+\varepsilon_k}{3}=g_{2k}$ 且 $\overline{g_{1k}=\dfrac{1-2\varepsilon_k}{3}}$, $k\in N$。

2020 数学主题分类。11K55, 26A27, 26A30。关键词和短语。连续非单调函数、奇异函数、函数的水平集、函数的可微性、实数的 Q_3^*-进制表示、Q_3^*-进制表示的几何、柱体、康托尔型集合。《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》。—基辅：乌克兰国家科学院数学研究所，2017年，第23–37页。

我们研究的对象是由等式定义的函数 f

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] \equiv \Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{1}$$

其中 $\delta_{0k} = 0$、 $\delta_{1k} = g_{0k} = \delta_{0k} + g_{0k}$ 和 $\delta_{2k} = g_{0k} + g_{1k} = \delta_{1k} + g_{1k}$。

具有分形性质的处处非单调函数已在多篇论文中出现。在论文 [3] 中，作者研究了定义在区间 [0 上的非单调连续函数； 1]这些函数的导数几乎处处为零（按勒贝格测度的意义）。作者用 s 进制表示及其推广——实数的 Q_s 表示来定义这些函数，并考察了其图像的性质。作者特别关注自变量可用三进制和四进制表示的函数。在论文 [6] 中，作者介绍了一类具有复杂局部结构的连续函数，这类函数用 Q_s^* 进制表示定义，其性质取决于预先指定的有限个实数。论文 [9, 10] 研究了一族依赖于参数 $0 < a < 1$、通过自变量的三进制表示定义的连续严格递增奇异函数。作者表明，函数会根据参数的取值而成为处处不可微、几乎处处不可微（按勒贝格测度的意义）、奇异函数等。

2. 函数定义的正确性

为证明函数 f 定义的正确性，我们证明级数 (1) 对任意序列 $(\alpha_n) \in L_3$ 均收敛，并且对于同一个 Q_3^*–有理数的不同表示，表达式 (1) 得出相同的值。

由于对于模级数，关系式

$$|\delta_{\alpha_1(x)1}| + \sum_{k=2}^{\infty} |\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}| \leqslant \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2$$

成立，因此级数 (1) 绝对收敛。

令 x 为任意一个 Q_3^*–有理点，它有以下两种表示：$\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ 和 $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}$，其中 $\alpha_n \neq 0$。我们考虑其差

$$\begin{aligned}
\rho \equiv & f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}) - f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}) = \\
= & \sum_{k=n}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_2)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_2)j} \right] - \sum_{k=n}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_1)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_1)j} \right] \\
= & \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \left[\delta_{[\alpha_n-1]n} + \delta_{2[n+1]} g_{\alpha_n(x_2)n} + \delta_{2[n+2]} g_{\alpha_n(x_2)n} g_{\alpha_{n+1}(x_2)[n+1]} + \cdots \right. \\
& \left. - \delta_{0[n+1]} g_{\alpha_n(x_1)n} - \delta_{0[n+2]} g_{\alpha_n(x_1)n} g_{\alpha_{n+1}(x_1)[n+1]} - \ldots \right]
\end{aligned}$$

$$=\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}\left[\delta_{[\alpha_n-1]n}-\delta_{\alpha_n n}+g_{\alpha_n(x_2)n}\left(\delta_{2[n+1]}+\delta_{2[n+2]}g_{\alpha_{n+1}(x_2)[n+1]}+\ldots\right)\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}\left[\delta_{[\alpha_n-1]n}-\delta_{\alpha_n n}+g_{\alpha_n(x_2)n}\left(\delta_{2[n+1]}+\sum_{k=2}^{\infty}\delta_{2[n+k]}\prod_{j=1}^{k-1}g_{2[n+j]}\right)\right].$$

Since $\delta_{2(n+1)}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[\delta_{2(n+k)}\prod\limits_{j=1}^{k-1}g_{2(n+j)}\right]=\Delta_{(2)}^{G_3^*}=1$, then

$$\rho=\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[\delta_{[\alpha_n-1]n}-\delta_{\alpha_n n}+g_{[\alpha_n-1]n}\right].$$

如果 $\alpha_1=1$，那么

$$\rho=\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[\delta_{0n}-\delta_{1n}+g_{0n}\right]=\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[0-g_{0n}+g_{0n}\right]=0.$$

若 $\alpha_1=2$，则

$$\rho=\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[\delta_{1n}-\delta_{2n}+g_{1n}\right]=\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[g_{0n}-g_{0n}-g_{1n}+g_{1n}\right]=0.$$

考虑到这些事实，我们得出结论：函数 f 定义正确 .

3. The set of values of the function

根据函数的定义，我们得到

$$f(0)=f\left(\Delta_{(0)}^{Q_3^*}\right)=\delta_{01}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{0k}\prod_{j}^{k-1}g_{0j}\right)=0+\sum_{k=2}^{\infty}\left(0\prod_{j}^{k-1}g_{0j}\right)=0;$$

$$f(1)=f\left(\Delta_{(2)}^{Q_3^*}\right)=\delta_{21}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{2k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{2j}\right)=\frac{2-\varepsilon_1}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2-\varepsilon_k}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1+\varepsilon_j}{3}\right).$$

我们估计表达式 $\underline{\underline{\dfrac{2-\varepsilon_1}{3}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{2-\varepsilon_k}{3}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\dfrac{1+\varepsilon_j}{3}\right)}}=A$。由于 $0\leqslant\varepsilon_n\leqslant 1$，因此

$$A\geqslant\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{2}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots=1;$$

$$A\leqslant\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\ldots\right)=1.$$

因此，$f(1)=1$。

引理1。由等式（*1*）定义的函数 f，其取值属于区间 $[0;\ 1]$。

证明。考虑部分和

$$S_m \equiv \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{m} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right],$$

并证明 $0 \leqslant S_m < 1$ 当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$时有 $S_m = 0$。为此，我们使用数学归纳法。

对于 $m = 1$，我们有 $S_1 = \delta_{\alpha_1 1}$。若 $\alpha_1 = 0$，则 $S_1 = 0$；若 $\alpha_1 \neq 0$，则根据定义 δ_{i1}，对于 $i = 1,\ 2$，有 $0 \leqslant S_1 < 1$。

对于 $m = 2$，我们有 $S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1}$。由于 $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$，因此根据数字 α_1，α_2 的取值，我们在每种情况下得到部分和 S_2 的以下取值:

$$\alpha_1 = 0: \begin{cases} 0 \text{ for } \alpha_2 = 0, \\ g_{02}g_{01} \text{ for } \alpha_2 = 1, \\ (g_{02} + g_{12})g_{01}, \alpha_2 = 2. \end{cases} \qquad \alpha_1 = 1: \begin{cases} g_{01} \text{ for } \alpha_2 = 0, \\ g_{01} + g_{02}g_{11} \text{ for } \alpha_2 = 1, \\ g_{01} + (g_{02} + g_{12})g_{11}, \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 2: \begin{cases} g_{01} + g_{11} \text{ for } \alpha_2 = 0, \\ g_{01} + g_{11} + g_{02}g_{21} \text{ for } \alpha_2 = 1, \\ g_{01} + g_{11} + (g_{02} + g_{12})g_{21} \text{ for } \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

在上述每种情况下，数 S_2 均非负（且仅在$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$的情况下等于零），并且小于1。因此，

$$0 \leqslant S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < 1.$$

假设该命题对 $m = n$ 成立，即 $0 \leqslant S_n < 1$，并证明这意味着该命题对 $m = n + 1$ 也成立。

考虑部分和

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{n+1} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] \\ &= \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} \left(\delta_{\alpha_2 2} + \sum_{k=3}^{n+1} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] \right) \\ &= \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} S'_n, \end{aligned}$$

其中 $S'_n = \delta_{\alpha_2 2} + \sum_{k=3}^{n+1} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right]$ 表示与集合 (α_2，α_3，.....，α_{n+1}) 相对应的部分和。

根据假设，$0 \leqslant S'_n < 1$ 当且仅当 $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$ 时，$S'_n = 0$。若 $S'_n = 0$，则 $1 > S_{n+1} = \delta_{\alpha_1 1} \geqslant 0$（此外，当 $\alpha_1 = 0$ 时，$S_{n+1} = 0$）。若 $0 < S'_n < 1$，则

$$0 < S_{n+1} < \begin{cases} g_{01}, \text{ if } \alpha_1 = 0, \\ g_{01} + g_{11}, \text{ if } \alpha_1 = 1, \\ g_{01} + g_{11} + g_{21}, \text{ if } \alpha_1 = 2. \end{cases}$$

因此，对于任意的 $x \in [0;\ 1]$ 和 $m \in N$，不等式 $0 \leqslant S_m < 1$ 成立。

对最后一个双重不等式取极限，得到

$$0 \leqslant f(x) = \lim_{m\to\infty} S_m \leqslant 1 = f(1).$$

□

4. 函数的连续性

定理1。 由等式（*1*）定义的函数 f 在区间 $[0;\ 1]$ 的每一点处都连续。

证明。 为证明函数在点 $x_0 = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ 处的连续性，我们使用连续性的定义；也就是说，我们证明 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$。如果 x_0 是一个 Q_3^*–无理点，那么 $x \to x_0$ 等价于 $m \to \infty$，其中 $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$，但对于 $j < m$，$\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$。于是

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \times \\ &\times \left(\delta_{\alpha_m(x)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] - \right. \\ &\left. - \ \delta_{\alpha_m(x_0)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_0)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \right] \right) = \\ &= \prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \cdot B \to 0 \ \ (m \to \infty). \end{aligned}$$

由于当 $m \to \infty$ 时 $\prod\limits_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \to 0$，且级数

$$\delta_{\alpha_m(u)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(u)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(u)j} \right]$$

对于 $u = x$ 和 $u = x_0$ 收敛。要证明 f 在 Q_3^*–有理点 x_0 处的连续性，使用相同的方法即可。然而，为证明左连续性，我们使用数 x_0 的周期（2）表示；为证明右连续性，我们使用周期（0）表示。□

推论1。 由等式（*1*）定义的函数 f 的值域是区间$[0;\ 1]$。

5. Monotonicity Properties

定理2. 函数 f 在区间 $[0;\,1]$ 上按等式（*1*）定义，其增量 $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m})$ 由公式计算得出

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}.$$

证明. 事实上,

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}) - f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}) =$$
$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_2)j} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{0k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_1)j} =$$
$$\prod_{j=1}^{m} g_{c_jj} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{2j} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{0k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{0j} \right) =$$
$$\prod_{j=1}^{m} g_{c_jj} \left(\delta_{2(m+1)} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{2j} \right) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_jj}.$$

□

推论 2。 如果 $\varepsilon_k = \frac{1}{2}$ 对某个自然数 $k \leqslant m$ 成立，那么 $g_{1k} = 0$ 且 $g_{0k} = g_{2k} = \frac{1}{2}$。

因此，函数 $f(x)$ 在某个柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ 上为常值。

推论 3。 如果 $0 \leqslant \varepsilon_k < \frac{1}{2}$，那么函数 $f(x)$ 在其整个定义域上严格递增。

定理 3。 函数 f 在 $[0;\ 1]$ 上连续，且由等式 (*1*) 定义；如果对每个 $k \in N$ 不等式 $\frac{1}{2} < \varepsilon_k \leqslant 1$ 都成立，则该函数处处非单调。

证明。由于 $\varepsilon_k \neq \frac{1}{2}$，我们得到 $g_{0k}g_{1k}g_{2k} \neq 0$。因此，函数 f 不含任何常值区间。假设函数 f 在区间 $(a;\ b) \subset [0;\ 1]$ 上具有单调性。由于总存在一个柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m} \subset (a;\ b)$，它也构成函数 f 的一个单调区间。由于 $g_{0k}g_{1k}g_{2k} \neq 0$，于是 $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_jj} \neq 0$，并且

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m0})\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m1})\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m2}) < 0,$$

也就是说，函数 f 在柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m1}$ 上有负增量，而在柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m0}$ 和 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m2}$ 上有正增量。这与 f 在柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ 上的单调性相矛盾。□

6. 处处非单调的迹象与康托尔型结构

若 $\varepsilon_n = \frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在柱状区间 $\nabla^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_{m-1}1}$ 上为常数，其中 $c_i \in V$ 对于 $i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ m-1$ 和 $m \in N$ 成立；该区间与集合 $C[Q_3^*, V]$ 相邻。

由于对于此区间内的任意 x，我们都有 $\alpha_m(x) = 2$，因此

$$\prod_{j=1}^{m} g_{\alpha_j j}(x) = 0,$$

and

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \delta_{\alpha_2(x)2}g_{\alpha_1(x)1} + ... + \delta_{\alpha_{m-1}(x)[m-1]}\prod_{j=1}^{m-2} g_{\alpha_j(x)j} + 0 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x)j} + 0 = const,$$

也就是说， f 在此区间上为常数。

所有与集合 $C[Q_3^*, V]$ 相邻的区间 $\nabla^{Q_3^*}_{c_1...c_{m-1}1}$ 的长度之和，其中$c_i \in V$对于 $i = 0$，1、.....、$m-1$和 $m \in N$，等于 1。事实上，

$$S = |\Delta_1^{Q_3^*}| + \sum_{c_1 \in V} |\Delta_{c_1 1}^{Q_3^*}| + \sum_{c_1 \in V} \sum_{c_2 \in V} |\Delta_{c_1 c_2 1}^{Q_3^*}| + ... = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + ... = 1.$$

由于函数 f 在这些区间 $\nabla^{Q_3^*}_{c_1...c_{m-1}1}$中的每一个区间上都是常数，其中 $c_i \in V$ 对于 i =0，1、.....、$m-1$和 $m \in N$，因此其导数在每个区间上都等于 0。因此，该函数是奇异函数。

7. 函数极值

我们将函数 f 在柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ 上的增量 μ_f 记为 μ_m，即

$$\mu_m = \mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}(x).$$

引理 2。 函数 f 在柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ 上于其端点处取得最大值和最小值。此外，

$$if\ \mu_m > 0,\ then\ \max f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}), \min f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}),$$

$$if\ \mu_m < 0,\ then\ \max f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}), \min f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}).$$

证明。 由于柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ 是线段 $[\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}; \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}]$， 因此我们可以将函数 f 在任意点 $x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ 处的值表示为

$$f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}) + \mu_m \cdot f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+n}...}).$$

若对任意 $j \in N$， $\alpha_{m+j} = 0$，则 $f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+n}...}) = 0$。若对任意 $j \in N$， $\alpha_{m+j} = 2$，则 $f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+n}...}) = 1$。那么，若 $\mu_m > 0$，则有

$$\max_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}), \quad \min_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}),$$

并且如果 $\mu_m < 0$，我们有

$$\max_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}), \quad \min_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}).$$

□

8. 函数的图像 Γ_f 的性质

定理4。 如果 $\varepsilon_n = const$ 且 $\prod g_i \neq 0$，则函数 f 的图像及其子集$\Gamma_f^i \equiv \{(x; y): x \in \Delta_i^{G_3^*}, y = f(x)\}$ 与 $\Gamma_f^i = \phi_i(\Gamma_f)$ 仿射等价，其中

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = g_i y + \delta_i, \quad i \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

证明。 为证明该定理，我们证明 $\Gamma_\phi^i \subset \phi_i(\Gamma_f)$ 和 $\phi_i(\Gamma_f) \subset \Gamma_\phi^i$。

设 $M(x; y) \subset \Gamma_f^i$，即

$$x = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ and } y = \delta_i + g_i\left(\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right)\right).$$

在图像 Γ_f 上选取点 $M_0(x_0; y_0)$，其中

$$x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ and } y_0 = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right).$$

其像 $\phi_i(M_0) = M$，因此 $M \in \Gamma_f$。

设点 $M(x, y)$ 在仿射变换 ϕ_i 下的像为 $M'(x'; y')$，即

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ and } y = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right),$$

and

$$x' = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ and } y' = \delta_i + g_i\left(\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right)\right).$$

由此可得 $M' \in \Gamma_f^i$，因此 $\phi_i(\Gamma_f) \subset \Gamma_f^i$。于是，$\Gamma_f^i = \phi_i(\Gamma_f)$。 □

9. Level sets of the function

回顾一下，函数 f 的水平集 y_0 是集合

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

若对所有 $n \in N$ 都有 $0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}$，则函数 f 严格递增，因此它的每个水平集都只包含一个点。

若 $\varepsilon_n = \frac{1}{2}$，则对所有 $n \in N$ 都有 $g_{1n} = 0$，并且由于函数 f 的连续性，它的每个水平集要么是一个点，要么是一条线段。

若 $\frac{1}{2} < \varepsilon_n \leqslant 1$，则 $g_{1n} < 0$，且函数 f 的每个水平集都是可数集。由于函数 f 在秩为 i 的柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1}(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)$ 上的增量与在秩为 $i+1$ 的柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1}(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)$ 上的增量符号相反，并考虑到 f的连续性，直线 $y = y_0$ 与 f 的图像至少相交于两点，这两点属于柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1}(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)$，但不属于柱体 $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1}(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)$。

因此，水平集 $f^{-1}(y_0)$ 是可数集。它不可能是连续的，因为局部极大值与极小值的集合是可数的。

参考文献

[1] *Pratsiovytyi M.V.* 分形方法在奇异分布研究中的应用。— 基辅：德拉戈马诺夫国立师范大学，1998。— 296页。（乌克兰语）[2] *Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V.* 分形集、函数与分布。— 基辅：Naukova Dumka，1992。— 208页。（俄语）[3] *Pratsiovytyi M. V.* 处处非单调奇异函数 // 德拉戈马诺夫国立师范大学学报。第1辑：物理与数学科学。— 基辅：德拉戈马诺夫国立师范大学，2011，第12期，第24–36页。（乌克兰语）[4] *Pratsiovytyi M. V.* 连续处处不可微函数的分形性质 // 德拉戈马诺夫国立师范大学学术纪要。物理与数学科学。— 第3期，2002，第327–338页。（乌克兰语）[5] *Pratsiovytyi M. V.*连续康托尔投影 // 代数与拓扑结构研究方法。— 基辅：KSPU，1989，第95–105页。（俄语）[6] *Pratsiovytyi M. V., Svynchuk O. V.*由 Q_s^*–表示定义的奇异非单调函数 // 德拉戈马诺夫国立师范大学学报。第1辑：物理与数学科学。— 基辅：德拉戈马诺夫国立师范大学，2013，第15期，第144–155页。（乌克兰语）[7] *Pratsiovytyi M. V., Vasylenko N. A.* 一族具有分形性质的连续处处非单调函数 // 德拉戈马诺夫国立师范大学学报。第1辑：物理与数学科学。— 基辅：德拉戈马诺夫国立师范大学，2013，第14期，第174–186页。（乌克兰语）[8] *Kalashnikov A. V., Pratsiovytyi M. V.* 与实数Q表示相关的自仿射奇异处处非单调函数 // 乌克兰数学杂志。— 2013。— 第65卷，第3期，第405–417页。（乌克兰语）[9] *Okamoto H.* 关于连续处处不可微函数的一点注记 // 日本学士院纪要A辑数学科学。— 2005，第81卷，第3期。— 第47–50页。[10] *Okamoto H., Wunsh M.* 连续严格递增奇异函数的几何构造 // 日本学士院纪要 A 辑数学科学。— 2007，第 83 卷，第 7 期。— 第 114–118 页。[11] *Marsalia G.* 具有独立二进制数字的随机变量 // 数理统计年刊。— 1971。— 第42卷，第2期。— 第1922–1929页。[12] *Salem R.*关于某些严格递增的奇异单调函数 // 美国数学会汇刊。— 1943，第53期。— 第427–439页。[13] *Takacs L.* 一个递增连续奇异函数 // 美国数学月刊。— 1978，第85期。— 第35–37页。[14] *Zamfirescu T.* 大多数单调函数都是奇异的 // 美国数学月刊。— 1981，第88期。— 第47–49页。（S. O. Klymchuk）乌克兰国家科学院数学研究所，乌克兰基辅，ORCID 0009-0005-3979-4543电子邮箱：svetaklymchuk@imath.kiev.ua（M. V. Pratsiovytyi）乌克兰国家科学院数学研究所、德拉戈马诺夫乌克兰国立大学，乌克兰基辅，ORCID 0000-0001-6130-9413电子邮箱

: pr ats4444@g mail.com