arXiv:2603.07258v1 [math.CV] 7 Mar 2026

高维中的布拉施克乘积与解绕

`RONALD R. COIFMAN 和 JACQUES PEYRIERE

ABSTRACT. 我们给出了多圆盘上有理内函数无穷乘积收敛的充要条件，并探讨了将 Malmquist-Takenaka 基及解绕的各种形式推广到多圆盘的可能性。

1. INTRODUCTION

我们的目标是将与布拉施克乘积和 Malmquist-Takenaka 解绕展开相关的各种逼近定理推广到多圆盘。首先介绍一些我们将推广到多维的事实，从 Rudin 的观察开始：单位圆盘上的任意有理内函数（即在边界上解析且绝对值为 1）都是有限布拉施克乘积

$$z^k \prod_{1\le j<n} \frac{\overline{a_j}}{|a_j|}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \tag{1}$$

其中 $k \ge 0$ 且 $|a_j| < 1$。如果 $\sum(1-|a_j|) < \infty$ 无穷乘积$\prod_{j\ge1} \frac{a_j}{|a_j|}\frac{z-a_j}{1-a_jz}$ 收敛，那么它将在单位圆盘的紧子集上一致收敛到一个内函数；否则，该乘积在 $\mathbb{D}$ [3] 上发散至 0。

最近， [1, 2, 6, 8] 在 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 中获得了若干适用于如下形式的函数展开

$$\sum_{n\ge0} c_n \prod_{1\le j<n} B_j, \tag{2}$$

其中 c_n 是复数， B_j 是布拉施克乘积，且已被应用。

2020 数学主题分类。42B30,32A35,42A50,46J15,32A40。关键词与短语。Blaschke 乘积、内函数、多圆盘、Malmquist-Takenaka、解绕。第二作者衷心感谢耶鲁大学的款待，本论文的大部分工作都在那里完成。

2. Notation

表达式	含义
d	一个正整数
$\mathbb{D}$	单位圆盘： $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: \ \ \|z\|<1\}$
$\partial\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$ 的边界，与环面 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$相对应
$\partial^*\mathbb{D}^d$	$\mathbb{D}^d$的特征边界，与 $\mathbb{T}^d=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$
H^2_d	Hardy 空间 $\mathsf{H}^2(\mathbb{D}^d)$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},\dots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_d}$
$\mathrm{d}\theta$	$\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\cdots\mathrm{d}\theta_d$
$\langle f,g\rangle$	$(2\pi)^{-d}\int_{\partial^*\mathbb{D}^d} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{g(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{d}\theta$
$\|f\|$	$\sqrt{\langle f,f\rangle}$
$m\succeq n$	$m_j\geq n_j$ 对于 $1\leq j\leq d$, 若 $m=(m_1,m_2,\dots,m_d)$且 $n=(n_1,n_2,\dots,n_d)$,
z	$z_1,z_2,\dots,z_d$
z^m	$z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdots z_d^{m_d}$, 其中 $m=(m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_d)$
$\mathrm{d}_i^\circ P$	$P\in\mathbb{C}[z]^d$ 关于第 i 个变量的次数,
$\mathrm{d}^\circ P$	$(\mathrm{d}_1^\circ P,\mathrm{d}_2^\circ P,\dots,\mathrm{d}_d^\circ P)$,
$\overline{P}$	将 P 中的每个系数替换为其复共轭后得到的多项式
$P^*(z)$	$z^{\mathrm{d}^\circ P}\overline{P}(z_1^{-1},z_2^{-1},\dots,z_d^{-1})$
$\nu(P)$	$\|P^{-1}\|^{-1}$

我们考虑的多项式 P 均为非常数，在 $\mathbb{D}^d\cup\partial^*\mathbb{D}^d$中没有零点，且与 P^*没有公因子。令 $\mathscr{P}_d$ 表示这类多项式的集合。在这些条件下，P^*/P 是内函数，也就是说，它是多圆盘上的解析函数，并且在特征边界 $\partial^*\mathbb{D}^d$上的几乎每一点处模长都为 1。事实上，已知任何有理内函数都具有 $az^mP^*P^{-1}$[9, 10, 4] 的形式。

对于 $P\in\mathscr{P}_d$，令 $\alpha(P)=P^*(0)/P(0)$会更方便，并且

$$\beta(P)=\begin{cases}\overline{\alpha(P)}/|\alpha(P) & \text{if } \alpha(P)\neq 0,\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注. 当 $d=1$ 时，由于多项式 P 与 P^* 没有公因子， P 具有如下形式（至多相差一个乘法常数），

$P(z) = \prod_{j=1}^{k}(1-\overline{a_j}z)$，其中 $|a_j|<1$。则

$$\frac{P^*(z)}{P(z)} = \prod_{1\le j\le k}\frac{a_j - z}{1-\overline{a_j}z},$$

这是一个通常的有限布拉施克乘积。因此，从现在起，我们称P^*/P为布拉施克乘积；若需提及维数，则称为 d-布拉施克乘积。

3. Blaschke products

若 $P\in\mathscr{P}_d$，函数 $P^*(w,\ w,\ \ldots\ldots,\ w)/P(w,\ w,\ \ldots\ldots,\ w)$ $\mathbb{D}$ 是一个内函数，其在 0 处的值为$P^*\alpha(P)$。这意味着 $|\alpha(P)|<1$。

定理 1. 无穷乘积 $\prod_{n\ge1}\beta(P_n)\frac{P_n^*}{P_n}$ 收敛（在 $\overline{\mathbb{D}^d}$ 的紧子集上一致收敛）当且仅当 $\sum\Big(1-\big|\alpha(P_n)\big|\Big)<+\infty_{n\ge1}$

证明。首先，假设 $\sum\Big(1-|a(P_n)|\Big)<+\infty$。那么存在有限多个 n，使得 $\alpha(P_n)=0$。因此，我们可以假设对所有 n，都有 $\alpha(P_n)\neq0$。令 $B_n=\prod_{1\le j<n}\beta(P_n)\frac{P_n^*}{P_n}$。取 $m<n$，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d}|B_m-B_n|^2\mathrm{d}\theta &= 2\Re\int_{\mathbb{T}^d}\left(1-\overline{B_m}B_n\right)\mathrm{d}\theta\\ &= 2\Re\int_{\mathbb{T}^d}\left(1-\frac{B_n}{B_m}\right)\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

（别忘了 $|B_m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|=1$）。由于 $\frac{B_n}{B_m}=\prod_{m\le j<n}\beta(P_j)\frac{P_j^*}{P_j}$ 是解析函数，它在 $\mathbb{T}^d$ 上的平均值就是它在 0 处的值，即 $\prod_{m\le j<n}|a(P_j)|$。由此可知，B_n 在 $L^2\big(\partial^*\mathbb{D}^d\big)$ 中有极限并且收敛；在多圆盘的任意紧子集上一致收敛到一个非零函数，因为它在 0 处的值是 $\prod_{n\ge1}\alpha(P_n)$。

现在我们假设 $\sum\big(1-|\alpha(P_j)|\big)=+\infty$。$B_n$ 构成一个正规$_{j\ge0}$族。我们希望证明，序列B_n的唯一极限点是 0。这样的极限点 f 在 $\mathbb{D}^d$中是解析的。

当 $d=1$ 时，我们知道这个无穷乘积发散至 0。
我们首先考虑 $d=2$ 的情形。

令 $w \in \mathbb{D}$ 和 $u \in \partial\mathbb{D}$。设

$$g_n(w) = \beta(P_n)\frac{P_n^*(uw, w)}{P_n(uw, w)}.$$

若 $\alpha(P_j) = 0$ 无穷多次，相应的 g_n 都是以 0 为零点的布拉施克乘积。因此，无穷乘积 $\prod g_n$ 发散。若 $\alpha(P_j) = 0$ 仅发生有限次，我们只需考虑满足 $\alpha(P_n) \neq 0$ 的 n。那么 g_n 是一个 1-布拉施克乘积，其在 0 处的值为$\alpha(P_n)$。因此，乘积 $\prod g_n$ 仍然发散。这意味着，对于序列 B_n 的任意极限点 f，都有 $f(uw,\ w) = 0$。

换言之，对于所有满足 $|z_1| = |w|$的 z_1，都有 $f(z_1,\ w) = 0$，这意味着当 $|z_1| \leq |w|$时该结论仍然成立。因此，$f = 0$。

我们将对 d 进行归纳，证明这样的乘积发散。假设当有 d 个变量时结论成立。取 $z = (z_1,\ \ldots,\ z_{d-1}) \in \mathbb{D}^{d-1}$，$u \in \partial\mathbb{D}$ 和 $w \in \mathbb{D}$，并令

$$g_n(z, w) = \beta(P_n)\frac{P_n^*(z, uw, w)}{P_n(z, uw, w)}.$$

于是 g_n 是一个在0处取值为 $\alpha(P_n)$的d-布拉施克乘积。因此乘积 $\prod g_n$ 再次发散。这意味着，对于序列 B_n的任意极限点 f，对所有 $z = (z_1, \ldots, z_{d-1}) \in \mathbb{D}^{d-1}$、$u \in \partial\mathbb{D}$以及 $w \in \mathbb{D}$，我们有 $f(z, uw, w) = 0$。如前所述，这表明 $f = 0$。

定理 2. 在 $\sum(1 - |\alpha(P_n)| = \infty$ 的情形下，我们有 $\bigcap B_n\mathsf{H}_d^2 = \{0\}$。

证明. 当 $d = 1$ 时这是显然的，因为若 $f \in \bigcap B_n\mathsf{H}_1^2$，则函数$f$ 的零点如此迅速地聚积到边界，以至于它必须为0。如前所述，我们对 d作递归。

假设这对 d 成立，并考虑$(d+1)$个变量中的这样一个乘积。设 $z \in \mathbb{D}^{d-1}$、$u \in \partial\mathbb{D}$和 $w \in \mathbb{D}$。令 $B_n^\sharp(z, w) = B_n(z, uw, w)$。$d$-布拉施克乘积 $B_n^\sharp$ 在0处与 B_n取值相同。设 $f \in \bigcap B_n\mathsf{H}_{d+1}^2$。则函数 $g(z, w) = f(z, uw, w)$属于 $\bigcap B_n^\sharp\mathsf{H}_d^2$。由递归假设可得 $g = 0$。因此当 $|v| = |w|$时，我们有 $f(z, v, w) = 0$，这意味着当 $|v| \leq |w|$时该结论仍然成立。最后 $f = 0$。

4. Malmquist-Takenaka orthogonal systems

4.1. Malmquist-Takenaka 正交系统。

引理 1. 设 $P \in \mathscr{P}_d$。那么 f/P与 $\frac{P^*}{P}\mathsf{H}_d^2$正交，当且仅当$\widehat{\ }$对于所有满足 $j \succeq \mathrm{d}^\circ P$的 j，都有 $f(j) = 0$。

证明. 设 $f, \varphi \in \mathbf{H}^2_d$。我们有

$$\left\langle \frac{P^*\varphi}{P}, \frac{f}{P} \right\rangle = \left\langle \frac{z^{\mathrm{d}^\circ P}\varphi}{P}, f \right\rangle$$

因为当 $|z| = 1$时，我们有 $P^*(z)/P(z) = z^{\mathrm{d}^\circ P}$。由于 φ/P是 $\mathbf{H}^2_d$中的任意元素，因此当且仅当 f 与 $z^{\mathrm{d}^\circ P}\mathbf{H}^2_d$正交时，这个内积才为零；这意味着对于所有满足 $j \succeq 0$ 的 j，傅里叶系数 $\widehat{f}(j + \mathrm{d}^\circ P) = 0$。

推论 1. 设 $(P_n)_{n\geq 1}$ 是 $\mathscr{P}_d$中的元素序列。那么，$\left(\nu\left(\overline{\frac{P_n}{P_n}\prod_{1\leq j\leq n}\frac{P_j^*}{P_j}}\right)\right)_{n\geq 1}$ 是 H^2_d中的一个标准正交系。

这让人联想到一维情形中的 Malmquist-Takenaka [5, 11] 基。主要区别在于，当 $d > 1$时，这不可能构成一个基，即使无限布拉施克乘积发散也是如此。事实上，由引理 1 可知，所有空间 $B_n\mathbf{H}^2_d \ominus B_{n+1}\mathbf{H}^2_d$ 都不是有限维的（我们令 $B_n = \prod_{1\leq j<n} P_j^*/P_j$）。

特别是，当 P 的次数为 (1，1，.....，1) 时，空间 $\mathbf{H}^2_2 \ominus B\mathbf{H}^2_2$由形如 $\left(\sum_{j=1}^d f_j(z_j)\right)/P(z)$ 的函数构成。

5. Orthogonal projections

本节中，我们考虑 $\mathbf{H}$ $B\mathbf{H}^2_d$ 上的正交投影，其中 $B = P^*/P$。

5.1. 莫比乌斯函数的张量积。

当 $d = 1$时，引理 1 化为 Malmquist-Takenaka定理：若 $B_a(z_1) = \frac{z_1 - a}{1 - az_1}$，则空间 $\mathbf{H}^2_1 \ominus B_a\mathbf{H}^2_1$ 是一维的，且 $\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-az_1}$ 是它的标准正交基。因此，简单计算可得 f 在该空间上的正交投影为

$$\frac{1 - |a|^2}{1 - \overline{a}z_1} f(a),$$

5.1.1. 两个莫比乌斯函数的张量积。

现在 $B(z_1, z_2) = \frac{z_1 - a_1}{1 - a_1 z_1}\frac{z_2 - a_2}{1 - a_2 z_2}$。$f$在$\mathbf{H}^2_2 \ominus \frac{z_1 - a_1}{1 - a_1 z_1)}\mathbf{H}^2_2$上的投影为（见上文）

$$\frac{1 - |a_1|^2}{1 - \overline{a_1}z_1} f(a_1, z_2).$$

因此， f 在 $B\mathrm{H}_2^2$ 上的投影为

$$\frac{1-|a_2|^2}{1-\overline{a_2}z_2}\left(f(z_1,a_2)-\frac{1-|a_1|^2}{1-\overline{a_1}z_1}f(a_1,a_2)\right)$$

而在 $\mathrm{H}_2^2\ominus B\mathrm{H}_2^2$ 上的投影为

$$\frac{1-|a_2|^2}{1-\overline{a_2}z_2}f(z_1,a_2)+\frac{(1-|a_1|)^2(1-|a_2|)^2}{(1-\overline{a_1}z_1)(1-\overline{a_1}z_1)}f(a_1,a_2)+\frac{1-|a_1|^2}{1-\overline{a_1}z_1}f(a_1,z_2).$$

5.1.2. 多个莫比乌斯函数的张量积。

$\left(\prod_{j=1}^{d}\frac{a_j-z_j}{1-a_jz_j}\right)\mathrm{H}_d^2$ 通过迭代前述构造，我们得到将 $f\in\mathrm{H}_d^2$ 正交投影到 $\left(\prod_{j=1}^{d}\frac{a_j-z_j}{1-a_jz_j}\right)\mathrm{H}_d^2$ 的正交补上的如下表达式：

$$\sum_{k=1}^{d}(-1)^{k-1}\sum^{*}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1-|a_j|^2}{1-\overline{a_j}z_j}\right)f(a_1,\dots,a_k,z_{k+1},\dots,z_d),$$

其中符号 $\sum^{*}$ 表示还需加上通过置换得到的类似项。

5.2. 正交投影的核。当像上文那样直接计算并不显然时，可以使用一个核。H_d^2 上的正交投影由 Szeg¨o 核给出

$$S_z(z,\zeta)=\prod_{j=1}^{d}\frac{1}{2\pi(1-z_j\overline{\zeta}_j)}.$$

若 B 是多圆盘上的内函数，则 $B\mathrm{H}_d^2$ 上的正交投影由将 Szeg¨o 算子与乘以 B 的算子作共轭后得到的核给出：

$$B(z)S_z(z,\zeta)\overline{B(\zeta)}.$$

因此，正交投影到 $\mathrm{H}_d^2\ominus B\mathrm{H}_d^2$ 上的核为

$$K(z,\zeta)=\frac{1-B(z)\overline{B(\zeta)}}{\prod_{j=1}^{d}2\pi(1-z_j\overline{\zeta_j})}.$$

换言之

$$\mathrm{proj}\left(f,(B\mathsf{H}_d^2)^{\perp}\right)(z)=\int_{\mathbb{T}^d}K(z,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

使用这个核可能会导致繁琐的计算，即使是在下一个例子所示的简单情形中也是如此；该例子借助 Maple 软件完成。

5.2.1. 一个例子。

这次 $P(z_1,\ z_2) = 1 - az_1 - \bar{b}z_2 + \bar{c}z_1z_2$。我们首先考虑函数 $g(z_1,\ z_2) = 1/((1-t_1z_1)(1-t_2z_2))$，因为 proj $\left(g,\ (B\mathsf{H}_2^2)^\perp\right)$ 是 proj $\left(z_1^{n_1}z_2^{n_2},\ (B\mathsf{H}_2^2)^\perp\right)$ 的生成函数。

通过留数计算，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}\left(g,(B\mathsf{H}_2^2)^\perp\right) = \\ -\frac{\bar{c}bz_1^2+z_1|a|^2-z_1|b|^2-z_1|c|^2-\bar{a}z_1^2+\bar{b}c-a+z_1}{(t_1z_1-1)\left(bt_2z_1-ct_2+a-z_1\right)\left(-z_1w\bar{c}+z_1\bar{a}+w\bar{b}-1\right)} \\ +\frac{(aw+bz_1-wz_1-c)\left(-\bar{a}ct_2^2+t_2|a|^2-t_2|b|^2+t_2|c|^2+bt_2^2-\bar{c}a+\bar{b}-t_2\right)}{(wt_2-1)\left(-ct_1t_2+at_1+bt_2-1\right)\left(-z_1w\bar{c}+z_1\bar{a}+w\bar{b}-1\right)\left(bt_2z_1-ct_2+a-z_1\right)}\end{aligned}$$

正如预期的那样，根据引理 1，我们有

$$P\times\operatorname{proj}\left(g,(B\mathsf{H}_2^2)^\perp\right)=\varphi_1(z_1)+\varphi_2(z_2).$$

其中

$$\begin{aligned}\left(bt_2z_1-ct_2+a-z_1\right)\left(t_1z_1-1\right)\left(-ct_1t_2+at_1+bt_2-1\right)\varphi_1(z_1) = \\ \left(bt_2-1\right)\left(-\bar{a}ct_1t_2+|a|^2t_1-|b|^2t_1+bt_1t_2+\bar{c}b-\bar{a}\right)z_1^2+ \\ \left(\bar{a}c^2t_1t_2^2+\bar{a}bct_2^2-2|a|^2ct_1t_2+2|b|^2ct_1t_2-bct_1t_2^2\right. \\ -2|c|^2bt_2+|a|^2at_1-|b|^2at_1-b^2t_2^2 \\ \left.+\bar{c}ab-\bar{b}ct_1+|c|^2-|a|^2+at_1+2bt_2-1\right)z_1 \\ -\bar{a}c^2t_2^2-\bar{b}c^2t_1t_2+\bar{b}act_1+|c|^2ct_2+|a|^2ct_2+act_1t_2+bct_2^2 \\ -a|c|^2-a^2t_1-abt_2-ct_2+a\end{aligned}$$

$$\varphi_2(z_2)=-\frac{w\left(-\bar{a}ct_2^2+t_2|c|^2+t_2|a|^2-t_2|b|^2+bt_2^2-\bar{c}a+\bar{b}-t_2\right)}{(wt_2-1)\left(-ct_1t_2+at_1+bt_2-1\right)}$$

6. Unwindings

6.1. **第一次展开**。

给定一个多项式序列 P_n，使得 $\sum(1-\alpha(P_n)) = \infty$，令 $B_n = P_n^*/P_n$。设 f为$\mathbf{H}_d^2$中的一个函数。我们通过递归定义两个序列：

$f_0 = f$，且对于 $n \geq 0$，$g_n =$投影 $\left(f_n,\ (B_{n+1}\mathbf{H}_d^2)^\perp\right)$，以及 $f_{n+1} = (f_n - g_n)/B_{n+1}$。

于是我们得到

$$f = g_o + B_1 g_1 + B_1 B_2 g_2 + \cdots + B_1 B_2 \cdots B_n g_n + B_1 B_2 \cdots B_{n+1} f_{n+1}.$$

这是一个正交项之和。由于乘积 $\prod B_n$ 发散，我们得到以下在 H^2 中收敛的正交展开:

$$f = \sum_{n\geq 0} g_n \prod_{1\leq j\leq n} B_j.$$

6.2. **自适应展开**。

考虑 $\mathscr{P}$ 的一个紧子集 $\mathscr{K}$。给定 $f \in \mathsf{H}^2_d$，我们来考虑以下过程,

Set $n = 0$, $f_0 = f$, and $B_0 = 1$,
repeat
{
$P_n := \operatorname{argmin}\{\|\operatorname{proj}(f_n, P^* P^{-1} \mathsf{H}^2_d)\| \ : P \in \mathscr{K}\}$,
$U_n = \operatorname{proj}\left(f_n, (P_n^* P_n^{-1} \mathsf{H}^2_d)^\perp\right)$
$f_{n+1} = f_n - U_n$
$B_{n+1} = B_n P_n^* / P_n$
increment n by 1.
}.

这样我们得到一个由两两正交项组成的级数 $\sum U_n B_n$。$_{n\geq 0}$由于所有多项式都选自一个紧集，乘积 B_n 发散，这意味着 $\bigcap B_n$ $\mathrm{H}^2_d = \{0\}$。由此可得

$$f = \sum_{n\geq 0} U_n B_n.$$

6.3. **较不贪婪展开**。

考虑 $\mathscr{P}_d$的紧子集 $\mathscr{K}$。给定 $f \in \mathsf{H}^2_d$，让我们考虑以下过程,

设 $n = 0$ 和 $B_0 = 1$
重新吃

$$P_n = \operatorname{argmax}\left\{\left|\left\langle f, \frac{\nu(P)}{P} B_n \right\rangle\right| \ : P \in \mathscr{K}\right\}$$

$$a_n = \left\langle f, \frac{\nu(P_n)}{P_n} B_n \right\rangle$$

$$B_{n+1} = B_n \frac{P_n^*}{P_n}$$

increment n by 1.

这样我们得到一个级数 $S = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{B_n}{P_n}$，它在 $\mathbf{H}^2_d$ 中收敛。如果 $\mathscr{K}$ 只包含一个多项式 P，那么这个正交级数不可能表示 f ——这与 $\mathrm{d}^\circ P = 1$ 时一维情形的情况相反——因为空间 $B_n\mathbf{H}^2_d \ominus B_{n+1}\mathbf{H}^2_d$ 并非一维。不过，如果 $\mathscr{K}$ 足够大，我们可以期待这个贪心算法捕获 f 的大部分能量。

最后一条注。 在单位圆盘 $\mathbb{D}$中，解缠绕过程更加精确。事实上，每一步都会移除所有零点。这得益于内外因子分解定理，以及 [12]对该定理的高效实现。

References

[1] Coifman, R. R. 和 Peyri`ere, J.，《相位解缠绕，或哈代空间的不变子空间分解》。《傅里叶分析与应用杂志》25 (2019)，684–695。[2] Coifman, R. R. 和 Steinerberger, S.，《函数的非线性相位解缠绕》。《傅里叶分析与应用杂志》(2016)，1–32。[3] Hoffman, K.，《解析函数的巴拿赫空间》，Prentice-Hall，1962年。[4] Knese, G.，《多圆盘上的有理内函数——综述》，arXiv:2409.14604。[5] Malmquist, F,，《通过一组给定点上的函数值确定一类解析函数》，C.R. 6i`eme Cong. Math. Scand.（哥本哈根，1925年），哥本哈根，（1926年），Gjellerups，253–259。[6] Mi, W.、Qian, T. 和 Wan, F.，《基于竹中–马尔姆奎斯特系统的快速自适应模型降阶方法》，《系统与控制快报》。第61卷，第1期，2012年1月，第223–230页。[7] Nahon, M.，博士论文，耶鲁大学（2000年）。[8] Qian, T.、Ho, I.T.、Leong, I.T. 和 Wang, Y.B.，《将函数自适应分解为非负瞬时频率分量》，《国际小波、多分辨率与信息处理杂志》8 (2010)，第5期，813–833。[9] Rudin, W.：多圆盘中的内函数，《美国数学会通报》73(3)：369–372（1967年5月）。[10] Rudin, W.：多圆盘中的函数论。W. A. Benjamin, Inc.，纽约—阿姆斯特丹（1969年）。[11] Takenaka, S.，《论正交函数及一种新的插值公式》，《日本数学杂志》II (1925)，129–145。[12] Weiss, G. 和 Weiss, M.，《H^p空间理论主要结果的推导》，阿根廷数学联盟杂志，第20卷，第0期，1962年，63–71。

Department of Mathematics, Program in Applied Mathematics, Yale University, New Haven, CT 06510, USA电子邮箱地址: coifman-ronald@yale.edu

Institut de Mathématiques d'Orsay, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France电子邮箱地址：jacques.peyriere@universite-paris-saclay.fr