arXiv:2603.07269v1 [math.AG] 7 Mar 2026

开投影 Richardson 簇与仿射Schubert胞腔的动机陈类

Changjian Su ，Rui Xiong ，以及 Changlong Zhong

Abstract. 开投影 Richardson 簇是完全旗簇中的开 Richardson 簇在投影到部分旗簇的典范投影下的像。我们的主要结果通过将这些类推前或拉回到仿射 Grassmannian 上，比较开投影 Richardson 簇的 Segre 动机陈类（SMC 类）与仿射Schubert胞腔的相应类。主要方法是由 Demazure–Lusztig 算子确定的递归关系。作为这一递归关系的另一项应用，我们建立了 SMC 类的局部化与扭Kazhdan–Lusztig R-多项式之间的联系。在格拉斯曼流形的情形下，开投影 Richardson 簇称为开 positroid 簇。我们给出了这些簇的 SMC 类的组合公式。

1. Introduction

设 G 是一个复连通约化群，具有一个 Borel 子群和一个抛物子群$P \supset B$。开（分别为闭）Richardson 簇定义为 G/B中 Schubert 胞腔（分别为 Schubert 簇）与反Schubert胞腔（分别为反Schubert簇）的交集，而它们在 G/P 中的投影称为开（分别为闭）投影Richardson簇。当G/P 是格拉斯曼流形时，投影Richardson簇也称为正拟阵簇；参见[Pos06、KLS13]。Richardson 簇最初由 [KL80], 引入，其中证明了有限域上开 Richardson 簇的点数由 G的 Weyl 群 W 所对应的 Kazhdan–Lusztig R 多项式给出。此后，Richardson [Ric92] 和 Deodhar [Deo85]对这类簇进行了研究。Knutson、Lam 和 Speyer [KLS14]研究了投影Richardson簇的许多几何性质。投影Richardson簇在全正性的近期进展中发挥着关键作用；参见 [GKL22、BH24] 及其中的参考文献。关于这一主题的精彩综述，尤其是从 Schubert演算角度出发的综述，请参见 [Spe23]。

在关于（投影）Richardson簇及其相关几何与组合结构的诸多研究中，以下性质（及其特殊情形和更一般情形）发挥着核心作用。设 λ 为一个支配余权，其稳定子 $W_\lambda < W$ 确定了一个抛物子群 $P := P_\lambda < G$。设 $t_\lambda \in W_{\mathrm{ext}}$ 为扩张仿射Weyl群中的平移元。设 W^P 为 W/W_P的极小长度代表元集合。在 [HL15], 中证明了存在一个保序嵌入

$$\nu : \mathcal{Q} = \{(u, w) \in W \times W^P \mid u \le w\} \to W t_\lambda W \subset W_{\mathrm{ext}}, \quad (u, w) \mapsto u t_\lambda w^{-1},$$

其中 $\mathcal{Q}$ 是投影Richardson簇的指标集，并按闭包包含关系排序。这一组合性质通过几何方式提升到了 Bruhat图册和 Kazhdan–Lusztig图册 [HKL13]；介绍请参见[Hua19，BH21] 。

沿用 [HL15], 中的构造，可以更详细地陈述该构造，且它与我们的工作更加相关。设 $\mathrm{Gr}_G = G((z))/G[[z]]$ 为仿射 Grassmannian，Fl_G 为仿射旗簇。设 Gr_λ 为元素$G[[z]]$的 $z^{-\lambda}G[[z]]/G[[z]] \in \mathrm{Gr}_G$-轨道，它是 G/P上的一个仿射丛。映射之间有如下图：

$$G/P \xrightarrow{i_\lambda} \mathrm{Gr}_\lambda \xrightarrow{j_\lambda} \mathrm{Gr}_G \xrightarrow{r} \mathrm{Fl}_G\,.$$

这里 i_λ 是仿射丛的零截面， j_λ 是嵌入，而 r 定义如下。设$K \subset G$ 为极大紧子群， $T_{\mathbb{R}} = K \cap T$ 为紧环面。设 LK 与ΩK 为

Date: 2026年3月10日。

分别为环群与基环群，则 r 是该复合

$$\mathrm{Gr}_G \simeq \Omega K \to LK \to LK/T_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{Fl}_G\,.$$

接下来可以考虑由 G/P中的开/闭投影 Richardson 簇确定的各种上同调类和 K 理论类。对于上同调类和 K 理论类， [HL15] 证明了，闭投影Richardson簇的类经由 i_λ 推前后，与反 Schubert 类在 Fl_G 中经由映射 q 的拉回$= r \circ j_\lambda$相一致，另见 [KLS13]。证明利用了对两边限制的显式计算，而 AJS–Billey–Graham 根公式发挥了关键作用。受此结果启发， [FGSX25] 比较了开投影 Richardson 簇的 Segre–MacPherson 类（一种 Chern–Schwartz–MacPherson（CSM）类的变体形式）与 Fl_G中反仿射 Schubert 胞腔的 Segre–MacPherson 类。其证明不同于 [HL15]中的证明。他们没有计算限制公式，而是在两边建立递归公式，以唯一确定有限侧和仿射侧的类。随后利用双射 ν证明这两个递归公式相同。

本文将 [FGSX25] 中的结果推广到了 K理论中的动机 Chern（MC）类情形。尽管本文仍采用归纳法，但由于 Hecke 代数中的二次关系（见下表），论证要复杂得多。例如，递归公式定理3.13 （有限情形）和定理5.2 （仿射情形）各包含四种情形，而 [FGSX25] 中相应的递归公式只有一种情形。

注意，同调中的 Schubert 胞腔的 CSM 类以及 K理论中的 Schubert 胞腔的 MC 类，推广了相应的上同调 Schubert 类和 K理论 Schubert 类，并且与 Springer 解消的 Maulik–Okounkov 稳定基密切相关 T^*G/B [MO19、AMSS23、AMSS24b、FRW21、Kon22]。统一这四类对象及其相应递归公式的一种简便方法是使用下表:

	经……置换	二次关系
$H_T(G/B)$ 中的 Schubert 类	上同调除差算子 ∂_i	$\partial_i^2 = 0$
$K_T(G/B)$ 中的 Schubert 类	K理论除差算子 π_i	$\pi_i^2 = \pi_i$
$H_T(G/B)$中的 CSM 类	上同调 Demazure–Lusztig 算子 T_i	$T_i^2 = 1$
$K_T(G/B)$中的 MC 类$[[y]]$	Demazure–Lusztig 算子 $\mathcal{T}_i$	$\mathcal{T}_i^2 = (-y-1)\mathcal{T}_i - y$

基于这一观察，本文的方法可以统一处理全部四种情形。

现在我们可以陈述本文的主要结果。设 $(u,w) \in W \times W^P$with $u \le w$, and $f := ut_\lambda w^{-1} \in W_{\mathrm{ext}}$。设 Π_f be the projection in G/P of the open Richardson 簇 $Y(u)^\circ \cap X(w)^\circ \subset G/B$ where$Y(u)^\circ$ and $X(w)^\circ$ 分别为相反 Schubert 胞腔和 Schubert 胞腔。设 $\mathring{\Sigma}^f$ 为 Fl_G 中的相反 Schubert 胞腔。我们可以为 $\mathring{\Pi}_f$ and $\mathring{\Sigma}^f$ 定义 Segre 动机 Chern（SMC）类（定义 3.5、3.12 和 4.3）。

定理 1.1 (定理5.4)。 设 $\mathcal{N}$ 为 G/P 在 Gr_λ中的法丛。那么

$$i_{\lambda *}\left(\frac{\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)}{\lambda_y(\mathcal{N}^*)}\right) = q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right) \in K_T(\mathrm{Gr}_\lambda)[[y]].$$

如上所述，我们使用 Demazure–Lusztig 算子 $\mathcal{T}_i$ 来推导两边之间的归纳关系。在此过程中，我们使用了所谓的 $K_T(G/P)$ 和K_T(Gr) 上的左 Demazure–Lusztig 作用。该作用曾在 [Bri97、Knu03、Tym09、LZZ20、MNS22]中得到研究。

Kazhdan–Lusztig R 多项式与反Schubert胞腔的 SMC 类有关，见定理 2.5。在 [GLTW24], 中，作者引入了扭曲 R 多项式。在第 6节中，作为 SMC 类递归关系的另一项应用，我们证明，反 Schubert胞腔的 SMC 类的局部化的某些极限给出了这些扭曲 R 多项式。最后，对于格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ ，我们通过管线梦给出了开 positroid 簇的 SMC 类的组合公式。

致谢。 我们感谢 Thomas Lam、J¨org Sch¨urmann 和 David Speyer 进行的有益讨论。C.S. 获得国家重点研发计划（编号：2024YFA1014700）的资助。

R.X. 感谢加拿大 NSERC发现基金 RGPIN-2022-03060 的部分支持。C.Z. 获得 Simons基金会数学家旅行支持计划 TSM-00013828 的部分支持。

2. Preliminaries

本节回顾 Kazhdan-Lusztig R-多项式的定义，以及旗簇中 Schubert 胞腔的动机 Chern 类的一些性质。

2.1. **Kazhdan-Lusztig R-多项式**。 在本小节中，我们用 W 表示一个 Coxeter 群，其长度函数为 $\ell(\cdot)$，Bruhat序为 $\leq$，例如有限Weyl群或仿射Weyl群。令 $H(W)$ 为多项式环 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 上的 Hecke 代数。它以 $\{T_w \mid w \in W\}$ 为基，乘法定义为：对于任意简单反射 s，$(T_s+1)(T_s-q) = 0$，并且 $T_w T_v = T_{wv}$ if $\ell(wv) = \ell(w)+\ell(v)$。定义 $h \mapsto h$ 在 $H(w)$ 上的对合如下：

$$\overline{\sum a_w T_w} = \sum \bar{a}_w T_{w^{-1}}^{-1},$$

其中 $\bar{a}_w$ 是作用在 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 上的对合，由 $\bar{q} = q^{-1}$ 定义。对于任意 $u,\ w \in W$ Kazhdan-Lusztig R多项式 $R_{u,\ w}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 由下式定义（参见 [KL79]）

$$T_{w^{-1}}^{-1} = \sum_{u \leq w} \overline{R_{u,w}(q)} q^{-\ell(u)} T_u, \tag{1}$$

并且令 $R_{u,\ w}(q) = 0$ 当 $u \not\leq w$ 时。根据定义，我们可以得到以下递归公式：

$$R_{u,w} = \begin{cases} R_{su,sw} & \text{if } su < u \text{ and } sw < w; \\ (q-1)R_{su,w} + qR_{su,sw} & \text{if } su > u \text{ and } sw < w. \end{cases} \tag{2}$$

如果 W 是有限的，且 w_0 是最长元，

$$R_{w^{-1}w_0, u^{-1}w_0}(q) = R_{u,w}(q) \tag{3}$$

对所有 $u,\ w \in W$。

2.2. **动机陈类**。 我们遵循 [BSY10]，回顾动机陈类的定义。以下设 X 为一个拟射影复代数簇，其上有 T的作用。相对动机Grothendieck群 $K_0^T(\mathrm{var}\ /X)$ 是定义在 X 上的簇的自由阿贝尔群对由符号 $[f:\ Z \to X]$ 生成的群取商所得，其中 Z 是一个拟射影 T-簇，且 $f:\ Z \to X$ 是一个 T-等变态射，并对加性关系取商

$$[f: Z \to X] = [f: U \to X] + [f: Z \setminus U \to X]$$

对于 $U \subseteq Z$ 一个开不变子簇。对于任意拟射影T-簇之间的等变态射 $g: X \to Y$，存在定义良好的前推 $g_!: K_0^T(\mathrm{var}\ /X) \to K_0^T(\mathrm{var}\ /Y)$，由复合给出。

令 $K^T(X)$ 为 T-等变 K-同调群，即 X 的 T-等变相干层的格罗滕迪克群，参见 X，见 [CG10]。令 y 为一个形式变量。该定理在非等变情形下由 Brasselet、Sch¨urmann 和 Yokura [BSY10，定理 2，证明。1]在等变情形下，论证需要作一些小的修改——另见 [FRW21、AMSS24b]。

定理 2.1。 [AMSS24b，定理 4。2] 设 X 为一个拟射影、非奇异的复代数簇，并带有环面 T的作用。存在唯一的自然变换 $\mathrm{MC}_y: K_0^T(\mathrm{var}\ /X) \to K^T(X)[y]$ 满足以下性质：

(1) 它关于经由 T-等变、非奇异拟射影簇之间的适当态射所作的前推具有函子性。*(2)* 它满足规范化条件

$$\mathrm{MC}_y[id_X: X \to X] = \lambda_y(T^*X) := \sum y^i [\wedge^i T^*X] \in K^T(X)[y].$$

设 X 是一个拟射影复流形。回顾塞尔对偶函子 $\mathcal{D}(-) := \mathrm{RHom}(-, \omega_X^\bullet)$ 在 $K^T(X)$ 上的定义，其中 $\omega_X^\bullet = [\wedge^{\dim X} T_X^*][\dim\ X]$ 是典范复形。我们通过 $\mathcal{D}(y^i) = y^{-i}$ 将 $\mathcal{D}$ 扩展到 $K^T(X)[y^{\pm 1}]$。

定义 2.2。 (1) 若 $Y \subseteq X$ 是一个 T-不变子簇，我们称

$$\mathrm{MC}_y(Y) := \mathrm{MC}_y[Y \hookrightarrow X] \in K^T(X)[y]$$

Y的动机陈类（MC 类），并称

$$\mathrm{SMC}_y(Y) := \frac{\mathrm{MC}_y(Y)}{\lambda_y(T^*X)} \in K^T(X)[[y]]$$

Y的 Segre 动机陈类（SMC 类）。

(2) 设 $\Omega \subset X$ 是 X中的纯维 T-稳定子簇。令

$$\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\Omega) := (-y)^{\dim \Omega} \frac{\mathcal{D}(\mathrm{MC}_y(\Omega))}{\lambda_y(T^*_X)} \in K^T(X)[[y]].$$

注 2.3. 这里我们遵循 [AMSS24a] 中的约定。注意， $MC_y(\Omega)$ 记作 $\mathrm{SMC}_y(\Omega)$，见 [MNS22，MS22]。

2.3. **Schubert 胞腔的动机陈类**。设 G是一个复连通约化群，其 Borel 子群为 B，对偶 Borel 子群为 B^-。设 $T = B \cap B^-$ 为极大环面，W 为 Weyl 群， $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ 为单根集。现在假设 $X = G/B$ 是完全旗簇。由于 X 是光滑的， K-同调群 $K^T(G/B)$可以与K-上同调群 $K_T(G/B)$等同。对于任意 $w \in W$，设 $X(w)^\circ := BwB/B$和 $Y(w)^\circ := B^-wB/B$为 Schubert 胞腔，其中 B^- 是对偶 Borel 子群。设 $X(w) := BwB/B$ 和 $Y(w) := B^-wB/B$为 Schubert簇。对于任意 $\mathcal{F} \in K_T(X)$，令

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \int_X \mathcal{F} := \sum_i (-1)^i H^i(X, \mathcal{F}) \in K_T(\mathrm{pt}) = R(T),$$

其中 $R(T)$是 T的表示环。特别地，对于 $\mathcal{E}$， $\mathcal{F} \in K_T(X)$，我们有如下非退化的 Poincar´e 配对

$$\langle -, - \rangle : K_T(X) \otimes K_T(X) \to K_T(\mathrm{pt}); \quad \langle \mathcal{E}, \mathcal{F} \rangle := \int_X \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \chi(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}).$$

回忆一下，仿射 Hecke 代数在 $K_T(G/B)[y^{\pm 1}]$上有一个作用，见 [Lus85, MNS22]。左乘作用在 G/B 上诱导出 $K_T(G/B)$上的一个 $W = N_G(T)/T$作用。对于任意 $w \in W$，我们用 w^L 表示此作用。这些算子不是 $K_T(\mathrm{pt})[y]$-线性的，并且它们通过 W在 T上的自然作用作用于基环 $K_T(\mathrm{pt})[y]$。于是我们可以在 $K_T(G/B)[y^{\pm 1}]$上定义左 Demazure-Lusztig（DL）算子：

$$\mathcal{T}_i^L := \frac{1 + ye^{-\alpha_i}}{1 - e^{-\alpha_i}} s_i^L - \frac{1 + y}{1 - e^{-\alpha_i}}; \quad \mathcal{T}_i^{L,\vee} := \frac{1 + ye^{\alpha_i}}{1 - e^{\alpha_i}} s_i^L - \frac{1 + y}{1 - e^{\alpha_i}}. \tag{4}$$

这里， α_i 是一个单根，而 e^{α_i} 在基环 $K_T(\mathrm{pt})$中作用为乘以 e^{α_i}。算子 $\mathcal{T}_i^L$和 $\mathcal{T}^{L,\vee}_i$ 满足二次关系 $(\mathcal{T}_i^L + 1)(\mathcal{T}_i^L + y) = 0$（ $\mathcal{T}^{L,\vee}_i$ 也满足同样的关系）以及辫关系，见 [MNS22]。因此，对于任意 $w \in W$， T_w^L 和 $T^{L,\vee}_w$ 均定义良好。对于任意单根 α_i， $-w_0\alpha_i$ 也是单根。我们有

$$w_0^L \mathcal{T}^L_{-w_0\alpha_i} w_0^L = \mathcal{T}^{L,\vee}_{\alpha_i}. \tag{5}$$

还有一种作用由右 DL 算子给出。对于任意特征 $\mu \in X^*(T)$，记 $\mathcal{L}_\mu := G \times_B \mathbb{C}_\mu$为 G/B上的线丛，其中 $\mathbb{C}_\mu$ 是 $B \to T \to GL_1(\mathbb{C}_\mu)$的一维表示。对于任意单根 α_i，记 P_i 为相应的极小抛物子群。记 $\pi_i : G/B \to G/P_i$ 为自然投影。于是我们可以在 $K_T(G/B)[y^{\pm 1}]$上定义以下右 Demazure-Lusztig （DL）算子：

$$\mathcal{T}_i^R := (\mathrm{id} + y\mathcal{L}_{\alpha_i})\pi_i^*\pi_{i*} - \mathrm{id}; \quad \mathcal{T}_i^{R,\vee} := \pi_i^*\pi_{i*}(\mathrm{id} + y\mathcal{L}_{\alpha_i}) - \mathrm{id}. \tag{6}$$

这里， $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ 通过与线丛 $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ 作张量积来作用。文献*loc. cit.* 证明，这些算子$\{\mathcal{T}_i^R \mid i \in I\}$（分别为 $\{\mathcal{T}_i^{R,\vee} \mid i \in I\}$）满足二次关系 $(\mathcal{T}_i^R + 1)(\mathcal{T}_i^R + y) = 0$（分别为 $(\mathcal{T}^{R,\vee}_i + 1)(\mathcal{T}^{R,\vee}_i + y) = 0$）和辫群关系。因此，对于任意 $w \in W$、 $\mathcal{T}_w^R$和 $\mathcal{T}^{R,\vee}_w$都有良好定义。这些算子是 $K_T(\mathrm{pt})[y]$-线性的。

旗簇 G/B上的环面 T-不动点为 $\{\dot{w}B \mid w \in W\}$，其中 $\dot{w}$是 $w \in W$到G的一个提升。对于任意 $\gamma \in K_T(G/B)$ 和 $w \in W$，我们用 $\gamma|_w \in K_T(\mathrm{pt})$ 表示将 γ拉回到不动点$\dot{w}B$所得的结果。对于任意单根 α_i，BGG算子 $\pi_i^*\pi_{i*}$满足

$$\pi_i^*\pi_{i*}(\gamma)|_w = \frac{\gamma|_w - e^{w\alpha_i}\gamma|_{ws_i}}{1 - e^{w\alpha_i}}.$$

命题 2.4. 设 $w \in W$，且 s_i 是一个简单反射。我们有以下递归关系：

$$\mathcal{T}_i^R(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ)) = \begin{cases} \mathrm{MC}_y(X(ws_i)^\circ) & \text{if } ws_i > w; \\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) - y\,\mathrm{MC}_y(X(ws_i)^\circ) & \text{if } ws_i < w. \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathcal{T}_i^L(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ)) = \begin{cases} \mathrm{MC}_y(X(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw > w; \\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) - y\,\mathrm{MC}_y(X(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw < w. \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathcal{T}_i^{R,\vee}(\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ)) = \begin{cases} \mathrm{SMC}_y(Y(ws_i)^\circ) & \text{if } ws_i < w; \\ -(1+y)\,\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ) - y\,\mathrm{SMC}_y(Y(ws_i)^\circ) & \text{if } ws_i > w. \end{cases} \tag{9}$$

$$\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ)) = \begin{cases} -(1+y)\,\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ) - y\cdot\mathrm{SMC}_y(Y(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw > w; \\ \mathrm{SMC}_y(Y(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw < w. \end{cases} \tag{10}$$

特别地，我们有以下关系以及对偶性：

$$\widetilde{\mathrm{MC}}_y(Y(w)^\circ) = \frac{(-y)^{\dim G/B - \ell(w)}}{\prod_{\alpha>0}(1+ye^{-\alpha})}(\mathcal{T}_{w_0w}^{R,\vee})^{-1}([\mathcal{O}_{Y(w_0)}]), \tag{11}$$

$$\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ) = \frac{1}{\prod_{\alpha>0}(1+ye^{-\alpha})}\mathcal{T}_{(w_0w)^{-1}}^{R,\vee}([\mathcal{O}_{Y(w_0)}]). \tag{12}$$

$$\langle \mathrm{MC}_y(X(w)^\circ), \widetilde{\mathrm{MC}}_y(Y(u)^\circ)\rangle = \delta_{w,u},$$

证明。 (7), (8) 和 (11) 以及对偶性已在 [MNS22], 中证明，而 (9) 和 (12) 已在 [MS22]中证明。现在我们证明 (10)。首先，我们有以下公式（见 [MNS22]）：

$$w_0^L(\mathrm{MC}(Y(w)^\circ)) = \mathrm{MC}_y(X(w_0w)^\circ).$$

左算子 T_w^L与乘以 $\lambda_y(T^*(G/B)$ 交换。因此，根据 SMC 类的定义、(5) 和定理 2.4，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ)) =& w_0^L\mathcal{T}_{-w_0\alpha_i}^L w_0^L(\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ)) \\
=& \frac{1}{\lambda_y(T^*(G/B))} w_0^L\mathcal{T}_{-w_0\alpha_i}^L w_0^L(\mathrm{MC}(Y(w)^\circ)) \\
=& \frac{1}{\lambda_y(T^*(G/B))} w_0^L\mathcal{T}_{-w_0\alpha_i}^L(\mathrm{MC}(X(w_0w)^\circ)) \\
=& \frac{1}{\lambda_y(T^*(G/B))} \begin{cases} -(1+y)w_0^L(\mathrm{MC}(X(w_0w)^\circ)) - yw_0^L(\mathrm{MC}(X(w_0s_iw)^\circ)) & \text{若 } s_iw > w; \\ w_0^L(\mathrm{MC}(X(w_0s_iw)^\circ)) & \text{若 } s_iw < w. \end{cases} \\
=& \begin{cases} -(1+y)\,\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ) - y\,\mathrm{SMC}_y(Y(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw > w; \\ \mathrm{SMC}_y(Y(s_iw)^\circ) & \text{if } s_iw < w. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

利用 Kazhdan-Lusztig R多项式，我们得到

命题 2.5。对于任意 $w \in W$,

$$\mathrm{SMC}_y(Y(w)^\circ) = \sum_{u \geq w} R_{w,u}(-y)\cdot\widetilde{\mathrm{MC}}_y(Y(u)^\circ).$$

证明。 由于 $\{\mathcal{T}_w^{R,\vee} \mid w \in W\}$ 满足 Hecke 代数中关于 W 和 $q=-y$的关系，因此由（1）和（3）可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{w^{-1}w_0}^{R,\vee} &= \sum_{u\geq w}(-y)^{\ell(u^{-1}w_0)}R_{u^{-1}w_0,w^{-1}w_0}(-y)\cdot(\mathcal{T}_{w_0u}^{R,\vee})^{-1}\\ &= \sum_{u\geq w}(-y)^{\dim G/B-\ell(u)}R_{w,u}(-y)\cdot(\mathcal{T}_{w_0u}^{R,\vee})^{-1}.\end{aligned}$$

将其应用于类 $[\mathcal{O}_{Y(w_0)}]$, 并利用定理 2.4，即可得到所需等式。 □

3. Recursion for the SMC classes in the finite case

本节中，我们研究部分旗簇中开投影 Richardson 簇的 Segre 动机陈类。

3.1. 开 Richardson 簇的 MC 类。 回顾一下，对于任意 $u\leq w$，完全旗簇中的开 Richardson 簇为 $\mathring{R}_{u,w} := X(w)^\circ \cap Y(u)^\circ \subset G/B$。我们令 $\mathring{R}_{u,w}=\varnothing$，若 $u\not\leq w$。

定义 3.1。 我们将开 Richardson 簇 $R_{u,w}$ 的 MC 类定义为

$$\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}) := \mathrm{MC}_y(X(w)^\circ)\otimes \mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)\in K_T(G/B)[[y]].$$

注 3.2。 根据 Schürmann 的一项未发表结果，它是 [Sch17]，上述等式右边等于 $R_{u,w}$ 在整个旗簇 G/B中的 MC 类。因此，这种记法没有歧义。

回忆一下 DL 算子 $\mathcal{T}_i^L, \mathcal{T}_{\cdot i}^{L\ \vee}$ 见式（4）。

引理 3.3。 对于任意 $\varphi,\psi\in K_T^*(G/B)[[y]]$，有

$$(1+y)s_i^L(\varphi\cdot\psi)+(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\varphi\cdot\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\psi)) = (1+y)\varphi\cdot\psi+(1-e^{-\alpha_i})\cdot(\mathcal{T}_i^L(\varphi)\cdot\psi).$$

证明。 根据 $\mathcal{T}_i^L$和 $\mathcal{T}_{\cdot i}^{L\ \vee}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i^L(\varphi)\cdot\psi &= \frac{1+ye^{-\alpha_i}}{1-e^{-\alpha_i}}\psi\cdot s_i^L(\varphi)-\frac{1+y}{1-e^{-\alpha_i}}\varphi\cdot\psi,\\ \varphi\cdot\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\psi) &= \frac{1+ye^{\alpha_i}}{1-e^{\alpha_i}}\varphi\cdot s_i^L(\psi)-\frac{1+y}{1-e^{\alpha_i}}\varphi\cdot\psi.\end{aligned}$$

比较这两个恒等式即可得出该引理。 □

将该引理应用于 $\varphi=\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ)$ 和 $\psi=\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)$，并利用定理 2.4，得到

命题 3.4. 对于任意 u、$w\in W$ 和单根 α_i，我们有

(1) 若 $s_iw>w$ 且 $s_iu>u$,

$$\begin{aligned}&(1+y)e^{-\alpha_i}s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}))-(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w})\\ =&y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{s_iu,w}))+(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,s_iw}).\end{aligned}$$

(2) 若 $s_iw>w$ 且 $s_iu<u$,

$$\begin{aligned}&(1+y)s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}))-(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w})\\ =&(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,s_iw})-(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{s_iu,w})).\end{aligned}$$

(3) 若 $s_iw<w$ 且 $s_iu>u$,

$$\begin{aligned}&(1+y)e^{-\alpha_i}(s_i^L-id)(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}))\\ =&y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{s_iu,w}))-y(1-e^{-\alpha_i})\,\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,s_iw}).\end{aligned}$$

(4) 如果 $s_iw<w$ 和 $s_iu<u$,

$$\begin{aligned}&(1+y)(s_i^L-e^{-\alpha_i})(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}))\\ =&-(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{s_iu,w}))-y(1-e^{-\alpha_i})\,\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,s_iw}).\end{aligned}$$

3.2. **开投影 Richardson 簇的 MC 类。** 现在设 P 是包含 Borel 子群 B的抛物子群，并设 $\pi: G/B \to G/P$ 是自然投影。设 $W_P \subset W$ 是由 P确定的 Weyl 群，并设 W^P是陪集W/W_P中的极小长度代表元集合。

定义 3.5. 对于任意 $u \in W$， $w \in W^P$，
(1) 开投影 Richardson 簇定义为 $\mathring{\Pi}_{u,\ w} = \pi(\mathring{R}_{u,\ w})$; (2) $\mathring{\Pi}_{u,\ w}$ 的动机陈类定义为

$$\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) := \pi_* \,\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}).$$

注 3.6. 根据 MC$_y$ 的函子性以及定理 3.2，类 π_*MC$_y(\mathring{R}_{u,\ w})$ 与通常的$\Pi_{u,\ w}$ 动机陈类一致，前提是我们假设 Sch¨urmann 的 K 理论交公式。此外，$\mathring{\Pi}_{u,\ w} = \varnothing$ 如果 $u \not\leq w$。

回顾式（ $\mathcal{T}_j^R$， $\mathcal{T}^{R,\ j\ \vee}$ 中的 Demazure–Lusztig 算子 6）。

引理 3.7. 对于任意简单反射 $s_j \in W_P$，以及 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in K_T(G/B)[y]$，我们有

$$\pi_*(\mathcal{T}_j^R(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}) = \pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{T}_j^{R,\vee}(\mathcal{G})).$$

证明。 回忆一下，π_j是从 G/B到 G/P_j的自然投影。由于 $s_j \in W_P$, $P_j \subset P$。令 f: $G/P_j \to G/P$为自然投影。于是 $\pi = f \circ \pi_j$。因此，根据投影公式，我们得到

$$\begin{aligned}\pi_*(\pi_j^*\pi_{j*}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}) =& f_*\pi_{j*}(\pi_j^*\pi_{j*}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{G})\\ =& f_*(\pi_{j*}(\mathcal{F}) \otimes \pi_{j*}(\mathcal{G}))\\ =& f_*\pi_{j*}(\mathcal{F} \otimes \pi_j^*\pi_{j*}(\mathcal{G}))\\ =& \pi_*(\mathcal{F} \otimes \pi_j^*\pi_{j*}(\mathcal{G})).\end{aligned}$$

由此以及 $\mathcal{T}_j^R$、 $\mathcal{T}^{R,\ j\ \vee}$ 的定义，便可得出该引理。 □

利用该引理，我们得到以下公式。

推论 3.8。 对于任意 $u \in W$, $w \in W^P$, $s_j \in W_P$，有

$$\pi_*(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,ws_j})) = \begin{cases}\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) & \text{if } us_j < u;\\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) - y\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) & \text{if } us_j > u.\end{cases}$$

证明。 由于 $w \in W^P$且 $s_j \in W_P$， $ws_j > w$。根据开放 Richardson 簇和开投影 Richardson 簇的 MC 类定义、定理 3.7以及定理 2.4(4)，我们得到

$$\begin{aligned}&\pi_*(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,ws_j}))\\ =&\pi_*\Big(\mathrm{MC}_y(X(ws_j)^\circ) \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)\Big)\\ =&\pi_*\Big(\mathcal{T}_j^R(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ)) \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)\Big)\\ =&\pi_*\Big(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) \otimes \mathcal{T}_j^{R,\vee}(\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ))\Big)\\ =&\begin{cases}\pi_*\Big(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(us_j)^\circ)\Big) & \text{if } us_j < u;\\ -(1+y)\pi_*\Big(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)\Big) - y\pi_*\Big(\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(us_j)^\circ)\Big) & \text{if } us_j > u\end{cases}\\ =&\begin{cases}\pi_*(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{us_j,w})) & \text{if } us_j < u;\\ -(1+y)\pi_*(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w})) - y\pi_*(\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{us_j,w})) & \text{if } us_j > u\end{cases}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) & \text{if } us_j < u; \\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) - y\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) & \text{if } us_j > u. \end{cases}$$

□

我们还需要 Deodhar 的以下结果。

引理 3.9。 [Deo87，引理 2。1] 对于任意单根 α_i 和 $w \in W^P$，以下情形恰有一种成立：

(1) $s_i w < w$，此时 $s_i w \in W^P$；*(2)* $s_i w > w$ 且 $s_i w \in W^P$；
(3) $s_i w > w$ 且 $s_i w = w s_j$，其中某个简单反射为 $s_j \in W_P$。

由于 G 作用于 G/P，我们也可以定义 Weyl 群 W 在 $K_T(G/P)[y]$上的作用，记作 w^L。由于投影 π 与 G作用相容， w^L 与推前 π_*相容。将 π_* 应用于定理 3.4中的等式，并利用定理 3.9 和定理 3.8，我们得到开投影 Richardson 簇的 MC 类的如下递归公式。

推论 3.10. 对任意 $u \in W$、 $w \in W^P$ 以及单根 α_i，我们有

(1) 若 $s_i w > w$、 $s_i w \in W^P$ 以及 $s_i u > u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)e^{-\alpha_i} s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) - (1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) \\ =&y(1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) + (1-e^{-\alpha_i}) \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,s_i w}). \end{aligned}$$

(2) 若 $s_i w > w$、 $s_i w = w s_j$ 对某个简单反射 $s_j \in W$、 $s_i u > u$ 以及 $us_j < u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)e^{-\alpha_i} s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) - (1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) \\ =&y(1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) + (1-e^{-\alpha_i}) \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}). \end{aligned}$$

(3) 若 $s_i w > w$、 $s_i w = w s_j$ 对某个简单反射 $s_j \in W$、 $s_i u > u$ 以及 $us_j > u$

$$\begin{aligned} &(1+y)e^{-\alpha_i}(s_i^L - id)(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) \\ =&y(1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) - y(1-e^{-\alpha_i} \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}). \end{aligned}$$

(4) 若 $s_i w > w$、 $s_i w \in W^P$ 以及 $s_i u < u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) - (1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) \\ =&(1-e^{-\alpha_i}) \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,s_i w}) - (1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})). \end{aligned}$$

(5) 若 $s_i w > w$、 $s_i w = w s_j$ 对某个简单反射 $s_j \in W_P$、 $s_i u < u$ 以及 $us_j < u$ ，

$$\begin{aligned} &(1+y)s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) - (1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) \\ =&(1-e^{-\alpha_i}) \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) - (1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) \end{aligned}$$

(6) 若 $s_i w > w$, $s_i w = w s_j$ 对于某个简单反射 $s_j \in W_P$, $s_i u < u$，且 $us_j > u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) - (1+y)e^{-\alpha_i}\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w}) \\ =&-y(1-e^{-\alpha_i}) \cdot \mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{us_j,w}) - (1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})). \end{aligned}$$

(7) 若 $s_i w < w$ 且 $s_i u > u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)e^{-\alpha_i}(s_i^L - id)(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) \\ =&y(1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) - y(1-e^{-\alpha_i})\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,s_i w}). \end{aligned}$$

(8) 如果 $s_i w < w$ 和 $s_i u < u$，

$$\begin{aligned} &(1+y)(s_i^L - e^{-\alpha_i})(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,w})) \\ =&-(1-e^{-\alpha_i}) \cdot s_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i u,w})) - y(1-e^{-\alpha_i})\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{u,s_i w}). \end{aligned}$$

现在，让我们用扩张仿射Weyl群 $W_{\mathrm{ext}} := W \ltimes X_*(T)$来改写递归，其中 $X_*(T)$是余特征标格。本节余下部分中，令 λ 为主余权，其稳定子为 W_P。对于任意 $u,\ w \in W$，令

$$f^{\lambda}_{u,w} := u t_\lambda w^{-1} \in W_{\mathrm{ext}}.$$

我们记 $\mathcal{B}^+ = \{f^{\lambda}_{u,w} \mid u \in W, w \in W^P\}$。由 [HL15], 存在一个双射

$$W \times W^P \to \mathcal{B}^+, \quad (u,w) \mapsto f^{\lambda}_{u,w}.$$

此外，对于任意 $w \in W^P$， $t_\lambda w^{-1}$ 是右陪集 $W\cdot t_\lambda w^{-1} \subset W_{\mathrm{ext}}$ 中的极小长度代表元。特别地，对于任意 $(u,\ w) \in W \times W^P$，

$$\ell(u t_\lambda w^{-1}) = \ell(u) + \ell(t_\lambda) - \ell(w). \tag{13}$$

利用这些结果，很容易得到

Lem引理 3.11。 固定 $u \in W$、 $w \in W^P$，并令 $f = u t_\lambda w^{-1}$。对于任意单根 α_i，有

(1) $s_i f < f \Leftrightarrow s_i u < u$。*(2)* $s_i f > f \Leftrightarrow s_i u > u$。*(3)* $f s_i < f \Leftrightarrow w < s_i w \in W^P$，或对于某个简单反射 $s_j \in W_P$ 和 $u s_j < u,\ s_i w = w s_j$。*(4)* $f s_i > f \Leftrightarrow s_i w < w$，或对于某个简单反射 $s_j \in W_P$ 和 $u s_j > u,\ s_i w = w s_j$。

此外，如果对于某个简单反射 $s_j \in W_P,\ s_i w = w s_j$，那么 $u s_j t_\lambda w^{-1} = u t_\lambda (s_i w)^{-1} = f s_i$。

定义 3.12。 对于 $u \in W, w \in W^P$，记 $\mathring{\Pi}_{f^{\lambda}_{u,w}} = \mathring{\Pi}_{u,w} \subset G/P$为开放射影 Richardson 簇。定义 $\Pi_{f^{\lambda}_{u,w}}$ 的 SMC 类如下：

$$\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{f^{\lambda}_{u,w}}) := \frac{\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_{f^{\lambda}_{u,w}})}{\lambda_y(T^*(G/P))} \in K_T(G/P)[[y]].$$

由于类 $\lambda_y(T^*(G/P))$ 是 G-等变的，因此在任意 w^L 作用下 $w \in W$保持不变。因此，利用定理 3.11，我们可以将定理 3.10 改写如下。

定理 3.13。 假设对于某个 $u \in W, w \in W^P$，有 $f = f^{\lambda}_{u,w}$。对于任意单根 α_i，有 *(1)* 如果 $s_i f < f$且 $f s_i < f$，那么

$$\begin{aligned}&(1+y)\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)) - (1+y)\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)\\ =&(1-e^{-\alpha_i})\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{fs_i}) - (1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i f})).\end{aligned}$$

(2) 若 $s_i f < f$且 $f s_i > f$，则

$$\begin{aligned}&(1+y)\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)) - (1+y)e^{-\alpha_i}\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)\\ =&-(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i f})) - y(1-e^{-\alpha_i})\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{fs_i}).\end{aligned}$$

(3) 若 $s_i f > f$且 $f s_i < f$，则

$$\begin{aligned}&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)) - (1+y)\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)\\ =&y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i f})) + (1-e^{-\alpha_i})\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{fs_i}).\end{aligned}$$

(4) 若 $s_i f > f$且 $f s_i > f$，则

$$\begin{aligned}&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)) - (1+y)e^{-\alpha_i}\cdot (\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f))\\ =&y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i f})) - y(1-e^{-\alpha_i})\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{fs_i}).\end{aligned}$$

证明。 我们只证明第一个，其余的可以类似地验证。由定理 3.11，情形 $s_i f < f$ 和 $f s_i > f$ 对应于定理 3.10中的情形 (4) 和 (5)，二者给出相同的递归：

$$\begin{aligned}&(1+y)\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)) - (1+y)\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)\\ =&(1-e^{-\alpha_i})\cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{fs_i}) - (1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{s_i f})).\end{aligned}$$

□

4. SMC classes in the affine flag variety

本节中，我们研究仿射旗簇中的动机陈类。

4.1. 仿射旗簇。 令 $X_*(T)$ 为 T 的余特征标格，并令

$$W_{\mathrm{ext}} := W \ltimes X_*(T)$$

为扩张仿射Weyl群。对于余特征标 $\lambda \in X_*(T)$，我们用 t_λ 表示 W_{ext} 中对应的元素。注意，在 W_{ext} 中，我们有

$$wt_\lambda w^{-1} = t_{w\lambda}, \qquad w \in W, \lambda \in X_*(T).$$

将余根格记为 $Q^\vee \subseteq X_*(T)$。已知子群 $W_{\mathrm{aff}} := W \ltimes Q^\vee$（称为仿射Weyl群）是相应仿射 Dynkin 图的 Coxeter群，其生成元为

$$s_i \in W\,(i \in I), \quad \text{and} \quad s_0 = t_{\theta^\vee} s_\theta,$$

其中 θ 是最高根。令 R 为根集，正根（分别为负根）记作 R^+（分别为 R^-）。对于任意 $\alpha \in R$，我们用 $\alpha > 0$ 表示 $\alpha \in R^+$。W_{aff} 上的长度函数可扩展到 W_{ext}:

$$\ell(wt_\lambda) = \sum_{\alpha>0, w\alpha>0} \big|\langle \alpha, \lambda\rangle\big| + \sum_{\alpha>0, w\alpha<0} \big|\langle \alpha, \lambda\rangle + 1\big|.$$

设 $\Omega \subset W_{\mathrm{ext}}$ 为长度为 0 的元素集合。那么 $W_{\mathrm{ext}} = W_{\mathrm{aff}} \rtimes \Omega$，并且我们还可以将 W_{aff} 上的 Bruhat 序 W_{ext} 扩展到 $w\gamma \le w'\gamma'$ 当且仅当 $w \le w'$ 且 $\gamma = \gamma'$，其中 $w,\ w' \in W_{\mathrm{aff}}$且 $\gamma,\ \gamma' \in \Omega$。借助这个长度函数和 Bruhat 序，第 2.1 节中的所有构造都可以扩展到 W_{ext}。

令 $\mathbb{C}[[z]]$（分别为 $\mathbb{C}((z)) := \mathbb{C}[[z]][z^{-1}]$）为形式幂级数环（分别为形式洛朗级数环），并令 $G[[z]]$（分别为 $G((z))$）为 $\mathbb{C}[[z]]$-点（分别为 $\mathbb{C}((z))$-点）的 G。存在一个在 $z = 0$ 处取值的映射，从 $G[[z]]$ 到 G；令 $\mathcal{I}$（分别为 $\mathcal{I}^-$）为 Borel 子群 B（分别为对偶 Borel 子群 B^-）的逆像。那么仿射旗簇为

$$\mathrm{Fl}_G = G(\!(z)\!)/\mathcal{I},$$

其 T-不动点 $(\mathrm{Fl}_G)^T$可按如下方式与 W_{ext}对应。任意余特征 $\lambda \in X_*(T)$ 定义一个态射 $\mathbb{C}((z))^* \to T((z)) \subset G((z))$，我们用 $z^\lambda \in G((z))$ 表示 z 的像。对于任意 $w \in W$，令 $\dot{w}$ 表示它在 $G[[z]]$ 中的一个提升。于是，对每个 $wt_\lambda \in W_{\mathrm{ext}}$，$\mathrm{Fl}_G$ 中对应的不动点为$\dot{w}z^{-\lambda}\mathcal{I} \in \mathrm{Fl}_G$，在整篇论文中将简记为 wt_λ。令 $\mathring{\Sigma}_{wt_\lambda} := \mathcal{I}\dot{w}z^{-\lambda}\mathcal{I}/\mathcal{I}$ 为维数为 $\ell(wt_\lambda)$ 的仿射舒伯特胞腔。仿射旗簇具有胞腔分解

$$\mathrm{Fl}_G = \bigsqcup_{wt_\lambda \in W_{\mathrm{ext}}} \mathring{\Sigma}_{wt_\lambda}.$$

对于每个 $n \ge 0$，令

$$X_n := \bigsqcup_{wt_\lambda \in W_{\mathrm{ext}},\, \ell(wt_\lambda) \le n} \mathring{\Sigma}_{wt_\lambda}. \tag{14}$$

于是 Fl_G 是 X_n 的递增极限，称为归纳簇。令 $\mathring{\Sigma}^{wt_\lambda} := \mathcal{I}^-\dot{w}z^{-\lambda}\mathcal{I}/\mathcal{I}$ 为相反仿射舒伯特胞腔。

通过缩放参数 z，$\mathbb{C}^*_{\mathrm{rot}} := \mathbb{C}^*$ 在 Fl_G 上具有圈旋转作用。令 δ 为此作用的一次特征标，它也是相应 Kac–Moody李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的虚根。那么，正（实）仿射根为

$$R^+_{\mathrm{aff}} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R^+, k \ge 0 \text{ or } \alpha \in R^-, k \ge 1\}, \tag{15}$$

负（实）仿射根为

$$R^-_{\mathrm{aff}} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R^+, k \le -1 \text{ or } \alpha \in R^-, k \le 0\}.$$

扩张仿射Weyl群 W_{ext} 通过以下公式作用于格 $X^*(T) \oplus \mathbb{Z}\delta$（参见 [LS10，（3.1）]）

$$wt_\lambda(\mu + k\delta) = w(\mu) + (k - \langle \lambda, \mu\rangle)\delta,\ \mu \in X^*(T). \tag{16}$$

我们需要以下引理来计算切空间的环面权，证明见 [FGSX25] 。

引理 4.1. 对于任意主余权 λ，切空间 $T_{t_\lambda}(\Sigma_{t_\lambda})$的环面 $T\times\mathbb{C}^*_{\mathrm{rot}}$ 权为

$$\{\alpha+k\delta \mid \alpha\in R^-, 1\le k\le -\langle\lambda,\alpha\rangle\}.$$

4.2. **仿射旗簇中的 MC 类。** 回忆一下， $T\subset G$ 是 G中的极大环面。我们考虑 Fl_G的 T-等变 K-同调群，其定义为

$$K^T(\mathrm{Fl}_G):=\lim_{n\to\infty}K^T(X_n)$$

利用归纳概形结构（14）。

另一方面，Fl_G 可以实现为相应仿射 Kac–Moody 群 G的 Kac–Moody 旗簇 G/B，它是一个带有有限维 Schubert 胞腔 [Kum02]分层的归纳有限归纳簇。仿射 Kac–Moody 群 G 的 Weyl 群是 W_{ext}。因此，与第 2.2 节中一样，对于任意 $w\in W_{\mathrm{ext}}$，我们在 $K_T(\mathrm{Fl}_G)$上有算子 w^L和 w^R。令 $I_{\mathrm{aff}}:=I\sqcup\{0\}$为仿射 Dynkin 图的顶点。那么，对于 (4) 和 (6) 中的 $i\in I_{\mathrm{aff}}$，算子 $\mathcal{T}_i^L,\mathcal{T}^L_{,i}{}^\vee,\mathcal{T}_i^R,\mathcal{T}^R_{,i}{}^\vee$也可以定义在 $K^T(\mathrm{Fl}_G)$上，其中 $\alpha_0=-\theta$，因为我们只考虑小环面 T，而非 G中的仿射环面，其中 θ 是最高根。这些算子满足与之前相同的关系。

回想一下，Fl_G 表示有限维仿射舒伯特胞腔。由于 $\mathrm{Fl}_y(\mathring{\Sigma}_f)\in K^T(\mathrm{Fl}_G)[y]$ 是一个归纳概形，MC 类 MC_G 定义良好，并且它们构成局部化等变 K-同调群的一组基。由于舒伯特簇 $\Sigma_f:=\Sigma_f$ 也像有限型情形那样具有 Bott–Samelson 消解（见 [Kum02]），因此 [AMSS24b，定理 1 的证明1] 同样适用于仿射旗簇 Fl_G。因此，对于任意 $i\in I_{\mathrm{aff}}$，我们有如下与（7）类似的公式：

$$\mathcal{T}_i^R(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_f))=\begin{cases}\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_{fs_i}) & \text{if } fs_i>f;\\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_f)-y\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_{fs_i}) & \text{if } fs_i<f.\end{cases}\tag{17}$$

此外，由于 [MNS22，定理 7 的证明6] 仅依赖于上述公式以及对 $\mathbb{P}^1$的计算，我们得到（8）的仿射版本：

$$\mathcal{T}_i^L(\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_f))=\begin{cases}\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_{s_if}), & \text{if } s_if>f;\\ -(1+y)\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_f)-y\,\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_{s_if}) & \text{if } s_if<f.\end{cases}\tag{18}$$

回想一下，仿射旗簇 T的 $K_T(\mathrm{Fl}_G)$ -等变 K-上同调可识别为 $\mathrm{Hom}_{K^T(\mathrm{pt})}(K^T(\mathrm{Fl}_G)\ K^T(\mathrm{pt})$，见 [LSS10]。因此，存在一个非退化配对

$$\langle-,-\rangle: K^T(\mathrm{Fl}_G)\times K_T(\mathrm{Fl}_G)\to K_T(\mathrm{pt}).$$

与有限型情形下的定理 2.4中一样，我们将与反 Schubert 胞腔 $\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^f)\in K_T(\mathrm{Fl}_G)[[y]]$ 相关联的类定义为 MC 类的对偶基：

$$\langle\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_f),\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g)\rangle=\delta_{f,g},\ f,g\in W_{\mathrm{ext}}.\tag{19}$$

注 4.2. 更准确地说，我们需要考虑厚仿射旗簇 Fl_G，而 SM 类定义在 K-上同调环 $K_T(\mathrm{Fl}_G)$ 中，它与 $\mathrm{Hom}_{K^T(\mathrm{pt})}(K^T(\mathrm{Fl}_G)\ K^T(\mathrm{pt})$ 同构，见 [LSS10]。

根据类似于 [MNS22], 中的计算，我们可以证明，对于任意 $\gamma_1\in K^T(\mathrm{Fl}_G)$ 和 $\gamma_2\in K_T(\mathrm{Fl}_G)$

$$\langle\mathcal{T}_i^R(\gamma_1),\gamma_2\rangle=\langle\gamma_1,\mathcal{T}_i^{R,\vee}(\gamma_2)\rangle,\quad\text{and}\quad\langle\mathcal{T}_i^L(\gamma_1),\gamma_2\rangle=s_i\cdot\langle\gamma_1,\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\gamma_2)\rangle.\tag{20}$$

结合（17）至（20），可得

$$\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^f))=\begin{cases}-y\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if}) & \text{若 } s_if>f;\\ \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if})-(1+y)\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^f) & \text{若 } s_if<f.\end{cases}\tag{21}$$

$$\mathcal{T}_i^{R,\vee}(\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^f))=\begin{cases}-y\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i}) & \text{如果 } fs_i>f;\\ \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})-(1+y)\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^f) & \text{如果 } fs_i<f.\end{cases}\tag{22}$$

受定理 2.5启发，我们定义相反仿射舒伯特胞腔的 Segre 动机陈类 $\mathring{\Sigma}^f$ 如下。

定义 4.3. 对于任意 $w \in W$，令

$$\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f) = \sum_{g \in W_{\mathrm{ext}}} R_{f,g}(-y) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) \in K_T(\mathrm{Fl}_G)[[y]],$$

其中 $R_{f,\ g}(-y)$ 是与扩张仿射Weyl群 W_{ext} 相关的 Hecke 代数（其中 $y = -q$）的 R 多项式。

注 4.4. 由于 $R_{f,\ g}(-y) = 0$ 若 $f \not\leq g$，上述求和是对满足 $f \leq g$ 的 g 求和。尽管这是一个无穷和，它在 $\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_g)$ 上的取值为 $R_{f,\ g}(-y)$。因此，它是$K_T(\mathrm{Fl}_G)[[y]]$中的一个良定义类。

这些类满足以下递归公式。

定理 4.5. 对于任意满足 $i \in I_{\mathrm{aff}}$ 的单根 α_i，以及 $f \in W_{\mathrm{ext}}$，

$$\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)) = \begin{cases} -(1+y) \cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f) - y \cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f}) & \text{if } s_i f > f; \\ \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f}) & \text{if } s_i f < f, \end{cases} \tag{23}$$

$$\mathcal{T}_i^{R,\vee}(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)) = \begin{cases} \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}) & \text{if } f s_i < f; \\ -(1+y) \cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f) - y \cdot \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}) & \text{if } f s_i > f. \end{cases} \tag{24}$$

证明。我们来证明第一个结论，第二个结论可类似验证。由二次关系（$\mathcal{T}^{L,\ \vee}_{i} + 1$）（$\mathcal{T}^{L,\ \vee}_{i} + y$）$= 0$，只需证明 $s_i f < f$ 这一情形，我们现在作此假设。于是由（21），得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_i^{L,\vee}(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)) \\
&= \sum_{s_i g > g} -y \cdot R_{f,g}(-y) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i g}) + \sum_{s_i g < g} R_{f,g}(-y) \left(\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i g}) - (1+y) \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) \right) \\
&= \sum_{g > s_i g} \Big(-y \cdot R_{f,s_i g}(-y) - (1+y) \cdot R_{f,g}(-y) \Big) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) + \sum_{g < s_i g} R_{f,s_i g}(-y) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) \\
&= \sum_{g > s_i g} R_{s_i f,g}(-y) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) + \sum_{g < s_i g} R_{s_i f,g}(-y) \cdot \widetilde{\mathrm{MC}}_y(\mathring{\Sigma}^g) \\
&= \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f}),
\end{aligned}$$

其中第三个等号由（2）得出。 □

映射 $W_{\mathrm{ext}} \ni g \mapsto gI \in \mathrm{Fl}_G$ 在 Fl_G 中的环面不动点与 W_{ext} 之间建立了一个双射。对于任意 $g \in W_{\mathrm{ext}}$，我们用 $[\mathcal{O}_g] \in K^T(\mathrm{Fl}_G)$ 表示不动点$gI \in \mathrm{Fl}_G$的结构层的类。于是，$\{[\mathcal{O}_g] \mid g \in W_{\mathrm{ext}}\}$ 构成局部化群 $K^T(\mathrm{Fl}_G) \otimes_{K_T(\text{点})} \mathrm{Frac}\ K_T(\text{点})$ 的一组基，其中 $\mathrm{Frac}\ K_T(\text{点})$ 是 $K_T(\text{点})$ 的分式域。

对于任意 $\gamma \in K_T(\mathrm{Fl}_G)$，我们有在不动点 gI 处定义的局部化

$$\gamma|_g := \langle [\mathcal{O}_g], \gamma \rangle \in K_T(\mathrm{pt}).$$

将定理 4.5 两边在环面不动点 gI处局部化，得到以下结果。

推论 4.6. 对于任意单根 $\alpha_i \in I_{\mathrm{aff}}$，以及 g、$f \in W_{\mathrm{ext}}$，我们有

$$\begin{aligned}
&(1 + y e^{-\alpha_i}) \, \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{s_i g} \\
&= \begin{cases} -y(1 - e^{-\alpha_i}) \cdot s_i \Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})|_g \Big) + (1+y) e^{-\alpha_i} \cdot s_i \Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_g \Big) & \text{if } s_i f > f; \\ (1 - e^{-\alpha_i}) \cdot s_i \Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})|_g \Big) + (1+y) \cdot s_i \Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_g \Big) & \text{if } s_i f < f. \end{cases}
\end{aligned}$$

and

$$(1+ye^{-g\alpha_i})\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{gs_i}$$
$$=\begin{cases}(1+y)\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_g+(1-e^{-g\alpha_i})\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_g & \text{if } fs_i<f;\\ (1+y)e^{-g\alpha_i}\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_g-y(1-e^{-g\alpha_i})\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_g & \text{if } fs_i>f.\end{cases}$$

证明。 这可由显式公式（4）与（6）、定理 4.5，以及 fa ct

$$w^L(\gamma)|_u=w(\gamma|_{w^{-1}u}),\ w^R(\gamma)|_u=\gamma|_{uw},\ \gamma\in K_T(\mathrm{Fl}_G).$$

□

由于我们考虑的是小环面 T， δ 在 $K_T(\mathrm{pt})$ 中为零。因此，由（16）， $e^{t_\mu(\alpha_i)}=e^{\alpha_i}\in K_T$（pt），对任意 $\mu\in X_*(T)$ 及任意单根 α_i 均成立。因此，在定理 $g=t_{s_i\mu}$ 的第一个方程中令 $g=t_\mu$，并在第二个方程中令4.6，可得

推论 4.7。 对于任意单根 $\alpha_i\in I_{\mathrm{aff}}$, $\mu\in X_*(T)$，以及 $f\in W_{\mathrm{ext}}$,

(1) if $s_if>f$ and $fs_i>f$,

$$\begin{aligned}&-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if})|_{t_{s_i\mu}}\Big)+(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_{s_i\mu}}\Big)\\ =&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_\mu}-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_{t_\mu}.\end{aligned}$$

(2) 若 $s_if>f$且 $fs_i<f$,

$$\begin{aligned}&-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if})|_{t_{s_i\mu}}\Big)+(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_{s_i\mu}}\Big)\\ =&(1+y)\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_\mu}+(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_{t_\mu}.\end{aligned}$$

(3) 若 $s_if<f$且 $fs_i>f$,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if})|_{t_{s_i\mu}}\Big)+(1+y)\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_{s_i\mu}}\Big)\\ =&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_\mu}-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_{t_\mu}.\end{aligned}$$

(4) 若 $s_if<f$且 $fs_i<f$,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_if})|_{t_{s_i\mu}}\Big)+(1+y)\cdot s_i\Big(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_{s_i\mu}}\Big)\\ =&(1+y)\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)|_{t_\mu}+(1-e^{-\alpha_i})\cdot\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{fs_i})|_{t_\mu}.\end{aligned}$$

5. Comparison between the finite and affine case

在本节中，我们通过关联有限部分旗簇 G/P 中开投影 Richardson 簇的 Segre 动机 Chern 类与仿射旗簇 Fl_G 中 Schubert 胞腔的 Segre 动机陈类，证明本文的主要结果。

5.1. **仿射 Grassmannian**。 为了建立 G/P 与 Fl_G 之间的桥梁，我们需要使用仿射 Grassmannian。令 $\mathrm{Gr}_G:=G(\!(z)\!)/G[[z]]$ 为 *仿射 Grassmannian*。存在一个自然投影映射 $\mathrm{Fl}_G\to\mathrm{Gr}_G$，其纤维同构于 G/B。 T-不动点 $(\mathrm{Gr}_G)^T$ 与陪集 $W_{\mathrm{ext}}/W\simeq X_*(T)$ 一一对应。对于任意 $\lambda\in X_*(T)$，我们令 $t_\lambda W$ 表示不动点 $z^{-\lambda}G[[z]]/G[[z]]$。对于任意 $\mu\in X_*(T)$ 和 $\gamma\in K_T(\mathrm{Gr}_G)$，令 $\gamma|_{t_\mu W}$ 表示在 Gr_G 中不动点 $t_\mu W$ 处的局部化。

令 $K\subset G$ 为极大紧子群， $T_{\mathbb{R}}:=K\cap T$ 紧环面。于是我们有

$$r\colon\ \mathrm{Gr}_G\simeq\Omega K\to LK\to LK/T_{\mathbb{R}}\simeq\mathrm{Fl}_G,$$

其中， LK （分别地，ΩK）是多项式映射 $S^1\to K$ （分别地，$(S^1,1)\to(K,1)$）的空间。因此，存在一个拉回映射，称为反向映射，

$$r^*:K_T(\mathrm{Fl}_G)\to K_T(\mathrm{Gr}_G).$$

用局部化的术语来说，其定义如下：

$$r^*(\gamma)|_{t_\mu W} = \gamma|_{t_\mu}, \tag{25}$$

其中 $\mu \in X_*(T)$，参见 [LSS10]。由于 Gr_G 可实现为仿射 Kac-Moody 群的部分旗簇 [Kum02]，，我们有算子 w^L 作用于 $K_T(\mathrm{Gr}_G)$，对任意 $w \in W_{\mathrm{ext}}$，并且它满足如下公式：

$$w^L(\gamma)|_{t_\mu W} = w(\gamma|_{w^{-1}t_\mu W}) = w(\gamma|_{t_{w^{-1}\mu} W}),$$

其中 $\gamma \in K_T(\mathrm{Gr}_G)$ 与 $\mu \in X_*(T)$。容易验证 r^* 与算子w^L不可交换。但我们有如下关系。

引理 5.1. 对任意 $\gamma \in K_T(\mathrm{Fl}_G)$，$\mu \in X_*(T)$，以及任意满足 $i \in I_{\mathrm{aff}}$ 的单根 α_i，

$$s_i(\gamma|_{t_{s_i\mu}}) = \left(s_i^L(r^*\gamma)\right)|_{t_\mu W}.$$

结合（25）与定理5.1，定理4.7 给出如下结果。

定理 5.2. 对任意单根 $\alpha_i \in I_{\mathrm{aff}}$、$\mu \in X_*(T)$，以及 $f \in W_{\mathrm{ext}}$，

(1) if $s_i f > f$ and $f s_i > f$,

$$\begin{aligned}&-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})\right) + (1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f})\right)\\ =&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f}) - y(1-e^{-\alpha_i})\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}).\end{aligned}$$

(2) 若 $s_i f > f$ 和 $f s_i < f$,

$$\begin{aligned}&-y(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})\right) + (1+y)e^{-\alpha_i}\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f})\right)\\ =&(1+y)\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f}) + (1-e^{-\alpha_i})\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}).\end{aligned}$$

(3) 若 $s_i f < f$ 和 $f s_i > f$,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})\right) + (1+y)\cdot s_i^L\left(\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f})\right)\\ =&(1+y)e^{-\alpha_i}\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f}) - y(1-e^{-\alpha_i})\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}).\end{aligned}$$

(4) 若 $s_i f < f$ 和 $f s_i < f$,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\alpha_i})\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{s_i f})\right) + (1+y)\cdot s_i^L\left(r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f})\right)\\ =&(1+y)\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f}) + (1-e^{-\alpha_i})\cdot r^*\,\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f s_i}).\end{aligned}$$

5.2. **主要结果。** 对于任意主余权 μ，令 $\mathrm{Gr}^\mu := G[[z]]z^{-\mu}G[[z]]/G[[z]] \subset \mathrm{Gr}_G$ 为球形舒伯特胞腔。那么

$$\mathrm{Gr}_G = \bigsqcup_{\mu \in X_*(T)^+} \mathrm{Gr}_\mu,$$

其中 $X_*(T)^+$ 表示主余特征。令 $\mathrm{ev}: G[[z]] \to G$ 表示在 $z=0$ 处的求值映射。现在固定一个主余权 λ。那么我们有单根的一个子集 $\{\alpha_i \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee\rangle = 0\}$，并令 P 为包含 Borel 子群 B的对应抛物子群（16），

$$\mathrm{ev}\left(G[[z]] \cap z^{-\lambda}G[[z]]z^{\lambda}\right) = P \subset G.$$

因此，

$$\mathrm{Gr}_\lambda \simeq G[[z]]/(G[[z]] \cap z^{-\lambda}G[[z]]z^{\lambda})$$

通过映射 ev 映射到 G/P。此外，它是 G/P上的一个仿射丛，并记该闭嵌入为

$$i_\lambda : G/P \simeq G\cdot z^{-\lambda}G[[z]]/G[[z]] \subset \mathrm{Gr}_\lambda,$$

将其视为 G 的一个子群 $G[[z]]$，由常值环路构成，参见 [Zhu17]。我们需要以下简单引理，证明见 [FGSX25]。

引理 5.3. $T \times \mathbb{C}^*_{\mathrm{rot}}$ 权重为切空间 $T_{t_\lambda W}\,\mathrm{Gr}_\lambda$ 的

$$\{-\alpha + k\delta \mid 0 \le k < \langle \lambda, \alpha \rangle\}.$$

考虑以下图，

$$G/P \xrightarrow{i_\lambda} \mathrm{Gr}_\lambda \xrightarrow{j_\lambda} \mathrm{Gr}_G \xrightarrow{r} \mathrm{Fl}_G,$$

其中 i_λ 和 j_λ 是包含映射，并令

$$q^* := j_\lambda^* \circ r^* : K_T(\mathrm{Fl}_G) \to K_T(\mathrm{Gr}_\lambda).$$

回忆定理 3.12，对于 $u \in W$和 $w \in W^P$，开投影 Richardson 簇的 Segre 动机陈类 $\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)$ $f = f^\lambda_{u,\ w} = ut_\lambda w^{-1} \in W_{\mathrm{ext}}$与定理 4.3 中的 SMC 类 $\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)$ 的关系如下。

定理 5.4. 沿用上述记号，并设 $\mathcal{N}$ 为 G/P 在Gr_λ中的法丛，则

$$i_{\lambda *}\left(\frac{\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)}{\lambda_y(\mathcal{N}^*)}\right) = q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right) \in K_T(\mathrm{Gr}_\lambda)[[y]].$$

注 5.5. 球形舒伯特胞腔 Gr_λ 通过左乘具有 G 作用。因此， $K_T(\mathrm{Gr}_\lambda)$如前所述具有 W 作用。由于映射 i_λ 是 G-等变的，推前 $i_{\lambda *}$ 与作用w^L交换。此外，法丛 $\mathcal{N}$ 在 w^L 作用下不变，因为它具有 G-等变结构。因此，类 $i_{\lambda *}\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)\,\lambda_y(\mathcal{N}^*)\right)$ 满足与定理 3.13 中 $\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)$相同的递归公式。同理， $q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right)$ 满足与定理 5.2 中 $\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)$相同的递归公式。

注 5.6. 由于当 $u \not\leq w$时左边为零，右边也得到同样的消失结果，这也可以直接由局部化得到。

证明。 我们通过对 $\ell(w)$ $w \in W^P$ 进行归纳来证明。假设 $w = \mathrm{id}$。则当 $u \neq \mathrm{id}$ 时，左边为 0。另一方面，Gr_λ 中的所有环面不动点都形如 $t_{v\lambda}W$，其中 $v \in W^\lambda$ 为某个元素。如果

$$q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{ut_\lambda})\right)|_{t_{v\lambda}W} = \mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{ut_\lambda})|_{t_{v\lambda}} \neq 0,$$

则 $ut_\lambda \le t_{v\lambda}$，这意味着 $u = v = \mathrm{id}$，这是因为（13）以及事实 $\ell(t_{v\lambda}) = \ell(t_\lambda)$。因此在 $w = \mathrm{id}$ 的情形下，我们可以假设 $u = \mathrm{id}$，也就是说， $f = t_\lambda$，并且只需比较它们在 $t_\lambda W$处的限制。

我们首先计算左边。 $X(w)^\circ = \{e \cdot B\} \subset G/B$ 是单位点，其中 $e \in G$ 是单位元。因此，$\mathrm{MC}_y(X(w)^\circ) = [\mathcal{O}_{e\cdot B}]$ 是该点的结构层。由定理 3.1，

$$\mathrm{MC}_y(\mathring{R}_{u,w}) = [\mathcal{O}_{e\cdot B}] \otimes \mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ) = \frac{\mathrm{MC}_y(Y(u)^\circ)|_{e\cdot B}}{\lambda_y(T^*(G/B))|_{e\cdot B}}[\mathcal{O}_{e\cdot B}] = [\mathcal{O}_{e\cdot B}],$$

其中，最后一个等式是由以下事实得出的： $Y(u)^\circ$ 在点 $e \cdot B$ 处光滑，且$Y(u)^\circ$ 的闭包是整个旗簇 G/B，参见 [AMSS24b]。因此，由定理 3.12，

$$\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f) = \frac{[\mathcal{O}_{e\cdot P}]}{\lambda_y(T^*(G/P))} = \frac{[\mathcal{O}_{e\cdot P}]}{\lambda_y(T^*(G/P))|_{e\cdot P}},$$

其中 $e \cdot P \in G/P$ 是 G/P 中的恒等点。因此，

$$i_{\lambda *}\left(\frac{\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)}{\lambda_y(\mathcal{N}^*)}\right) = \frac{[\mathcal{O}_{t_\lambda W}]}{\lambda_y(T^*\,\mathrm{Gr}_\lambda)|_{t_\lambda W}} = \frac{[\mathcal{O}_{t_\lambda W}]}{\prod_{\alpha,\langle\lambda,\alpha\rangle>0}(1+ye^\alpha)^{\langle\lambda,\alpha\rangle}}. \tag{26}$$

这里 $\mathcal{O}_{t_\lambda W}$ 是该不动点的结构层 $t_\lambda W \in \mathrm{Gr}_G$，第二个等式由定理 5.3 得出。

现在用 $u = w =$ 恒等式计算右端。首先，对于任意 $g \in W_{\mathrm{ext}}$，动机陈类 $\widetilde{\mathrm{MC}}_y(\Sigma_g)$ 支持在 Schubert 簇 Σ_g上。因此，在（19）中定义的对偶基 $\mathrm{MC}_y(\Sigma^g)$ 在不动点 $h \in W_{\mathrm{ext}}$ 处的局部化为零，若 $g \not\leq h$。因此，根据定理 4.3，对于任意 $v \neq id \in W$，

$$q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right)|_{t_{v\lambda}W} = 0.$$

注意，Gr_λ 中的所有环面不动点都具有如下形式： $t_{v\lambda}W$ ，其中 $v \in W$。因此，$q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right)$ 是固定点 $[\mathcal{O}_{t_\lambda W}]$的结构层的一个倍数。现在来计算这个标量。由于 Schubert 胞腔 Σ_{t_λ} 在环面不动点 $t_\lambda \in \mathrm{Fl}_G$处是光滑的，我们得到

$$\mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_{t_\lambda}) = \sum_{g \leq t_\lambda} a_g [e_g]$$

对于某些系数 $a_g \in \mathrm{Frac}\ K_T(\mathrm{pt})$，其中

$$a_{t_\lambda} = \prod_{\chi} \frac{1 + ye^{-\chi}}{1 - e^{-\chi}} = \prod_{\alpha, \langle \lambda, \alpha \rangle > 0} \left(\frac{1 + ye^{\alpha}}{1 - e^{\alpha}}\right)^{\langle \lambda, \alpha \rangle}.$$

这里的 χ 中间的 T是切空间的权 $T_{t_\lambda}\Sigma_{t_\lambda}$，第一个等式由[AMSS24b，引理 9 得出。1], 第二个等式则由定理 4.1得出。因此，

$$[e_{t_\lambda}] = \sum_{g \leq t_\lambda} b_g \, \mathrm{MC}_y(\mathring{\Sigma}_g)$$

对于某些系数 $b_g \in \mathrm{Frac}\ K_T(\mathrm{pt})$，其中

$$b_{t_\lambda} = \frac{1}{a_{t_\lambda}} = \prod_{\alpha, \langle \lambda, \alpha \rangle > 0} \left(\frac{1 - e^{\alpha}}{1 + ye^{\alpha}}\right)^{\langle \lambda, \alpha \rangle}.$$

因此，

$$\begin{aligned} q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^f)\right)|_{t_\lambda W} =& \widetilde{\mathrm{MC}}(\mathring{\Sigma}^{t_\lambda})|_{t_\lambda} = \langle [e_{t_\lambda}], \widetilde{\mathrm{MC}}(\mathring{\Sigma}^{t_\lambda}) \rangle \\ =& b_{t_\lambda} = \prod_{\alpha, \langle \lambda, \alpha \rangle > 0} \left(\frac{1 - e^{\alpha}}{1 + ye^{\alpha}}\right)^{\langle \lambda, \alpha \rangle} \\ =& i_{\lambda *}\left(\frac{\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)}{\lambda_y(\mathcal{N}^*)}\right)|_{t_\lambda W}. \end{aligned}$$

其中最后一个等式由 (26) 得出。这就完成了基例 $w =$id 的证明。现在取一个 $w \in W^P$ 使得 $w \neq$ id，并假设

$$i_{\lambda *}\left(\frac{\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_{f^\lambda_{u,v}})}{\lambda_y(\mathcal{N}^*)}\right) = q^*\left(\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Sigma}^{f^\lambda_{u,v}})\right) \tag{27}$$

对于所有满足 $\ell(v) < \ell(w)$ 的 $u \in W$, $v \in W^P$。存在一个单根 α_i，使得 $s_i w < w$。特别地， $v := s_i w \in W^P$，由定理 3.9 得出。令 $f = f^\lambda_{u,v}$，应用定理 3.13 和定理 5.2。由于$s_i w < w$，由 (13) 得到 $f s_i = f^\lambda_{u,w} < f$。若 $s_i f < f$，结合定理 3.13.(1)、定理 5.2.(4)、定理 5.5 中的递归以及归纳假设 (27)，我们得到 $f s_i = f^\lambda_{u,w}$ 的定理。若 $s_i f > f$，则使用定理 3.13.(3) 和定理 5.2.(2) 中的递归，得到相同的结论。至此，定理的证明完成。□

6. Localization of SMC classes and Twisted R-polynomials

在本节中，我们研究 SMC 类 $\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)$ 的局部化与来自 [GLTW24], 的扭曲 R 多项式之间的关系，后者是 Kazhdan–Lusztig R多项式在第 2.1 节中的推广。

6.1. **子字**。 设 u， $w \in W$。一个 w-字是由单反射构成的序列 $\mathbf{w} = (s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$，且满足 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$。称字 $\mathbf{w}$ 为 约化 ，若 $\ell = \ell(w)$。我们定义

$$\beta_{\mathbf{w},k} = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}, \qquad k = 1, 2 \dots, \ell.$$

若$\mathbf{w}$ 是约化的，

$$\{\beta_{\mathbf{w},1}, \dots, \beta_{\mathbf{w},k}\} = \{\alpha > 0 : w^{-1}\alpha < 0\}.$$

为简便起见，我们记作 $\beta_k = \beta_{\mathbf{w},k}$。一个 $\mathbf{w}$ 的 u-子词是一个序列$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell)$，满足$\mathbf{u}_k \in \{s_{i_k}, e\}$，其中 $k = 1, \dots, \ell$，且 $u = \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_\ell$。我们定义部分积$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k$，并通过下表引入子集 $J^{\pm}_{\mathbf{u}}, E^{\pm}_{\mathbf{u}} \subset [\ell]$：
$= \{1, 2, \cdots, \ell\}$：

情形	$\mathbf{u}_k = s_{i_k}$	$\mathbf{u}_k = e$
$\mathbf{u}_{(k-1)} s_{i_k} < \mathbf{u}^{(k-1)}$	$k \in J^-_{\mathbf{u}}$	$k \in E^-_{\mathbf{u}}$
$\mathbf{u}_{(k-1)} s_{i_k} > \mathbf{u}^{(k-1)}$	$k \in J^+_{\mathbf{u}}$	$k \in E^+_{\mathbf{u}}$

$$J_{\mathbf{u}} = J^+_{\mathbf{u}} \sqcup J^-_{\mathbf{u}},$$
$$E_{\mathbf{u}} = E^+_{\mathbf{u}} \sqcup E^-_{\mathbf{u}},$$
$$[\ell] = J_{\mathbf{u}} \sqcup E_{\mathbf{u}}.$$

那么，如果对于所有 k 都有 {style id='1'>u ，即 $J^-_{\mathbf{u}} = \varnothing$，则称$\mathbf{u}$ 为约化。类似地，如果对于所有 k 都有 $\mathbf{u}_{(k)} \leq \mathbf{u}^{(k-1)} s_{i_k}$ ，即 $E^-_{\mathbf{u}} = \varnothing$，则称 $\mathbf{u}$ 为特 *distinguished*。

例 6.1。 考虑 A_4 的情形，其中

$$\mathbf{w} = (s_4, s_3, s_1, s_4, s_2, s_1, s_3, s_2), \qquad u = s_3 s_4 s_3 s_2.$$

T这里有五个 $\mathbf{w}$ 的 u-子字，如下表所示（这里 $\not{s}_i$ 表示 $e \in W$）：

$\mathbf{u}$	$J^+_{\mathbf{u}}$	$J^-_{\mathbf{u}}$	$E^+_{\mathbf{u}}$	$E^-_{\mathbf{u}}$	约化 特 distinguished	
$(s_4, s_3, \not{s}_1, s_4, s_2, \not{s}_1, \not{s}_3, \not{s}_2)$	$\{1,2,4,5\}$	$\varnothing$	$\{3,6,7\}$	$\{8\}$	yes	no
$(s_4, s_3, \not{s}_1, s_4, \not{s}_2, \not{s}_1, \not{s}_3, s_2)$	$\{1,2,4,8\}$	$\varnothing$	$\{3,5,6\}$	$\{7\}$	yes	no
$(\not{s}_4, s_3, \not{s}_1, s_4, \not{s}_2, \not{s}_1, s_3, s_2)$	$\{2,4,7,8\}$	$\varnothing$	$\{1,3,5,6\}$	$\varnothing$	yes	yes
$(s_4, s_3, s_1, s_4, \not{s}_2, s_1, \not{s}_3, s_2)$	$\{1,2,3,4,8\}$	$\{6\}$	$\{5\}$	$\{7\}$	no	no
$(\not{s}_4, s_3, s_1, s_4, \not{s}_2, s_1, s_3, s_2)$	$\{2,3,4,7,8\}$	$\{6\}$	$\{1,5\}$	$\varnothing$	no	yes

R 多项式为

$$R_{u,w} = (q-1)^4 + q(1-q)^2 = 1 - 3q + 4q^2 - 3q^3 + q^4.$$

6.2. **子词递归**。 设$\mathbf{w}$ 是一个 w-字，且$\mathbf{w} \sqcup s$ 是一个 ws-字，其中 s 是一个简单反射。对于任意 u，$\mathbf{w}s$中有两类 u-子字：

- I 型：$\mathbf{x} \sqcup \not{s}$ ，其中$\mathbf{x}$ 是$\mathbf{w}$的一个 u-子字；
- II 型：$\mathbf{x}' \sqcup s$ ，其中$\mathbf{x}'$ 是$\mathbf{w}$的一个 us-子字。

此外，I 型子字与 $\mathbf{x}$ 的 $\mathbf{w}$ 的 u-子字一一对应，而 II 型子字与 $\mathbf{x}'$ 的 $\mathbf{w}$ 的 us-子字一一对应。根据定义，比较$\mathbf{x} \sqcup \not{s}$ 和 $\mathbf{x}$的 $J^{\pm}$-子集和 $E^{\pm}$-子集（或者$\mathbf{x}' \sqcup s$ 和 $\mathbf{x}'$，分别）时，除以下情形外，它们都相同

(28)

	Type I	Type II
$us < u$	$E^-_{\mathbf{x} \sqcup \not{s}} = E^-_{\mathbf{x}} \sqcup \{s\}$	$J^+_{\mathbf{x}' \sqcup s} = J^+_{\mathbf{x}'} \sqcup \{s\}$
$us > u$	$E^+_{\mathbf{x} \sqcup \not{s}} = E^+_{\mathbf{x}} \sqcup \{s\}$	$J^-_{\mathbf{x}' \sqcup s} = J^-_{\mathbf{x}'} \sqcup \{s\}$

.

这里我们滥用记号，将单词$\mathbf{w} \sqcup s$ 中的最后一项称为 s。

假设有一组元素 $\mathcal{S}_{u,w}, v, w \in W$，其中 $\mathcal{S}_{u,\mathrm{id}} = \delta_{u,\mathrm{id}}$，并满足递归关系（$s = s_\alpha$）：

(29)

$$\mathcal{S}_{u,ws} = \begin{cases} \mathrm{p}_{11}(w\alpha)\mathcal{S}_{u,w} + \mathrm{p}_{12}(w\alpha)\mathcal{S}_{us,w}, & us < u; \\ \mathrm{p}_{21}(w\alpha)\mathcal{S}_{u,w} + \mathrm{p}_{22}(w\alpha)\mathcal{S}_{us,w}, & us > u. \end{cases}$$

对于任意根 $p_{ij}(\alpha)$， α 是某些元素（也可以是不依赖于 α 的常数）。我们将式（29）称为“子词递归”条件。例子$\mathcal{S}_{u,\ w}$ 包括与 Schubert 胞腔/簇相关的各种上同调类和 K 理论类（式（32）和（35））， 以及 R-多项式（式（33））。

事实证明，子词递归条件可以转化为子词公式。对于每个 w-词 $\mathbf{w}$，满足 $\beta_k = \beta_{\mathbf{w},\,k}$，我们有

$$\mathcal{S}_{u,w} = \sum_{u\text{-subwords }\mathbf{u}} \prod_{k=1}^{\ell} \begin{cases} \mathrm{p}_{11}(\beta_k), & k \in E_{\mathbf{u}}^{-}; \\ \mathrm{p}_{12}(\beta_k), & k \in J_{\mathbf{u}}^{+}; \\ \mathrm{p}_{21}(\beta_k), & k \in E_{\mathbf{u}}^{+}; \\ \mathrm{p}_{22}(\beta_k), & k \in J_{\mathbf{u}}^{-}. \end{cases} \tag{30}$$

事实上，只需证明右端满足递归关系（29）即可。这可利用（28）证明。

我们回顾两个可由子词递归导出的著名组合公式。经典的 AJS-Billey（Anderson、Jantzen、Soergel）公式 [AJS94、Bil99] 给出了反舒伯特簇基本类 $[Y(u)] \in H_T^*(G/B)$ 在环面不动点 $\dot{w}B \in G/B$处的局部化：

$$[Y(u)]\big|_w = \sum_{\mathbf{u}} \prod_{k\in J_{\mathbf{u}}} \beta_{\mathbf{w},k}, \tag{31}$$

求和遍及 $\mathbf{w}$ 的约化 u-子字（因此 $J_{\mathbf{u}}^{-} = \varnothing$）。事实上，在这种情况下，众所周知，若$ws_\alpha > w$，则

$$[Y(u)]_{ws_\alpha} = \begin{cases} [Y(u)]|_w + w(\alpha)[Y(us_\alpha)]|_w, & us_\alpha < u; \\ [Y(u)]|_w, & us_\alpha > u. \end{cases} \tag{32}$$

随后可利用（30）推导出（31）。

关于 Segre–MacPherson 类（上同调稳定基）、K理论舒伯特类、SMC 类和椭圆舒伯特类的相应公式可见 [Gra02、Su17、SZZ20、LXZ25]。

第二种适用于 R-多项式（见第2.1节）。假设 $ws > w$，则可以将第2.1节中的递归公式改写为

$$R_{u,ws} = \begin{cases} R_{us,w}, & us < u; \\ (q-1)R_{u,w} + qR_{us,w}, & us > u. \end{cases} \tag{33}$$

因此，若$\mathbf{w}$ 是 w的一个约化字，那么由（30）可得

$$R_{u,w}(q) = \sum_{\mathbf{u}} q^{|J_{\mathbf{u}}^{-}|}(q-1)^{|E_{\mathbf{u}}|}, \tag{34}$$

求和遍及以 $\mathbf{w}$ 为对象的特 distinguished u-子字（因此 $E_{\mathbf{u}}^{-} = \varnothing$）。

我们推导出 SMC$_y(Y(u)^\circ)$的局部化的子字公式，该公式比 [SZZ20]略为明确。在 A型中， [KZJ26命题 2 中给出了其图示表示方法。1]。

命题 6.2。 对于任意 w-字 $\mathbf{w}$ （不一定是约化字），有

$$\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)|_w = \sum_{u\text{-}subwords\ \mathbf{u}} (-y)^{|J_{\mathbf{u}}^{-}|} \prod_{k=1}^{\ell} \begin{cases} \dfrac{e^{\beta_k}-1}{e^{\beta_k}+y}, & k \in J_{\mathbf{u}}, \\ \dfrac{(1+y)e^{\beta_k}}{e^{\beta_k}+y}, & k \in E_{\mathbf{u}}^{-}, \\ \dfrac{1+y}{e^{\beta_k}+y}, & k \in E_{\mathbf{u}}^{+}, \end{cases}$$

证明。首先，如果 $w = \mathrm{id}$，SMC$_y(Y(u)^\circ)|_w = 0$ if $u \neq \mathrm{id}$。如果 $u = \mathrm{id}$，则 SMC$_y(Y(\mathrm{id})^\circ)|_{\mathrm{id}} = \sum_v$ SMC$_y(Y(v)^\circ)|_{\mathrm{id}} = 1$。此外，右边也等于 $\delta_{u,\mathrm{id}}$ if $w = \mathrm{id}$。因此，当 $w = \mathrm{id}$ 时，两边相等。根据 (6) 中 T^R, $_i{}^\vee$ 的定义，我们有

$$\gamma|_{ws_i} = -\frac{1-e^{w\alpha_i}}{y+e^{w\alpha_i}}(T_i^{R,\vee}\gamma)|_w + \frac{(1+y)e^{w\alpha_i}}{y+e^{w\alpha_i}}\gamma|_w$$

对任意类 γ。由 (9)，可得

$$\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)|_{ws_i} = \begin{cases} \dfrac{e^{w\alpha_i}-1}{e^{w\alpha_i}+y}\,\mathrm{SMC}(Y(us_i)^\circ)|_w + \dfrac{(1+y)e^{w\alpha_i}}{e^{w\alpha_i}+y}\,\mathrm{SMC}(Y(u)^\circ)|_w, & us_i < u, \\ -y\dfrac{e^{w\alpha_i}-1}{e^{w\alpha_i}+y}\,\mathrm{SMC}(Y(us_i)^\circ)|_w + \dfrac{1+y}{e^{w\alpha_i}+y}\,\mathrm{SMC}(Y(u)^\circ)|_w, & us_i > u. \end{cases} \tag{35}$$

现在，该公式由（30）立即得出。 □

结果表明，该公式可特化为 AJS-Billey 公式。根据 [AMSS24a，定理 5。1],SMC 的 $y=0$ 特化$y(Y(u)^\circ)$ 为

$$\mathrm{SMC}_0(Y(u)^\circ) = \mathrm{MC}_0(Y(u)^\circ) = [\mathcal{O}_{Y(u)}(-\partial Y(u))] = \sum_{w\geq u}(-1)^{\ell(w)-\ell(u)}[\mathcal{O}_{Y(w)}],$$

Schubert 簇 $Y(u)$ 边界的理想层。通过等变 Chern 特征映射 ch，我们看到 $[Y(u)]$ 是 ch(SMC$_0(Y(u)^\circ)$) 的最低次项。因此，对于任意根 β，若将 $e^\beta = 1+\beta+\frac{\beta^2}{2!}+\cdots$ 展开，则 SMC$_0(Y(u)^\circ)|_w$ 中的最低次项恰为 $[Y(u)]|_w$。由于$y=0$，只有满足 $J_{\mathbf{u}}^- = \varnothing$ 的 u-子字（即约化子词）才会对 SMC$_0(Y(u)^\circ)|_w$有贡献。此外，

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\beta_k}-1}{e^{\beta_k}+y} = 1-e^{-\beta_k} = \beta_k+\cdots,$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)e^{\beta_k}}{e^{\beta_k}+y} = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\frac{1+y}{e^{\beta_k}+y} = e^{-\beta_k} = 1+\cdots$$

容易看出（35）收敛于（32），因此命题 6.2 中的公式收敛于 AJS-Billey 公式。

现在我们来说明该公式如何与 R-多项式（34）的公式相关联。这一极限过程已出现在 [BN19，定理 1。2] 从不同的视角。

命题 6.3. 对于 u， $w\in W$，我们有

$$\lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\prod_{\alpha>0}\frac{1+ye^{w\alpha}}{1-e^{w\alpha}}\,\mathrm{SMC}(Y(u)^\circ)|_w = R_{u,w}(-y),$$

其中$\lim_{e^{\alpha_i}\to 0}$ 表示我们令 e^{α_i} 趋于0 （对任意单根）。当$\mathbf{w}$ 为约化时，命题*6.2* 中的每一求和项收敛于（34）中的对应项。

证明。在$\mathbf{w}$ 为约化字的假设下， β_1，……， β_k均为正根。该公式由以下计算得出

$$\lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\prod_{\alpha>0}\frac{1+ye^{w\alpha}}{1-e^{w\alpha}} = \prod_{\alpha>0}\begin{cases}1, & \text{if } w\alpha>0\\ (-y), & \text{if } w\alpha<0\end{cases} = (-y)^{\ell(w)}.$$
$$\lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\frac{e^{\beta_k}-1}{e^{\beta_k}+y} = (-y)^{-1},\ \lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\frac{(1+y)e^{\beta_k}}{e^{\beta_k}+y} = 0,\ \lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\frac{(1+y)}{e^{\beta_k}+y} = (-y)^{-1}((-y)-1).$$ □

6.3. **扭曲 R 多项式。** 设 v 是另一个 Weyl 群元素。与第 2.1 节中的通常 R 多项式类似，扭曲 R 多项式 $R_u^{(v)},\ w$ 由以下公式定义（参见 [GLTW24，命题 5.1]）：

$$T_vT_{w^{-1}}^{-1} = q^{\ell(v)}\sum_{u\in W}R_{u,w}^{(v)}(q^{-1})q^{-\ell(vu)}T_{vu}\in H(W). \tag{36}$$

它也有一个组合公式。我们用下表定义子集 $J^{(v),\ \mathbf{u}}_{\ \ \ \ \ \ \ \ }{}^{\pm}$，$E^{(v),\ \mathbf{u}}_{\ \ \ \ \ \ \ \ }{}^{\pm} \subset [\ell]$：

情形	$\mathbf{u}_k = s_{i_k}$	$\mathbf{u}_k = e$
$v\mathbf{u}_{(k-1)}s_{i_k} < v\mathbf{u}(k-1)$	$k \in J^{(v),\mathbf{u}\ \ -}$	$k \in E^{(v),\ \mathbf{u}\ \ -}$
$v\mathbf{u}_{(k-1)}s_{i_k} > v\mathbf{u}(k-1)$	$k \in J^{(v),\ \mathbf{u}\ \ +}$	$k \in E^{(v),\ \mathbf{u}\ \ +}$

$$J^{(v)}_{\mathbf{u}} = J^{(v),\ +}_{\mathbf{u}} \sqcup J^{(v),\ -}_{\mathbf{u}},$$
$$E^{(v)}_{\mathbf{u}} = E^{(v),\ \mathbf{u}\ \ +} \sqcup E^{(v),\ \mathbf{u}\ \ -},$$
$$[\ell] = J^{(v)}_{\mathbf{u}} \sqcup E^{(v)}_{\mathbf{u}}.$$

扭曲 R-多项式具有如下公式 [GLTW24，第 4]节：

$$R^{(v)}_{u,w}(q) = \sum_{\mathbf{u}} q^{|J^{(v),-}_{\mathbf{u}}|}(q-1)^{|E^{(v)}_{\mathbf{u}}|}$$

其中求和遍历 $\mathbf{w}$ 的 v-特 distinguished u-子字，即 $E^{(v),\ \mathbf{u}\ \ -} = \varnothing$。

定理 6.4。对于 u，v，$w \in W$，我们有

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} \prod_{\alpha>0} \frac{1+ye^{w\alpha}}{1-e^{w\alpha}} \operatorname{SMC}_y(Y(u)^\circ)|_w = R^{(v)}_{v^{-1}u,v^{-1}w}(-y).$$

注 6.5。下面解释定理中极限的含义。对于每个 $v \in W$，我们可以将$e^{v\alpha_i}$ 视为关于 $i \in I$ 的独立变量，而对于任意根 α，e^α 被视为这些变量的函数。于是，$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0}$ 就是微积分中多元函数的通常极限。用更专业的语言来说，我们可以将 f 视为 Coxeter 扇所对应的环面簇上的有理函数。极限 $\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} f$（如果有定义）就是 f 在对应于 v的 Weyl 室的环面不动点处的值。

证明。我们通过变量变换（w，u）$\mapsto$ (vw，vu)证明以下等价形式

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} \prod_{\alpha>0} \frac{1+ye^{vw\alpha}}{1-e^{vw\alpha}} \operatorname{SMC}_y(Y(vu)^\circ)|_{vw} = R^{(v)}_{u,w}(-y). \tag{37}$$

取一个约化的 v-字 $\mathbf{v} = (s_{i'_1},\dots,s_{i'_h})$ 和一个约化的 w-字 $\mathbf{w} = (s_{i_1},\dots,s_{i_\ell})$。现在，连接 $\mathbf{vw}$ 是一个 vw-字。记作 $\gamma_k = \beta_{\mathbf{v},\ k}$ 和 $\beta_k = \beta_{\mathbf{w},\ k}$。于是我们有

$$\beta_{\mathbf{vw},k} = \gamma_k \qquad (k=1,\dots,h), \qquad \beta_{\mathbf{vw},h+k} = v\beta_k, \qquad (k=1,\dots,\ell).$$

命题 6 .2 意味着（37）左端可以表示为 vu-子字 $\mathbf{x}$ 的形式，其中 $\mathbf{vw}$，即 .

$$\sum_{vu\text{-subword }\mathbf{x}} (-y)^{|J^-_{\mathbf{x}}|} A_{\mathbf{x}} B_{\mathbf{x}}$$

其中

$$A_{\mathbf{x}} = \prod_{k=1}^{h} \begin{cases} \dfrac{e^{\gamma_k}-1}{e^{\gamma_k}+y} & k \in J_{\mathbf{x}}, \\ \dfrac{(1+y)e^{\gamma_k}}{e^{\gamma_k}+y} & k \in E^-_{\mathbf{x}}, \\ \dfrac{1+y}{e^{\gamma_k}+y} & k \in E^+_{\mathbf{x}}. \end{cases} \qquad B_{\mathbf{x}} = \prod_{k=1}^{\ell} \begin{cases} \dfrac{e^{v\beta_k}-1}{e^{v\beta_k}+y} & h+k \in J_{\mathbf{x}}, \\ \dfrac{(1+y)e^{v\beta_k}}{e^{v\beta_k}+y} & h+k \in E^-_{\mathbf{x}}, \\ \dfrac{1+y}{e^{v\beta_k}+y} & h+k \in E^+_{\mathbf{x}}. \end{cases}$$

首先我们断言

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} A_{\mathbf{x}} = \begin{cases} 1 & \text{if } (\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_h) = \mathbf{v}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $v^{-1}\gamma_k$ 是负根，我们得到

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} \frac{e^{\gamma_k}-1}{e^{\gamma_k}+y} = v\left(\lim_{e^{\alpha_i}\to 0} \frac{e^{v^{-1}\gamma_k}-1}{e^{v^{-1}\gamma_k}+y}\right) = 1,$$
$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0} \frac{(1+y)e^{\gamma_k}}{e^{\gamma_k}+y} = v\left(\lim_{e^{\alpha_i}\to 0} \frac{(1+y)e^{v^{-1}\gamma_k}}{e^{v^{-1}\gamma_k}+y}\right) = 1+y,$$

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0}\frac{1+y}{e^{\gamma_k}+y}=v\left(\lim_{e^{\alpha_i}\to 0}\frac{1+y}{e^{v^{-1}\gamma_k}+y}\right)=0.$$

因此， $A_{\mathbf{x}}$ 的极限非零当且仅当 $E^+_{\mathbf{x}}\cap\{1,\dots,h\}=\varnothing$，这等价于对所有 $k=1$，…，h，$\mathbf{x}_k=\mathbf{v}_k$，根据 k 的归纳法可得。因此，我们可以假设对于 $\mathbf{w}$ 的一个 u-子词，有 $\mathbf{x}=\mathbf{vu}$。由于 $\mathbf{x}^{(h+k)}={}^v\mathbf{u}^{(k)}$，我们有

$$J^+_{\mathbf{x}}=\{1,\dots,h\}\cup(h+J^{(v),+}_{\mathbf{u}}),\qquad J^-_{\mathbf{x}}=h+J^{(v),-}_{\mathbf{u}},\qquad E^\pm_{\mathbf{x}}=h+E^{(v),\pm}_{\mathbf{u}}.$$

使用命题证明中计算出的完全相同的极限 6.3，我们得到

$$\lim_{e^{v\alpha_i}\to 0}(-y)^{|J^-_{\mathbf{vu}}|}\prod_{\alpha>0}\frac{1+ye^{vw\alpha}}{1-e^{vw\alpha}}B_{\mathbf{vu}}=\begin{cases}(-y)^{|J^{(v),-}_{\mathbf{u}}|}((-y)-1)^{|E^{(v)}_{\mathbf{u}}|}, & E^{(v),-}_{\mathbf{u}}=\varnothing;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明至此完成。 □

例 6.6。 考虑 A_2、 $u=s_2$ 和 $w=s_1s_2$ 的情形。我们有

$$\mathrm{SMC}_y(Y(u)^\circ)|_w\cdot\prod_{\alpha>0}\frac{1+ye^{w\alpha}}{1-e^{w\alpha}}=\frac{(1+y)(-ye^{\alpha_2}-1)}{(e^{\alpha_1}-1)(e^{\alpha_2}-1)}.$$

于是我们可以如下计算这些极限

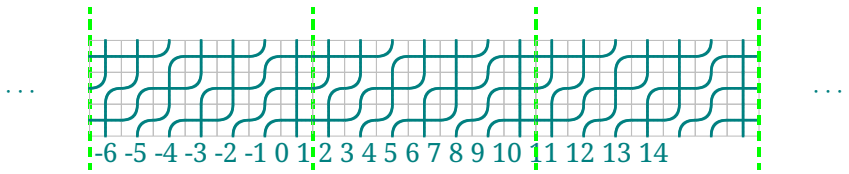
$$\begin{aligned}
v=\mathrm{id}\qquad & e^{\alpha_1}\to 0, e^{\alpha_2}\to 0 && \frac{(1+y)(0-1)}{(0-1)(0-1)}=-y-1,\\
v=s_1\qquad & e^{\alpha_1}\to\infty, e^{\alpha_1+\alpha_2}\to 0 && \frac{(1+y)(0-1)}{(\infty-1)(0-1)}=0,\\
v=s_2\qquad & e^{\alpha_1+\alpha_2}\to 0, e^{\alpha_2}\to\infty && \frac{(1+y)(-y\infty-1)}{(0-1)(\infty-1)}=y^2-y,\\
v=s_1s_2\qquad & e^{\alpha_2}\to 0, e^{\alpha_1+\alpha_2}\to\infty && \frac{(1+y)(0-1)}{(\infty-1)(0-1)}=0,\\
v=s_2s_1\qquad & e^{\alpha_1+\alpha_2}\to\infty, e^{\alpha_1}\to 0 && \frac{(1+y)(-y\infty-1)}{(0-1)(\infty-1)}=y^2-y,\\
v=s_1s_2s_1\qquad & e^{\alpha_2}\to\infty, e^{\alpha_1}\to\infty && \frac{(1+y)(-y\infty-1)}{(\infty-1)(\infty-1)}=0.
\end{aligned}$$

7. Combinatorial formula in type A

在本节中，我们给出 K-理论版本的结果，见 [FGSX25第 7] 节。按照[FGSX25第 7 节的做法，3], 我们来考察方格网上所有可能的 n-周期铺砌，铺砌由以下铺砖构成： $\{1,\dots,k\}\times\mathbb{Z}$铺砖



˜这里， n-周期性是指，位于（i， j）的铺砖与位于（$i+n$， j）的铺砖相同。令 S_n 为类型 A_{n-1} 的扩展仿射 ˜Weyl 群。我们可以从一个 n- 周期管线梦中读出仿射置换 $f\in S_n$ ： 底部第 i 条管线连接到顶部第 f（i）条管线。例如，当$n=7, k=3$时，以下铺砌



是一个读取仿射置换由下式给出的管线梦

$$f(1)=2,\ f(2)=6,\ f(3)=5,\ f(4)=10,\ f(5)=8,\ f(6)=11,\ f(7)=7.$$

我们用 PD(f) 表示所有读取仿射置换为 f 的此类铺砌的集合。设 $x_1,\dots,x_k,t_1,\dots,t_n$为变量。我们来定义每个铺砖的权重。考虑位于 (i,j) 处的铺砖

$$\mathrm{wt}\left(\begin{array}{ccc} & a & \\ a & \ulcorner\!\urcorner & b \\ & b & \end{array}\right)=\begin{cases}\dfrac{(1+y)x_i}{t_j+yx_i}, & \text{if } a<b,\\[2mm] \dfrac{(1+y)t_j}{t_j+yx_i}, & \text{if } a>b.\end{cases}\qquad \mathrm{wt}\left(\begin{array}{ccc} & b & \\ a & + & a \\ & b & \end{array}\right)=\begin{cases}\dfrac{t_j-x_i}{t_j+yx_i}, & \text{if } a<b,\\[2mm] -y\dfrac{t_j-x_i}{t_j+yx_i}, & \text{if } a>b,\end{cases}$$

其中 a （分别为 b）表示该管道来自底部的第 a（分别为第 b）列。对于每个$\pi\in$PD(f)，我们将权重 wt(π) 定义为一个周期内各铺砖权重的乘积，即 $\{1,\dots,k\}\times\{1,\dots,n\}$。我们定义

$$\tilde{G}_f=\sum_{\pi\in\mathsf{PD}(f)}\mathrm{wt}(\pi).$$

鉴于 [SZ], 这可以被视为稳定仿射 Grothendieck 多项式的推广 1.

极大环面 $T\subset G=GL_n$ 是 $(\mathbb{C}^*)^n$。令 t_i 为投影到第 i 个特征。于是 $K_T(\mathrm{pt})=\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\cdots,t_n^{\pm1}]$, 并且

$$e^{\alpha_1}=t_1/t_2,\dots,e^{\alpha_{n-1}}=t_{n-1}/t_n,e^{\alpha_0}=t_n/t_1.$$

考虑格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$。开投影 Richardson 簇称为开 positroid 簇，其由有界仿射置换 [KLS13]索引:

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{array}{cc} & f(i+n)=f(i)+n \\ \text{bijections } f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} & : \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(i)-i)=k \\ & i\le f(i)\le i+n\end{array}\right\}.$$

令 x_1、……、x_k 为典范子丛 $\mathcal{V}$ 在 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ 上的形式 K 理论 Chern 根，则可以将 $K_T(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ 视为以下对象的商

$$\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},...,t_n^{\pm1}][x_1^{\pm1},...,x_k^{\pm1}]^{S_k}.$$

~下面的定理表明， G_f 是开投影 Richardson 簇的 SMC 类的多项式代表元。

~定理 7.1。 对于任意 $f\in\mathcal{B}$，函数 G_f关于 x_1、……、x_k 对称，并且

$$\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f)=\tilde{G}_f\in K_T(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))[[y]].$$

证明。 证明与 [FGSX25第 7], 节中的证明完全平行，这里只作概述。关键步骤是 [FGSX25定理 7 的类似结果，3], 一个用于 SMC 局部化的y（$\mathring{\Sigma}^f$）$|_t$~对所有 t， $f\in S_n$成立的图示公式。其余论证基于定理 5.4 和图示演算。主要区别在于权

$$\mathrm{wt}\left(\begin{array}{ccccc} v & & & & u \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & a & & b & \\ & & \times & & \\ & x & & y & \\ u & & & & v \end{array}\right)=\frac{1}{v+yu}\begin{cases}(1+y)u & a=x<b=y,\\ (1+y)v & a=x>b=y,\\ v-u & a=y>b=x,\\ (-y)(v-u) & a=y<b=x.\end{cases}$$

采用与同上中定理7.3的证明相同的记号（将 y_i 改为 t_i），若$f>s_if$，则我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\mathcal{D}_{s_it},\beta_f)&=\frac{(1+y)t_i}{t_i+yt_{i+1}}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_f)\big)+\frac{t_i-t_{i+1}}{t_i+yt_{i+1}}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_{s_if})\big)\\&=\frac{(1+y)e^{\alpha_i}}{e^{\alpha_i}+y}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_f)\big)+\frac{e^{\alpha_i}-1}{e^{\alpha_i}+y}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_{s_if})\big),\end{aligned}$$

且如果 $f>s_if$

$$\mathrm{wt}(\mathcal{D}_{s_it},\beta_f)=\frac{(1+y)t_{i+1}}{t_i+yt_{i+1}}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_f)\big)+(-y)\frac{t_i-t_{i+1}}{t_i+yt_{i+1}}s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t,\beta_{s_if})\big)$$

$$= \frac{(1+y)}{e^{\alpha_i}+y} s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t, \beta_f)\big) + (-y)\frac{e^{\alpha_i}-1}{e^{\alpha_i}+y} s_i\big(\mathrm{wt}(\mathcal{D}_t, \beta_{s_i f})\big).$$

这与推论 $y(\mathring{\Sigma}^f)|_t$ 4.6 中关于 SMC 的递归一致4.6。 □

例 7.2. 设 $k=1$，并考虑 $X := \mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$。令 $L_A = \mathbb{P}(\mathbb{C}^A)$ 为子集 $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ 对应的坐标平面。令 $L_A^\circ \subset L_A$ 满足 $L_A = \bigsqcup_{B\subset A} L_B^\circ$。

$\mathcal{B}$ 中的子集 $\{1,\dots,n\}$ 之间存在一个双射，由 $f \mapsto A_f := \{1 \le i \le n : f(i) \neq i\}$ 给出，并且

我们有 $\Pi_f = L^\circ_{A_f}$。记 $A = A_f$ 和 $L = L_A$，并从几何角度计算 $\mathrm{SMC}_y(\Pi_f)$。

L 上的欧拉正合列

$$0 \longrightarrow T_L^* \longrightarrow \mathbb{C}^A \otimes \mathcal{O}_L(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow 0$$

给出

$$\lambda_y(T_L^*) = \frac{\lambda_y(\mathbb{C}^A \otimes \mathcal{O}_L(-1))}{\lambda_y(\mathcal{O}_L)} = \frac{1}{1+y}\prod_{j\in A}\left(1+y\frac{x}{t_j}\right).$$

$L = L_A$ 的结构层可以由Koszul复形表示

$$\bigotimes_{j\notin A}[\mathcal{O}(-1) \xrightarrow{x_j} \mathcal{O}_X] = \prod_{j\notin A}\left(1-\frac{x}{t_j}\right).$$

因此，

$$\mathrm{MC}_y(L_A) = \frac{1}{1+y}\cdot\prod_{j\in A}\left(1+y\frac{x}{t_j}\right)\cdot\prod_{j\notin A}\left(1-\frac{x}{t_j}\right) = \frac{1}{1+y}\cdot\prod_{j\in A}\left(1+\frac{(1+y)\frac{x}{t_j}}{1-\frac{x}{t_j}}\right)\cdot\prod_{j}\left(1-\frac{x}{t_j}\right),$$

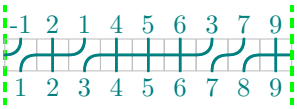
and

$$\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_f) = \mathrm{MC}_y(L_A^\circ) = \frac{1}{1+y}\cdot\prod_{j\in A}\left((1+y)\frac{x}{t_j}\right)\cdot\prod_{j\notin A}\left(1-\frac{x}{t_j}\right).$$

因此，

$$\mathrm{SMC}_y(\mathring{\Pi}_f) = \frac{\mathrm{MC}_y(\mathring{\Pi}_f)}{\lambda_y(T_X^*)} = \prod_{j\in A}\frac{(1+y)\frac{x}{t_j}}{1+y\frac{x}{t_j}}\cdot\prod_{j\notin A}\frac{1-\frac{x}{t_j}}{1+y\frac{x}{t_j}} = \prod_{j\in A}\frac{(1+y)x}{t_j+yx}\cdot\prod_{j\notin A}\frac{t_j-x}{t_j+yx}.$$

从组合角度看，请注意，对于 $f \in \mathcal{B}$ 的铺砖，-铺砖恰好放置在 j 的 ($1j \in A$-项处。例如，当 $A = \{2,4,5,6,9\} \subset \{1,\dots,9\}$ 时，唯一的 $f \in \mathcal{B}$ 以及PD(f 中唯一的元素可以表示为



因此我们有

$$\tilde{G}_f = \prod_{j\in A}\frac{(1+y)x}{t_j+yx}\cdot\prod_{j\notin A}\frac{t_j-x}{t_j+yx}.$$

这与上面的计算一致。

References

[AJS94] H. H. Andersen、J. C. Jantzen 和 W. Soergel。《量子群在 p次单位根处的表示与特征 p下半单群的表示：与 p无关》。《 *Astérisque*》，(220):321，1994年。[AMSS23] Paolo Aluffi、Leonardo C. Mihalcea、J¨org Sch¨urmann 和 Changjian Su。《特征循环、Verma 模与 Schubert 胞腔的 Chern-Schwartz-MacPherson 类的正性之影》。《 *Duke Math. J.*》，172(17):3257–3320，2023年。

[AMSS24a] Paolo Aluffi、Leonardo C. Mihalcea、J¨org Sch¨urmann 和 Changjian Su。《Schubert 胞腔的动机陈类 I：Hecke 代数及其在 Casselman 猜想中的应用》。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 57 141，2024 1 87( ): – 。

[AMSS24b] Paolo Aluffi、Leonardo C. Mihalcea、J¨org Sch¨urmann 和 Changjian Su。《Schubert 胞腔的动机陈类 I：Hecke 代数及其在 Casselman 猜想中的应用》。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 57 141，2024 1 87( ): – 。

[BH21] Huanchen Bao 和何旭华。偏旗簇的 Birkhoff-Bruhat图册。 *Indag. Math. (N.S.)*，32 5 1152( ): –1173，2021。[BH24] Huanchen Bao 和何旭华。全非负旗簇的乘积结构与正则性定理。*Invent. Math.*，237(1):1–47，2024。[Bil99] Sara C. Billey。格拉斯曼流形的 Kostant多项式与上同调环。 *Duke Math. J.*，96(1):205–224，1999。[BN19] Daniel Bump 和 Maki Nakasuji。Iwahori向量的 Casselman基与 Kazhdan-Lusztig多项式。*Canad. J. Math.*，71(6):1351–1366，2019。[Bri97] Michelle Brion。环面作用的等变Chow群。 *Transform. Groups*，2(3):225–267，1997。[BSY10] Jean-Paul Brasselet、J¨org Sch¨urmann 和 Shoji Yokura。奇异空间的 Hirzebruch 类与动机陈类。 *J. Topol. Anal.*，2(1):1–55，2010。[CG10] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg。 *Representation theory and complex geometry*。现代 Birkh¨auser 经典著作。Birkh¨auser Boston, Ltd.，波士顿，MA，2010。1997年版本的重印本。[Deo85] Vinay V. Deodhar。Bruhat序的若干几何方面。I. Bruhat 胞腔的更精细分解。*Invent. Math.*，79(3):499–511，1985。[Deo87] Vinay V. Deodhar。Bruhat序的若干几何方面。II. Kazhdan-Lusztig多项式的抛物类比。 *J. Algebra*，111(2):483–506，1987。[FGSX25] Neil J Y Fan、Peter L Guo、Changjian Su 和 Rui Xiong。开投影 Richardson 簇与仿射Schubert胞腔的 Chern类。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(19):rnaf305，2025。[FRW21] L´aszl´o M. Feh´er、Rich´ard Rim´anyi 和 Andrzej Weber。动机陈类与 K理论稳定包络。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，122(1):153–189，2021。[GKL22] Pavel Galashin、Steven N. Karp 和 Thomas Lam。全非负旗簇的正则性定理。*J. Amer. Math. Soc.*，35(2):513–579，2022。[GLTW24] Pavel Galashin、Thomas Lam、Minh-Tˆa m Trinh 和 Nathan Williams。有理非交叉Coxeter-Catalan组合学。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，129(4):论文编号 e12643，50，2024。[Gra02] William Graham。等变K理论与Schubert簇。 *preprint*，2002。[HKL13] 何旭华、Allen Knutson 和 Jiang-Hua Lu。Bruhat图册。 *unpublished notes*，2013。[HL15] 何旭华和 Thomas Lam。投影Richardson簇与仿射Schubert簇。

Ann. Inst. Fourier , ( ): – 。[*(Grenoble)* 65 6 2385 2412, 2015

Hua19] Daoji Huang。G/P上的 Kazhdan-Lusztig图册。 *arXiv:1910.13017.*，2019。[KL79] David Kazhdan 和 George Lusztig。Coxeter群与 Hecke 代数的表示。 *Invent. Math.*，53 2 165( ): –184，1979。[KL80] David Kazhdan 和 George Lusztig。Schubert簇与 Poincar

´ *Geometry of the Laplace op-* e 对偶性。 *erator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)* 见于， *Proc. Sympos.* 第 *Pure Math.* 185 203 1980 XXXVI卷，页码 – 。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，RI，。[KLS13] Allen Knutson、Thomas Lam 和 David E. Speyer。正拟阵簇：抛接杂耍与几何。

Compos. , ( ): – 。[*Math.* 149 10 1710 1752, 2013

KLS14] Allen Knutson、Thomas Lam 和 David E. Speyer。Richardson簇的投影。

J. Reine Angew. , : – 。[*Math.* 687 133 157, 2014

Knu03] Allen Knutson。由 G/B 上的非复W作用导出的 Schubert演算递推。 *arXiv:0306304.*，2003。[Kon22] Jakub Koncki。余切丛的动机陈类与稳定包络的比较。 *J. Topol.*，15 1 168( ): –203，2022。[Kum02] Shrawan Kumar。 *Kac-Moody groups their flag varieties and representation theory* 204 *Progress* , , *in Mathematics* ¨ 2002 *Kac-Moody groups their flag varieties and representation theory* 204 *Progress* 卷。 *in Mathematics* ¨ 2002 Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，MA，。[KZJ26] Allen Knutson 和 Paul Zinn-Justin。Schubert拼图与可积性 II：动机 Segre类的乘法。*Commun. Am. Math. Soc.*，6:68–152，2026。[LS10] Thomas Lam 和 Mark Shimozono。格拉斯曼簇的量子上同调与仿射 Grassmannian 的同调。*Acta Math.*，204(1):49–90，2010。[LSS10] Thomas Lam、Anne Schilling 和 Mark Shimozono。仿射 Grassmannian 的 K理论 Schubert演算。*Compos. Math.*，146(4):811–852，2010。[Lus85] George Lusztig。等变 K理论与 Hecke 代数的表示。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，94 2 337 342，1985 ( ): – 。[LXZ25] Cristian Lenart、Rui Xiong 和 Changlong Zhong。椭圆Schubert演算的组合学方面。*arXiv:2510.04336.*，2025。[LZZ20] Cristian Lenart、Kirill Zainoulline 和 Changlong Zhong。抛物Kazhdan-Lusztig基、Schubert 类与等变定向上同调。 *J. Inst. Math. Jussieu*，19(6):1889–1929，2020。[MNS22] Leonardo C. Mihalcea、Hiroshi Naruse 和 Changjian Su。等变量子上同调与K理论上的左Demazure-Lusztig算子。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(16):12096–12147，2022。[MO19] Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov。量子群与量子上同调。 *Astérisque*，(408):ix+209，2019。[MS22] Leonardo C. Mihalcea 和 Changjian Su。由动机陈类得到的 Whittaker函数。 *Transform. Groups*，27 3 1045 1067，2022 ( ): – 。附录由 Mihalcea、Su 和 Dave Anderson 撰写。[Pos06] Alexander Postnikov。全正性、格拉斯曼簇与网络。 *arXiv:math.CO/0609764.*，2006。[Ric92] R. W. Richardson。代数群中双陪集的交。 *Indag. Math. (N.S.)*，3(1):69–77，1992。

[Sch17] J¨org Sch¨urmann。奇异空间的Chern类与横截性。载于 *Singularities in geometry, topology, foliations and dynamics* 207 231 ¨ 2017 ，《数学趋势丛书》，第–页。施普林格，Cham，[Spe23] David E Speyer。Richardson簇、投影Richardson簇与正拟阵簇。*arXiv preprint arXiv:2303.04831* 2023 ，[Su17] Changjian Su。Springer 解消稳定基的限制公式。 *Selecta Math. (N.S.)*，23(1):497–518，2017。[SZ] Mark Shimozono与S. Zhang。仿射双Schubert多项式与格罗滕迪克多项式的管道梦。准备中。[SZZ20] Changjian Su、Gufang Zhao与Changlong Zhong。关于Springer 解消的K理论稳定基。*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，53(3):663–711，2020。[Tym09] Julianna Tymoczko。偏旗簇的除差算子。 *arXiv:0912.2545.*，2009。[Zhu17] Xinwen Zhu。仿射 Grassmannian与几何萨塔克等价导论。载于 *Geometry of moduli spaces and representation theory* 24 *IAS/Park City Math. Ser.* 59 154 ，第卷，第–页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗德岛州，2017。

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, 100084, China
Email address: changjiansu@tsinghua.edu.cn

Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 150 Louis-Pasteur, Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada*Email address*: rxiong@uottawa.ca

Department of Mathematics and Statistics, State University of New York at Albany, 1400 WashingtonAvenue, Albany, NY 12222, USA*Email address*: czhong@albany.edu