arXiv:2603.07273v1 [math.ST] 7 Mar 2026

极大辅助性、半参数效率与干扰参数的消除

By Marc Hallin[§] and Bas J.M. Werker[¶] and Bo Zhou[‖]

§ *Université libre de Bruxelles, Belgiumand Institute of Information Theory and Automation, Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic*

¶ *Tilburg University, The Netherlands*

‖ *Virginia Tech, Blacksburg, VA, USA*

通过干扰参数辅助 σ-域限制统计实验，可得到无干扰参数实验。然而，辅助性的一个棘手之处在于，极大辅助 σ-域通常并不唯一。不过也有例外，例如局部渐近正态（LAN）背景下的极限实验。基于此，我们从 H´ajek-Le Cam 渐近视角探讨极大辅助性的唯一性问题，并定义局部渐近极大干扰参数辅助σ-域序列的概念。随后我们证明，任何半参数有效程序都存在相应版本，它们关于此类σ-域可测，同时具有严格的有限样本干扰参数辅助性，因此无需费力估计干扰参数即可将其消除。这与经典切空间投影形成鲜明对比：经典切空间投影同样能够实现半参数效率，但仅具有渐近干扰参数辅助性，而且还必须适当地估计干扰参数。当干扰参数是某种噪声或创新的密度，而该噪声或创新驱动着 LAN 实验的数据生成过程时，我们基于测度输运结果证明，由所谓的中心向外残差秩与符号生成的局部渐近极大干扰参数辅助 σ-域序列成立。将局部实验限制在此类 σ-域上，可得到原始局部 LAN 实验的有限样本干扰参数无关（此处即分布无关）限制序列；尽管如此，这些限制仍能达到原始实验的半参数效率界。

1. 引言。 除了感兴趣参数 $\boldsymbol{\theta}$之外，大多数具有实际意义的统计实验还涉及干扰参数 $\boldsymbol{\vartheta}$ ，而且干扰参数往往是无限维的。典型例子是半参数实验，其中干扰参数是驱动数据生成过程的某种噪声或新息的未指定密度 f 。

1.1. **辅助性与干扰参数的消除。** 消除干扰参数——识别无干扰子实验以进行无干扰推断——近一个世纪以来一直是统计学的核心问题。在这一背景下，一个基本概念是辅助性，其渊源可追溯至Fisher (1925)，该术语正是在此文中首次提出——参见Stigler

MSC 2010 subject classifications: 主要分类号：62G10、62G20；次要分类号：62P20、62M10
Keywords and phrases: 半参数效率，最大辅助性，消除干扰参数，高斯位移，布朗漂移，测度输运，分布无关性，中心向外秩和符号

(2001，1992）。正式定义及其深刻性质是在很久之后才得到阐述的，其中 Debabrata Basu 作出了奠基性贡献（Basu，1955，1958 年，1959，1964年）；参见 Dawid(2011）。其他研究也展示了这一概念的复杂性，并提出了各种细化版本，参见 Fraser（1956）和 Barndorff-Nielsen（1973，1976，1999）等；详情参见Sørensen(2026）。

Basu 1977 年关于这一问题的经典综述（Basu，1977）主要讨论了完备性、（最小）充分性以及（最大）辅助性和干扰参数消除的相关方法（边缘化、条件化等），但得出了一个令人颇感沮丧的结论：不存在适用于任意模型的通用解法。较新的综述，如Ghosh、Reid 和 Fraser（2010），大体上也得出了相同结论。尽管消除干扰参数多年来一直是一个活跃的研究方向，辅助性仍然是“统计理论中的一个晦涩话题”（Cox，1982），它“依然引人入胜”（Ghosh、Reid 和 Fraser，2010），而且尽管投入了“惊人数量的努力与 *ingenuity*”，依然“遍布着逻辑学家的噩梦”（Basu，1977）。

本文从局部和渐近的角度，在局部渐近正态（LAN）实验的背景下，重新探讨辅助性与干扰参数消除问题，以及与半参数效率密切相关的问题。

1.2. 最大干扰参数辅助性。 在一个统计实验中

$$\mathcal{E} := \left(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P} := \{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}} : (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \boldsymbol{\Theta} \times \mathcal{F}\}\right), \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个有限维感兴趣参数， $\boldsymbol{\vartheta}$ 是一个（可能为无限维的）干扰参数。若某个可测函数（$\mathbf{X}$ $\boldsymbol{\theta}$） $\mapsto \boldsymbol{\zeta}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X})$在 $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}}$ 下的分布不依赖于 $\boldsymbol{\vartheta}$，则称其在 $\boldsymbol{\theta}$ 处为 $\mathcal{E}$-干扰参数辅助统计量。显然，这种辅助性在（可测）变换下保持不变：干扰参数辅助性不是单个变量的性质，而是一个 σ-域的性质。对于任何事件 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}} \subseteq \mathcal{B}$ 构成的 σ-域，若其在 $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}}$ 下的概率不依赖于 $\boldsymbol{\vartheta}$，则称该域在 $\boldsymbol{\theta}$ 处为 $\mathcal{E}$-干扰参数辅助（按 Basu 的术语，即 $\boldsymbol{\theta}$-定向 σ-域）。换言之， $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 $\boldsymbol{\theta}$ 处为 $\mathcal{E}$-干扰参数辅助，当且仅当它在指定的 $\boldsymbol{\theta}$ 子实验中是辅助统计量

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\theta}) := \left(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}_{\boldsymbol{\theta}} := \{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}} : \boldsymbol{\vartheta} \in \mathcal{F}\}\right), \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \tag{1.2}$$

属于 $\mathcal{E}$——一个局部概念，因此局部化于 $\boldsymbol{\theta}$。

当此类 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}}$ 存在时，在局部（于 $\boldsymbol{\theta}_0$处）消除干扰参数的一种自然方法，是将对 $\boldsymbol{\theta}$ 的推断建立在 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$可测程序之上：例如，形如 $\mathcal{H}_0$： $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$的假设的无干扰参数检验应基于 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$可测的检验统计量； $\boldsymbol{\theta}$ 在置信水平（$1-\alpha$）下的置信域应构造为 $\boldsymbol{\theta}_0$ 值的集合，使得某个 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$可测检验在水平 α下不拒绝 $\mathcal{H}_0$： $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$，等等。

越大 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}}$ 越好[1]：应当只考虑极大干扰参数辅助 σ域 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}}$（此处的“极大”应理解为在集合包含意义下，除去 $\{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}\text{-}\boldsymbol{\vartheta}}$ 几乎处处成立的$\boldsymbol{\theta}$（$\boldsymbol{\vartheta}$） $\in \boldsymbol{\Theta} \times \mathcal{F}\}$零测集）。因此，应当考虑这样的域。不幸的是，众所周知，极大辅助σ域通常并不唯一（参见许多相关文献，例如Basu (1959, 1964年)；Cox (1971年））。

[1]“更好”这 里是在（半参数）效率的意义上而言的；参见第3 节，以作严格处理。

而要从中选出一个显然并非易事：哪些做得“最好”？哪些能够“最优地”保留关于 $\boldsymbol{\theta}$的所有可用信息？这一概念所涉及的问题在经典教材中已有充分记载，尽管尚未解决（例如参见 Lehmann and Romano(2006)第10章）。

不过也有例外：例如，在具有指定满秩协方差的 d维高斯位置模型（一个 d维观测 $\mathbf{X}$）中，存在唯一的[2] 极大干扰参数辅助 σ域——所谓的高斯位移实验 $\mathcal{E}_{\text{shift}}$——其中（取 $d = d_1 + d_2$）

$$\mathbf{X} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^\top & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\vartheta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}.$$

这里，由以下内容生成的 σ域 $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}^d$ （ $\mathbb{R}^d$上的 Borel σ域）

$$\mathbf{X}_1^* \coloneqq \mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}\Big((\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^\top)\boldsymbol{\theta},\, \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^\top \Big)$$

是唯一的[3] 极大干扰参数辅助 σ域，在（每个） $\boldsymbol{\theta}$ （参见第2.3节）。

高斯位移实验之所以在此背景下具有重要意义，是因为它们在局部渐近正态（LAN）实验这一类实验中充当局部极限实验。然而，在极限高斯位移实验中，极大干扰参数辅助 σ域的唯一性，并不意味着相应局部实验序列中的极大干扰参数辅助 σ域也具有唯一性；对于有限的 n，可能同时存在多个极大干扰参数辅助 σ域。因此，如何将基于极限高斯位移实验中辅助性论证的最优推断应用到（局部）实验序列中，并不明确。在解释如何解决这一问题之前，我们先举一个例子。

Example 1.1. 一个典型的例子——第 4 节将对此进行详细研究——是残差或新息密度未指定的模型情形，即形如以下形式的实验

$$\mathcal{E} \coloneqq \Big(\mathbb{R}^{n\times d}, \mathcal{B}^{n\times d}, \mathcal{P}^{(n)} \coloneqq \{ \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},f}^{(n)} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, f \in \mathcal{F} \} \Big), \tag{1.3}$$

其中， $\mathcal{B}^{n\times d}$ 表示 $\mathbb{R}^{n\times d}$上的博雷尔 σ域， $\boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ 表示某个开 k维实参数空间，[4] 和 $\mathcal{F}$ 表示稍后将具体说明的某个广泛密度类——或者，由于我们将采用渐近观点，也可以是实验序列

$$\mathcal{E}_{\text{global}}^{(n)} \coloneqq \Big(\mathbb{R}^{n\times d}, \mathcal{B}^{n\times d}, \mathcal{P}^{(n)} \coloneqq \{ \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},f}^{(n)} : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}, f \in \mathcal{F} \} \Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

其中， $\boldsymbol{\theta}$ 是感兴趣参数，而 $f \in \mathcal{F}$（某个驱动数据生成过程的残差或新息的未指定密度）则扮演干扰参数的角色。更

[2]当这样的唯一极大干扰参数辅助 σ 域存在时，我们将其称为 *strongly maximally nuisance-ancillary*.[3]为避免反复写出 *essentially unique* （即 *unique up to sets of* $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}}$*-probability zero for all* $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$），我们约定在所有极大辅助 σ域中都包含此类零测集[4]为简化记号，以下全文假设 $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R}^k$。

确切地说，在此类模型中，观测是一个 n 元组$\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{X}_1^{(n)}, \ldots\ldots, \mathbf{X}_n^{(n)})$，其中$\mathbf{X}_i^{(n)}$取 $\mathbb{R}^d$值，并且存在一个映射

$$(\mathbf{X}^{(n)}, \boldsymbol{\theta}) \mapsto \mathbf{Z}^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) := (\mathbf{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \mathbf{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta})), \tag{1.5}$$

从 $\mathbb{R}^{n\times d} \times \boldsymbol{\Theta}$ 到 $\mathbb{R}^{n\times d}$ （残差函数[5]），使得$\mathbf{X}^{(n)} \sim \mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}$，$f$ 当且仅当残差$\mathbf{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$……，$\mathbf{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$为具有密度 f的独立同分布。这类实验涵盖了大量经典半参数模型，例如单输出与多输出的线性回归和非线性回归、面板数据、多元方差分析、向量自回归滑动平均模型、长记忆、非线性以及协整时间序列等，其误差或创新密度未指定。称这样的 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局为（一列）未指定密度实验。

干扰参数辅助性在此语境下因而就是关于 $f \in \mathcal{F}$的分布无关性。可以证明[6]，对于 $d > 1$，由残差$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$第一分量的秩所生成的 σ-域在 $\boldsymbol{\theta}$处是极大$\mathcal{E}^{(n)}$-干扰参数辅助。由$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$第二分量的秩所生成的 σ-域亦然，由$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$第三分量的秩所生成的域亦然，……，直至由$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$第 d个分量的秩所生成的域亦然。由此得到 d 个不同的极大干扰参数辅助 σ-域，其中任何一个都不能在不丧失其辅助性的情况下加以扩大（特别是，它们并非联合辅助统计量），而它们都忽略了关于感兴趣参数 $\boldsymbol{\theta}$的大量“分布无关信息”。如果存在“最佳”者，究竟是哪一个？正如我们将看到的，渐近理论可能提供一种解答，这是因为在局部渐近正态性下，极限局部实验在选择得当时，与有限n 情形不同，容许一个唯一的极大辅助 σ-域。

我们处理局部实验序列中最大干扰参数辅助 σ-代数不唯一性的方法，是重新表述极限实验。更确切地说，我们将极限高斯位移实验扩展为布朗漂移实验。从勒卡姆距离的角度看，这些高斯位移实验与布朗漂移实验是等价的：因此，在局部渐近正态性（LAN）条件下，它们都符合局部极限实验的定义。然而，布朗漂移实验是在更丰富的 σ-代数上定义的。这使我们能够分析局部实验序列中最大干扰参数辅助 σ-代数的不唯一性，并选择“最佳”的一个，即以某种（将在下文精确定义的）意义收敛于（布朗漂移）极限实验中唯一的最大干扰参数辅助 σ-代数的那个。在前面的例子中，这自然会引导我们选择由所谓的中心向外残差秩与符号生成的 σ-代数，见第4节。

1.3. 论文概要。

本文的主要贡献如下。记

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}^{(n)} := \left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathcal{P}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}^{(n)} := \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}^{(n)} : (\boldsymbol{\tau}, \eta) \in \mathbb{R}^k \times \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

[5]在时间序列模型中，由于残差取决于初始值，因此必须略微放宽残差函数的值域为 $\mathbb{R}^{n\times d}$ 这一假设：例如，对于阶数为 p的平稳 VAR 模型，残差函数的取值属于 $\mathbb{R}^{(n-p)\times d}$，而 $\mathbf{X}^{(n)}$ 与残差之间的对应关系涉及一个由 p个初始值组成的元组（不过，后者的渐近影响为零）。[6]这由 Basu (1959) 的一个定理推出；参见 Hallin 等人（2021）在线补充材料中的附录 E、推论 E.1。

以 $(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ 为局部化点的局部实验序列，其中局部参数为 $(\boldsymbol{\tau}, \eta)$（$\boldsymbol{\tau}$感兴趣参数的局部参数，$\eta$ 局部干扰参数），该序列为局部渐近正态序列

$$\mathcal{E}^{(n)}_{\text{global}} := \left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)} = \{\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}} : (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^k \times \mathcal{F}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.7}$$

参数为 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$ 的实验。随着 $n \to \infty$，该局部序列 $\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0}$ 在勒卡姆距离下收敛到一个极限实验，通常将其描述为高斯位移 $\mathcal{E}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$。然而，这个极限高斯位移可以替换为一个等价的（就勒卡姆距离而言）极限布朗漂移实验 $\mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$，该实验在 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger}_{\text{漂移};\,\mathbf{0}}$ 处具有唯一的 $\mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$-辅助统计量。

然而，与高斯位移极限不同，现在我们可以为每个 引入（见定义2.1）序列 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$，$n \in \mathbb{N}$ 的强最大 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局 - 干扰参数辅助 $\boldsymbol{\theta}_0$ 子 -σ- 域，它们具有如下性质：（i）对于固定的 n，每个 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 都是 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处的全局-最大干扰参数辅助统计量；（ii）当 $n \to \infty$ 时，允许对 $\mathcal{B}^{\ddagger}_{\text{漂移};\,\mathbf{0}}$ 进行“重构”，即得到 $\mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 中唯一的最大干扰参数辅助统计量- σ 域。

随后我们证明，当此类序列存在时，对于 $\mathbb{R}^k \times \mathcal{F}$ 中任意的 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$，都可以通过关于 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}_{\boldsymbol{\theta}}$ 可测的程序实现半参数效率，因此这些程序具有有限样本下无干扰参数的性质。这与传统半参数方法形成鲜明对比：传统方法基于切空间投影，其无干扰参数性仅在渐近意义下成立。

最后，我们证明（第4节），在未指定密度模型（1.4）中，由基于测度输运的 $\boldsymbol{\theta}_0$ 残差的中心向外秩和符号（1.5）所生成的 σ-域序列，在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处是强最大 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局-干扰参数辅助统计量。这意味着，在 $(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ 处的半参数效率界可以通过基于中心向外秩和符号的完全分布无关程序达到。

2. 局部渐近正态（LAN）实验序列。

2.1. 整体实验与局部实验。下文中，我们考虑整体实验 (1.7) 的序列 $\mathcal{E}^{(n)}$ global，以及 (1.6) 中定义的局部实验序列 $\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$。为简单起见，我们假设 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 取值于 $\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\vartheta}$, 而 $\boldsymbol{\vartheta}_0$ 取值于某个可分无限维向量空间 $\mathcal{F}$；η 取值于某个可分无限维向量空间 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$，该空间可能依赖于 $\boldsymbol{\vartheta}_0$。局部（在 $(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ 处）和整体概率分布之间的关系为 $\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau},\eta} := \mathrm{P}^{(n)}_{\mathfrak{t}^{(n)}(\boldsymbol{\tau}),\mathfrak{f}^{(n)}(\eta)}$，其中 $\mathfrak{t}^{(n)} = \mathfrak{t}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 是从 $\mathbb{R}^k$到 $\mathbb{R}^k$ 的一列双射映射，$\mathfrak{f}^{(n)} = \mathfrak{f}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 是从 Υ_{ϑ_0} 到 $\mathcal{F}$ 的一列双射映射，并且满足 $\mathfrak{t}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\theta}_0$；记 $\mathbf{0}_{\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}}$ 为 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$中的原点，则对所有 n，都有 $\mathfrak{f}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}(\mathbf{0}_{\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}}) = \boldsymbol{\vartheta}_0$。在传统情形下，我们通常有形如 $\boldsymbol{\theta}_0 + n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}$的 $\mathfrak{t}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}(\boldsymbol{\tau})$，并且存在一个从 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$到 $\mathcal{F}$ 的光滑映射 $\mathfrak{f}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$，满足 $\mathfrak{f}(\mathbf{0}_{\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}}) = \boldsymbol{\vartheta}_0$，$\mathfrak{f}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}(\eta) = \mathfrak{f}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}(n^{-1/2}\eta)$，因此在 (1.6) 中，$\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau},\eta} = \mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau},\mathfrak{f}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}(n^{-1/2}\eta)}$。

注意，对于固定的 n，实验 $\mathcal{E}^{(n)}$ global 和 $\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 共享相同的观测空间和相同的分布族：$\mathcal{P}^{(n)}$ 和 $\mathcal{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$实际上只在参数化上有所不同：对于 $\mathcal{P}^{(n)}$，为$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$；对于 $\mathcal{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$，为$(\boldsymbol{\tau}, \eta)$，其中$(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$之间的对应关系

与$(\boldsymbol{\tau},\eta)$之间是一一对应的（但取决于 $\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0$和 n）。特别是，

$$\mathfrak{f}_{\boldsymbol{\vartheta}_0}^{(n)}(\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0})=\mathcal{F}\quad\text{and}\quad\mathcal{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}:=\{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}:\boldsymbol{\vartheta}\in\mathcal{F}\}=\{\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}^{(n)}:\eta\in\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\},\quad\text{for all } n\in\mathbb{N}.$$

鉴于干扰参数辅助性的定义，我们有如下引理。

LEMMA 2.1. $\mathcal{B}^{(n)}$ 的子σ域 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\theta}}^{(n)}$ 在 $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{0}$ 处是 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}$,-干扰参数辅助的，当且仅当它在 $\boldsymbol{\theta}$处是 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局-干扰参数辅助的。

2.2. 极限实验：从高斯位移到布朗漂移。 在局部渐近正态性下，序列 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)},_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ （即定义于（1.6）的局部实验）在勒卡姆距离下弱收敛到如下形式的极限实验

$$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}:=\Big\{\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{P}:=\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}:\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}^k,\eta\in\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}\Big\}.\tag{2.1}$$

然而，极限实验$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$并非唯一确定（勒卡姆距离仅仅是一种伪距离）。对于定义在某个共同概率空间上的任意两个概率测度P与Q，照例以dP/dQ表示P中相对于Q绝对连续的分量的拉东-尼科迪姆导数：于是，任一实验

$$\mathcal{E}'_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}:=\Big\{\mathcal{X}',\mathcal{B}',\mathcal{P}':=\{\mathbb{P}'_{\boldsymbol{\tau},\eta}:\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}^k,\eta\in\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}\Big\}\tag{2.2}$$

使得在 $\mathbb{P}'_{\mathbf{0},0}$ 下， ℓ 元对数似然比的联合分布

$$\big\{\log(\mathrm{dP}'_{\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1}/\mathrm{dP}'_{\mathbf{0},0}),\ldots,\log(\mathrm{dP}'_{\boldsymbol{\tau}_\ell,\eta_\ell}/\mathrm{dP}'_{\mathbf{0},0})\big\}$$

对于所有（有限的） ℓ以及所有属于 $\mathbb{R}^k\times\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$的 $(\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1)\ldots,(\boldsymbol{\tau}_\ell,\eta_\ell)$，都与在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 下的 ℓ 元组的联合分布相同

$$\big\{\log(\mathrm{dP}_{\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1}/\mathrm{dP}_{\mathbf{0},0}),\ldots,\log(\mathrm{dP}_{\boldsymbol{\tau}_\ell,\eta_\ell}/\mathrm{dP}_{\mathbf{0},0})\big\}$$

按照勒卡姆距离的意义，与 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 等价。因此，$\mathcal{E}'_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 也构成局部序列 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)},_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 的极限实验。

在局部渐近正态性下，极限实验 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 通常被描述为高斯位移实验 $\mathcal{E}_{\text{shift}}=\mathcal{E}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$，其观测为

$$\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift}}=\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}:=\Big(\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}^{\top}:=(\Delta_{\text{int},1},\ldots,\Delta_{\text{int},k}),\big\{\Delta_{\text{nuis},\eta}\big|\eta\in\Upsilon\big\}\Big)^{\top};$$

由于 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 是无限维的， $\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift}}$ 是高斯过程而非高斯向量；在 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}$ 下，对于任意 $\ell\in\mathbb{N}$ 以及任意 $(\boldsymbol{\tau},\eta_1,\ldots,\eta_\ell)\in\mathbb{R}^k\times\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}^{\ell}$，其有限维边际分布均为满秩（高斯）分布

$$\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift}}^{(\ell)}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}=:\boldsymbol{\Delta}_I\\ \Delta_{\text{nuis},\eta_1}=:\Delta_{II,\eta_1}\\ \vdots\\ \Delta_{\text{nuis},\eta_\ell}=:\Delta_{II,\eta_\ell}\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta}\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_1}^{\top}\boldsymbol{\tau}+\mathcal{I}_{\eta_1\eta}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_\ell}^{\top}\boldsymbol{\tau}+\mathcal{I}_{\eta_\ell\eta}\end{pmatrix},\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I}&\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_1}&\ldots\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_\ell}\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_1}^{\top}&\mathcal{I}_{\eta_1\eta_1}&\ldots\mathcal{I}_{\eta_1\eta_\ell}\\ \vdots&&\ldots\\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_\ell}^{\top}&\mathcal{I}_{\eta_\ell\eta_1}&\ldots\mathcal{I}_{\eta_\ell\eta_\ell}\end{pmatrix}\right).\tag{2.3}$$

$k \times k$ 信息矩阵 $\mathrm{I}_{I,I} = \mathrm{I}_{I,I}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$、 $k \times 1$ 交叉信息量 $\mathrm{I}_{I,\eta} = \mathrm{I}_{I,\eta}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$、 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$， 以及标量信息量和交叉信息量 $\mathcal{I}_{\eta\eta'} = \mathcal{I}_{\eta\eta'}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)$、$(\eta, \eta') \in \Upsilon^2_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 取决于所考虑的具体局部渐近正态实验；对于 $\eta = 0$， $\mathrm{I}_{I,0} = \mathbf{0}$ 和 $\mathcal{I}_{0\,\eta'} = 0$ 对所有 $\eta' \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 均成立。在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$， $\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift}}$ 下，其为满秩高斯分布，且具有均值为 0 的有限维高斯边际分布，并且（由于 $\mathrm{I}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}$ 不依赖于 $(\boldsymbol{\tau}, \eta)$）其协方差矩阵与 (2.3) 中的 $\mathrm{I}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}$ 相同：

(2.4)
$$\boldsymbol{\Delta}^{(\ell)}_{\text{shift}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}_{\text{int}} =: \boldsymbol{\Delta}_I \\ \Delta_{\text{nuis},\eta_1} =: \Delta_{II,\eta_1} \\ \vdots \\ \Delta_{\text{nuis},\eta_\ell} =: \Delta_{II,\eta_\ell} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I} & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_1} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta_k} \\ \boldsymbol{\mathcal{I}}^\top_{I,\eta_1} & \mathcal{I}_{\eta_1\eta_1} & \ldots & \mathcal{I}_{\eta_1\eta_k} \\ \vdots & & \ldots & \\ \boldsymbol{\mathcal{I}}^\top_{I,\eta_k} & \mathcal{I}_{\eta_k\eta_1} & \ldots & \mathcal{I}_{\eta_k\eta_k} \end{pmatrix} \right).$$

由此可知，对于观测量为 $\boldsymbol{\Delta}^{(\ell)}$ 位移 的边际高斯实验，其对数似然比具有典型的高斯形式

$$\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}^{(\ell)}_{\text{shift}}) = \boldsymbol{\Delta}_I^\top \boldsymbol{\tau} + \Delta_{II,\eta} - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\tau}^\top \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I}\boldsymbol{\tau} + 2\boldsymbol{\tau}^\top \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta} + \mathcal{I}_{\eta\eta}\right]. \tag{2.5}$$

参数 $\boldsymbol{\tau}$ 和 η 在（2.3）中改变了 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift}}$ 的有限维边际高斯分布，却不影响其协方差结构，因此，按照经典术语，对于 $\mathcal{E}_{\text{shift}}$，这称为 高斯平移实验。

让我们根据引言中所述的理由，说明同一个极限实验$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\ \boldsymbol{\vartheta}_0}$ 也可以描述为一个布朗漂移 实验$\mathcal{E}_{\text{drift}} = \mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ ，它存在于一个比$\mathcal{E}_{\text{shift}} = \mathcal{E}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 更“丰富”的 σ-域上。更确切地说， $\mathcal{E}_{\text{drift}}$ 中的分布$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\ \eta}$可描述为一族

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}} &= \boldsymbol{\Delta}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)} \\ &:= \left\{ \boldsymbol{\Delta}^\top_{\text{int}}(u) := \big(\Delta_{\text{int},1}(u), \ldots, \Delta_{\text{int},k}(u)\big), \boldsymbol{\Delta}_{\text{nuis}}(u) := \big\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(u) | \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\big\} : u \in [0,1] \right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

定义在某个适当（但无关紧要的）概率空间上的多元布朗运动的分布。在$\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$下，这些布朗运动的漂移为零，且具有与（2.3）中相同的（满秩）有限维协方差矩阵 $\mathrm{I}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}$ ——请记住， $u = 1$ 处的均值和协方差结构完全决定了多元布朗运动的分布。在$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}$下， $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$的分量 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}$和$\Delta_{\text{nuis},\eta'}$仍为布朗运动，其协方差结构与$\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$下相同，但现在分别具有漂移 $\mathrm{I}_{I,I}\boldsymbol{\tau} + \mathrm{I}_{I,\eta}$和 $\mathrm{I}^\top_{I,\eta'}\boldsymbol{\tau} + \mathcal{I}_{\eta\eta'}$。这刻画了$\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$和$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}$的所有有限维边际分布，因而也刻画了$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}$和$\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$本身及其对数似然比。

于是我们有如下结果。

PROPOSITION 2.1. 极限实验$\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,f_0}$ 经由$\boldsymbol{\Delta}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 被描述为高斯平移实验$\mathcal{E}_{\text{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$，并经由$\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 被描述为布朗漂移实验$\mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$，在勒卡姆距离意义下是等价的。

在 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}$ 下， $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$ 的分量 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}$ 和 $\Delta_{\text{nuis},\eta'}$ 是布朗运动，其协方差结构与（2.3）中的相同，漂移分别为 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{I}}^\top_{I,\eta'}\boldsymbol{\tau} + \mathcal{I}_{\eta\eta'}$，

分别。 根据吉尔萨诺夫定理，对数似然比 $\log \mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 具有如下形式

$$\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{drift}}) = \boldsymbol{\Delta}_I^{\top}(1)\boldsymbol{\tau} + \Delta_{II,\eta}(1) - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\tau}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,I}\boldsymbol{\tau} + 2\boldsymbol{\tau}^{\top}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{I,\eta} + \mathcal{I}_{\eta\eta}\right]. \tag{2.7}$$

注意，(2.7) 和 (2.5) 在分别用 $\boldsymbol{\Delta}_I(1)$ 和 $\Delta_{II,\eta}(1)$ 替换 $\boldsymbol{\Delta}_I$ 和 $\Delta_{II,\eta}$ 后相同；此外，$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{drift}}(1) := \{\Delta_{I,1}(1) \ldots, \Delta_{I,p}(1)\ \{\Delta_{II,\eta}(1) : \eta \in \Upsilon\}\}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{shift}}$ 在 $(\boldsymbol{\tau},\eta) = (0,0)$ 下共享相同的有限维高斯分布 (2.4)。由此可知，以下分布

$$\left(\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{drift}}), \ldots, \log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{drift}})\right)$$

在 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{drift}} \sim \mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 下的分布，以及

$$\left(\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{shift}}), \ldots, \log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{shift}})\right)$$

在 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{shift}} \sim \mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 下的分布，对于任意 k 和 ℓ 以及任意 $k\ell$ 元组 $(\boldsymbol{\tau}_1,\eta_1)\ldots,(\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell)$ 都相同。据此可得，对于所有 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$，极限高斯位移实验 $\mathcal{E}_{\mathrm{shift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 与极限布朗漂移实验 $\mathcal{E}_{\mathrm{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 在勒卡姆距离意义下相同。□

从现在起，我们关注局部极限实验的布朗漂移表示 $\mathcal{E}_{\mathrm{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$。

2.3. 布朗漂移实验中的充分性与辅助性。 （有界）完备性的概念与充分性和辅助性相关，在统计推断的基础中发挥着重要作用：无偏点估计（所谓的 Lehmann–Scheff´e 定理）、无偏检验（相似性与 Neyman α-结构），以及存在干扰参数时的统计决策。这些主题催生了大量文献、一些争议，以及若干至今悬而未决或无法判定的难题。请回想一下，从本文的角度看，有限样本下干扰参数辅助性的主要问题，是极大辅助 σ域的不唯一性。我们将说明，这种唯一性问题不会出现在极限高斯位移实验或布朗漂移实验中。

考虑第2.2节所述的极限布朗漂移实验 $\mathcal{E}_{\mathrm{drift}} = \mathcal{E}_{\mathrm{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$。将与子族 $\{\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta} : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$ 所对应的 $\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta} : \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^k, \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$ 子实验 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{drift}} = \mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 称为干扰参数实验；将该干扰参数实验 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{drift}}$中任何（极小）充分或（极大）辅助的 σ-域或统计量分别称为（极小）干扰参数充分和（极大）干扰参数辅助。请回想一下，如果子-σ-域 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ 满足以下条件，则称其在 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{drift}}$ 中（有界）完备：设 ζ 为一个（有界） $\mathcal{B}_0$-可测随机变量，并记 $\mathbb{E}_{\mathbf{0},\,\eta}$ 为 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\,\eta}$ 下的期望，则对所有 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{0},\eta}(\zeta) = 0 \ \text{ for all } \ \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0} \quad \text{implies} \quad \zeta = 0 \ \ \mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}\text{-a.s. for all } \ \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}.$$

当实验 $\mathcal{E} = (\Omega\ \mathcal{B}, \mathcal{P})$ 中的（完整） σ-域 $\mathcal{B}$ 是（有界）完备的时，我们也称该实验 $\mathcal{E}$ 是（有界）完备的。

干扰子试验 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\mathrm{drift}}$of $\mathcal{E}_{\mathrm{drift}}$ 的充分性、完备性和辅助性性质可概括如下（回想一下，整个过程中假设 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 是可分的）。

PROPOSITION 2.2. 在布朗漂移实验 $\mathcal{E}_{\text{drift}} = \mathcal{E}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 观测值为 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}} = \boldsymbol{\Delta}_{\text{drift};(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)}$ 定义于 (2.6)中，令 $\mathcal{B}_{\text{suff}} := \sigma\left(\left\{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}) : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\right\}\right)$. 那么

(i) $\mathcal{B}_{\text{suff}} = \sigma\left(\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}\right)$; *(ii)* $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ (等价地，统计量集合 $\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$) 是干扰参数极小充分的（$\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-极小充分的）；*(iii)* $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ (等价地，统计量集合 $\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$) 在 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$中有界完备；*(iv)* $\sigma(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}})$ 在 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$ 中既充分又有界完备（等价地，$\mathcal{E}_{\text{drift}}$ 有界完备）；*(v)* 对任意 $\eta' \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$, $\{\{B_\eta(u) := \Delta_{\text{nuis},\eta}(u) - u\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) \;\; u \in [0,1]\} : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta'}$ 下是一个（无限维）布朗桥，因此在干扰参数实验 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$ 中是辅助统计量；*(vi)* $\mathcal{B}^{\ddagger} := \sigma(\{B_\eta(u) : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}, u \in [0,1]\})$ 是 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$ 中唯一的极大干扰参数辅助 σ-域。

PROOF. (i) 这可直接由（2.7）推出，从而得到

$$\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}) = \Delta_{II,\eta}(1) - \mathcal{I}_{\eta\eta}/2 \quad \text{for all } \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}. \tag{2.8}$$

(ii) 因子分解准则和（2.8）表明，$\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 在 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$中是充分的，也就是说，在 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$处是 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$-干扰参数充分的。显然，任何在 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$ 中充分的 σ-域，在任何形如$\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell} := (\Omega\ \mathcal{B}, \{\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta} : \eta \in \{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\}\})$ 的子实验中也都是充分的，其中 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $\{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\} \subset \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$均可任取。现在，与（i）类似，

$$\mathcal{B}^{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}_{\text{suff}} := \sigma\left(\left\{\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}) : \eta \in \{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\}\right\}\right) = \sigma\big(\{\Delta_{II,\eta}(1) : \eta \in \{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\}\big),$$

而因子分解准则表明，$\mathcal{B}^{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\text{充分}}$ 是$\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\eta_1,\ldots,\eta_\ell}$的极小充分统计量：对于 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$而言，干扰参数充分的 σ-域应当包含所有形如 $\mathcal{B}^{\eta_1,\ldots,\eta_\ell\text{充分}}$ 的 σ-域，因此也应包含 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$。由此可知，$\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 是 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-极小充分的，证毕。

(iii) Farrell（1962）的一个结果（见 Hallin、Werker 和 Zhou（2023）第2节）确立了如下联系：形式为 $\mathcal{E} := (\Omega\ \mathcal{B}, \mathcal{P} := \{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}} | \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\})$ 的实验中，σ-域 $\mathcal{B}$ 的有界完备性（等价地，$\mathcal{E}$ 本身的有界完备性）与拉东-尼科迪姆导数在 $L^1(\mathcal{B},\mathbb{P}_{\mathbf{0},0})$ 中的稠密性（按 L^1 范数）之间存在联系。为处理子 σ- 域 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ 的完备性问题，Hallin 、 Werker 和 Zhou（2023）在命题2中给出了该结果的扩展，这些子域定义了形式为 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_0} := (\Omega\ \mathcal{B}_0, \mathcal{P} := \{\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}} | \ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\})$ 的受限统计实验。证明 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 有界完备性时，便是基于这一扩展。

令序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 分别在 $[0,1]$ 和 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$中稠密（此类序列存在，因为 $\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 是可分的），且满足 $u_i \neq u_j$、 $\eta_i \neq \eta_j$，对 $i \neq j$成立。定义

$$\mathcal{F}_k := \sigma\left(\left\{\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta_i}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}(u_j)) : i,j \le k\right\}\right) \quad k \in \mathbb{N}.$$

序列 $\mathcal{F}_k$、 $k \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$中的收敛滤过。将 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$ 限制到子-σ-域 $\mathcal{F}_k$ 所得到的子实验 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_k}$ 是一个满秩的 k^2维高斯位移，在该实验下，于 $\{u_1, \ldots, u_k\}$中的 u处观测到布朗运动的 k 元组 $(\Delta_{\text{nuis},\,\eta_1}(u) \ldots,\ \Delta_{\text{nuis},\,\eta_k}(u))$。因此，根据指数族的经典性质，对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $\mathcal{F}_k$-σ域在 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_k}$ 中是完备的。令

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}_k} := \text{span}\Big(\big\{\mathbb{E}_{\mathbf{0},0}\big[\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}|\mathcal{F}_k\big] : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\big\}\Big)$$

and

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}_{\text{suff}}} := \text{span}\Big(\big\{\mathbb{E}_{\mathbf{0},0}\big[\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}|\mathcal{B}_{\text{suff}}\big] : \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\big\}\Big)$$

其中，span(...) 表示（...）的所有线性组合构成的集合，我们有 $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_k} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}_{\text{suff}}}$对于所有 $k \in \mathbb{N}$。鉴于 Hallin、Werker 和 Zhou (2023，命题2)，对于所有 k， $\mathcal{F}_k$ 的完备性蕴含 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 也具有完备性——更确切地说，具有有界完备性。

(iv) 注意，(iii) 并不意味着 (iv)；(iv) 也不意味着 (iii)。作为 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$中的观测， $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$ 在 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$中显然是充分的。同样的推理适用于(iii)中的 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$以及 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$。结论即得。

(v) 该结论直接由布朗运动的定义以及边际分布和协方差结构均无干扰参数这一事实得出。

(vi) 作为布朗桥， B_η 在任意 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}$下均为分布无关的，η。因此， $\mathcal{B}^\ddagger$ 是 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-辅助统计量。此外， $\sigma\left(\mathcal{B}_{\text{suff}} \bigcup \mathcal{B}^\ddagger\right) = \mathcal{B}$。于是，根据 Basu (1959) 的一个定理（见 Hallin 等人 (2021年在线补充材料中的附录 E、推论 E.1）， $\mathcal{B}^\ddagger$ 是 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-极大辅助统计量。为了证明更强的性质，即 $\mathcal{B}^\ddagger$ 是 唯一的 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-极大辅助统计量 σ-域，只需证明任意 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-辅助统计量都是 $\mathcal{B}^\ddagger$-可测的。

对于所有 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$，考虑闭的 L^2 空间 $L^2_\eta := L^2(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}},\ \mathbb{P}_{\mathbf{0},\ \eta})$（配备协方差内积），它由 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}(u)$ 的各分量的所有线性组合以及这些线性组合的 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\ \eta}$-均方收敛序列的极限构成。由于 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$ 的协方差结构不依赖于 η，因此这一点对 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 均成立。同样，对于所有 $\eta' \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$，考虑子空间

$$L^2_{\Delta_{\text{nuis},\eta'}(1)} := L^2\Big(\big\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) :\ \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\big\}, \mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta'}\Big) \subset L^2_{\eta'} = L^2_0$$

由 $\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) :\ \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$ 张成（回顾 (i)， $\{\Delta_{\text{nuis},\eta}(1) :\ \eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}\}$ 生成 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$）及其在 $L^2_{\eta'} = L^2_0$ 中的正交补 $L^{2\perp}_{\Delta_{\text{nuis},\ \eta'(1)}}$。基于与上述相同的理由，

$$L^2_{\Delta_{\text{nuis},\eta'}(1)} = L^2_{\Delta_{\text{nuis},0}(1)} =: L^2_{\Delta_{\text{nuis}}(1)} \quad \text{and} \quad L^{2\perp}_{\Delta_{\text{nuis},\eta'}(1)} = L^{2\perp}_{\Delta_{\text{nuis},0}(1)} =: L^{2\perp}_{\Delta_{\text{nuis}}(1)},$$

其中，$L^2_{\Delta_{\text{nuis}}(1)}$ 和 $L^{2\perp}_{\Delta_{\text{nuis}}(1)}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}$ 下相互正交，对任意 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$均成立。为简便起见，分别将它们记作 L^0 和 $L^\perp$，并注意到 L^0 中的元素均为 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$-可测的。

在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}$下，η 对于任意 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$， L^0 和 $L^\perp$ 中的元素彼此独立，$\mathbb{P}_{\mathbf{0},\ \eta}$ 对于任意 $\eta \in \Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$。此外，由于 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$（根据 (ii) 和 (iii)）是 $\mathcal{E}^{\mathbf{0}}_{\text{drift}}$-极小充分且完备，Basu 第一初定理（见附录 A；注意，Koehn 和 Thomas (1975 年) 的条件在此显然成立）因此

这意味着 $L^\perp$ 的所有元素在 $\mathcal{E}^0_{\text{drift}}$中都是辅助统计量。分别将 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$ 投影到 L^0 和 $L^\perp$上（在 L^2_0中），可将 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$ 分解为两个相互独立（在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\,0}$下，对所有 $\eta \in \Upsilon_{\vartheta_0}$均成立）的向量之和 $\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} + \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$，其中 $\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$ 是 $\mathcal{E}^0_{\text{drift}}$-辅助统计量。

现在，考虑一个有界的 $\mathcal{E}^0_{\text{drift}}$-辅助统计量，即一个有界的、 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}$-可测的随机变量 $h(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}}) = h(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} + \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}})$，其分布在任意 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}$ 下都与在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 下相同。稍微滥用一下记号， $h(\boldsymbol{\Delta}_{\text{drift}})$ 可写作 $h(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}, \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}})$。记 Ω^0 和 $\Omega^\perp$ 分别为 $\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$ 的样本空间，其上的 Borel σ-域分别为 $\mathcal{B}^0$ 和 $\mathcal{B}^\perp$。考虑 Borel σ-域 $\mathcal{B}$ 中的元素 B，满足 $h^{-1}(B) = (B^0 \times B^\perp)$，其中某个 $B^0 \in \mathcal{B}^0$ 和 $B^\perp \in \mathcal{B}^\perp$ 存在。由于 h 是辅助统计量，对于任意这样的 B，由于 $\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}$ 与 $\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$ 相互独立，且 $\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$ 具有 $\mathcal{E}^0_{\text{drift}}$-辅助性，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}[h(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}, \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}) \in B] &= \mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}[(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}, \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}) \in B^0 \times B^\perp] \\ &= \mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0)\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}(\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}} \in B^\perp) \\ &= \mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0)\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}(\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}} \in B^\perp)\end{aligned} \tag{2.9}$$

不依赖于 η。只有当 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0)$ 本身不依赖于 η 时，这才有可能。由于 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}$ 是 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$ 的平移版本，而后者是高斯分布，因此，使 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0)$ 不依赖于 η 的 Borel 集 B^0 只能是满足 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}$-概率为零或一的 Borel 集 B^0（因而，对任意 $\eta \in \Upsilon_{\vartheta_0}$，其 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}$-概率也为零或一）；对于这些集合，式（2.9）给出

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}\left[(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}, \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}) \in B^0 \times B^\perp\right] = \mathbb{P}_{\mathbf{0},0}(\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}} \in B^\perp)\mathbb{1}\left[\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}\left(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0\right) > 0\right]. \tag{2.10}$$

最后，考虑 $\mathbb{R}$ 中任意一个 Borel 集 B： $h^{-1}(B)$ 可以写成可数个两两不相交的乘积集 $B^0_i \times B^\perp_i$ 的并集 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^0_i \times B^\perp_i$，这些乘积集满足（2.10），且 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\,\eta}(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}} \in B^0) > 0$。这意味着

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta}\left[h(\boldsymbol{\Delta}^0_{\text{drift}}, \boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}) \in B\right] = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{0},0}\left(\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}} \in B^\perp_i\right) = \mathbb{P}_{\mathbf{0},0}\left(\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}} \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^\perp_i\right).$$

由此可知， h 关于 $\boldsymbol{\Delta}^\perp_{\text{drift}}$ 可测，因此也关于 $\mathcal{B}^\ddagger$ 可测，证毕。□

2.4. 弱收敛的 σ-域。 现在，我们着手刻画有限n 干扰参数辅助 σ-域的序列，这些序列（按一种即将精确定义的意义）收敛到极限布朗漂移实 σ验中的唯一极大干扰参数辅助 $\mathcal{B}^\ddagger$ -域 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$。请注意，这使我们能够在（局部化的）实验序列中选取“最佳”的极大辅助统计量 σ-域，即收敛到极限布朗漂移实验中唯一的极大辅助统计量 σ-域（如命题 2.2所刻画）的那个。

在本节中，我们用 $\mathcal{E}^{(n)}$ 表示如下形式的局部序列 $\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\,\vartheta_0}$ 见式（1.6），它按勒卡姆距离收敛到 $\mathcal{E}$ 如下形式的 $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0,\,\vartheta_0}$ 见式（2.1），由 $\mathcal{E}^{(n)}_{\mathbf{0}}$ 和 $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}$ 与给定的 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$相关联的相应干扰子实验。

我们首先介绍 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱收敛随机变量的概念。由于 $\Upsilon = \Upsilon_{\vartheta_0}$ 是无限维的，引入这一概念需要格外谨慎。回忆一下

dP/dQ 表示 P 关于 Q 绝对连续部分的拉东-尼科迪姆导数。

DEFINITION 2.1. 我们称一列 ξ_n 关于 $\mathcal{B}^{(n)}$可测的随机变量收敛 $\mathcal{E}^{(n)}$弱于 $\mathcal{B}$关于可测的随机变量 ξ，如果对于任意有限子集 $\mathcal{J}$中的值，其中$\boldsymbol{\tau}$，η在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}$，$_0$ =$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}$，$_{\boldsymbol{\vartheta}_0}$下，

$$\left(\begin{array}{c}\left[\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}^{(n)}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}^{(n)}\right]_{(\boldsymbol{\tau},\eta)\in\mathcal{J}}\\ \xi_n\end{array}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{c}\left[\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}\right]_{(\boldsymbol{\tau},\eta)\in\mathcal{J}}\\ \xi\end{array}\right) \quad \text{as } n\to\infty \tag{2.11}$$

其中 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 表示依分布收敛。

注意，对于 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}\,0}^{(n)}$，几乎必然为常数的 $\xi_n = \xi = c$ 几乎必然成立时，这就简化为 $\mathcal{E}^{(n)}$ 到 $\mathcal{E}$的弱收敛定义：例如参见van der Vaart (2000)中的定义 9.1。此外还要注意，(2.11)要求极限实验 $\mathcal{E}$ 定义在足够“丰富”的概率空间上。该空间必须允许序列 ξ_n 中的所有极大辅助统计量 $\mathcal{E}^{(n)}$收敛。这解释了我们为何需要极限实验的布朗漂移表示；通常高斯位移所基于的概率空间不够大，无法表示 ξ。

DEFINITION 2.2. 我们称子 σ 域序列 $\mathcal{A}^{(n)}$ 在 $\mathcal{B}^{(n)}$ $\mathcal{E}^{(n)}$ 下弱收敛于子 σ-弱收敛于子-域 $\mathcal{A}$的 $\mathcal{B}$，如果对于任意 $\mathcal{A}$ 可测变量 ξ，都存在一个 $\mathcal{A}^{(n)}$ 可测序列 $\xi^{(n)}$，使其在 $\mathcal{E}^{(n)}$ 下弱收敛于 ξ。

注意，如果 $\mathcal{A}^{(n)}$ $\mathcal{E}^{(n)}$ 弱收敛于 $\mathcal{A}$，那么任意满足 $\mathcal{A}^{(n)} \subset {\mathcal{A}_0}^{(n)}$ 的序列 ${\mathcal{A}_0}^{(n)}$ 也收敛于 $\mathcal{A}$。这并不会造成问题，因为下文将要求 $\mathcal{A}^{(n)}$ 具有辅助性，因此它不能被任意扩展。

现在我们来介绍本文的主要技术结果。回顾一下，我们希望借助充分性和辅助性的概念来指导推断。对于布朗漂移极限实验，命题 2.2 特别刻画了唯一的极大辅助 σ域。不过，我们如何在所关注的（局部化）实验序列中运用这一结果？下面的推论 2.1 给出了答案：在适当条件下，将实验约化为辅助（或充分）σ域的操作与取（局部化）实验序列的极限可以交换。

称可数生成的 σ-域 $\mathcal{A}$，若其有可数生成族 $\{A_{[i]}: \ i\in\mathbb{N}\}$由一致有界的变量（通常为指示函数）构成。可数生成的 σ-域的常见例子是 σ 上的 Borel $\mathbb{R}^d$-域，$d<\infty$。以下是 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱收敛到可数生成的 σ-域的一个充分条件。

LEMMA 2.2. 设 $\mathcal{A} = \sigma\left(A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots\right) \subseteq \mathcal{B}$ 均为可数生成。若每个 $A_{[i]}$ 都是一个 $\mathcal{A}^{(n)}$-可测变量序列的 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱极限，则 σ-域序列 $\mathcal{A}^{(n)} \subseteq \mathcal{B}^{(n)}$弱收敛到 $\mathcal{A}$，当 $n\to\infty$ 时。

PROOF. 设 ξ 是某个 $\mathcal{A}$-可测随机变量。由于 $\mathcal{A}$ 是可数生成的，我们可以找到 $\sigma\left(A_{[1]}, A_{[2]}, \ldots\ldots, A_{[m]}\right)$-可测随机变量 $\xi_{[m]}$，当 $m\to\infty$时，它们几乎必然收敛到 ξ。此外，每个 $\xi_{[m]}$ 都是一列 $\mathcal{A}^{(n)}$-可测

随机变量 $\xi_{[m],\,n}$的 ξ -弱极限。下面的论证表明， $\mathcal{E}^{(n)}$也是 $\xi_{[m],\,n}$的2.11 中的似然比）的依分布收敛（包括联合收敛）可由例如 L´evy–Prokhorov 度量度量。将该度量记为 δ。那么，给定 $\varepsilon>0$，先选取足够大的 m，使得 $\delta(\xi_{[m]},\ \xi)<\varepsilon/2$。随后，选取足够大的 n，使得 $\delta(\xi_{[m],\,n},\ \xi_{[m]})<\varepsilon/2$。□

我们现在可以陈述主要技术结果。请注意，在下面的条件(i)中，我们假定极限极大辅助 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger}$ 是唯一的，而其有限样本对应物 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 在条件(ii)中则不一定唯一。

THEOREM 2.1. 设 $\mathcal{E}$ 中的 σ-域 $\mathcal{B}$ 是可数生成的。假定

(i) $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}$ 具有一个极小充分且有界完备的 σ-域 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 以及一个唯一的极大辅助 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger}$（等价地[7], 一个唯一的 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger}$，使得 $\sigma\big(\mathcal{B}_{\text{suff}}\cup\mathcal{B}^{\ddagger}\big)$与 $\mathcal{B}$重合）；*(ii)* $\mathcal{E}_{\mathbf{0}}^{(n)}$ 具有一个极小充分且有界完备的 σ-域 $\mathcal{B}^{(n)}{}_{\text{suff}}$ 以及一个极大辅助 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$（等价地，一个 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$，使得 $\sigma\big(\mathcal{B}^{(n)}{}_{\text{suff}}\cup\mathcal{B}^{\ddagger(n)}\big)=\mathcal{B}^{(n)}$）；*(iii)* 当 $n\to\infty$时，$\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ $\mathcal{E}^{(n)}$-弱收敛于 $\mathcal{B}^{\ddagger}$。

那么，对于任意的 l_1、$l_2\in\mathbb{N}$，任意的（$\boldsymbol{\tau}_{k_1}$、……、$\boldsymbol{\tau}_{k_{l_1}}$）$\in\mathbb{R}^{k\times\ell_1}$，以及任意的（$\eta_{\ell_1}$、……、$\eta_{\ell_{l_2}}$）$\in\Upsilon_{\boldsymbol{\vartheta}_0}^{l_2}$，在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}\,0}^{(n)}$，下，当 $n\to\infty$时，

$$\left(\mathbb{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell}}{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{0},0}}\middle|\mathcal{B}^{\ddagger(n)}\right]\right)_{(k,\ell)\in\{k_1,\ldots,k_{l_1}\}\times\{\ell_1,\ldots,\ell_{l_2}\}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau},\eta}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau},\eta}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0},0}}\middle|\mathcal{B}^{\ddagger}\right]\right)_{(k,\ell)\in\{k_1,\ldots,k_{l_1}\}\times\{\ell_1,\ldots,\ell_{l_2}\}}, \tag{2.12}$$

其中，$\mathbb{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$和$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$分别表示在 $\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$和$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$下的期望。

COROLLARY 2.1. $\mathcal{E}^{(n)}$ 在 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 上的限制 $\big(\mathcal{X}^{(n)},\mathcal{B}^{\ddagger(n)},\mathcal{P}^{(n)}\big)$ 在勒卡姆意义下弱收敛于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{B}^{\ddagger}$ 上的限制 $\big(\mathcal{X},\mathcal{B}^{\ddagger},\mathcal{P}\big)$。

PROOF. 该结果由以下定理的综合应用得出： Goggin(1994) 的定理2.1以及Crimaldi 和 Pratelli(2005) 的定理2.1。

具体而言，我们沿用 Goggin（1994）的记号，令 $n=N$、$\mathrm{Q}^N=\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{0}\,0}$、$\mathrm{Q}=\mathbb{P}_{\mathbf{0}}$、$0$、$\mathrm{P}^N=\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$ 和 $\mathrm{P}=\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}}$、$\eta$。我们将唯一的极大辅助 σ-域 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 视为由其 Y^N 可数生成，并将极小充分 σ-域 $\mathcal{B}^{(n)}$suff 视为由其 X^N 生成；同样，$\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 由 Y 生成，而 $\mathcal{B}_{\text{suff}}$ 由 X 生成。于是，在 $\sigma(X^N,Y^N)$ 上，$\mathrm{P}^N\ll\mathrm{Q}^N$，且我们的似然比 $\mathrm{d}\mathbb{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\tau}_k,\eta_\ell}/\mathrm{d}\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{0}\,0}$，对应于他们的拉东-尼科迪姆导数 L^N，关于 $\sigma(X^N,Y^N)$ 可测。

此外，我们的条件 (i)–(iii) 意味着

(a) $(X^N,\ Y^N)$ 的联合分布弱收敛于 $(X,\ Y)$ 的联合分布；

[7]这一等价关系是 Basu第三定理A.3附录A 中的结果。

(b) 在 Q^N 下，$(X^N,\ Y^N,\ L^N(X^N,\ Y^N))$ 的联合分布弱收敛于在 Q 下 $(X,\ Y,\ L(X,\ Y))$ 的联合分布，其中 $\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}[L]=1$；(c) 在 Q^N 下，X^N 与 Y^N 相互独立（在我们的情形中，这可由 Basu 定理得出）。

这些条件使我们能够应用Goggin（1994）的定理2.1，从而得出 $\mathrm{P}\ll\mathrm{Q}$ 关于 $\sigma(X,\ Y)$ 且 $\mathrm{dP}/\mathrm{dQ}=L$。这在我们的设定中已经成立。此外，对于任意有界连续函数 F，条件期望 $\mathbb{E}^{\mathrm{P}^N}[F(X^N)\,|Y^N]$ 依分布收敛于 $\mathbb{E}^{\mathrm{P}}[F(X)\,|Y]$，当 $N\to\infty$时。

这一收敛对应于Crimaldi 和 Pratelli（2005）定理2.1的条件（b）。该条件与紧接在上面的要点（b）（即他们的条件（a））相结合，进而意味着，对于每个有界连续函数 G，在 P^N 下，条件期望 $\mathbb{E}[G(X^N,\ Y^N)\,|Y^N]$ 的分布弱收敛于条件期望 $\mathbb{E}[G(X,\ Y)\,|Y]$ 在 P 下的分布。在我们的语境中，这正是（2.12）中所述的收敛结果。□

定理2.1中的结果针对一般实验 $\mathcal{E}^{(n)}$ 和 $\mathcal{E}$进行了陈述。对于 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\mathrm{drift}}$，根据命题2.2 (v)，我们知道，存在极小充分统计量、有界完备统计量 $\mathcal{B}_{\mathrm{suff}}$以及唯一的极大辅助统计量 $\mathcal{B}^{\ddagger}$，因此它们满足假设 (i)；见 Basu(1955)。如果假设 (ii) 对 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$成立，那么同样根据 Basu (1955)，可知 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 是极大辅助统计量。此外，若 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 满足假设 (iii)，则称其为强极大辅助序列。

令 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 为强极大辅助统计量：推论 2.1 中，$\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$，$\boldsymbol{\vartheta}_0$ 在 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}$ 上的限制收敛到 $\mathcal{E}_{\mathrm{drift}}$ 在 $\mathcal{B}^{\ddagger}$ 上的限制，这种弱收敛具有重要意义。本质上，只要这一结论成立，

(a) 在极限实验 $\mathcal{E}$ 中，通过无干扰参数程序可实现的所有风险函数，都是有限 $\boldsymbol{\tau}$无干扰参数程序在局部序列n中的风险函数序列的极限（对其自变量 $\mathcal{E}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 逐点收敛，$\boldsymbol{\vartheta}_0$且对风险函数集合一致收敛），$\mathcal{E}^{(n)}$ global因此在整体实验中也成立；(b) 由于最优风险函数（针对 $\boldsymbol{\tau}$ 的推断，且干扰参数为 η，处于 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}_0\text{中}f_0}$）取决于所研究的推断问题，并决定半参数效率界在 $(\boldsymbol{\theta}_0,\ \boldsymbol{\vartheta}_0)$ 处的取值，且属于该集合，因此可通过严格无干扰参数的程序序列，在 $(\boldsymbol{\theta}_0,\ \boldsymbol{\vartheta}_0)$ 处实现半参数效率（这些程序在有限n实验中）；(c) 相比之下，基于切空间投影的“传统”半参数有效程序虽然达到相同的效率界，却并非有限样本下无干扰参数的程序，而且需要对干扰参数进行充分估计，等等；见第 3节。

3. 干扰参数辅助性与半参数效率。干扰参数消除问题是经典半参数推断理论的核心问题，正如Bickel 等人（1998年）所阐述的那样。在该理论中，基于以下假设，采用 Le Cam 渐近视角：$\mathcal{E}^{(n)}$ 全局具有局部渐近正态性，其中心序列为

$$\boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}):=\left(\boldsymbol{\Delta}^{(n)\top}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}),\boldsymbol{\Delta}^{(n)\top}_{\mathrm{nuis}}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta})\right)^{\top},\quad n\in\mathbb{N}$$

信息矩阵（算子）为 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta})$。在这一背景下，通过切空间投影消除干扰参数。

在局部（即 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$）参数值 $(\boldsymbol{\tau},\eta)$ 下，该中心序列依分布收敛于

$$\boldsymbol{\Delta} \coloneqq \left(\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}^{\top}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0), \boldsymbol{\Delta}_{\text{nuis}}^{\top}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)\right)^{\top} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}\\ \eta\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)\right)$$

一个极限高斯位移实验的唯一观测，其位置为 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}\\ \eta\end{pmatrix}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$：

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) & \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) \\ (\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) & \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) \end{pmatrix}^{\top}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}。$$

半参数推断中的经典干扰参数消除方法，考虑将 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$ 投影到 L_2 度量下与 $\boldsymbol{\Delta}_{\text{nuis}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$ 正交的空间上，由此得到该极限实验的限制；此度量由 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$ 诱导——这就是所谓的切空间投影

$$\boldsymbol{\Delta}^{*}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) \coloneqq \boldsymbol{\Delta}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0) - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0))^{-1}\boldsymbol{\Delta}_{\text{nuis}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0).$$

容易看出，在局部参数值（$\boldsymbol{\tau},\eta$）下，

$$\boldsymbol{\Delta}^{*}_{\text{int}} \sim \mathcal{N}\Big((\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Gamma}^{\top}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}})\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}\boldsymbol{\Gamma}^{\top}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}\Big) \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$、$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}} = \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$ 等。该分布不依赖于局部干扰参数 η，并确定了半参数效率界——即在存在干扰参数 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的情况下，对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行推断时（在 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$ 处）所能达到的最佳渐近性能。假定存在 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的一个估计量 $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}$，使得

$$\boldsymbol{\Delta}^{(n)*}_{\text{int}} \coloneqq \boldsymbol{\Delta}^{(n)}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}) - \boldsymbol{\Gamma}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})(\boldsymbol{\Gamma}^{(n)}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}))^{-1}\boldsymbol{\Delta}^{(n)}_{\text{nuis}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}) \tag{3.2}$$

依分布收敛，当 $n \to \infty$ 时，在局部（于（$\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0$）处）参数值（$\boldsymbol{\tau},\eta$）下，收敛到 $\boldsymbol{\Delta}^{*}_{\text{int}}$，则半参数有效（在（$\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0$）处）的、关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的推断便可基于高斯位移（3.1）模型，即针对 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)*}{}_{\text{int}}$。

然而，该 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)*}{}_{\text{int}}$ (i) 并不能保证对于有限的 n在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处是 $\mathcal{E}^{(n)}{}_{\text{全局}}$-干扰参数辅助的；此外，(ii) 它（在乘以一个常数并加上一个加性 $o_{\mathrm{P}}(1)$（当 $n \to \infty$ 时于 $\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 下）项的意义下）是切空间投影矩阵 $\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0))^{-1}$ 所转化为渐近干扰参数辅助量的唯一随机向量：因此，切空间投影未能重构整个极大辅助σ-域 $\mathcal{B}^{\dagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$；最后，(iii) 对 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的估计在实践中是无限维的，可能颇为棘手，且 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)*}{}_{\text{int}}$ 到 $\boldsymbol{\Delta}^{*}_{\text{int}}$ 的依分布收敛相当缓慢，并关于 $\boldsymbol{\vartheta}$ 高度非均匀。

与 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})$的切空间投影（3.2）形成鲜明对比的是，当强极大干扰参数辅助 σ-域 $\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 存在时，对其加以条件化具有显著优势：

(i) $\mathrm{E}\big[\mathbf{T}|\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big]$ 在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处对任意 n 都是 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局-干扰参数辅助，而且对任意 $\mathcal{B}^{(n)}$-可测随机向量$\mathbf{T}$亦然——其中包括对任意（可能设定错误的） $\boldsymbol{\vartheta}\in\mathcal{F}$ 而言的$\mathbf{T}=\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})$，以及$\mathbf{T}=\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})$；(ii) 尽管对实际干扰参数 $\boldsymbol{\vartheta}_0$ 的估计并非必需，$\mathrm{E}[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})|\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}]$（其中 $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)}$ 表示切空间投影中所考虑的估计量类型）仍然是有限-n-无干扰参数的，并且在$\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$下与 $\boldsymbol{\Delta}^{*}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0)$渐近等价

,

因此，无论干扰参数 $\boldsymbol{\vartheta}$ 的实际取值 $\boldsymbol{\vartheta}_0$ 如何，都是半参数有效的。

这意味着，半参数有效的推断（对于某个给定的 $\boldsymbol{\vartheta}$ ，在 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})$ 处有效；或者对于任何满足在参数值 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})$ 下 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})$ 依分布收敛到 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})$ 的 $\boldsymbol{\vartheta}$，在 $(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})$ 处有效）可以基于（期望在 $\mathrm{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 下取）

$$\boldsymbol{\Delta}^{(n)\ddagger}_{\mathrm{int}}:=\mathrm{E}\big[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\boldsymbol{\vartheta})|\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big]\quad\text{or}\quad\boldsymbol{\Delta}^{(n)\ddagger}_{\mathrm{int}}:=\mathrm{E}\big[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(n)})|\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}\big],$$

分别而言，它们是有限-n干扰参数辅助的。

上述有限样本n干扰参数辅助推断的优点众所周知。然而，正如引言中所解释的，通常并不存在一个唯一的极大有限样本n 干扰参数辅助σ域，例如例1.1中便是如此。我们通过只考虑那些有限样本n干扰参数辅助统计量来解决这一非唯一性问题：这些统计量按照定义2.11的意义，收敛到极限实验中唯一的相应干扰参数辅助统计量。下一节将这一思路应用于例1.1。

4. 应用：未指定密度模型与残差中心向外秩和符号的半参数效率。作为定理2.1的一项重要应用，考虑 $\mathcal{E}^{(n)}$ 全局(1.4) 所示的例1.1中的未指定密度模型。回想一下，当 $d>1$时，对于给定的 n 和 $\boldsymbol{\theta}_0$，在 $\boldsymbol{\theta}_0$ σ-域上存在许多不同的极大干扰参数辅助统计量，例如由逐分量残差秩生成的辅助统计量。下文将证明，由 σ-域 $\mathcal{B}^{(n)\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 生成的统计量具有强极大干扰参数辅助性。该域由基于测度输运的秩与符号生成，这些秩与符号在*Hallin* 等人的（*2021*）中称为中心向外秩和符号，在*Chernozhukov* 等人的（2017）中称为向量秩，且该域在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处具有强极大干扰参数辅助性。

4.1. 中心向外秩和符号。设随机变量 Z 的分布为 P，且在 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$ 上勒贝格绝对连续，其密度为 f。McCann（1995）的一项著名结果表明，存在一个 P-几乎处处唯一的凸函数 $\mathrm{F}_{\pm}$ 的梯度，它将 $\mathbb{R}^d$ 映射到 $\mathbb{R}^d$ 中的开单位球 $\mathbb{S}_d$，使得若 $\mathrm{Z}\sim\mathrm{P}$，则 $\mathrm{F}_{\pm}(\mathrm{Z})\sim\mathrm{U}_d$——也就是说，用测度输运的便捷记法表示，$\mathrm{F}_{\pm}\#\mathrm{P}=\mathrm{U}_d$（$\mathrm{F}_{\pm}$ 将 P 推前至 U_d），其中 U_d是在 $\mathbb{S}_d$上的球面均匀分布。在温和条件下，$\mathrm{F}_{\pm}$ 是一个同胚——精确表述和细节见 Figalli（2018）；Del Barrio、Gonz´alez-Sanz 和 Hallin（2020）；Del Barrio 和 Gonz´alez-Sanz（2024）。

Hallin 等人(2021 年) 将 $\mathbf{F}_{\pm}$ 称为 中心向外分布函数，它对应于 P（关于 $\mathbf{Z}$ 的分布）。对于 $d=1$，记 F 为传统单变量分布函数，$\mathbf{F}_{\pm}$ 则化简为 $2F-1$。

设 $\mathbf{Z}^{(n)}_1,\ldots,\mathbf{Z}^{(n)}_n$独立同分布，服从分布 P（联合分布 P^n）。Hallin 等人(2021 年) 将 $\mathbf{F}^{(n)}_{\pm}$ 作为 $\mathbf{F}_{\pm}$ 的经验对应量，定义为下列总和的最小值 $\sum_{i=1}^n\left\|\mathbf{Z}^{(n)}_i-\mathfrak{G}(n)\,\pi(i)\right\|^2$

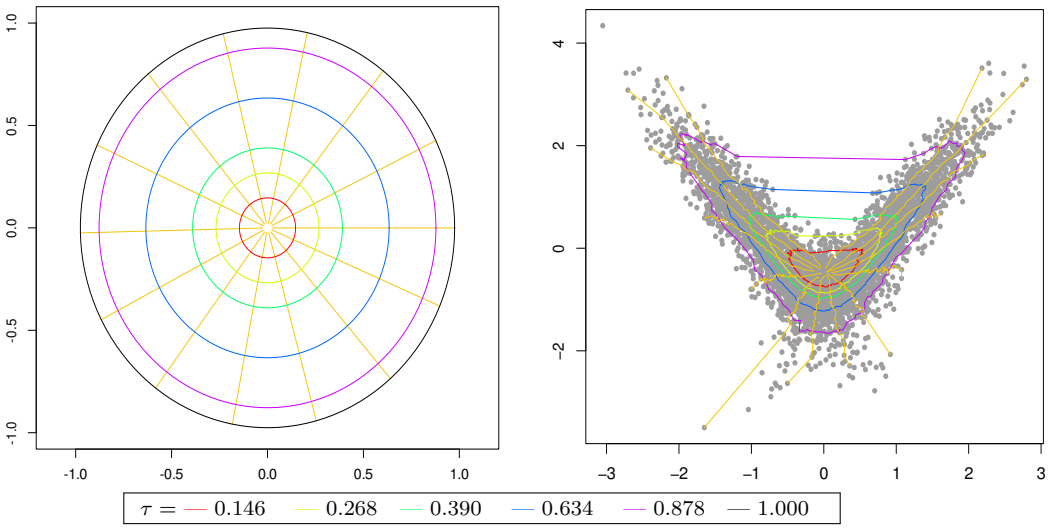

FIG 1. *The grid $\mathfrak{G}^{(n)}$ for $d = 2$ (left-hand panel) and the empirical quantile contours (right-hand panel) of order $\tau = 0.146\ \ 0.268\ \ 0.390\ \ 0.634$ and 0.878 for a sample of size $n = 5$ „,,, 000 from a mixture of three bivariate Gaussians with $n_R = 40$ and $n_S = 125$. The smooth interpolation of ,F $^{(n)}_{\pm}$ described in Section 3 of Hallin et al. (2021) was implemented; interpolated sign curves are shown in yellow.*

在所有配对 $(\mathbf{Z}_i^{(n)}, \mathfrak{G}(n)\,\pi(i))$ (π 即 $\{1,\ldots,n\}$ 的一个排列) 中进行，这些配对连接 $\{\mathbf{Z}_1^{(n)},\ldots,\mathbf{Z}_n^{(n)}\}$与网格 $\mathfrak{G}^{(n)}$:= $\{\mathfrak{G}_1^{(n)},\ldots,\mathfrak{G}(n)_n\}$；并证明，只要 $\mathfrak{G}^{(n)}$ 上的经验分布收敛于 U_d，当 $n\to\infty$时，

$$\max_{1\le i\le n}\left\|\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})-\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{Z}_i^{(n)})\right\|\longrightarrow 0\quad \text{P-a.s. as } n\to\infty$$

（一种 Glivenko-Cantelli 一致性性质）。

由于球面均匀分布是单位球面上的均匀分布与原点到点距离上的均匀分布的乘积分布，因此对 $\mathfrak{G}^{(n)}$ 施加类似的乘积结构是很自然的。将 n 分解为 $n = n_R n_S + n_0$ 其中 $n_0 < \min(n_R, n_S)$，定义 $\mathfrak{G}^{(n)}$ 为 n_S 个[8] 半径 $\mathbb{S}_d$ 的规则排列与一组以原点为中心、半径为 $\frac{1}{n_R+1}$、……、$\frac{n_R}{n_R+1}$的球面的交集，并加上 n_0 个原点的副本；见图 1左侧面板。 Hallin 等人 (2021 年) 随后定义了 中心向外秩和符号，对于$\mathbf{Z}_i^{(n)}$ 的定义为

$$R_i^{(n)} := (n_R+1)\|\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})\| \quad \text{and} \quad \mathbf{S}_i^{(n)} := \mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})/\|\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})\|, \tag{4.1}$$

分别，并确立（见其命题 2.5）分布无关性、（非唯一的）极大辅助性，以及——可能经过简单的破平局程序（在 $n_0 > 1$的情况下）——它们相互的有限n 独立性。图 1 给出了一个数值示例，其中 $\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}$ ，

[8]在图1中，这些单位向量在单位球面 $\mathcal{S}_{d-1} = \mathcal{S}_1$上等间距分布；这一点对于 $d > 2$ 无法实现，更一般地，它们可以选取为 $\mathcal{S}_{d-1}$ 上的独立同分布的均匀分布（当然，并且与数据独立）。

此外，已在凸函数的梯度类中进行插值，正如Hallin 等人（2021 年）第3节中所说明的那样。分位数等高线（沿其 $\|\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}\|$ 保持不变）和符号曲线（沿其$\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}/\|\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}\|$ 保持不变）显示在右侧面板中。请参阅Hallin （2022 年）中关于这些概念的统计应用的综述。

4.2. 中心向外秩和符号的强极大干扰参数辅助性。 假设未指定密度实验 $\mathcal{E}^{(n)}{}_{\text{global}}$ 在（1.4）中满足局部渐近正态性，该实验见例 1.1，其局部实验具有全局参数 $\boldsymbol{\theta}^{(n)}=\boldsymbol{\theta}_0+n^{-1/2}\boldsymbol{\tau}$和 $f^{(n)}=(1+n^{-1/2}\eta)f_0$ 以及局部参数 $\boldsymbol{\tau}$， η 其中 $f_0:\mathbf{z}\mapsto f_0(\mathbf{z})$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一个密度，且 $\eta:\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\mapsto\eta(\mathbf{z})\in\mathbb{R}$属于位置平移的切空间

$$\Upsilon_{f_0}:=\left\{\eta\,\middle|\,\int\eta(\mathbf{z})f_0(\mathbf{z})\mathrm{d}\mu_d=0,\int\eta^2(\mathbf{z})f_0(\mathbf{z})\mathrm{d}\mu_d<\infty\right\}.$$

注意到 Υ_{f_0} 是可数生成的。回顾（参见第 2.3 节和命题 2.2，并对记号作显而易见的调整），在极限布朗漂移实验中，

– 对任意 $\eta'\in\Upsilon_{f_0}$, $B_\eta(u):=\Delta_{\text{nuis},\eta}(u)-u\Delta_{\text{nuis},\eta}(1)$ $u\in[0,1]$, $\eta\in\Upsilon_{f_0}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0},\eta'}$ 下是布朗桥：因此， $B_\eta(u)$， $u\in[0,1]$ 服从正态分布，均值为零，方差为 $u\int\eta^2(\mathbf{z})\mathrm{d}\mu_d=:\mathcal{I}_{\eta,\eta}$, 且与 f_0 和 η' 无关； – $\mathcal{B}^{\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}:=\sigma(\{B_\eta(u):\eta\in\Upsilon_{f_0},\ u\in[0,1]\})$ 是极限实验中唯一的极大干扰参数辅助 σ-域。 $\mathcal{E}_{\text{drift}}$

记由残差 $\mathbf{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)\ldots,\mathbf{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 计算得到的经验中心向外分布函数为 $\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}$ ，并令 $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}:=\sigma\left(\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0))\ldots,\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0))\right)$ （由残差 $\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 的中心向外秩和符号生成的 σ-域），因此我们有如下结果。

PROPOSITION 4.1. 在假设[9], *(i)*下，该序列

$$\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)),\ldots,\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)),\quad n\in\mathbb{N}$$

渐近地 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱生成 $\mathcal{B}^{\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}:=\sigma(\{B_\eta(u):\eta\in\Upsilon_{f_0},\ u\in[0,1]\})$; *(ii)* $\mathcal{B}^{\ddagger(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 个 σ-域序列是强极大辅助。

PROOF. 证明分几个步骤进行。

首先，注意到 $\mathcal{B}^{\ddagger}_{\boldsymbol{\theta}_0}$ 由 $\left\{\mathbf{B}\eta(u):\eta\in\Upsilon^0_{f_0},\quad u\in\mathcal{U}_0\right\}$ 可数生成，其中 $\Upsilon^0_{f_0}$和 $\mathcal{U}_0$ 分别表示 Υ_{f_0} 和 $[0,1]$, 的稠密子集。

接下来，我们证明，对于任意 $\eta\in\Upsilon_{f_0}$ 和 $u\in[0,1]$， $B_\eta(u)$ 在 $\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{0}}{}_{,\,0}=\mathbf{P}^{(n)}_{\boldsymbol{\theta}_0}{}_{,\,f_0}$ 下依分布收敛于序列

$$\underset{\sim}{T}{}^{(n)}_{\eta;u}:=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{\lfloor un\rfloor}\eta\left(\mathbf{F}_{\pm}^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0))\right)\quad n\in\mathbb{N}\tag{4.2}$$

[9]这包含了如下假设：如上所定义的 Υ_{f_0} 是可分的。

$(\mathrm{F}_{\pm}^{(n)}(\mathrm{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0))\ldots,\mathrm{F}_{\pm}^{(n)}(\mathrm{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)))$-可测统计量。事实上，对于任意 n、η 和 $u\in[0,1]$，$\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta;u}$ 是双样本问题的一个中心向外秩统计量，其形式与 Hallin、Hlubinka 和 Hudecov´a（2022）在命题 3.1 中所考虑的形式相同，得分函数为 η，样本量分别为 $\lfloor un\rfloor$ 和 $n-\lfloor un\rfloor$。由该命题 3.1 中的 Hájek 表示和渐近正态性结果可知（注意，已假设 η 是平方可积的，因此满足所需的正则性假设），经过适当的中心化后，$\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta;u}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0}=\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 下，当 $n\to\infty$ 时渐近服从正态分布，其均值为零，方差为 $u\int\eta^2(\mathrm{z})f_0(\mathrm{z})\mathrm{d}\mu_d=u\mathcal{I}_{\eta,\eta}$。

同一技巧结合经典的 Cram´er-Wold 方法，并应用于 $\mathrm{T}_{\sim(n)}:=\left(\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_1;u_1},\ldots,\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_1;u_\ell},\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_2;u_1},\ldots,\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_2;u_\ell},\ldots,\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_k;u_1},\ldots,\underset{\sim}{T}_{(n)\,\eta_k;u_\ell}\right)$ 的联合分布，对任意有限的 k 元组 $\eta_1,\ldots,\eta_k$，其中 Υ_{f_0} 中的每个元素均属于该集合，以及任意有限的 ℓ 元组 $u_1,\ldots,u_\ell$，其中 $[0,1]$ 中的每个元素均属于该集合，得到均值为零、协方差矩阵为

$$\left(u_{j_1}u_{j_2}\int\eta_{i_1}(\mathbf{z})\eta_{i_2}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mu_d\right)_{(i_1,i_2)\in\{1,\ldots,k\};(j_1,j_2)\in\{1,\ldots,\ell\}},$$

$\mathbf{T}_{\sim(n)}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0}=\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,f_0}$ 下的分布（其不依赖于 f_0）.

极小充分性、完备性、分布无关性和 Basu 经典定理进而意味着，在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}\,0}^{(n)}$ 下，$\mathbf{T}_{\sim(n)}$ 与 $\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}$、$\eta/\mathrm{d}\mathbb{P}_{\mathbf{0}\,0}^{(n)}$ 之间相互独立；在极限实验中，最小充分似然比与辅助统计量布朗桥之间也相互独立。因此，根据（2.11 中的 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱收敛定义，联合收敛可由（2.11）中的边际依分布收敛推出。

所需的 $\mathcal{E}^{(n)}$-弱收敛结论最终由定理 2.1 得出。 □.

这对半参数推断有深远影响：

(i) 在 $(\boldsymbol{\theta},f)=(\boldsymbol{\theta}_0,f)$ 处的半参数效率界可由 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\ddagger}$-可测程序达到，也就是说，可通过基于残差 $\mathrm{Z}_1^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)\ldots,\mathrm{Z}_n^{(n)}(\boldsymbol{\theta}_0)$ 的严格无干扰参数（分布无关）程序来达到；特别地，对于 $\boldsymbol{\theta}$ 的半参数有效（在 $(\boldsymbol{\theta},f)=(\boldsymbol{\theta}_0,f_0)$ 处）推断，可以基于 $\mathrm{E}\left[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}\,\mathrm{int}\,(\boldsymbol{\theta}_0,f_0)|\,\mathcal{B}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\ddagger(n)}\right]$（期望是在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0}=\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,f_0}$ 下取的）——这个期望不依赖于 f_0；其在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0}=\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,f_0}$ 下的分布也不依赖于 f_0；

(ii) 这些 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\ddagger(n)}$-可测程序不要求 f_0 是实际密度，而实际密度无需进行估计；

(iii) 然而，如果实际密度得到了相合估计（估计量 $\hat{}f^{(n)}$），则 $\mathrm{E}\left[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,\hat{}f^{(n)})|\,\mathcal{B}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\ddagger(n)}\right]$ 的分布（其中估计量 $\hat{}f_{(n)}$ 仅取决于残差的次序统计量——这是一个非常自然的假设）在给定该次序统计量的条件下仍然不含干扰参数，并产生一致半参数有效的分布无关检验程序；

(iv) 中心序列 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\theta}_0,f_0)$ 的各分量通常是以下形式变量的线性组合

$$\mathbf{T}^{(n)}:=\left(\sum_{i=1}^n(c_i^{(n)}-\bar{c}^{(n)})^2\right)^{-1/2}\sum_{i=1}^n(c_i^{(n)}-\bar{c}^{(n)})\mathbf{J}_f(\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{Z}_i^{(n)})).$$

其中，$(c_i^{(n)} - \bar{c}^{(n)}$<style id='4'}), $i = 1, \ldots, n$ 是刻画所研究问题的中心化常数（例如协变量：参见 Hallin、Hlubinka 和 Hudecov´a (2022) 中的命题 4.1），而 $\mathbf{J}f : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R}^d$ 是某个连续得分函数（例如，f 的位置得分）。命题 3.1（同上）随后在对 $c_i^{(n)}$、f 和 $\mathbf{J}f$ 作出温和假设的条件下，确立了在 $n \to \infty$ 时、于 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 下，$\mathbf{T}^{(n)}$ 与其精确得分 版本之间的渐近等价

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}}_e^{(n)} := \Big(\sum_{i=1}^n (c_i^{(n)} - \bar{c}^{(n)})^2\Big)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (c_i^{(n)} - \bar{c}^{(n)}) \mathcal{E}\left[\mathbf{J}_f(\mathbf{F}_\pm(\mathbf{Z}_i^{(n)})) \,\middle|\, \mathbf{F}_\pm^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})\right],$$

以及其简单得多的近似得分版本

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}}_a^{(n)} := \Big(\sum_{i=1}^n (c_i^{(n)} - \bar{c}^{(n)})^2\Big)^{-1/2} \sum_{i=1}^n (c_i^{(n)} - \bar{c}^{(n)}) \mathbf{J}_f(\mathbf{F}_\pm^{(n)}(\mathbf{Z}_i^{(n)})).$$

这一渐近表示结果（用 H´ajek 的术语来说，仍是如此）使得能够为中心序列 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)}{}_{\text{int}}(\boldsymbol{\theta}_0, f_0)$ 定义基于秩的版本，因此对于所有 n)，在 $\mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)}{}_{,0} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}_0}^{(n)}{}_{,\boldsymbol{\vartheta}_0}$ 下均为分布无关。

上述性质表明，相较于经典切空间投影 $\boldsymbol{\Delta}^{(n)*}(\boldsymbol{\theta}, \hat{f}_{(n)})$，$\mathrm{E}\big[\boldsymbol{\Delta}^{(n)}(\boldsymbol{\theta}, f) \big| \mathcal{A}^{(n)}{}_{\text{辅助性}}\big]$ 具有显著的有限样本优势：即使在有限样本量 n 下，干扰参数仍具有辅助性；具有一致渐近性；且无需估计 f。更通俗地说，最后这一性质意味着，基于某个可能设定错误的假定密度 g 所采用的程序，总能得出有效推断，就像伪极大似然或准极大似然方法一样。当假定密度 g 等于实际密度 f_0 时，该程序达到半参数下界。

5. 结论。本文承袭了统计学中运用充分性和辅助性等概念构建最优推断程序的悠久传统。尤其是，辅助性虽是一个有用的概念，但其应用受到一个事实的限制：极大辅助σ域通常并不唯一。因此，究竟应以哪个极大辅助σ域为依据进行推断，并不明确。

我们通过引入（辅助）σ域弱收敛的概念，并指出在极限实验中通常存在唯一的极大辅助 σ域，解决了这一问题。因此，在（局部化的）实验序列中，自然的做法是选择一个极大辅助 σ域——称之为强极大干扰参数辅助——使其弱收敛到唯一的极限极大辅助 σ域。相对于强极大干扰参数辅助 σ域可测的推断程序是有限样本无干扰参数的，其风险函数收敛到极限实验中无干扰参数程序的风险函数。具体而言，对于局部渐近正态（局部渐近正态性）实验，将中心序列对强极大干扰参数辅助 σ域进行条件化，可得到半参数有效程序；这些程序在有限样本下无干扰参数，而传统的切空间投影只能得到渐近地无干扰参数的半参数有效程序。

我们将说明，这一方法如何在创新密度未指定的多元 LAN 实验中，基于

与测度输运相关的中心向外秩和符号概念，实现半参数最优推断。干扰参数的辅助性由此体现为分布无关性；在这些实验中，基于秩的方法（例如基于中心向外秩和符号可测的检验统计量进行的检验）能够达到半参数效率界，同时具有有限样本分布无关性。

然而，关于 σ-场弱收敛和强极大干扰参数辅助性的概念，并不依赖于极限实验是局部渐近正态的；我们推测，本文所概述的方法经过相应调整后，可以扩展到更一般的情形，即极限实验为局部渐近混合正态（LAMN）或局部渐近布朗泛函（LABF）的情形。

参考文献。

Barndorff-Nielsen, O. E. (1973). 关于 M-辅助性。 *Biometrika* **60** 447–455。Barndorff-Nielsen, O. E. (1976). 非形成性。 *Biometrika* **63** 567–571。

Barndorff-Nielsen 1999 *Probability Theory and* , O. E. ( ). L-非形成 *its Applications* **44** 225 229
性、L-辅助性和 L-充分性。– 。Basu, D. (
1955 *the Indian Journal*). 关于独立于完全充分 *of Statistics Ser. A* **15** 377 380
统计量的统计量。 *Sankhyā*, – 。Basu, D. (
1958 *the Indian Journal of Statistics*). 关于独立于充分统计 *Ser. A* **20** 223 226
量的统计量。 *Sankhyā*, – 。Basu,
D. 1959 *Sankhyā the Indian Journal of Statistics Ser. A* **21** ( ). 辅助统计量族。 , – 。 247 256
Basu, D. 1964 *Sankhyā the Indian Journal of Statistics Ser. A* **26** ( ). 辅助信息的 3 16
恢复。 , – 。Basu, D. (1977 *Journal of the American Statistical Association*). **72** 355 366
关于干扰参数的消除。– 。Bickel, P. J.,
Klaassen Ritov Wellner 1998 *Efficient and Adaptive Estimation* , C. A., , Y. 和 , J. A. *for Semiparametric Models*
( ). 。Springer，柏林。Chernozhukov, V., Galichon, A., Hallin, M. 和 Henry, M. (2017). Monge–Kantorovich 深度、分位数、秩和符号。 *Annals of Statistics* **45** 223–256。Cox, D. R. (
1971 *Journal of the Royal Statistical*). 另类辅助统计量之间 *Society Series B* **33** 251 255
的选择。– 。Cox, D. R. (
1982 1982 *Journal*). 对 Buehler, R.J.（ ） *of the American Statistical Association* 77 581 594
《一些辅助统计量及其性质》的讨论， , – 。Crimaldi, I. 和 Pratelli, L. (2005). 条件期望的收敛结果。 *Bernoulli* **11** 737–745。Dawid, P. (2011 *DasGupta Anirban Editor Selected Works of Debabrata Basu*). 5 8
Basu论辅助性。载于 , , – 。Springer，纽约，NY。Del Barrio, E., González-Sanz, A. 和 Hallin, M. (2020). 关于基于最优输运的中心向外分布函数和分位数函数正则性的一则札记。 *Journal of Multivariate Analysis* **180** 104671。Del Barrio, E. 和 González-Sanz, A. (2024). 非凸域中中心向外分布函数的正则性。 *Advanced Nonlinear Studies* **24** 880–894。Farrell, R. H.
(1962 L^p *Proceedings of the American Mathematical Society*). 中的稠密函数代数。– **13** 324 328
。Figalli, A. (2018 *Nonlinear*). 关 *Analysis* **177** 413 421
于中心向外分布函数和分位数函数的连续性。– 。Fisher, R. A. (
1925 *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*). 统计估计理论。– 。 **22** 700 725
Fraser, D. (1956 *Annals of Mathematical Statistics* **27**). 带干 838 842
扰参数的充分统计量。– 。Ghosh, M., Reid, N.和 Fraser, D. S. (2010). 辅助统计量：综述。 *Statistica Sinica* **20** 1309–1332。Goggin, E. M.(
1994 *The Annals of Probability*). 条件期望的依分布收 1097 1114
敛。– 。

Hallin, M. (2022 *Annual Review of Statistics and*). *its Applications* **9** 401 424
测度输运与统计决策理论。-。Hallin, M., Hlubinka, D. 和 Hudecová, Š. (2022). 用于多输出回归和多元方差分析的完全分布无关中心向外秩检验。 *Journal of the American Statistical Association* **118** 1923– 1939。Hallin, M., Werker, B. J. 和 Zhou, B. (2023). 关于有界完备性和似然比的 L_1-稠密性。 *Sankhya A*, *the Indian Journal of Statistics Ser. A* 1–8。Hallin, M., del Barrio, E., Cuesta-Albertos, J. 和 Matrán, C. (2021). 维度为 d *The Annals of Statistics* **49** 1139 1165
时的分布函数和分位数函数、秩与符号：一种测度输运方法。–。Koehn, U. 和 Thomas, D. L. (1975). 关于独立于充分统计量的统计量：Basu引理。*The American Statistician* **29** 40–42。Lehmann, E. L. 和 Romano, J. P. (2006). *Testing Statistical Hypotheses*。Springer，柏林。Sørensen, M. (2026). Ole Barndorff-Nielsen：沙、风与推断。 *Bernoulli* **32** 49–67。Stigler, S. M.(1992). 辅助性。载于 *Current Issues in Statistical Inference: Essays in Honor of D. Basu*, *IMS Lecture Notes-Monograph Series* **17** 32 51 –。Stigler, S. M. (2001 *State of the Art in Probability and Statistics Festschrift for*). 辅助统计量史。载于 , , *Willem R. van Zwet* *IMS Lecture Notes-Monograph Series* **36** 555– 567。van der Vaart, A. W. (2000). *Asymptotic Statistics*。剑桥大学出版社。

Appendix

A. 极小充分性与极大辅助性。[10]

本附录汇集了一些经典的及不太经典的关于充分性和辅助性的定义与结果，以便查阅；这些内容散见于 Basu的论文中。其中一些内容（例如强本质等价这一概念）经过了轻微修改，以适应我们的需要。

通常称为 Basu 定理的著名结果最初作为定理2发表于Basu (1955)一文中。同一篇论文还包含定理1，而定理2可被视为其部分逆命题。分别称它们为 Basu 第一初定理和第二定理。回顾一下，若统计量 W 关于 $\mathcal{P}$ 是辅助统计量，即对于所有 P，其分布都相同 $\in \mathcal{P}$。

Proposition A.1（Basu 第一初定理）：设 S 对于概率空间 $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$上的一族 $\mathcal{P}$ 分布是充分的。那么，如果统计量 W对于所有 $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$都与 S相互独立，则它关于 $\mathcal{P}$是辅助统计量。

Proposition A.2（Basu 第二定理）。设 T 对某个定义在概率空间 $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ 上的分布族 $\mathcal{P}$ 是（有界）完备且充分的。那么，若统计量 W 相对于 $\mathcal{P}$ 是辅助统计量，则对于所有 $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$， W 与 T 在 P 下相互独立。

Basu 对命题 A.1 的原始证明存在缺陷，因此，Basu 的第一定理并不具有完全的一般性。 Basu（1958 年）意识到了这一问题，并通过对 $\mathcal{P}$ 施加一个额外的充分条件——连通性——加以修正。大约二十年后，该条件被（Koehn 和 Thomas，1975 年）一个弱得多的充要条件所取代；在本文的语境中，该条件显然总能得到满足，因为其中的所有测度都被假定为 $\mathcal{P}$ 相互绝对连续，因而具有相同的零测集。

[10]为便于查阅，本附录内容大部分取自Hallin 等人(2021 年)的在线补充材料。

回顾一下，如果子-σ-域 $\mathcal{A}_0$ 属于 $\mathcal{A}$，且对于所有 $A \in \mathcal{A}_0$ 以及 $\mathcal{P}$ 中的所有 P_1,P_2，都有 $\mathrm{P}_1(A) = \mathrm{P}_2(A)$，则称其为辅助统计量。显然，由辅助统计量 V 生成的 σ-域 $\mathcal{A}_V$ 是辅助的。与充分 σ-域（越小越好）相反，辅助 σ-域应尽可能大。极小充分 σ-域若存在则是唯一的，而极大辅助 σ-域通常存在，但既不唯一，也难以刻画——原因包括零测集问题等。

Basu(1959)因此引入了 $\mathcal{P}$-本质等价和 $\mathcal{P}$-本质极大的子σ-域的概念，并为辅助统计量本质极大建立了一个有用的充分条件。本文通过将范围限制在 $\mathcal{P}$ 相互绝对连续的分布族内，避免了这些零集带来的复杂问题；因此，这些分布共享相同的零集。由此得到 Basu 结果的以下版本——称为 Basu第三定理——足以满足我们的需要。

PROPOSITION A.3（相互绝对连续分布族的 Basu第三定理）。设 $\mathcal{P}$ 是定义在$(\mathcal{X}, \mathcal{A})$上的相互绝对连续分布族。记 $\mathcal{A}_{\mathrm{suff}}$为 $\mathcal{P}$的一个（有界）完备充分子-σ-域，且属于 $\mathcal{A}$。那么，任何包含 (i) 所有 $\mathcal{P}$-零集，且 (ii) 满足 $\sigma\left(\mathcal{A}_{\mathrm{suff}} \cup \mathcal{A}_{\mathrm{anc}}\right) = \mathcal{A}$ 为极大辅助的辅助子-σ-域 $\mathcal{A}_{\mathrm{anc}}$，都是极大辅助的。

B. 干扰参数实验的完备性。

考虑由实验 $\mathcal{E} := (\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P} := \{\mathbb{P}_\eta : \eta \in \Upsilon\})$ 以及始终假设 $\mathcal{P}$ 中的概率测度相互绝对连续，并用 $\mathbb{E}_\eta$ 表示在 $\mathbb{P}_\eta$下的期望。

回顾一下，若对任意（有界）实值 $\mathcal{B}_0$-可测 Y，$\mathbb{E}_\eta Y = 0$ 对所有 $\eta \in \Upsilon$ 均成立时，必有 $Y = 0$ $\mathbb{P}_0$-几乎处处成立（因此，对所有 $\eta \in \Upsilon$，也有 $\mathbb{P}_\eta$-几乎处处成立），则称 σ-域 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ 在 $\mathcal{E}$ 中（有界）完备。等价地，我们也称边缘 子实验 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_0} := (\Omega, \mathcal{B}_0, \mathcal{P})$（在该实验中，统计学家无法观测 $\mathcal{B}$，只能观测 $\mathcal{B}_0$）是（有界）完备的。记作

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}_0} := \operatorname{span}\left\{\mathbb{E}_0\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_\eta}{\mathrm{d}\mathbb{P}_0}|\mathcal{B}_0\right] : \eta \in \Upsilon\right\} \tag{B.1}$$

由以下元素张成的子空间 $L^1(\mathcal{B}_0, \mathbb{P}_0$：边缘似然比 $\mathbb{E}_0\left[\mathrm{d}\mathbb{P}_\eta/\mathrm{d}\mathbb{P}_0|\mathcal{B}_0\right]$，并注意 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}_0} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$。由Hallin、Werker 和 Zhou (2023，命题 1）——这是将 Farrell (1962推广到受限子实验的结果——可知 $\mathcal{B}_0$（等价地，子实 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_0}$）完备，当且仅当 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}_0}$ 在 $L_1(\mathcal{B}_0, \mathbb{P}_0)$ 中稠密。

回忆一下，序列 $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 由 σ-域组成，若满足 $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{B}_0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立，则它是 $(\Omega, \mathcal{B}_0)$ 上的一个滤过；若 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k = \mathcal{B}_0$，则称其为收敛的。以下结果便于证明定义在无限维样本空间上的实验的有界完备性。

LEMMA B.1. 考虑实验 $\mathcal{E} = \left(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\eta : \eta \in \Upsilon\}\right)$，并设 $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $(\Omega, \mathcal{B}_0)$ 上的一个收敛滤过，其中 $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$。那么，$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_0}$ 有界完备，当且仅当每个边缘子实验 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_k} := \left(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathcal{P}\right)$ 都有界完备。

PROOF. “仅当”部分显然。至于“当”部分，根据 Hallin、Werker 和 Zhou (2023，命题 1)，只需证明：若每个 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_k}$ 都有界完备，则 $\mathcal{S}_{\mathcal{B}_0}$ 在 $L_1(\mathcal{B}_0, \mathbb{P}_0)$ 中稠密；也就是说，对于任意有界的 $Y \in L_1(\mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ 以及 $\delta > 0$,

存在 $Y' \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}_0}$ 使得 $\mathbb{E}_0[|Y' - Y|] < \delta$。根据 Doob 鞅收敛定理，我们知道 $Y_k := \mathbb{E}_0[Y|\mathcal{F}_k]$ 在 $L_1(\mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ 中收敛到 Y。此外，由于 Y 有界，$Y_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_k}$。因此，我们可以找到 $k \in \mathbb{N}$ 和 Y''，它们属于 $L_1(\mathcal{F}_k, \mathbb{P}_0)$，且 Y'' 与 Y 的距离小于 $\delta/2$。由于 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}_k}$ 完备，$S_{\mathcal{F}_k}$ 在 $L_1(\mathcal{F}_k, \mathbb{P}_0)$ 中稠密，因此我们接下来可以找到 $Y' \in S_k$，使其与 Y'' 的距离小于 $\delta/2$。由于 $S_k \subset S$，我们找到了 $Y' \in S$，使其与 Y 的距离小于 δ。由 Mazur 定理，证明得证。 □

§ *Université libre de Bruxelles, Belgium* ¶ *Tilburg University, The Netherlandsand*
Institute of Information Theory and Automation, Czech Academy ofSciences, Prague, Czech Republic

‖ *Virginia Tech, Blacksburg, VA, USA*