arXiv:2603.07282v1 [math.AT] 7 Mar 2026

不相交树分层空间的基本群

JEREMY BRAZAS 和 CURTIS KENT

Abstract. 树分层空间是 $\mathbb{R}$-树的一种推广，在描述相对双曲群的大尺度几何时发挥着重要作用。我们研究一类树分层空间的子类，称为 *disjointly tree-graded spaces*，它由到 $\mathbb{R}$-树的映射所确定。我们根据一个不相交树分层空间 $(X, \mathscr{P})$ 各片的基本群，刻画其基本群。即使X 及其各片都不是局部单连通的，我们的结果仍然适用。特别地，我们证明，若各片一致地 1-UV_0，则不相交树分层空间的基本群嵌入到由有限多个片的基本群的自由积构成的逆极限中。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 不相交树分层空间及其参数化 6 3.1. 基本定义 6 3.2. $\mathbf{Tr}(X)$ 的拓扑结构 7 3.3. 度量收缩 9 3.4. 不相交树分层空间的参数化 12 4. 保分层映射与分级子空间 15 5. 不相交树分层空间的度量商 18 6. 环路的相对小收缩：1-UV_0 性质 20 7. 不相交树分层空间中环路的零伦 24 8. 广义覆盖映射 32 9. 不相交树分层空间的逆极限 37 10. 定理 1.1 的证明 46 11. 定理 1.1 的应用 47 参考文献 49

1. Introduction

“树分层空间”的概念由 Drutu 与 Sapir 在[11]中提出，作为 $\mathbb{R}$-树的一种推广，使人能够刻画大尺度

Date：2026年3月10日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主类 55Q52；次类 20F34、57M10、20F69、55P55。*Key words and phrases.* 不相交树分层空间、树分层空间、 $\mathbb{R}$-树、基本群、广义覆盖映射。

相对双曲群的几何。完备测地度量空间 X 称为相对于X 的闭测地子集的一个族 $\mathscr{P}$ （称为片）是树分层 的，如果（1）任意两个不同的片至多相交于一点，并且（2） X 中的每条简单闭曲线（等价地，任一测地三角形）都包含在某一片中。在树分层空间中，片以树状方式排列，从而一条起止于不同片的单射路径必须经过唯一的一个线性有序的片族，并且 X 的每个与 $\bigcup \mathscr{P}$ 不相交的连通子空间都是一棵 $\mathbb{R}$-树。树分层空间在几何群论中的应用源于如下事实：对于一个群，所有渐近锥都具有非平凡树分次结构这一性质是双曲性的一种弱形式。在 [18], 中证明，一个 $CAT(0)$群具有孤立平坦，当且仅当它的所有渐近锥都以等距于欧几里得空间的片进行树分层。这是如下一般结果的一个特例：一个有限生成群相对于一族子群是相对双曲的，当且仅当它的所有渐近锥都相对于外围子群的逆极限是树分层的 [11, 定理8.5]。

树分层空间的基本群在几何群论中的应用中发挥着重要作用。在 [11, 命题 2.2] 中证明了，如果 X 的片 $\mathscr{P}$ 局部一致可缩，那么 $\pi_1(X)$ 同构于这些片的基本群的自由积。“局部一致可缩”这一假设将研究范围限定在所有片都较大且良态的树分层空间，从而排除了可能出现本质环路零序列的情形。本文将开发用于理解树分层空间基本群的工具，其中各片的直径可以任意小。请注意，在考察相对双曲群的渐近锥时，可能会出现这种情形。例如，任何相对于 Baumslag-Solitar 群双曲的有限生成群（其中 $|p| \neq |q|$，关系为 $ta^pt^{-1} = a^q$）都会有不局部单连通的片，因为 Burillo [5]证明了 Baumslag-Solitar 群的渐近锥含有π_1本质嵌入的无限耳环。事实上，[6] 的定理 B 和推论 C 给出了群的渐近锥不局部单连通的条件，并列举了一些满足该条件的自然例子。此外，运用 [22, 23]中的技巧，可以将许多稀疏双曲群表示为由不局部单连通的片构成的树分层空间。

在本文中，我们放宽了通常施加于树分层空间（$X, \mathscr{P}$）的底空间 X 上的某些几何限制。例如，我们仅要求 X 是道路连通、局部道路连通的可度量化空间。另一方面，我们对允许被称为“片”的对象施加了更多限制。作出这一限制，对于实现我们以各片的基本群来刻画树分层空间的基本群这一目标至关重要。例如， $\mathbb{R}$-树 T 关于单点子集合族 $\{t\}$、 $t \in T$ 是树分次的，但由于 T 是单连通的，这种分解是多余的。由此推广，若单点集 $\{x\}$ 位于 X 的某个开子空间中，且该开子空间是一棵 $\mathbb{R}$-树，则我们通常希望避免称 $\{x\}$ 为片。为此，我们考虑树分层空间（$X, \mathscr{P}$），其中片的集合 $\mathscr{P}$ 满足以下附加条件：

(1) 片是片的并集 $\mathbf{Pc}(X) = \bigcup \mathscr{P}$ 的道路连通分支；(2) 集合 $\mathbf{Pc}(X)$ 在 X 中是闭集。

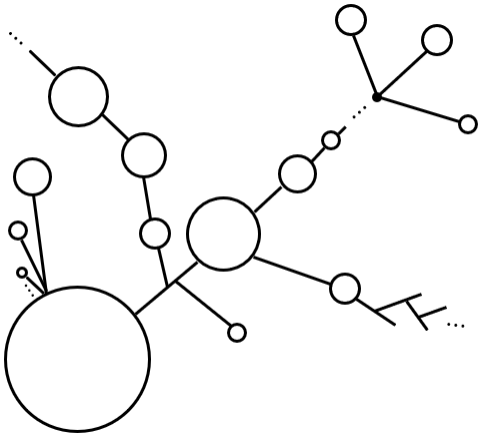


FIGURE 1. 一个不相交树分层空间，其中各片以圆或放大的点来表示。

我们称 $\mathscr{P}$ X 上的一个不交树分级，并将这一对 $(X, \mathscr{P})$ 称为不相交树分层空间。在这样的空间中，集合 $\mathbf{Tr}(X) = X \backslash \mathbf{Pc}(X)$ 是若干开 $\mathbb{R}$-树的不交并，我们称之为 X 的树状部分 （见图1）。不交树分级的一个结构性优势是，不同的片总是被 X 的树状部分中的某个连通分支隔开，因此可以将子集 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$ 中的片压缩，而不影响 $\mathscr{P} \backslash \mathscr{Q}$中的片。关于我们的定义与 Drutu 和 Sapir 的定义的详细比较，请参见注3.3。

我们的定义也受到其与皮亚诺连续统基本群之间明显关联的启发。若 X 是一个皮亚诺连续统，且存在一个真闭子空间 $A \subseteq X$，使得商空间 X/A 是一维的，那么已知 X/A 存在一个广义万有覆盖映射 $p\colon\ E \to X/A$ ，其意义见 Fischer 和 Zastrow [16] ，其中 E 是一棵 $\mathbb{R}$-树。在即将发表的工作中，作者证明，沿商映射 $q\colon\ X \to X/A$ 对 p 作拉回所得的 $p' : E' \to X$ 是一个广义覆盖映射，其中 E' 继承了不相交树分层空间的结构，其片与 A的道路连通分支同胚。直观地说， E' 是将恰好子空间 $X \backslash A$ （假定为一维）“展开”为 $\mathbb{R}$-树连通分支的结果，因此，相对于选定的起点， X 中的路径都能唯一提升到 E' 。

当空间 X 没有万有覆盖时，通常会采用形状理论方法，通过从 X 到某些特殊类别空间的映射来检测基本群元素的非平凡性。例如，如果对于每个本质环路 α : $S^1 \to X$，都存在一个多面体 K 和一个映射 $f\colon\ X \to K$ ，使得 $f \circ \alpha\colon\ S^1 \to K$ 是本质的，那么就称空间X 是 π_1形状单射的； 也就是说，映射到多面体能够检测所有基本群元素。具有 π_1-形状单射性的空间包括一维度量空间 [7, 13], 、平面集 [16], 、流形树 [14], 、CW复形的收缩楔和 [21], 以及许多其他空间。我们的总体方法与 π_1-形状单射性在思想上相似。我们利用到仅含有限个片的不相交树分层空间的映射，检测不相交树分层空间中基本群元素的非平凡性。不过，我们的方法要一般得多，因为我们并不要求不相交树分层空间的片是多面体、具有良好的基本群，甚至不要求它们本身是 X -形状单射的。

树分层空间的片是多面体、具有良好的基本群，甚至不要求它们本身是π_1-形状单射的。

如果 $\mathscr{P}$ 是 X 上的不交树分级，且 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$ 是一个子集，那么存在一个不相交树分级空间 $X_{\mathscr{F}}$ 以及一个度量商映射 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon X \to X_{\mathscr{F}}$，其中不属于 $\mathscr{F}$ 的每个片都被压缩为 $X_{\mathscr{F}}$ 中的一个单点片（见定理 5.2）。我们的主要结果表明，通过投影到具有有限个片的这类度量商空间，可以检测基本群元素的非平凡性。我们唯一的假设是，$\mathbf{Pc}(X)$中的小可缩环路可以利用相对较小的零伦进行压缩，即 $\mathbf{Pc}(X)$满足一致 1-UV_0 性质（定义 6.2）。注意，这一假设允许存在本质环的零序列。

定理 1.1。 设$(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，其中$\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0的。则环路 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是本质环路，当且仅当存在一个有限个片的集合 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$，使得 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha\colon S^1 \to X_{\mathscr{F}}$ 是本质环路。

例 6.4 表明，如果 Pc(X) 不是一致 1-UV_0，那么定理 1.1 可能不成立。定理 1.1 的证明包含许多步骤，其中部分内容受上述 π_1-形单射性的证明启发。定理 1.1 的一个直接推论是，我们能够将无交树分级空间的基本群识别为由 X 各片的基本群的有限自由积构成的逆极限的一个子群。为精确表述这一点，令 $Fin(\mathscr{P})$ 表示由 $\mathscr{P}$ 的有限子集组成、并按子集包含关系定向的集合。每当 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ 属于 $Fin(\mathscr{P})$ 时，都存在一个度量商映射 $\Gamma_{\mathscr{F}',\mathscr{F}}\colon X_{\mathscr{F}'} \to X_{\mathscr{F}}$，将 $\mathscr{F}'\backslash\mathscr{F}$ 中的每个片压缩为一个单点片（备注 5.5）。如果对于每个有限集 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$ 都有 $x_0 \in X$ 和 $x_{\mathscr{F}} = \Gamma_{\mathscr{F}}(x_0)$，则可得到一个带有群同态粘结映射 $\Gamma_{\mathscr{F}',\mathscr{F}\#}\colon \pi_1(X_{\mathscr{F}'}, x_{\mathscr{F}'}) \to \pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}})$ 的逆系统。度量商映射 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon X \to X_{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F} \in Fin(\mathscr{P})$ 诱导出一个典范同态 $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to \varprojlim_{\mathscr{F}\in Fin(\mathscr{P})} \pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}})$，将其映射到由 $\Phi(g) = (\Gamma_{\mathscr{F}\#}(g))_{\mathscr{F}}$ 给出的逆极限。

推论 1.2。 设$(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，且$\mathbf{Pc}(X)$ 一致1-UV_0。那么典范同态

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \to \varprojlim_{\mathscr{F}\in Fin(\mathscr{P})} \pi_1\left(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}}\right)$$

（如上所定义）是单射。

对于每个 $\mathscr{F} \in Fin(\mathscr{P})$，群 $\pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}})$（非典范地）同构于有限自由积 $*_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(P, x_P)$，其中基点 $x_P \in P$ 可作某种选择（见推论 3.18）。因此，推论 1.2 成功地用 X 中各片的基本群刻画了 $\pi_1(X, x_0)$ 的非平凡元。我们还指出，若一个不相交树分层空间只有有限个非退化片，且这些片全都是多面体，那么它与一个多面体同伦等价。因此，下面的结论可直接由定理 1.1 得出。

推论1.3。 如果$(X, \mathscr{P})$ 是不相交树分层空间，且$\mathbf{Pc}(X)$ 是一致1-UV_0 ，并且每个片 $P \in \mathscr{P}$ 都是多面体，那么 X 是π_1-形状单射。

在第11节中，我们使用定理 1.1 来确定这样的情形：不相交树分层空间之间的保分层映射（即将片映入片的映射）是 π_1-单射的。以下定理对于我们预期将其应用于 Peano连续统的基本群，尤为重要。

定理1.4. 设$(X,\mathscr{P})$和$(Y,\mathscr{Q})$是不相交树分层空间，其中$\mathbf{Pc}(X)$一致1-UV_0，且设 $f: X\to Y$ 是一个连续函数，满足 X 的每个片都映入 Y 的某个片，并且 X 中没有两个片映入 Y中的同一个片。那么， f 是 π_1-单射，当且仅当$f|_{\mathbf{Pc}(X)}:\mathbf{Pc}(X)\to\mathbf{Pc}(Y)$ 是 π_1- 单射。

2. Preliminaries

本文中考虑的所有空间均假设为豪斯多夫空间。我们分别用 $[0,1]$,S^1 和 $\mathbb{D}$ 表示闭单位区间、单位圆和闭单位圆盘。与 $[0,1]$ 同胚的空间称为弧，与 S^1 同胚的空间称为简单闭曲线。通常，“映射”一词指连续函数。若 $f\colon (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是空间之间的基点映射，则 $f_{\#}\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 表示其在基本群上诱导的同态。若 $f\colon (X,d)\to(Y,\rho)$ 是度量空间之间的函数，则称 f 是非扩张的，如果 f 不增加距离，即对所有 $x_1,x_2\in X$， $\rho(f(x_1)\ f(x))\le d(x_1,x_2)$。

空间 X 中的一条路径 是一个连续函数 $\alpha\colon [a,b]\to X$。当 $\alpha(a)=\alpha(b)$ 时，我们称 α 为一个环路，并可将 α 视为一个映射 $S^1\to X$。若存在一个映射 $g\colon \mathbb{D}\to X$ 使得 $g|_{S^1}=\alpha$（等价地，若 α是零伦的），则环路 $\alpha\colon S^1\to X$ 是非本质的（在 X中）；否则它是本质的 。我们用 $\alpha\cdot\beta$表示路径拼接，用 α^{-1} 表示 α的反向路径。

若对于任意不同的点 x、$y\in X$，空间 X 中都存在一条（唯一的）弧 $A\subseteq X$，其端点为 x 和 y，则称空间 X 是（唯一）弧连通的。每个道路连通豪斯多夫空间都是弧连通的。众所周知，豪斯多夫空间是唯一弧连通的，当且仅当 X 不含有作为子空间的简单闭曲线。以下引理蕴含了这一刻画，且与我们的目的更加相关。

引理 2.1. 若 X 是豪斯多夫空间， A_1、$A_2\subseteq X$ 是具有相同端点 x 和 y 的弧，且 $z\in A_1\backslash A_2$，则存在一条简单闭曲线 $C\subseteq A_1\cup A_2$，它包含 *(1)* 点 z、*(2)* A_1 的一个子弧，以及 *(3)* A_2 的一个子弧。

证明。令 α_1、$\alpha_2\colon [0,1]\to X$ 是分别参数化 A_1、A_2 的单射路径。令 s 为 $\alpha_1^{-1}(z)$ 的唯一元素。集合 $C=\alpha_1^{-1}(\mathrm{Im}(\alpha_2))$ 在 $[0,1]$ 中是闭集，并且根据假设有 $\{0,1\}\subseteq C\subseteq[0,1]\backslash\{s\}$。因此，存在 $[0,1]\backslash C$ 的一个连通分支 (a,b)，使得 $s\in(a,b)$。由于 a、$b\in C$ 且 α_2 是单射，我们有 $\alpha_1(a)=\alpha_2(c)$ 和 $\alpha_1(b)=\alpha_2(d)$，其中 c、$d\in[0,1]$ 唯一。必要时取 α_2 的反向路径，我们可以假设 $c<d$。现在， $C=\alpha_1([a,b])\cup\alpha_2([c,d])$ 是一条满足所需性质的简单闭曲线。□

定义 2.2. 若拓扑空间 T 是

(1) 若 T 是豪斯多夫、弧连通路径唯一且局部弧连通的，则称其为拓扑树；

(2) 若 T 是可度量化的拓扑树，则称其为拓扑 $\mathbb{R}$-树；(3) 若 T 是紧致拓扑 $\mathbb{R}$-树，则称其为树状连续体。

由引理 2.1 可知，豪斯多夫空间 X 是拓扑树，当且仅当 X 连通、局部道路连通且不含简单闭曲线。另请注意，拓扑树的子空间连通（分别为全不连通），当且仅当它道路连通（分别为全路径不连通）。

度量空间 $(X,\ d)$ 是一棵 $\mathbb{R}$-树，当且仅当 X 唯一弧连通，并且 X 中的每条弧都是实闭区间 $[a,b]\to X$ 的等距嵌入[24]的像。如果 $(X,\ d)$ 是一棵 $\mathbb{R}$-树，那么 X 显然是一棵拓扑 $\mathbb{R}$-树。更为不显然的是，每棵拓扑 $\mathbb{R}$-树 X 都存在一个相容度量 d，使得 $(X,\ d)$ 是一棵 $\mathbb{R}$-树 [19]。众所周知，$\mathbb{R}$-树是可缩的。显然，每棵拓扑树都与一个点弱等价。然而，所有拓扑树是否都是可缩的（在 ZFC 中），似乎仍是一个悬而未决的问题。

皮亚诺连续统是一个连通、局部连通的紧致可度量空间。哈恩-马祖凯维奇定理指出，豪斯多夫空间 X 是皮亚诺连续统，当且仅当存在一条满射路径 $\alpha:[0,1]\to X$。拓扑树是皮亚诺连续统，当且仅当它是树状连续体。

3. Disjointly tree-graded spaces and their parameterizations

3.1. 基本定义。

定义 3.1。设 X 是一个道路连通、局部道路连通的可度量化空间，且 $\mathscr{P}$ 是 X 的一个非空闭子集族（称为片），满足以下性质：

(1) $\bigcup\mathscr{P}$ 在 X中是闭集；(2) $\mathscr{P}$ 的元素是 $\bigcup\mathscr{P}$的道路连通分支；(3) X 中的每条简单闭曲线都包含在某个片中。

我们称 $\mathscr{P}$ 上的不交树分级为 X，并将这一对 $(X,\mathscr{P})$ 称为不相交树分层空间。

我们将$\mathbf{Pc}(X)=\bigcup\mathscr{P}$ 称为 X 的片部分，将$\mathbf{Tr}(X)=X\backslash\mathbf{Pc}(X)$称为 X的树状部分。如果一个片是单点空间，我们称它为退化的；否则称为非退化的。

注 3.2. 在下文的引理 3.12 中，我们将证明，不相交树分层空间可收缩到其任意一个片上。由于假设不相交树分层空间是局部道路连通的，因此每个片都是局部道路连通的。

注 3.3. 当 X 可配备完备测地度量时，空间 X 上的“不交树分级”概念可以与 Drutu-Sapir [11]意义下的“树分级”概念进行比较。特别地，X 上的每个不交树分级 $\mathscr{P}$ 都是树分级。另一方面，如果 X上的 $\mathscr{P}'$ 是树分级，那么 $\bigcup\mathscr{P}'$ 不一定是闭集，片不一定是 $\bigcup\mathscr{P}'$的路径连通分支，而且两个不同的片可能交于一点。一般而言，给定 X上的树分级 $\mathscr{P}'$，可以通过将新的片取为满足以下条件的最小闭测地子集 C，在 X 上构造一个不交树分级 $\mathscr{P}$：当$P\in\mathscr{P}'$ 且 $P\cap C\neq\emptyset$时，$P\subseteq C$。当且仅当 $X\backslash\bigcup\mathscr{P}'$ 包含一个非空开子集且该子集是 $\mathbb{R}$-树时，这一过程才会得到一个非平凡的不交树分级$\mathscr{P}$。例如，若 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}D_n$，其中 $D_n\subseteq\mathbb{R}^2$ 是以（n，0）为圆心、半径为 $1/2$ 的圆盘，则 $\mathscr{P}'=\{D_n\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 是 X上的树分级。然而，X 上不存在非平凡的不交树分级。这个具体例子还说明，在普通的树分层空间中，不能在不影响其他片的情况下压缩片（若将每个圆盘 $D_n\in\mathscr{P}'$ 都识别为一点，则 X 的商空间将是一个单点空间）。

定义 3.4. 集合 X 上的路径直径度量是 X 上的度量 ρ，满足

$$\rho(a,b) = \inf\{\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha)) \mid \alpha \text{ is a path from } a \text{ to } b\}.$$

如果 ρ 是 X上的路径直径度量，那么开球 $B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \epsilon\}$是道路连通的。在本文余下部分中，我们将假设不相交树分层空间的拓扑由路径直径度量诱导。以下备注说明了这一假设的合理性。

备注 3.5. 如果 d 是集合 X 上的任意度量，且其诱导的拓扑使 X 成为局部道路连通空间，那么我们可以定义

$$\rho(a,b) = \inf\{\mathrm{diam}_d(\mathrm{Im}(\alpha)) \mid \alpha : [0,1] \to X \text{ is a path from } a \text{ to } b\}$$

其中，此定义中的直径是相对于 d而言的。容易验证，ρ 是 X上的度量，与 X 的拓扑相容，并且恒等函数 $(X,\rho) \mapsto (X,d)$ 是非扩张的。此外，由于对于所有路径 $\alpha : [0,1] \to X$，都有 $\mathrm{diam}_\rho(\mathrm{Im}(\alpha)) = \mathrm{diam}_d(\mathrm{Im}(\alpha))$，因此 ρ 是 X上的路径直径度量。因此，任何局部道路连通的可度量化空间都可以赋予路径直径度量。

3.2. **Tr 的拓扑结构(X)**。 在接下来的两个小节中，我们固定一个不相交树分层空间 $(X, \mathscr{P})$，以及定义在 X 上的路径直径度量 d。

命题 3.6. $\mathbf{Tr}(X)$ 是开拓扑 $\mathbb{R}$-树的不相交并。此外，如果 U 是 $\mathbf{Tr}(X)$ 的一个连通分支，那么 $U\backslash U \subseteq \mathbf{Pc}(X)$。

证明。 如果 U 是 $\mathbf{Tr}(X)$ 的一个连通分支，那么 U 是开集、道路连通、局部道路连通，且不含简单闭曲线。由于 U 也是可度量的，U 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树。此外，如果 $x \in (U\backslash U) \cap \mathbf{Tr}(X)$，那么 x 属于 $\mathbf{Tr}(X)$ 的另一个连通分支 V。但是，由于 V 是开集且 $x \in U \cap V$，我们有 $U \cap V \neq \emptyset$，这与 U 和 V 是 $\mathbf{Tr}(X)$ 的不同连通分支这一事实矛盾。□

命题 3.7. 若 $\alpha : [0,1] \to X$ 是一条单射路径，且其端点 $x = \alpha(0)$ 和 $y = \alpha(1)$ 不属于 X的同一片，则 $\alpha((0,1)) \cap \mathbf{Tr}(X) \neq \emptyset$，并且对于每个 $z \in \alpha((0,1)) \cap \mathbf{Tr}(X)$，点 x 和 y 属于 $X\backslash\{z\}$的不同连通分支。

证明。由于 $\mathrm{Tr}(X)$ 是开集，且 X 的各片是 $\mathrm{Pc}(X)$ 的道路连通分支，因此必有 $\alpha((0,1)) \cap \mathrm{Tr}(X) \neq \emptyset$。设 $t \in (0,1)$，使得 $z = \alpha(t) \in \mathrm{Tr}(X)$。由于包含 z 的 $\mathrm{Tr}(X)$ 的连通分支 U 是一个开拓扑 $\mathbb{R}$-树（命题 3.6），我们可以找到 $0 < a < t < b < 1$，使得 $A_1 = \alpha([a,b]) \subseteq U$。由于 X 是局部道路连通的，$X\backslash\{z\}$的连通分支都是道路连通的。因此，若 x和 y 属于 $X\backslash\{z\}$的同一连通分支，则可以找到一条弧$A_2 \subseteq X\backslash\{z\}$，其端点为 $\alpha(a)$ 和 $\alpha(b)$。由于 $z \in A_1\backslash A_2$，引理 2.1 给出一条简单闭曲线 C，满足 $z \in C \subseteq A_1 \cup A_2$，但这与定义 3.1 中的 (3) 矛盾。□

命题 3.8。 如果 U 是 $\mathbf{Tr}(X)$ 的一个连通分支，且 x、y 是 U 中的不同元素，那么在 X 中存在唯一的弧 A，其端点为 x 和 y。此外，A 满足 $A\backslash\{x,y\} \subseteq U$。

证明。 我们分三种连续情形证明该命题。

情形 I：假设 x，$y \in U$。设 A_1是 X中以 x与 y为端点的一条弧。若 $A_1 \not\subseteq U$，则存在一点 $z \in A_1 \backslash U$。由命题 3.6，U 是一棵 $\mathbb{R}$-树，从而在 U 中存在唯一一条以 x 与 y为端点的弧 A_2 。由引理 2.1，存在一条包含 A_2的某子弧的简单闭曲线 $C \subseteq A_1 \cup A_2$ 。然而，这与定义 3.1 的 (3) 矛盾。

情形 II：假设 $x \in U$和 $y \in U \backslash \overline{U}$。由命题 3.6，存在某个 $P \in \mathscr{P}$使得 $y \in P$。首先，我们验证所需弧的存在性。取 y处一个由路径连通开集组成的良嵌套邻域基 $X = W_1 \supsetneq W_2 \supsetneq W_3 \supsetneq \cdots$，并取点 $w_i \in (W_i \cap U) \backslash W_{i+1}$。具体而言，取 $w_1 = x$。令 $\beta_i \colon [0,1] \to W_i$ 为一条从 w_i 到 w_{i+1}的单射路径。由情形 I，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $\mathrm{Im}(\beta_i) \subseteq U$ 。定义路径 $\beta \colon [0,1] \to X$ ，令 β 在$\left[\frac{i-1}{i}, \frac{i}{i+1}\right]$上取值为$\overline{\beta_i}$ ，且 $\beta(1) = y$。由构造可知，β连续，且满足 $\beta(0) = x$、$\beta([0,1)) \subseteq U$以及 $\beta(1) = y$。任取一条单射路径 $\alpha \colon [0,1] \to \mathrm{Im}(\beta)$，使其从$x$ 到 y ，便可参数化一条具有所需性质的弧 A。为证明唯一性，令$A_1 = A$ ，并假设 A_2 是 X 中的一条弧，其端点相同，但$A_1 \neq A_2$。若存在一点 $z \in A_1 \backslash A_2$，则引理 2.1 给出一条包含 z的简单闭曲线 C。然而 $z \in A_1 \backslash \{x, y\} \subseteq U$，这与定义 3.1 中的 (3) 矛盾。若存在一点 $z \in A_2 \backslash A_1$，则引理 2.1 给出一条简单闭曲线 C，它包含 A_1的一条子弧。然而，A_1 的每条子弧都必须与 U相交，再次导致矛盾。

情形 III：假设 x，$y \in U \backslash \overline{U}$。固定 $z \in U$。根据情形 II，找到弧 A_1，$A_2 \subseteq \overline{U}$，使得$U \backslash A_1 = \{x\}$、$U \backslash A_2 = \{y\}$，并且 $z \in A_1 \cap A_2$。一条以x 和 y 为端点的弧 $A \subseteq A_1 \cup A_2$ 满足所需条件。唯一性由与情形 II 中所用类型相同的论证得出。□

命题 3.9。如果 U 是$\mathbf{Tr}(X)$的一个连通分支，那么 U 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树，并且与 X 的每个片至多相交于一点。

证明。由命题 3.8 可知，U 是唯一弧连通的。如果 $x \in U \backslash \overline{U}$ 且 V 是 X 中 x 的一个道路连通开邻域，那么命题 3.8 还意味着 $V \cap U$是道路连通的。因此，U 是局部道路连通的，从而 U 是一个拓扑 $\mathbb{R}$- 树。

假设 P是 X的一个片，且 x、y是 $U \cap P$中的不同点。由命题 3.8，存在一条弧 $A_1 \subseteq U$，其端点为 x和 y，并且满足 $A_1 \backslash \{x, y\} \subseteq U$。由于片是道路连通的，存在一条弧 $A_2 \subseteq P$，其端点为 x 和 y。于是 $A_1 \cup A_2$是一条与 U相交的简单闭曲线，这与定义 3.1 中的 (3) 矛盾。□

上述对 $\mathbf{Tr}(X)$ 的一个连通分支U 的 U 的刻画，使我们能够为路径同伦类确定方便的代表元。

定义 3.10。路径 $\beta \colon [0,1] \to X$ 称为树高效的，如果对于 $\beta^{-1}(\mathbf{Tr}(X))$ 的每个连通分支 J ，限制映射 $\beta|_J \colon J \to X$ 是一条满足$\beta|_J^{-1}(\mathbf{Tr}(X)) = J$的单射路径。

引理 3.11。每条非恒定路径 $\alpha \colon [0,1] \to X$ 都与一条树高效路径 $\beta \colon [0,1] \to X$路径同伦。此外，我们可以选择从 α 到β 的同伦 H，使其在 $\alpha^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$ 上为常值同伦，并且满足 $\mathrm{Im}(H) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$。

证明。如果 α 的像包含于 $\mathbf{Pc}(X)$，则取 $\alpha = \beta$ ，并令 H 为常值同伦。否则，对于 $\alpha^{-1}(\mathbf{Tr}(X))$ 的每个连通分支 J （它是一个开区间或半开区间），（

路径 $\alpha|_J$ 将 $\mathrm{int}(J)$ 映射到 $\mathbf{Tr}(X)$ 的某个连通分支 U_J，并将 J 的至少一个端点映射到 $\mathbf{Pc}(X)$。由命题 3.9，$\alpha(J) \subseteq U_J$，其中 U_J 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树。

若 $\alpha|_J$ 是一个以点 $x \in \mathrm{Pc}(X)$为基点的环路，则 $\alpha|_J$ 是拓扑$\mathbb{R}$-树U_J 中的一个环路，因此在其自身的像中零伦。因此，存在映射 $H_J\colon J \times [0,1] \to \alpha(J)$，使得对于 $s \in J$，有 $H_J(s,t) = \alpha(s)$，且 $H_J(\partial J \times [0,1] \cup J \times \{1\}) = x$。若 $\alpha|_J$ 是一个端点互异的路径，我们记作 $J = [a,b]$，并定义$\beta_J\colon [0,1] \to \alpha(J)$为一条单射路径，它参数化树状连续体 $\alpha(J)$中从 $\alpha(a)$到 $\alpha(b)$的唯一弧。由于 $\alpha(J)$是单连通的，存在映射 $H_J\colon J \times [0,1] \to \alpha(J)$，使得对于 $s \in J$，有 $H_J(s,0) = \alpha(s)$、$H_J(s,1) = \beta(s)$，且 $H_J(\{a\} \times [0,1]) = \alpha(a)$以及 $H_J(\{b\} \times [0,1]) = \alpha(b)$。

定义了所有映射 H_J 后，我们定义映射 $H\colon [0,1]^2 \to X$，使得$H(s,t) = \alpha(s)$，若 $s \in \alpha^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$。若对于某个连通分支 J，有 $s \in J$，其中 J 属于 $\alpha^{-1}(\mathbf{Tr}(X))$，则定义 $H(s,t) = H_J(s,t)$。由于对每个 J，$\mathrm{Im}(H_J) \subseteq \alpha(J)$，由 α 的连续性可轻易推出 H 的连续性。由 $\beta(s) = H(s,1)$ 定义的路径 $\beta\colon [0,1] \to X$ 是树高效的，且所构造的同伦具有所需的性质。□

3.3. 度量收缩。 这里，我们考虑 X 的特殊子空间 Y，它们允许存在一个典范收缩 $r\colon X \to Y$，并具有若干便利的性质。

引理 3.12. 设 $Y \subseteq X$ 是一个闭路径连通子空间，具有如下性质：若 X 的一个片 P 与 Y 相交，则 $Y \cap P$ 要么是单点空间，要么就是整个 P。那么存在一个收缩映射 $r\colon X \to Y$，定义如下：若 $y \in Y$，则$r(y) = y$；若 $x \in X\backslash Y$，则 $r(x) = y$，其中 x 和 y 是一条弧$A \subseteq X$ 的端点，且该弧具有性质 $A \cap Y = \{y\}$。此外，以下结论成立：

(1) 若 x_1、x_2 位于 $X\backslash Y$ 的同一连通分支中，则 $r(x_1) = r(x_2)$，(2) 若 $\alpha\colon [0,1] \to X$ 是一条其像与 Y 相交的路径，则 $\mathrm{Im}(r \circ \alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$，(3) 当 Y 配备子空间度量时，r 是非扩张的。

证明。首先，我们证明 r 是良定义的。给定一点 $x \in X\backslash Y$，找一条单射路径 $\alpha\colon [0,1] \to X$，使得 $\alpha(0) = x$ 且 $\alpha(1) \in Y$。由于 Y 是闭的，$s = \min\{t \in [0,1] \mid \alpha(t) \in Y\}$ 存在，且 $A = \alpha([0,s])$ 是一条以 x 与 $\alpha(s) \in Y$ 以及 $A \cap Y = \{\alpha(s)\}$ 为端点的弧。我们证明 Y 中的端点是唯一的。对于$i \in \{1,2\}$，假设 $A_i \subseteq X$ 是一条以 x 与 $y_i \in Y$ 为端点且满足$A_i \cap Y = \{y_i\}$的弧。为得出矛盾，假设 $y_1 \neq y_2$。现在 $A_1 \cup A_2$ 是一个皮亚诺连续统，它与 Y 相交于两点集 $\{y_1, y_2\}$。设 $B_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ 是一条以 y_1 与 y_2 为端点的弧。由于 Y 是道路连通的，我们可以找到一条以 y_1 与 y_2 为端点的弧 $B_2 \subseteq Y$。由于 $C = B_1 \cup B_2$ 是一条简单闭曲线，对 X 的某个片 P，必有 $C \subseteq P$。然而，由于 B_1 并非完全包含在 Y 中，我们关于 Y 如何与 X 的片相交的假设迫使 P 成为 X 的一个退化片，但这与 $\{y_1, y_2\} \subseteq P$ 这一事实矛盾。因此，必有 $y_1 = y_2$，从而函数 r 是良定义的。

接下来，我们证明（1）。假设 x_1，x_2 位于 $X\backslash Y$ 的同一个连通分支中。取弧 A_i，其端点为 x_i 和 $y_i \in Y$，且满足性质 $A_i \cap Y = \{y_i\}$，使得 $r(x_i) = y_i$。取一条弧 $B \subseteq X\backslash Y$，其端点为 $x_1 \in A_1$ 和 $x_2 \in A_2$。存在一条弧 $A_2' \subseteq A_1 \cup B$，其端点为 x_2 和 y_1。由于 $A_2' \cap Y = \{y_1\}$，前一段中 r 的定义良好性给出 $y_1 = r(x_2) = y_2$。

接下来，我们验证 r 是连续的。设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ 是 X中的一个收敛序列。由于 $X\backslash Y$ 的连通分支是开的，上一段

已证明 $x \in X\backslash Y$的情形显然成立。假设 $x \in Y$。由于 r 在 Y上是恒等映射，我们可以只考虑对所有 n都有 $x_n \in X\backslash Y$ 的情形。设 V 是 $r(x) = x$ 在 X中的一个路径连通开邻域。取 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$都有 $x_n \in V$。对每个 $n \geq N$，取一条端点为 x_n和 x的弧 $B_n \subseteq V$。由于$x_n \in X\backslash Y$ 且 Y 是闭的，我们可以找到子弧 $A_n \subseteq B_n$、$n \geq N$，其端点为x_n 和 $y_n \in Y$，并且满足 $A_n \cap Y = \{y_n\}$。因此，对所有 $n \geq N$都有 $r(x_n) = y_n \in A_n \subseteq B_n \subseteq V$，从而证明 $\{r(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$。

对于 (2)，假设 $\alpha\colon [0,1] \to X$ 是一条像与 Y 相交的路径。那么 $K = \alpha^{-1}(Y)$ 非空且为闭集。若 $t \in K$，则 $r(\alpha(t)) = \alpha(t)$。取一点 $t \in [0,1]\backslash K$，并找一个端点为 t 和 $k \in K$ 的闭区间 I，使得 $I \cap K = \{k\}$。现在，$\alpha(I)$ 是一个皮亚诺连续统，包含 $\alpha(t)$，且满足 $\alpha(I)\cap Y = \{\alpha(k)\}$。因此，存在一条弧 $A \subseteq \alpha(I)$，其端点为 $\alpha(t)$ 和 $\alpha(k)$。根据 r 的定义，现在可得 $r(\alpha(t)) = \alpha(k)$。这证明 $\mathrm{Im}(\alpha \circ r) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$。

对于 (3)，回想一下，d 是路径直径度量。令 $x_1, x_2 \in X$。若 x_1 和 x_2 位于 $X\backslash Y$ 的同一个连通分支中，则由 (1) 得 $r(x_1) = r(x_2)$，从而 $0 = d(r(x_1)\ r(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$。假设 x_1, x_2 不同时位于 $X\backslash Y$ 的同一个连通分支中。令 $\alpha\colon [0,1] \to X$ 为一条从 x_1 到 x_2 的路径。那么 α 的像必与 Y 相交，而由 (2) 可知，$r \circ \alpha\colon [0,1] \to X$ 是一条从 $r(x_1)$ 到 $r(x_2)$ 的路径，且满足 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(r \circ \alpha)) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha))$。因此，$d(r(x_1)\ r(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$ 成立。□

下一个推论由引理 3.12 的 (1) 和 (2) 合并得出。

推论 3.13. 设 Y_1 和 Y_2 是 X 的不交子空间，且满足引理 *3.12* 的假设；设 $r_1\colon X \to Y_1$ 和 $r_2\colon X \to Y_2$ 是引理 *3.12* 结论中的收缩映射。若 $\alpha\colon [0,1] \to X$ 是任意一条路径，满足 $\alpha(0) \in Y_1$ 和 $\alpha(1) \in Y_2$，则 $\{r_1(Y_2)\ r_2(Y_1)\} \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$。

推论3.14. 若 Y 是 X 的子空间，且满足引理 *3.12* 的假设，则 Y 上的子空间度量是 Y 上的路径直径度量。

证明。给定 $y_1, y_2 \in Y$ 和 $\epsilon > 0$，我们可以找到一条路径 $\alpha\colon [0,1] \to X$，从 y_1 到 y_2，使得 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha)) < d(y_1, y_2) + \epsilon$。由于 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 与 Y 相交，引理 3.12 的 (2) 表明，$r \circ \alpha\colon [0,1] \to Y$ 是一条路径，且 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(r \circ \alpha)) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha)) < d(y_1, y_2) + \epsilon$。□

推论3.15. 若 $\beta\colon [0,1] \to X$ 是一条单射路径，则对每个片 $P \in \mathscr{P}$，$\beta^{-1}(P)$ 是连通的。

证明. 若存在某个 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\beta^{-1}(P)$不连通，则考虑引理 3.12中的典范收缩映射 $r\colon X \to P$。由于 $\beta^{-1}(P)$是闭的且不连通，故存在一个开区间(a, b)，它是 $[0,1]\backslash\beta^{-1}(P)$的一个连通分支。于是引理 3.12的(1)蕴含 $\beta(a) = r(\beta(a)) = r(\beta([a, b]))$ $= r(\beta(b)) = \beta(b)$，这与 β 为单射的假设矛盾。□

命题 3.16. 若 X是紧致的且 $\mathscr{P} = \{P\}$，即 X只有一个片 P，则 P 是 X的一个形变收缩。

证明。令 $\mathcal{U}$为 $X\backslash P$的连通分支的集合。对于每个 $U \in \mathcal{U}$，存在某个点 x_U使得 $U \cap P = \overline{\{x_U\}}$。由于 U是一个树状连续体（利用命题3.9以及 X 是紧致的这一事实），且所有这类空间都是逐点可缩的，我们可以选取一个收缩 $H_U\colon U \times [0,1] \to U$，使得 $H(x, 0) = x$，$H(x, 1) = x_U$，并且对所有 $t \in [0,1]$，$H(x_U, t) = x_U$。定义 $H\colon X \times [0,1] \to X$，使得

$H(x,t) = x$，如果 $x \in P$；而当 $x \in U$时，$H(x,t) = \overline{H}_U(x,t)$。显然，$H$作为函数是定义良好的。要验证 H的连续性，唯一需要检查的非平凡情形是：$\{(x_n,t_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to (x,t)$ 是 $X \times [0,1]$中的一个收敛序列，其中对于两两不同的 $U_1,U_2,U_3,\cdots \in \mathcal{U}$，有 $x_n \in U_n$。令 V为 X中 $H(x,t)$ 的一个邻域。由于 $\mathscr{U}$ 的每个元素在 X中都是开集，必有 $x \in P$，因此 $H(x,t) = x$。于是存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，$x_n \in V$。由于 $H(x_n,t_n) \in \overline{\mathrm{Im}}(H_{U_n}) \subseteq U_n$，只需证明对除有限多个 n外的所有 n，都有 $U_n \subseteq V$。反设不然，则可找到 $N < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 及点 $a_i \in U_{n_i}\backslash V$。由于 X 是紧致的，我们可以假设 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to a$ 属于 X。由于所有 U_{n_i} 都互不相同，必定再次有 $a \in X$。若 $r: X \to P$ 是引理 3.12 中的收缩映射，则对所有 $i \in \mathbb{N}$，有 $r(x_{n_i}) = r(a_i)$。由于 $\{r(x_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}} \to x$且 $\{r(a_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \to r(a) = a$，必有 $a = x \in V$。由于 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to a$，对充分大的 i，有 $a_i \in V$，这就导出了矛盾。□

将命题 3.16 推广到非紧致情形，对我们的目的而言并无必要，但通过更为技术性的论证似乎可以做到。我们在相当一般的条件下证明命题 3.16 的以下推论，因为在某种会出现非度量化商空间的情形中需要用到它。

推论 3.17. 设 B 是一个道路连通豪斯多夫空间，$A \subseteq B$ 是一个闭的道路连通子空间，并且 B 中的每条简单闭曲线都包含于 A 中。那么，包含映射 $i: A \to B$ 在基本群上诱导出一个同构。

证明。设 $\beta: S^1 \to B$ 是一条以 A 中某点为基点的环路。那么 $Y = \mathrm{Im}(\beta)$ 是一个皮亚诺连续统。我们声称 $Q = Y \cap A$ 是道路连通的。若 (a,b) 是 $U = \beta^{-1}(B\backslash A)$ 的一个连通分支，则必有 $\beta(a) = \beta(b)$，否则，利用前面用过的论证便可在 B 中构造出一条不包含于 A 的简单闭曲线。定义 $\alpha: [0,1] \to A$，使得当 $t \in [0,1]\backslash U$ 时，$\alpha(t) = \beta(t)$；并且，若 $t \in (a,b)$ 属于 U 的某个连通分支 (a,b)，则 $\alpha(t) = \beta(a)$。那么，β 是连续的，因为 α 连续且 $\mathrm{Im}(\alpha) = Q$。由此可得 Q 是道路连通的。因此，$\{Q\}$ 是 Y 上的不交树分级。根据命题 3.16，Q 是 Y 的一个形变收缩，其中所得到的收缩映射 $r: Y \to Q$ 是一个同伦等价，并给出 $r \circ \beta = \alpha$。因此，β 在 B 中与 α 同伦，从而证明 $i: A \to B$ 是 π_1-满射。

设 $\gamma: S^1 \to A$ 是一个环路，且存在映射 $g: \mathbb{D} \to B$，满足 $g|_{S^1} = \gamma$。那么 $Y = \mathrm{Im}(g)$ 是一个皮亚诺连续统。取一条满射路径 $\alpha: [0,1] \to Y$。根据上一段中的论证可知，若 $Q = Y \cap A$，则 $\{Q\}$ 是 Y 上的不交树分级。同样，引理 3.12 中的收缩映射 $r: Y \to Q$ 是一个同伦等价。映射 $r \circ g: \mathbb{D} \to A$ 满足 $r \circ g|_{S^1} = r \circ \gamma = \gamma$，因此 γ 在 A 中是非本质的。这证明了 $i: A \to B$ 是 π_1-单射的。□

推论 3.18。设 (B, b_0) 是一个带基点道路连通豪斯多夫空间，并假设 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是 B 的两两不交的闭路径连通子空间，且 B 中的每条简单闭曲线都包含在某个 A_i 中，其中 $i \in \{1,2,\ldots,m\}$。那么存在从 b_0 到某个点 $a_i \in A_i$ 的路径 $\alpha_i: [0,1] \to B$，使得包含映射 $A_i \to B$ 诱导出一个同构 $\theta: *_{i=1}^m \pi_1(A_i, a_i) \to \pi_1(B, b_0)$，其定义为 $\theta([\gamma]) = [\alpha_i \cdot \gamma \cdot \alpha_i^{-1}]$，对任意 $[\gamma] \in \pi_1(A_i, a_i)$ 均成立。

此外，如果 $\beta_i: [0,1] \to B$ 是从 b_0 到 a_i的任意选定路径，那么由 $\theta'([\gamma]) = [\beta_i \cdot \gamma \cdot \beta_i^{-1}]$ 对$[\gamma] \in \pi_1(A_i, a_i)$ 给出的同态 $\theta': *_{i=1}^m \pi_1(A_i, a_i) \to \pi_1(B, b_0)$ 是单射。

证明。对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$，令 V_i为包含 A_i的 $B \setminus \bigcup_{j \neq i} A_j$的连通分支。将推论 3.17应用于对 (V_i, A_i)，可知包含映射 $(A_i, a_i) \to (V_i, a_i)$在基本群上诱导出一个同构。集合 V_i覆盖 B。此外，当 $i \neq j$ 和 $V_i \cap V_j \neq \emptyset$时，$V_i \cap V_j$ 是唯一弧连通的，因而是单连通的。重新排列集合 V_i，使得对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$，$W_k = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$是连通的。现在，对集合 W_k 和 V_{k+1} 递归应用标准 van Kampen 定理（其中$k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$），可知 θ 对于某些由递归产生的路径 α_i以及最后一次基点变换共轭是一个同构。

对于第二个陈述，我们回顾自由积的如下性质：若$h_1, h_2, \ldots, h_m \in G = *_{i=1}^{m} \pi_1(A_i, a_i)$，则由将 $\phi(g) = h_i g h_i^{-1}$ 映射为 $g \in \pi_1(A_i, a_i)$所确定的同态 $\phi\colon G \to G$是单射。给定路径β_i，我们通过令 $h_i = \theta^{-1}([\beta_i \cdot \alpha_i^{-1}])$（对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$）来定义 ϕ。由于 $\theta' = \theta \circ \phi$，可知$\theta'$ 是单射。□

3.4. 不相交树分层空间的参数化。这里，我们给出不相交树分层空间的一种结构刻画，这对我们主要结果的证明至关重要。

定义 3.19。设$(X, \mathscr{P})$是一个不相交树分层空间。$(X, \mathscr{P})$的一个参数化是一个三元组(T, V, q)，其中 T是一个拓扑树，$V \subseteq T$是一个闭全不连通子集，且 $q\colon X \to T$ 是一个连续满射，使得$\mathscr{P} = \{q^{-1}(v) \mid v \in V\}$ 并且若 $t \in T \setminus V$，则 $|q^{-1}(t)| = 1$。

首先，我们证明每个不相交树分层空间都容许一种参数化。

引理 3.20. 设 $(X, \mathscr{P})$ 为一个不相交树分层空间，T 为将每个片坍缩为一个点所得的 X 的商空间，且 $q : X \to T$ 为商映射。则T 是豪斯多夫的、道路连通的、局部道路连通的，并且 $V = q(\mathbf{Pc}(X))$ 是闭的且全不连通的。

证明。由于道路连通与局部道路连通空间的性质在形成商空间时是封闭的，T 具有这些性质。我们验证 T 是豪斯多夫的。由定义，Pc(X)在 X 中是闭的，并且 q 的定义使得Pc(X)关于 q是饱和的。因此，V 在 T中是闭的。此外，q 在开集 Tr$(X) = q^{-1}(T \setminus V)$上是双射，从而 q 将Tr(X)同胚地映到 $T \setminus V$上。特别地，$T \setminus V$ 是开拓扑 $\mathbb{R}$-树的不交并。设 a、b是 T的不同点。令 $x \in q^{-1}(a)$与 $y \in q^{-1}(b)$。由于 x与 y不位于 X的同一片中，命题 3.7给出一点 $z \in$Tr(X)，使得x 与 y 位于 $X \setminus \{z\}$的不同连通分支中。设 C_x 与 C_y 分别是这些连通分支。则 C_x 与 C_y 不交、开，且关于 q 饱和（因为片是道路连通的），从而 $q(C_x)$与 $q(C_y)$是 T中 a 与 b 的不交开邻域。此外，若 x 与 y 位于 X的不同片中，则 $q(C_x) \cap V$与 $q(C_y) \cap V$是 V中不交的既开又闭的邻域。这就完成了 T 是豪斯多夫的且 V 是全不连通的证明。□

引理 3.21. 设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，$q\colon X \to T$ 是将每个片压缩为一点的商映射。对于每条弧 $A \subseteq T$，都存在一条弧 $B \subseteq X$，使得 $q(B) = A$。

证明。由于 V是全不连通的，注意到 $A \cap (T \setminus V) \neq \emptyset$。令 $\alpha\colon [0, 1] \to T$ 为一条参数化 A 的单射路径，并对 $i \in \{0, 1\}$令 $a_i = \alpha(i)$。令

令β: $[0,1] \to X$为一条单射路径，使得对 $i \in \{0,1\}$有 $\beta(i) \in q^{-1}(a_i)$，并令B =Im(β)。

设 $U = \alpha^{-1}(T\backslash V)$和 $M = \beta^{-1}(\mathrm{Tr}(X)) = (q \circ \beta)^{-1}(T\backslash V)$。我们先证明 $\alpha(U) = q(\beta(M))$。设 $u \in U$和 $a = \alpha(u) \in T\backslash V$。那么存在唯一的$b \in \mathrm{Tr}(X)$，使得 $q(x) = a$。若 $b \notin B$，则 B必须位于 $X\backslash\{b\}$的某个连通分支 C 中。但这样一来， A 便位于 $T\backslash\{b\}$的连通分支 $q(C)$ 中，这是不可能发生的。因此，$b \in B$。于是存在 $m \in M$，使得 $\beta(m) = b$，从而 $a = q(\beta(m)) \in q(\beta(M))$。因此 $\alpha(U) \subseteq q(\beta(M))$。对于另一个包含关系，设 $m \in M$。我们有$b = \beta(m) \in \mathrm{Tr}(X)$，且 $a = q(b) \in T\backslash V$。若 $a \notin A$，则 A位于 $T\backslash\{a\}$的单个连通分支 D 中。于是 $q^{-1}(a_0) \cup q^{-1}(a_1)$位于满足 $q(C) = D$的 $X\backslash\{b\}$ 的连通分支C 中。由于 $\{b_1, b_2\} \subseteq C$且 $b \in B \cap \mathrm{Tr}(X)$违反了命题 3.7（该命题适用，因为 $\beta(0)$和 $\beta(1)$不位于X的同一个片中）。因此， $a \in A$。特别地，对于唯一的 $u \in U$，有 $q(\beta(m)) = q(b) = a = \alpha(u)$。这就证明了另一个包含关系。

由于 U在 $[0,1]$,中稠密，我们有 $A = \alpha(U)$；又由于 $[0,1]$是紧致的且 α是连续的，我们有 $\alpha(U) = \alpha(U)$。因此， $A = \alpha(U) = q(\beta(M)) \subseteq q(B)$。我们还有 $q(\beta(M)) \subseteq q(\beta(M)) = \alpha(U) \subseteq A$。如果 (s,t)是 $[0,1]\backslash M$的一个连通分支，那么 β将 $[s,t]$映射到 X的一个片中，并且 $q(\beta([s,t])) = q(\beta(s)) \in q(\beta(M)) \subseteq A$。由此完成了对 $q(B) = A$的证明。□

引理 3.22。设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间。若 T 是将每个片收缩为一点后由 X 得到的商空间，那么 T 是一个拓扑树。

证明。根据引理 3.20，只需证明 T 不包含简单闭曲线。假设 $C \subseteq T$ 是一条简单闭曲线。设 A_1, A_2为弧，使得 $C = A_1 \cup A_2$，且 $A_1 \cap A_2 = \{a_1, a_2\}$ 是一个二点集。与前面一样，令 $q: X \to T$ 表示商映射。根据引理 3.21，存在弧 B_1, $B_2 \subseteq X$，使得对于 $i \in \{1,2\}$，有 $q(B_i) = A_i$。对于 $i, j \in \{1,2\}$，令$b_{i,j}$ 为 B_i 在 $B_i \cap q^{-1}(a_j)$ 中的端点。如果 $a_1 \in V$，则 B_1 和 B_2 的一个初始线段可能位于片 $q^{-1}(a_1)$ 中。通过删去这段线段，我们可以假设对于 $i \in \{1,2\}$，有 $B_i \cap q^{-1}(a_1) = \{b_{i,1}\}$。当 $a_2 \in V$ 时作同样的调整，我们可以假设对于 $i \in \{1,2\}$，有 $B_i \cap q^{-1}(a_2) = \{b_{i,2}\}$。由于 A_1 和 A_2 的内部互不相交，对 B_i 端点的调整确保了 B_1 和 B_2 的内部互不相交。固定 $j \in \{1,2\}$。若 $b_{1,j} = b_{2,j}$，令$C_j = \{b_{1,j}\}$。另一方面，若 $b_{1,j} \neq b_{2,j}$，则 $q^{-1}(a_j)$ 是 X 的一片，我们可以找到一条弧 $C_j \subseteq q^{-1}(a_j)$，其端点为 $b_{1,j}$ 和 $b_{2,j}$。定义好 C_1 和 C_2后，$D = B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2$ 是 X 中的一条简单闭曲线，且满足 $q(D) = C$。因此，D 必定包含在 X的某一个片中，这迫使 C 是一个单点，矛盾。□

例 3.23. 由前两个引理中的 X 构造出的拓扑树 T 不一定是拓扑 $\mathbb{R}$-树。例如，令 $X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times [0,1]$ 只有一个片 $P = \mathbb{R} \times \{0\}$。那么商空间$T = X/P$ 就是带有弱拓扑的弧的无限楔和，且不是第一可数的。

例 3.24。前两个引理中构造的商映射 $q: X \to T$ 不一定是闭映射。例如，若 $X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\} \times [0,1]$ 的片为 $P_n = \{1/n\} \times [0,1]$，则我们可以将 $T = [0,1] \times \{0\}$、$V = \{0\} \cup \{1/n \mid b \in \mathbb{N}\}$和 q 识别为: $X \to T$，并带有垂直投影。在这种情况下， q 不是闭映射。

接下来，我们将证明，不相交树分层空间可以由给定的参数化完全恢复。

引理 3.25。设 T 是一个唯一弧连通的豪斯多夫空间，$V \subseteq T$ 是一个闭全不连通子集，并设 $q\colon\ Y \to T$ 是从空间 Y 出发的映射，满足以下性质：

(1) q 的每个纤维都是道路连通的，
(2) q 在 $Y\backslash q^{-1}(V)$ 上是单射，

若 $\alpha\colon\ [0,1] \to Y$ 是一条单射路径，则 $q\circ\alpha\colon\ [0,1] \to T$ 是单调的。此外，若 $\alpha\colon\ S^1 \to Y$ 是一条单射环路，则 $q\circ\alpha\colon\ S^1 \to T$ 是常值映射。

证明。假设 α 是单射的，令 $a \in T$。若 $a \in T\backslash V$，则 $\alpha^{-1}(q^{-1}(a))$ 在非空时只包含一个点。若 $a \in V$，则根据假设，$C = q^{-1}(a)$ 是道路连通的。假设 $|\alpha^{-1}(C)| > 1$。令 $s = \min(\alpha^{-1}(C))$，并令 $t = \max(\alpha^{-1}(C))$。我们断言 $\alpha^{-1}(C) = [s,t]$。反设不然，则 $\alpha^{-1}(C)$ 是 $[s,t]$ 的真闭子集。取 $[s,t]\backslash\alpha^{-1}(C)$ 的一个连通分支 (c,d)。于是 $\alpha|_{[c,d]}\colon [c,d] \to Y$ 是一条路径，满足 $\alpha^{-1}(C) = \{c,d\}$，且 $q\circ\alpha|_{[c,d]}$ 是 T 中一条以 a 为基点的环路，它将 (c,d) 映入 $T\backslash\{a\}$ 的一个连通分支 T'。由于 T' 是唯一弧连通的，而 V 是全不连通的，我们可以找到 $c < c' < d' < d$，使得 $q\circ\alpha(c') = q\circ\alpha(d') \in T'\backslash V$。由于 $q\colon Y\backslash q^{-1}(V) \to T\backslash V$ 是单射的，因此 $\alpha(c') = \alpha(d')$；矛盾。

对于第二个断言，假设 $\alpha\colon\ S^1 \to Y$ 是单射。我们可以用各种弧覆盖S^1，并应用引理的第一部分，从而得出 $q\circ\alpha$ 是单调的。此外，由于 T 是豪斯多夫的，$q\circ\alpha$ 是到其像上的商映射。由于 S^1 在单调商映射下的豪斯多夫商空间是简单闭曲线，而 T 是唯一弧连通的，因此 $q\circ\alpha$ 必为常值。□

引理 3.26. 设 X 是一个道路连通、局部道路连通且可度量化的空间，T 是一个拓扑树，$V \subseteq T$ 是一个闭全不连通子空间，并且$q\colon\ X \to T$ 是一个商映射，其纤维道路连通，且 $T\backslash V$ 中每个点的纤维都是退化的。则 $\mathscr{P} = \{q^{-1}(v) \mid v \in V\}$ 是 X 上的一个不交树分级，其中$(T、V、q)$ 是一个参数化。

证明。根据构造，$\mathscr{P}$ 中的元素两两不交。由于 V在T中是闭集，$q^{-1}(V) = \bigcup\mathscr{P}$在 X 中是闭集。由于 V全不连通，且 $\mathscr{P}$ 中的每个元素都是道路连通的，因此 $\mathscr{P}$ 中的元素就是 $\bigcup\mathscr{P}$的道路连通分支。此外，由于 T、V和 $q\colon\ X \to T$满足引理 3.25 的假设，我们可知，若 $\alpha\colon\ S^1 \to X$ 参数化一条简单闭曲线，则 $q\circ\alpha\colon\ S^1 \to T$必为常值。因此，Im($\alpha$)必定包含于 q的某个非退化纤维中，也就是 $\mathscr{P}$中的某个元素。□

上述引理合起来给出以下结论，这表明可以用参数化来等价地定义不相交树分层空间。

定理 3.27. 设 X 是一个道路连通、局部道路连通的可度量化空间。X 上的每个不交树分级 $\mathscr{P}$ 都存在一个参数化(T,V,q)，对应于$(X,\mathscr{P})$，其中 q是一个拓扑商映射。反过来，若(T,V,q)是一个三元组，其中 T 是一个拓扑树，$V \subseteq T$ 是一个闭全不连通子空间，且$q\colon\ X \to T$ 是一个连续满射，其纤维道路连通，并且 $T\backslash V$中每个点的纤维都是退化的，那么 $\mathscr{P} = \{q^{-1}(v) \mid v \in V\}$ 是 X 上的一个不交树分级，且(T,V,q) 是一个参数化。

注 3.28. 引理 3.22 表明，在参数化(T, V, q)中，如果我们愿意，总可以将映射 q：$X \to T$选为拓扑商映射。在第 5 节中，我们将证明，也可以将 T 选为拓扑 $\mathbb{R}$-树，并将 q 选为非扩张映射。由于我们不要求 q 始终是一个商映射，参数化中的拓扑树 T 不一定在同胚意义下唯一确定。在不对 T 和 q 提出具体要求的情况下识别空间上的不交树分级，这一能力将在后文发挥重要作用。

4. Grade-preserving maps and graded subspaces

以下是树分层空间态射的恰当概念。

定义 4.1. 设 $(X_1, \mathscr{P}_1)$ 与 $(X_2, \mathscr{P}_2)$ 为不相交树分层空间。连续函数 $f: X_1 \to X_2$ 是保分层映射，若 $f(\mathbf{Pc}(X_1)) \subseteq \mathbf{Pc}(X_2)$。我们可以将这样的映射记为有序对的态射 $f: (X_1, \mathscr{P}_1) \to (X_2, \mathscr{P}_2)$。

注意，我们并不要求保分层映射是非扩张的。这正是本文各部分需要拓扑商空间的原因。

假设 $f: (X_1, \mathscr{P}_1) \to (X_2, \mathscr{P}_2)$ 是一个保分层映射。则对每一片 $P \in \mathscr{P}_1$，存在某个 $Q \in \mathscr{P}_2$，使得 $f(P) \subseteq Q$。此外，若这些不相交树分层空间分别具有参数化 (T_1, V_1, q_1) 与 (T_2, V_2, q_2)，其中 q_1 被选为商映射，则存在唯一映射 $g: T_1 \to T_2$，使得 $g \circ q_1 = q_2 \circ f$ 且 $g(V_1) \subseteq V_2$，即下列图表交换，其中 i_1, i_2 表示包含映射。

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{q_1} & T_1 & \xleftarrow{i_1} & V_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g|_{V_1}} \\ X_2 & \xrightarrow[q_2]{} & T_2 & \xleftarrow[i_2]{} & V_2 \end{array}$$

由于 q_1 总可被选为商映射（定理 3.27），保分层映射总会导出这样的交换图。

定义 4.2. 设 $(X, \mathscr{P})$ 为一个不相交树分层空间。$(X, \mathscr{P})$ 的分级子空间是一个不相交树分层空间 $(Y, \mathscr{Q})$，其中 Y 是 X 的道路连通、局部道路连通子空间，且 $\mathscr{Q} = \{P \cap Y \mid P \in \mathscr{P}$ 满足 $P \cap Y \neq \emptyset\}$。

注 4.3. 定义 4.2 中的集合 $\mathscr{Q}$ 总是 Y 上定义良好的树分层。由于假设 Y 是道路连通的，由引理 3.12 可知，收缩映射 $r: X \to P$ 满足 $r(Y) = P \cap Y$，只要 $P \in \mathscr{P}$ 且 $P \cap Y \neq \emptyset$。因此，$\mathscr{Q}$ 中的每个元素都是道路连通的。其余条件显然易于验证。

定义 4.4. 设 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个分级子空间。

(1) 若 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$，则称 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个完全分级子空间。(2) 若对任意满足 $Q \in \mathscr{Q}$、$P \in \mathscr{P}$ 和 $Q \subseteq P$ 的情形，都有 $|Q| = 1$ 或 $Q = P$，则称 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个截面分级子空间。

引理 3.12 的一个特例是下面这个引理。

引理 4.5。 如果$(Y, \mathscr{Q})$ 是$(X, \mathscr{P})$ 的截面分级子空间，且 Y 在 X中是闭的，那么存在一个典范非扩张收缩 $r\colon\ X \to Y$。

在下一个命题中，我们证明，如果 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的分级子空间，那么我们总可以通过将 Y 的每个非退化片替换为包含它的 X 的片，来扩充 Y。

命题 4.6。 设 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的分级子空间，且 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{Q}$。定义 $\mathscr{P}_0 = \{P \in \mathscr{P} \mid \exists R \in \mathscr{R}$，使得 $R \subseteq P\}$，并令 $Y_0 = Y \cup \bigcup \mathscr{P}_0$和$\mathscr{Q}_0 = (\mathscr{Q}\backslash\mathscr{R}) \cup \mathscr{P}_0$。那么， $\mathscr{Q}_0$ 是 Y_0 上的不交树分级，并且有分级子空间包含关系 $(Y, \mathscr{Q}) \subseteq (Y_0, \mathscr{Q}_0) \subseteq (X, \mathscr{P})$。此外，如果 Y 在 X 中是闭的，那么 Y_0 在 X 中也是闭的。

证明。容易验证 $(Y_0, \mathscr{Q}_0)$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的分级子空间。对于最后的陈述，假设 Y 在 X中是闭的。考虑 X 中的收敛序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$有 $a_n \in Y_0$。若有无穷多个 a_n 落在 Y中，则$x \in Y \subseteq Y_0$。因此我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$有 $a_n \in (\bigcup \mathscr{P}_0)\backslash Y$。若有无穷多个 a_n 落在某个 $P \in \mathscr{P}_0$中，则由于 P在 X中是闭的，故 $x \in P \subseteq Y_0$。因此我们可以集中考虑如下情形：对互异的 $P_1, P_2, P_3, \cdots \in \mathscr{P}_0$有 $a_n \in P_n$。令 $r_n\colon\ X \to P_n$ 表示引理 3.12 中的典范收缩。对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $c_{n+1} = r_{n+1}(P_n)$ 且$b_n = r_n(P_{n+1})$。由推论 3.13，任何满足 $\gamma(0) \in P_n$ 且 $\gamma(1) \in P_{n+1}$ 的单射路径 $\gamma\colon\ [0, 1] \to X$ 都必须经过点 b_n 和 c_{n+1}。由于$P_n \in \mathscr{P}_0$，存在 $R_n \in \mathscr{R}$使得 $R_n \subseteq P_n$。因此对每个 $n \in \mathbb{N}$我们可以找到点 $y_n \in P_n \cap Y$。由于存在满足 $\alpha_n(0) = y_n$且 $\alpha_n(1) = y_{n+1}$的单射路径 $\alpha_n\colon\ [0, 1] \to Y$，我们必须对所有 $n \in \mathbb{N}$有 $\{b_n, c_{n+1}\} \subseteq \mathrm{Im}(\alpha_n) \subseteq Y$。我们断言 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ 在 X中。令 U为 x 在 U中的道路连通开邻域，并找到 $N \in \mathbb{N}$使得对所有 $n \geq N$有 $a_n \in U$。对 $n \geq N$，令 $\beta_n\colon\ [0, 1] \to U$为满足 $\beta_n(0) = a_n$ 且 $\beta_n(1) = a_{n+1}$的单射路径。于是对所有 $n \geq N$我们有 $b_n \in \mathrm{Im}(\beta_n) \subseteq U$，证明完成。由于 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$，其中对所有 n有 $b_n \in Y$，且其中 Y是闭的，我们有 $x \in Y \subseteq Y_0$，证明完成。□

定义 4.7. 如果 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个分级子空间，且 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{Q}$，我们将命题 4.6 中构造的不相交树分级 $(Y_0, \mathscr{Q}_0)$ 称为 $(Y, \mathscr{Q})$ 在 $(X, \mathscr{P})$ 中以 $\mathscr{R}$ 为基点的扩张。

备注 4.8. 设 $(Y_0, \mathscr{Q}_0)$ 是 $(Y, \mathscr{Q})$ 在 $(X, \mathscr{P})$ 中以 $\mathscr{R}$ 为基点的扩张。

(1) 如果 $\mathscr{R}$ 包含 Y 的所有非退化片，那么 $(Y_0, \mathscr{Q}_0)$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个截面分级子空间。(2) 如果 $\mathscr{R}$ 恰好包含 Y 的非退化片，那么包含映射$Y \to Y_0$ 在非退化片上确定一个双射。(3) 如果 $\mathscr{Q}\backslash\mathscr{P} \subseteq \mathscr{R}$，那么 $(Y_0, \mathscr{Q}_0)$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的一个全分级子空间。

引理 4.9. 若 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，其中 X 是皮亚诺连续统，则

(1) X 至多有可数多个零直径的非退化片，(2) $\mathbf{Tr}(X)$至多有可数多个连通分支。

证明。 设 d 是诱导 X 拓扑的度量。设 $\mathscr{U}$ 是 X 的任意一个由道路连通开集构成的有限开覆盖。我们断言，除有限多个片外，其余片都包含在 $\mathscr{U}$ 的某个元素中。反设不然，则存在一个由互不相同的片组成的无限序列 P_1，P_2，P_3，$\cdots \in \mathscr{P}$，使得每个 P_i 都不包含在 $\mathscr{U}$ 的任何单个元素中。若 $\lambda > 0$ 是 $\mathscr{U}$ 的 Lebesgue 数，则对所有 $i \geq 1$，$\mathrm{diam}(P_i) \geq \lambda$。取

a_i, $b_i \in P_i$，使得 $d(a_i, b_i) \geq \lambda$。由于 X 是紧致的，我们可以用一个子序列替换 $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to a$ 和 $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to b$，其中 a, $b \in X$。于是 $d(a,b) \geq \lambda/3$。找出道路连通开集 U_a, U_b，使得 $a \in U_a \subseteq B_{\lambda/6}(a)$，$b \in U_b \subseteq B_{\lambda/6}(b)$。固定充分大的 i，使得 a_i, $a_{i+1} \in U_a$ 且 b_i, $b_{i+1} \in U_b$。现在我们可以找到单射路径 $\alpha\colon [0,1] \to U_a$，从 a_i 到 a_{i+1}，以及 $\beta\colon [0,1] \to U_b$，从 b_i 到 b_{i+1}。令 $r_i\colon X \to P_i$ 为引理 3.12 中构造的收缩映射。引理 3.12 意味着 $r_i(P_{i+1})$ 是单点 $z \in P_i$。此外，由于 α 和 β 都始于 P_i 并终于 P_{i+1}，我们有 $z \in \mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathrm{Im}(\beta)$。然而，这就产生了矛盾，因为构造 α 和 β 时使它们的像不相交。由此可知，对于 X 的任意有限开覆盖 $\mathscr{U}$，若其由道路连通开集构成，则 X 中除有限多个片外，其余片都包含在 $\mathscr{U}$ 的某个元素中。

现在，找到由有限开覆盖组成的序列 $\mathscr{U}_n$，其中每个开覆盖都是由直径小于 2^{-n} 的道路连通开集构成，且对于 $\mathscr{U}_n$，勒贝格数为 $\lambda_n > 0$，使得 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$。令 $\mathscr{P}_n$ 为一组片 $P \in \mathscr{P}$，它们不包含于 $\mathscr{U}_n$ 的任何一个元素中。根据上一段，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathscr{P}_n$ 都是有限集，而 $\mathscr{P}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 $\mathscr{P}$ 的一个可数子集。注意，如果 $P \in \mathscr{P}$ 是 X 的一个非退化片，那么 $\mathrm{diam}(P) > 0$，并且存在足够大的 n，使得 $P \in \mathscr{P}_n$。因此，可数集 $\mathscr{P}_\infty$ 就是 X 的非退化片集合；将其枚举后，这些片的直径构成一个零序列。至此，(1) 的证明完成。

由于$\mathbf{Tr}(X)$是两两不交的连通开集之不交并，且 X可分，因此$\mathbf{Tr}(X)$必有可数多个连通分支。因此，(2)成立。□

引理 4.10. 设$(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，K 是一个皮亚诺连续统，且 $f\colon K \to X$ 是一个映射。那么，存在$(Y, \mathscr{Q})$ 作为$(X, \mathscr{P})$ 的一个截面分级子空间，使其满足以下条件：

(1) $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$,(2) Y 在 X中是闭的。(3) Y 有可数多个非退化片，(4) $\mathbf{Tr}(Y)$ 有可数多个连通分支，(5) f 在 Y 中是零伦，当且仅当 f 在 X中是零伦。

证明。 由于 $C = \mathrm{Im}(f)$是一个皮亚诺连续统，集合 $\mathscr{C} = \{P \cap C \mid P \in \mathscr{P}$和 $P \cap C \neq \emptyset\}$ 构成 C上的一个不交树分级，使得$(C, \mathscr{C})$是$(X, \mathscr{P})$的一个分级子空间。此外，由引理 4.9 可知，C 至多有可数多个非退化片，且$\mathbf{Tr}(C)$有可数多个连通分支。令 $\mathscr{R}$ 表示 C 的非退化片集合，并令$(Y, \mathscr{Q})$表示$(C, \mathscr{C})$在$X, \mathscr{P})$中于 $\mathscr{R}$ 处的扩张（回顾定义 4.7）。根据备注 4.8 的第 (1) 部分，$(Y, \mathscr{Q})$是$(X, \mathscr{P})$的一个截面分级子空间。

既然 $(Y, \mathscr{Q})$ 的定义已经完成，注意到 (1) 根据构造成立，而 (2) 根据命题 4.6 的第二个陈述成立。(3) 由注记 4.8 的第 (2) 部分推出。(4) 由扩张构造不影响树状部分这一事实推出，即 $\mathbf{Tr}(C) = \mathbf{Tr}(Y)$。对于 (5)，注意，任意的零伦$H\colon K \times [0,1] \to Y$在 Y中对 f的零伦也给出 X 中对 f的零伦（因为 $Y \subseteq X$）。既然我们已证明 Y 在 X 中是闭的，且 $(Y, \mathscr{Q})$ 是 $(X, \mathscr{P})$ 的截面分级子空间，便可应用引理 4.5，得到一个典范收缩映射 $r\colon X \to Y$。因此，若 $H\colon K \times [0,1] \to X$ 是 X中对 f 的零伦，那么 $r \circ H$ 就是 Y中对 f 的零伦。□

5. Metric quotients of disjointly tree-graded spaces

固定一个不相交树分层空间 $(X, \mathscr{P})$，并设 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$。令 $X_{\mathscr{Q}}$ 表示通过将每个 $P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}$ 等同为一个点而得到的商集，并令 $\Gamma_{\mathscr{Q}}\colon X \to X_{\mathscr{Q}}$ 表示实现这些等同的满射。对于每个$P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}$，令 y_P 表示 $X_{\mathscr{Q}}$中的点，它是 P 在 $\Gamma_{\mathscr{Q}}$下的像。为简便起见，我们将 $X\backslash\bigcup\{P \mid P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}\}$ 与 $X_{\mathscr{Q}}\backslash\{y_P \mid P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}\}$等同，从而 $\Gamma_{\mathscr{Q}}$是 $X\backslash\bigcup\{P \mid P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}\}$ 上的恒等映射，并且当$P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}$时，$\Gamma_{\mathscr{Q}}(P) = y_P$。

由于我们不要求保分层映射是非扩张的，因此有时需要将 $X_{\mathscr{Q}}$ 视为 X的拓扑商空间。我们用 $X^{qt}_{\mathscr{Q}}$ 表示赋予从 $\Gamma_{\mathscr{Q}}$继承的商拓扑的 $X_{\mathscr{Q}}$。若 $\mathscr{Q} = \emptyset$，则 $X^{qt}_{\mathscr{Q}}$ 恰好是第 3.4 节中的拓扑树。引理 3.20 的证明中使用的同一论证表明，对任意 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$，$X^{qt}_{\mathscr{Q}}$ 都是豪斯多夫的。

我们还希望在 $X_{\mathscr{Q}}$ 上赋予一个不交树分次 $\mathscr{P}_{\mathscr{Q}} = \mathscr{Q} \cup \{\{y_P\} \mid P \in \mathscr{P}\backslash\mathscr{Q}\}$，使映射 $\Gamma_{\mathscr{Q}}\colon X \to X_{\mathscr{Q}}$ 保持分层。然而，$X^{qt}_{\mathscr{Q}}$ 不一定是第一可数的。因此，我们必须在 $X_{\mathscr{Q}}$ 上明确地定义一个路径直径度量ρ，使得 $\Gamma_{\mathscr{Q}}\colon X \to X_{\mathscr{Q}}$ 在以下意义下是度量商映射。

定义 5.1。度量空间之间的函数 $q\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ 若满足以下条件，则称为度量商映射：q 是一个非扩张满射，并且对于任意非扩张映射 $g\colon (X, d) \to (X', d')$，只要 g在 q的各个纤维上为常值，就存在唯一的非扩张映射 $f\colon (Y, \rho) \to (X', d')$，使得 $f \circ q = g$。

本节旨在证明以下定理。

定理 5.2。对于任意 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$，在 $X_{\mathscr{Q}}$ 上存在一个路径直径度量 ρ，使得当 $X_{\mathscr{Q}}$ 赋予由 ρ 诱导的拓扑时，$\mathscr{P}_{\mathscr{Q}}$ 是$X_{\mathscr{Q}}$ 上的不交树分层，并且 $\Gamma_{\mathscr{Q}}\colon (X, d) \to (X_{\mathscr{Q}}, \rho)$ 是保持分层的度量商映射。

由于 $\mathscr{Q}$ 是固定的，我们简化记号，用 Y表示 $X_{\mathscr{Q}}$ 和 Γ：用 $X \to Y$表示映射 $\Gamma_{\mathscr{Q}}$。设 d为诱导 X的拓扑的路径直径度量。我们取 $\rho\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ 为 Y上的标准商伪度量 [4]，它由映射 q从(X, d)继承而来：$\rho(y, z)$是所有和$\sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i)$的下确界，这些和取遍 X中的所有有限链 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$，其中 $\Gamma(a_1) = y$，$\Gamma(b_n) = z$，并且对 $1 \le i \le n-1$有 $\Gamma(b_i) = \Gamma(a_{i+1})$。

命题 5.3. *Y 上的商伪度量 ρ是一个度量。*

证明。我们验证 ρ是正定的。设 y 与 z 是 Y中的不同点。则存在一点 $s_1 \in \mathbf{Tr}(X)$，使得 $\Gamma^{-1}(y)$与 $\Gamma^{-1}(z)$位于 $X\backslash\{s_1\}$的不同连通分支中。由于$\mathbf{Tr}(X)$在 X中是开的，我们可以找到$\epsilon > 0$，使得$B_\epsilon(s_1) \subseteq \mathbf{Tr}(X)\backslash(\Gamma^{-1}(y) \cup \Gamma^{-1}(z))$。由于 d 是路径直径度量，$B_\epsilon(s_1)$是唯一弧连通的。特别地，存在一条以 s_1 和 $s_0 \in \partial B_\epsilon(s_1)$为端点的弧 A，使得任意从 $\Gamma^{-1}(y)$中一点到 $\Gamma^{-1}(z)$中一点的路径 $\alpha\colon [0, 1] \to X$ 的像都必须包含 A（先经过 s_0，然后经过 s_1）。注意直径$(A) \ge d(s_0, s_1) = \epsilon$。

考虑 X中的一条有限链 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$，其中对 $1 \le i \le n-1$有 $\Gamma(a_1) = y$、$\Gamma(b_n) = z$以及 $y_i = \Gamma(b_i) = \Gamma(a_{i+1})$。我们将证明 $\sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i) \ge \epsilon$。注意，若 $b_j = a_{j+1}$，则 $\sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i)$大于或等于

$$d(a_1, b_1) + \cdots + d(a_{j-1}, b_{j-1}) + d(a_j, b_{j+1}) + d(a_{j+2}, b_{j+2}) + \cdots + d(a_n, b_n)$$

因此，我们可以假设对所有 $1 \le i \le n-1$都有 $b_i \neq a_{i+1}$。注意，这意味着没有任何 a_i 或 b_i 位于$\mathrm{Tr}(X)$中。设 $\alpha_i : [0,1] \to X$ 为对 $1 \le i \le n$从 a_i 到b_i 的单射路径。由于 Γ 的纤维是道路连通的，我们可以找到对 $1 \le i \le n-1$ 从 b_i到 a_{i+1}的单射路径 $\beta_i : [0,1] \to \Gamma^{-1}(y_i)$。设 $\alpha : [0,1] \to X$为拼接道路 $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\beta_{n-1}\alpha_n$。根据第一段，$A \subseteq \mathrm{Im}(\alpha)$。由于路径 β_i位于$\mathrm{Pc}(X)$中，必存在 $k \in \{1,2,\dots,n\}$使得 $A \subseteq \mathrm{Im}(\alpha_k)$。此外，由于 d 是路径直径度量，且从 a_k 到 b_k 的每条路径的像都必须包含 A，我们有 $d(a_k,b_k) \ge \mathrm{diam}(A)$。因此$\sum_{i=1}^{n} d(a_i,b_i) \ge d(a_k,b_k) \ge \epsilon$。我们得出 $\rho(x,y) \ge \epsilon$。由于 ρ是正定的，它是 Y上的度量。□

命题 5.4. *ρ 是 Y上的路径直径度量。*

证明。 假设结论不成立，以导出矛盾

$$\rho(y,z) < \delta = \inf\{\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\beta)) \mid \beta \text{ is a path from } y \text{ to } z\}.$$

那么，在 X中存在一个有限链 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n$，其中 $\Gamma(a_1) = y$,$\Gamma(b_n) = z$，且对 $1 \le i \le n-1$ 有 $y_i = \Gamma(b_i) = \Gamma(a_{i+1})$，并且满足$\sum_{i=1}^{n} d(a_i,b_i) < \delta$。由于 d 是路径直径度量，存在路径 $\alpha_i : [0,1] \to X$，从 a_i 到 b_i，使得$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_i)) < \delta$。对每个 i令 $\beta_i = \Gamma \circ \alpha_i$，则拼接路径$\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n$是 Y中从 y到 z的一条路径。于是$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{dia}$ $\mathrm{m}(\mathrm{Im}(\alpha_i)) < \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\beta))$，因此存在 $y_0,y_1 \in \mathrm{Im}(\beta)$，使得$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_i)) < \rho(y_0,y_1)$。取$1 \le j \le k \le 1$, $s \in [0,1]$和 $t \in (0,1]$)，使得 $\Gamma \circ \alpha_j(s) = y_0$ 且 $\Gamma \circ \alpha_k(t) = y_1$。令 $a'_j = \alpha_j(s)$ 且 $b'_k = \alpha_k(t)$。现在，$a'_j, b_j, a_{j+1}, b_{j+2}, \dots, a_{k-1}, b_{k-1}, a_k, b'_k$是 X 中的点链，其中 $\Gamma(a'_j) = y_0$, $\Gamma(b'_k) = y_1$，且对$j \le i \le k-1$有 $\Gamma(b_i) = \Gamma(a_{i+1})$。此外，我们有

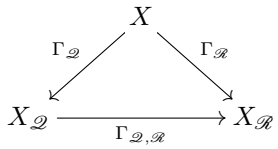
$$\begin{aligned} & d(a'_j,b_j) + \sum_{i=j+1}^{k-1} d(a_i,b_i) + d(a_k,b'_k) \\ \le\ & \mathrm{diam}(\alpha_j([s,1])) + \sum_{i=j+1}^{k-1} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_i)) + \mathrm{diam}(\alpha_k([0,t])) \\ \le\ & \sum_{i=1}^{n} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_i)) \\ <\ & \rho(y_0,y_1). \end{aligned}$$

然而，这与 ρ的定义相矛盾。注意，如果 $j = k$，我们可以用一个更简单的陈述得到同样的矛盾。□

我们在 Y 上使用商伪度量 ρ，确保了 $\Gamma : (X, d) \to (Y, \rho)$ 是一个度量商映射。从 Y 的构造可以清楚看出，Γ 是保分级的。这就完成了定理 5.2 的证明。

注 5.5。 若 $(X,\mathscr{P})$ 是不相交树分层空间，且 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$，则度量商映射 $\Gamma_{\mathscr{Q}} : X \to X_{\mathscr{Q}}$ 的泛性质会诱导出一个度量

商映射 $\Gamma_{\mathscr{Q},\mathscr{R}} : X_{\mathscr{Q}} \to X_{\mathscr{R}}$，使得下图交换。



我们以定理 5.2 的两个有用推论结束本节。首先注意，在 $\mathscr{Q} = \mathscr{P}$, $X_{\mathscr{P}}$ 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树且 $\Gamma_{\mathscr{P}}$ 是一个连续满射、其非退化纤维恰好是 X 的非退化片的情况下，结合定理 3.27，可得以下结论。

推论 5.6。每个不相交树分层空间 $(X, \mathscr{P})$ 都存在一个参数化 (T, V, q)，其中 $T = X_{\mathscr{P}}$ 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树，且 $q = \Gamma_{\mathscr{P}}$ 是一个度量商映射。

引理 5.7。设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，$x_0 \in X$，且 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$ 是由片组成的有限子集。连续恒等函数 $id : X^{qt}_{\mathscr{F}} \to X_{\mathscr{F}}$ 在基本群上诱导一个同构。

证明。设 $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$。$X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 和 $X_{\mathscr{F}}$ 都满足推论 3.18 的假设。此外，推论 3.18 的证明中使用的开覆盖对这两个空间完全相同。因此，我们可以为同构 $*_{i=1}^{m} \pi_1(P_i, x_i) \to \pi_1(X^{qt}_{\mathscr{F}}, x_0)$ 选取一列共轭路径 $\alpha_i : [0,1] \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$，并将这些相同的路径用于同构 $*_{i=1}^{m} \pi_1(P_i, x_i) \to \pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_0)$。结论得证。□

6. Relatively small contractions of loops: the 1-UV_0 Property

接下来的两个定义刻画了这样一种性质：较小的本质平凡环路可以通过较小的零伦收缩。第一个定义见于 [9, 引理 4.1]，并在 [2,定义 6.6]中命名。

定义 6.1. 若对 x的每个开邻域 U，都存在 x 的一个邻域 V，使得 $V \subseteq U$，并且对于每个环路 $\alpha : S^1 \to V$，若其在 X中是本质平凡的，则 α 在 U中也本质平凡，则称空间 X 在 $x \in X$ 处具有 1-UV_0 性质。若空间 X 在其所有点处都具有 1-UV_0性质，则称其具有 1-UV_0性质。

定义 6.2. 若对每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta \in (0, \epsilon)$，使得对于每个本质平凡环路 $\alpha : S^1 \to X$，若 $\operatorname{diam}(\operatorname{Im}(\alpha)) < \delta$，则存在一个映射 $g : \mathbb{D} \to X$，使得 $\operatorname{diam}(\operatorname{Im}(g)) < \epsilon$ 且 $g|_{S^1} = \alpha$，则称度量空间 (X, d) 具有一致的1-UV_0 性质。

1-UV_0性质是一种拓扑性质，而一致 1-UV_0性质则取决于在 X 上所选的度量。所有一维度量空间都是一致 1-UV_0 的，因为这类空间中的每个零伦回路都可以在其自身的像中收缩 [7,定理 3.7]。

例6.3。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $D_k \subseteq \mathbb{R}^2$ 为以（k，0）为中心、半径为 $1/3$ 的闭圆盘，并赋予 $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ 不交并拓扑。显然，X 是 1-UV_0。若 d_1 是 X 上的欧几里得度量，则（X，d_1）是一致地 1-UV_0。然而，也可以在 X 上定义一个度量 d_2，使其（1）诱导X的拓扑，（2）对所有 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\operatorname{diam}(D_k) = 2/3$，以及（3）满足 $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\partial D_k) = 0$。对于任意这样的度量 d_2，度量空间（X，d_2）并非一致地 1-UV_0。

前面的例子启发了以下不交树分层空间（X， $\mathscr{P}$）的构造，其中 $\mathbf{Pc}(X)$ 并非（统一地）1-UV_0。

例 6.4。对于 $n \geq 1$，令 $C_n \subseteq \mathbb{R}^3$ 表示这样一个圆锥：其底面是 xy-平面内以（$\frac{1}{2^n}$，0，0）为圆心、半径为 $\frac{1}{2^{n+1}}$的圆，顶点为（$\frac{1}{2^n}$，0，1）。用 A_n 在 x-轴上连接 C_n 和 C_{n+1}，我们令 $X = \{（0，0，0）\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup C_n$（见图2）。令 $\mathscr{P}$ 为圆锥 C_n 和{（0，0，0）}的集合。于是，$\mathscr{P}$ 是 X 上的不交树分级，使得 $\mathbf{Pc}(X)$ 并非一致 1-UV_0。如果 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$ 是有限的，那么显然，所得的商空间 $X_{\mathscr{F}}$（其中除有限个圆锥外的所有圆锥都被压缩为点）是单连通的。然而，X 本身的基本群与调和群岛 [17]的基本群同构，且不可数。因此，定理 1.1 的结论对于该空间不成立。

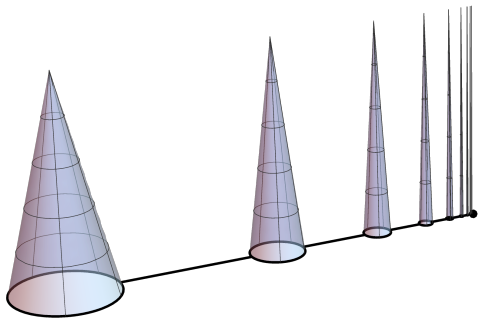


FIGURE 2. 一个不相交树分层空间（X， $\mathscr{P}$），其中$\mathbf{Pc}(X)$不是一致 1-UV_0。

引理6.5. 设（X， d）为一个度量空间。若（X， d）是一致1-UV_0的，则 X是1-UV_0的。此外，若 X 是紧致的，则逆命题成立。

证明。第一个结论是显然的。设 X 是紧致度量的且为1-UV_0。令$\epsilon > 0$。对每个 $x \in X$，找到 $\delta_x \in (0, \epsilon)$，使得每个在 X 中非本质的环路 $\alpha\colon S^1 \to B_{\delta_x/2}(x)$在 $B_{\epsilon/2}(x)$中也是非本质的。令 $\delta > 0$ 为 X的覆盖 $\{B_{\delta_x/2}(x) \mid x \in X\}$ 的一个 Lebesgue 数。设 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是一个零伦映射，且直径$(\mathrm{Im}(\alpha)) < \delta$。则对某个 $x \in X$ 有$\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq B_{\delta_x/2}(x)$，并且由我们对覆盖的选取，我们有一个映射 $g\colon \mathbb{D} \to B_{\epsilon/2}(x)$，满足 $g|_{S^1} = \alpha$。由此可得直径$(\mathrm{Im}(g)) < \epsilon$。□

为了通过将无限多个像“逐渐缩小”的连续映射序列拼接起来构造连续映射，我们需要对 1-UV_0 性质作另一种刻画。

定义 6.6. 设 W, X 为空间，且 $x \in X$。如果对每个 X 中 x 的邻域 U，都有 $\mathrm{Im}(f_k) \subseteq U$ 对除有限多个以外的所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立，则称映射序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$（$f_k\colon W \to X$ 收敛到 x）。

下面的结果给出了 1-UV_0 性质的一个有用刻画，与 [2, 命题 6.8]中的刻画类似。证明很直接，留作练习。

引理 6.7。如果 X 是一个可度量化空间，那么以下条件等价。

(1) X 是 1-$UV_0(2)$ 对于每个收敛到某点 $x \in X$ 的本质平凡环路序列 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\alpha_k\colon S^1 \to X$，都存在一个映射序列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $g_k\colon \mathbb{D} \to X$，它收敛到 x，并且对于所有 $k \in \mathbb{N}$都有 $(g_k)|_{S^1} = \alpha_k$。

此外，如果 X 是局部道路连通的，那么 *(2)* 中的环路 α_k 可假设以 x为基点。

将引理 6.7 中的 (2) 用作 1-UV_0 的定义后，下一个陈述的证明很简单。

推论 6.8。如果 X 是一个1-UV_0 可度量化空间，且 $Y \subseteq X$ 是 X的收缩，那么 Y 是1-UV_0。

引理 6.9。设$(X, \mathscr{P})$ 是一个仅有有限个非退化片的不相交树分级空间。那么，当且仅当其中所有片都是1-UV_0时，X才是1-UV_0。

证明。由于 X 的每个片都是 X的收缩，一个方向由推论 6.8 得出。反过来，我们可以假设 $\mathscr{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$，并且对每个 i，P_i都是 1-UV_0。我们应用引理 6.7 来证明 X 是 1-UV_0。设 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$是一个本质平凡环路序列 $\alpha_k\colon S^1 \to X$，它在 X中收敛到点 x。

若 $x \in \mathbf{Tr}(X)$，则存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $k \geq K$，$\mathrm{Im}(\alpha_k) \subseteq \mathbf{Tr}(X)$。由于 $\mathbf{Tr}(X)$ 的每个连通分支都是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树，因此只要 $\mathrm{Im}(\alpha_k) \subseteq \mathbf{Tr}(X)$，就存在一个映射 $g_k\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Im}(\alpha_k)$，使得 $(g_k)|_{S^1} = \alpha_k$。任意选取 g_k, $k < K$，我们得到一个映射序列 $g_k\colon \mathbb{D} \to X$，它收敛到 x，且对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$(g_k)|_{S^1} = \alpha_k$。

若对于某个 j，$x \in P_j$，令 U 为包含 P_j 的 $X\setminus\bigcup_{i\neq j} P_i$ 的连通分支。则 U 是开集，且 $\mathscr{P}' = \{P_j\}$ 是 U 上的不交树分级。由于 U 是开集，我们不妨设对于所有 k，$\mathrm{Im}(\alpha_k) \subseteq U$。若 $\mathrm{Im}(\alpha_k)$ 位于 $\mathbb{R}$-树 $U\setminus P_j$ 的不交并中，则存在映射 $g_k\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Im}(\alpha_k)$，使得 $(g_k)|_{S^1} = \alpha_k$。令$T = \{k \in \mathbb{N} \mid im(\alpha_k) \cap P_j \neq \emptyset\}$。若 T 是有限的，则由于我们已对所有 $k \in \mathbb{N}\setminus T$ 定义了 g_k，证明的其余部分显然。假设 T 是无限的。若 $k \in T$，则不妨设 α_k 以 P_j为基点。根据引理 3.11，α_k 与一个树有效环路 $\beta_k\colon S^1 \to U$路径同伦，同伦 $H_k\colon S^1 \times [0,1] \to U$ 的像包含于 $\mathrm{Im}(\alpha_k)$。然而，由于 U 只有一个片，我们有 $\mathrm{Im}(\beta_k) \subseteq P_j$。因此，$\{\beta_k\}_{k\in T}$ 是 P_j 中收敛到 x 的一列本质平凡环路。由于假设 P_j 是 1-UV_0，存在一个映射序列 $\{g_k\}_{k\in T}$，其中映射 $g_k\colon \mathbb{D} \to P_j$，使得 $\{g_k\}_{k\in T}$ 收敛到 x，且 $(g_k)|_{S^1} = \beta_k$。由于 $\mathrm{Im}(H_k) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha_k)$，通过复合同伦，我们可以构造一个映射序列 $\{h_k\}_{k\in T}$，其中映射 $h_k\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Im}(\alpha_k) \cup \mathrm{Im}(g_k)$，且对于所有 $k \in T$，$(h_k)|_{S^1} = \alpha_k$。对所有 $k \in \mathbb{N}$ 定义 g_k 后，我们看到 $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 中收敛到 x。□

与引理 6.7 类似，下面给出了对一致 1-UV_0 性质的一个有用刻画，证明留作练习。

引理 6.10。如果(X, d) 是一个度量空间，则以下各条件等价：

(1) X 是均匀1-UV_0，(2) 对于每个由本质平凡环路组成的序列 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\alpha_k\colon S^1 \to X$ 使得 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_k)) = 0$，存在一个由映射组成的序列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $g_k\colon \mathbb{D} \to X$ 使得$\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(g_k)) = 0$，并且对所有$k \in \mathbb{N}$都有$(g_k)|_{S^1} = \alpha_k$。

根据引理 6.10 中用于定义均匀 1-UV_0 的 (2)，下一个推论的证明很简单。

推论 6.11。 若(X,d)是一个一致的1-UV_0度量空间，且 $Y \subseteq X$是一个子空间，并存在一个非扩张收缩映射 $r\colon X \to Y$，那么 Y 是一致的1-UV_0。

引理 6.12。 设$(X,\mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，且 d 是 X的一个相容路径直径度量。若 $\mathbf{Pc}(X)$ 是一致的1-UV_0，且$(Y,\mathscr{Q})$ 是$(X,\mathscr{P})$的一个截面分级子空间，则$\mathbf{Pc}(Y)$ 是一致的1-UV_0。

证明。设 $\epsilon > 0$。取 $\delta \in (0,\epsilon)$，使得若 $\alpha\colon S^1 \to \mathrm{Pc}(X)$是一个本质平凡环路，且 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha)) < \delta$，则存在一个映射 $g\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Pc}(X)$，使得$g|_{S^1} = \alpha$ 且 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(g)) < \epsilon$。设 $\alpha\colon S^1 \to \mathrm{Pc}(Y)$ 是一个本质平凡环路，且 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha)) < \delta$。设 Q 是 Y 中满足 $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq Q$的片。由于$(Y,\mathscr{Q})$是一个截面分级子空间，因此 Q 要么是单点空间，要么 Q 是 X的一个片。若α 在点 x处为常值，则以 x 为值的常值映射 $g\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Pc}(Y)$满足要求。假设 α 不是常值映射。那么 Q是 X 和Y的一个非退化片。根据我们对 δ 的选取，存在一个映射 $g\colon \mathbb{D} \to \mathrm{Pc}(X)$，使得 $g|_{S^1} = \alpha$ 且 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(g)) < \epsilon$。由于 Q 是包含 $\mathrm{Im}(\alpha)$ 的 $\mathrm{Pc}(X)$ 的路径连通分支，因此必有 $\mathrm{Im}(g) \subseteq Q \subseteq \mathrm{Pc}(Y)$。□

下一个引理精确地说明了我们将如何使用一致 1-UV_0 性质。它对于构造树分层空间中环路的零伦将是重要的。

引理 6.13. 设 K 为 $\mathbb{D}$ 的一个紧子集，使得 $S^1 \subseteq K$，并设 $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, \dots\}$ 为 $\mathbb{D}\backslash K$ 的连通分支的一个（可能有限的）枚举族，使得每个集合 $O_n \in \mathcal{O}$ 都是凸的。设 (X,d) 为一个度量空间，且 A 为 X 的一个一致 1-UV_0 度量子空间。若 $g\colon K \to X$ 是一个映射，使得

(1) 对所有 n，$g(\partial O_n) \subseteq A$，(2) 对所有 n，$g|_{\partial O_n}\colon \partial O_n \to A$ 在 A 中是零伦的，(3) $\lim_{n\to\infty}$直径$(g(\partial O_n)) = 0$，若 $\mathcal{O}$ 为无限，

那么存在映射 $H\colon K \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n) \to X$，使得 $H|_K = g$。此外，若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \mathbb{D}\backslash K$，则 $g|_{S^1}\colon S^1 \to X$ 是本质平凡的。

证明。由于每个集合 $O_n \in \mathcal{O}$ 都是开且凸的，因此存在有序对的同胚 $(O_n, \partial O_n) \cong (\mathbb{D}, S^1)$。因此，$\alpha_n = g|_{\partial O_n}\colon \partial O_n \to A$可视为一个本质平凡环路，它可延拓为定义在 O_n 上的映射（见图 3）。若 $\mathcal{O}$ 是有限的，结论显然。设 $\mathcal{O}$ 是无限的。由于在一致的 1-UV_0 度量子空间 A中，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(g(\partial O_n)) = 0$，引理 6.10 意味着存在映射$g_n\colon O_n \to A$, $n \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $(g_n)|_{\partial O_n} = g|_{\partial O_n}$，并且 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(g_n)) = 0$。定义 $H\colon K \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n) \to X$，使其在 K 上与 g 一致，在 O_n上与 g_n 一致。

为证明 H 是连续的，考虑 $K \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n)$中的一个收敛序列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to a$，并令 $\epsilon > 0$。我们将证明，对于除有限多个 k之外的所有 k，都有 $d(H(a_k), H(a)) < \epsilon$。由于 H 在 K上连续，只需考虑对每个$k \in \mathbb{N}$，都有 $a_k \in O_{n_k}$，其中某个 $n_k \in \mathbb{N}$的情形。如果 $S = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是有限的，则由 g 及每个 g_n的连续性可得结论。假设 S 是无限的，

则必有 $a \in K$。取 b_k 为 ∂O_{n_k} 与 $\mathbb{D}$ 中的线段的交集中的一点，该线段的端点为 a 和 a_k。于是 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to a$ 属于 K，且由 $H|_K$的连续性可知 $\{H(b_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \to H(a)$。取 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有$n \geq N$，都有 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(g_n)) < \frac{\epsilon}{2}$。特别地，当$n_k \geq N$时，有 $d(H(a_k)\ H(b_k)) = d(g_{n_k}(a_k)\ g_{n_k}(b_k)) < \frac{\epsilon}{2}$。取 K_0，使得对所有 $k \geq K_0$，都有 $d(H(b_k)\ H(a)) < \frac{\epsilon}{2}$。当 $n_k \geq N$和 $k \geq K_0$时，有 $d(H(a_k)\ H(a)) \leq d(H(a_k)\ H(b_k)) + d(H(b_k)\ H(a)) < \epsilon$。如果$n < N$ 且 $T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n_k = n\}$ 是无限的，那么由 g_n 的连续性可知$\{H(a_k)\}_{k\in T_n} \to H(a)$，因此我们可以取 $K_n \in \mathbb{N}$，使得当 $k \in T_n$ 且 $k \geq K_n$时，$d(H(a_k)\ H(a)) < \epsilon$。如果 $n < N$ 且 T_n 是有限的，令 $K_n =$为$\max(T_n) + 1$。设 $K =$为$\max\{K_n \mid 0 \leq n < N\}$。若 $k \geq K$，则有 $d(H(a_k)\ H(a)) < \epsilon$，证明完毕。

对于最后一个结论，注意如果 $\mathcal{O}$ 由 $\mathbb{D}\backslash K$ 的所有连通分支组成，那么我们就得到一个映射 $H\colon \mathbb{D} \to X$，使得 $H|_{S^1} = g|_{S^1}$。因此 g_{S^1} 是非本质的。□

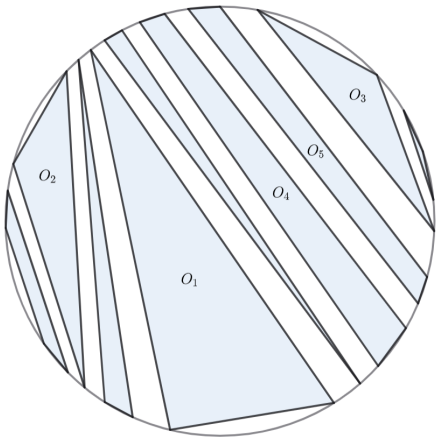


FIGURE 3. 枚举 $\mathbb{D}\backslash K$的部分连通分支的开凸开集 O_1，O_2，O_3，.....。映射 $g\colon K \to X$将边界 ∂O_n 映入 A，其对应的零伦环路随着 $n \to \infty$而直径逐渐缩小。

7. NULL-HOMOTOPIES OF LOOPS IN DISJOINTLY TREE-GRADED SPACES

下一个引理是本文中技术性最强的结果。我们用记号$[\![a,\ b]\!]$ 表示 S^1 中端点为 a，$b \in S^1$ 的弦，并用 $\mathrm{hull}(A)$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{R}^2$的凸包。

引理 7.1。设$(X, \mathscr{P})$ 是不相交树分层空间，且 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是一个树高效环路。那么存在一个紧集 K，满足 $S^1 \subseteq K \subseteq \mathbb{D}$，以及一个映射$g\colon K \to X$，使得若 $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, \dots\}$是 $\mathbb{D}\backslash K$的（可能有限的）连通分支集的一个枚举，则以下结论成立：

(1) $g|_{S^1} = \alpha$ 以及 $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(\alpha)$，(2) $\mathcal{O}$ 的每个元素都是凸的，(3) 存在片 P_1、P_2、P_3、$\dots \in \mathscr{P}$（不一定互不相同），使得$g(\partial O_n) \subseteq P_n$ 对每个 $O_n \in \mathcal{O}$均成立，并且

(4) 当$n\to\infty$为无限时，$\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(g(\partial O_n))=0$ *if* $\mathcal{O}$ 为无穷。

此外，若 α 是非本质的，则对每个 n，$g|_{\partial O_n}:\ \partial O_n\to P_n$ 在 P_n中是非本质的。

证明。设（T，V，q）为（X，$\mathscr{P}$）的一个参数化。假设 $\alpha:\ S^1\to X$是一个树高效环。由于 T 是拓扑树，$q\circ\alpha$ 是零伦的。设$f_0:\ \mathbb{D}\to T$为 $q\circ\alpha$的一个延拓。然后，我们可修改 f_0 以得到映射$f':\ \mathbb{D}\to T$，即使 f'在 f_0 的那些分离 $\mathbb{R}^2$ 的极大点原像之补集的有界连通分支的闭包上取常值（详情见 [7, 定理3.7]的证明，或参见断言 7.6 关于二维球面的类似证明。）于是，f'的任何点原像都不分离 $\mathbb{R}^2$ 与 $f'|_{S^1}=f_0|_{S^1}=q\circ\alpha$。对 $f'^{-1}(t)$ 的每个连通分支 C，存在$f_0^{-1}(t)$ 的唯一“边界连通分支” C'，使得 C 是 C' 与 $\mathbb{R}^2\backslash C'$ 和$C\cap S^1=C'\cap S^1$的有界连通分支的并。（若 C' 不分离 $\mathbb{R}^2$，则 $C=C'$）。令

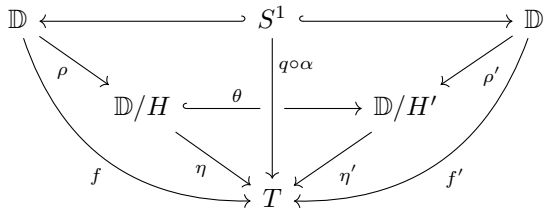
$$H'=\left\{C\mid\exists\ t\in T\text{ such that }C\text{ is a component of }f'^{-1}(t)\right\}\text{ and}$$

$$H=\left\{\mathrm{hull}(C\cap S^1)\mid\exists\ t\in T\text{ such that }C\text{ is a component of }f'^{-1}(t)\right\}.$$

根据 [7, 定理 3.7] 和 [7, 第 3.2 节1] 的证明，H' 和H 是 $\mathbb{D}$ 的上半连续分解，使得 $\mathbb{D}/H'$ 和 $\mathbb{D}/H$ 是树状连续体。

设 $\rho:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}/H$ 和 $\rho':\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}/H'$ 是闭的、单调的商映射。则存在映射 $\eta':\ \mathbb{D}/H'\to T$ 和 $\eta:\ \mathbb{D}/H\to T$，使得$\eta\circ\rho|_{S^1}=q\circ\alpha=\eta'\circ\rho'|_{S^1}$ 和 $\eta'\circ\rho'=f'$；根据商映射的泛性质，它们是唯一确定且连续的。令 $f=\eta\circ\rho$。

根据构造，$\rho|_{S^1}$ 是商映射，且 $\rho'|_{S^1}$ 在ρ'的纤维上为常值。因此，存在诱导连续映射 $\theta:\ \mathbb{D}/H\to\mathbb{D}/H'$。$H$ 中的元素与 H' 中和边界相交的元素之间存在双射，该双射由 $h=\mathrm{hull}(C\cap S^1)\ \mapsto C$给出。于是显然，$\theta$ 是单射，且$\eta=\eta'\circ\theta$。因此我们得到如下交换图。



由于 ρ 和 ρ' 是单调闭映射，任一映射下连通集的原像都是连通的，见 [10, 命题 I.4.2]。如果对于某个 $t\in T$，A 是$\eta'^{-1}(t)$的连通子集，那么 $\rho'^{-1}(A)$ 是连通的，因而必包含于 H' 的某个单个元素中。因此，A 是一个点。所以，η' 是光映射。由于 $\eta=\eta'\circ\theta$，η也是光映射。

假设 A 是 $\eta'^{-1}(V)$ 中包含的 $\mathbb{D}/H'$ 的一个连通子集。由于 η' 是光映射，且 V 全不连通，因此对某个 $v\in V$，有 $A\subseteq\eta'^{-1}(v)$。于是，连通集 $\rho'^{-1}(A)$ 必须包含在 H' 的某个元素中，而 A 是一个点。因此，$\mathbb{D}/H'$ 的每个非退化连通子集都与 $\eta'^{-1}(T\backslash V)$ 相交，且 $\mathbb{D}/H'$ 中任意两点都能被 $\eta'^{-1}(T\backslash V)$ 中的一个点分开。

断言 7.2. 设 h_1 和 h_2 是 H 和 C_1 中的不同元素，C_2 是 H'中对应的元素，即，对于 $i = 1,2$，有 $h_i = \mathrm{hull}(C_i \cap S^1)$。那么存在一个$t \in T\backslash V$和 C，它们是 $f'^{-1}(t)$ 的一个连通分支，使得 C在 $\mathbb{D}$ 中将 C_1与 C_2分隔开，并且$\mathrm{hull}(C\cap S^1)$ 在 $\mathbb{D}$中将 h_1 与 h_2 分隔开。此外，$f_0^{-1}(t)$ 包含于 C 中的唯一边界连通分支C' 也在 $\mathbb{D}$中将 C_1 与 C_2 分隔开。

断言的证明。假设 h_1，$h_2 \in H$ 是 H 中互不相同的元素。选取 C_1，$C_2 \in H'$，使得 $C_i \cap S^1 = h_i \cap S^1$。（回想一下，$C_1$ 和 C_2 是唯一确定的。）因此，$\rho'(C_1)$ 和 $\rho'(C_2)$ 是 $\mathbb{D}/H'$ 中互不相同的点，这意味着存在 $d \in \mathbb{D}/H'$，使得 $\eta'(d) \in T\backslash V$，并且 d 将 $\rho'(C_1)$ 与 $\rho'(C_2)$ 分开。根据构造，$C = \rho'^{-1}(d)$ 是 $f'^{-1}\big(\eta'(d)\big)$ 的一个连通分支，且 C 将 C_1 和 C_2 在 $\mathbb{D}$ 中分开。特别地，$C \cap S^1 \neq \emptyset$。

注意，$\rho\big(\mathrm{hull}(C \cap S^1)\big) = \theta^{-1}(d)$，并且 $\theta^{-1}(d)$在 $\mathbb{D}/H$中将 $\theta^{-1}\big(\rho'(C_1)\big) =\rho(h_1)$与 $\theta^{-1}\big(\rho'(C_2)\big) = \rho(h_2)$ 分隔开。因此，$\mathrm{hull}(C \cap S^1)$ 必定在 $\mathbb{D}$ 中将 h_1 与 h_2 分隔开。

$\mathbb{D}\backslash C'$ 的连通分支集合，是 $\mathbb{D}\backslash C$ 的连通分支集合与 $\mathbb{R}^2\backslash C'$的有界连通分支集合之并。因此，$C'$ 也必须在 $\mathbb{D}$中分隔 C_1 和 C_2。□

注意，H 的每个元素都包含于

$$\tilde{H} = \big\{C \mid \exists\, t \in T \text{ such that } C \text{ is a component of } f^{-1}(t)\big\}.$$

由前一个命题可知，对于任意 $t \in T$，H 中任意两个不同元素都不可能包含在 $f^{-1}(t)$的同一个连通分支中。因此 $H = \tilde{H}$。

设 $H_{\mathbf{Tr}} = \big\{h \in H \mid f(h) \in T\backslash V\big\}$和 $H'_{\mathbf{Tr}} = \big\{h \in H' \mid f'(h) \in T\backslash V\big\}$。

命题 7.3。对于每个 $h \in H$ 以及 $S^1\backslash h$的每个连通分支 A，α 在 A的端点上为常数。

命题 *7.3* 的证明。设 h，A如命题所述，并设 a，b为 A的端点。由于 H 中的元素是凸的，$\mathrm{hull}(A)$是 ρ-饱和的开子集，属于 $\mathbb{D}$，因此 $\rho\big(\mathrm{hull}(A)\big)$ 是 $\mathbb{D}/H$的开连通子集。选取 A 的紧致连通子集的一个嵌套序列 S_n，使得 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = A$。选取分隔 $\rho(h)$与 $\rho\big(\mathrm{hull}(S_n)\big)$ 的 $e_n \in \rho(A)$，使得 $\eta(e_n) \in T\backslash V$。

固定 $\epsilon > 0$。那么存在一个 $\delta > 0$，使得 $d(x, y) < \delta$ 蕴含 $d\big(\alpha(x)\ \alpha(y)\big) < \epsilon/2$。选取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{hull}(S_n) \cap B_\delta(a) \neq \emptyset$，且 $\mathrm{hull}(S_n) \cap B_\delta(b) \neq \emptyset$（见图 4）。由于 e_n 分隔了 $\rho(h)$ 和 $\rho\big(\mathrm{hull}(S_n)\big)$，$\rho^{-1}(e_n)$ 必须同时与 $B_\delta(a)$ 和 $B_\delta(b)$ 相交。根据构造，$\alpha\big(\rho^{-1}(e_n)\big)$ 是一个点。因此 $d\big(\alpha(a)\ \alpha(b)\big) \leq d\big(\alpha(a)\ \alpha\big(\rho^{-1}(e_n)\big)\big) + d\big(\alpha\big(\rho^{-1}(e_n)\big),\ \alpha(b)\big) < \epsilon$。由于 ϵ 是任意的，$\alpha(a) = \alpha(b)$。□

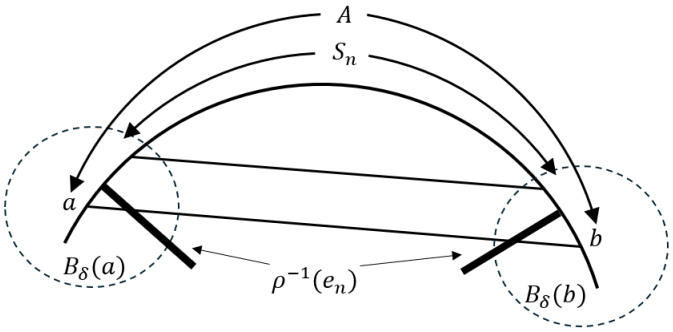


FIGURE 4. e_n 被选在 $\eta^{-1}(T\backslash V)$ 中，以分隔 $\rho(h)$ 和 $\rho\big($的凸包$(S_n)\big)$。

H 的每个元素都是 S^1 上的一个点、一条弦或一个拓扑圆盘。若 h 是一个圆盘，由于对某个 $C \in H'$ 有 $h = \text{hull}(C \cap S^1)$，则 h 的边界由 S^1 的子集以及 $\mathbb{D}$ 中的弦组成。设 $H_{\mathbf{Pc}} = \{h \in H \mid f(h) \in V$，且 h 是一个拓扑圆盘$\}$。注意，若 $h \in H\backslash H_{\mathbf{Pc}}$，则 α 在 $h \cap S^1$ 上为常值。（若 h 是一个点，这一观察显然成立。若 h 是一条经 f 映射到 V 中的弦，则应用命题 7.3。若 $h \in H_{\mathbf{Tr}}$，则由于 q 在 $\mathbf{Tr}(X)$ 上是单射且 $f|_{S^1} = q \circ \alpha$，这一观察成立。）L

$$\text{et } K = \mathbb{D}\backslash \bigcup_{h \in H_{\mathbf{Pc}}} \text{int}_{\mathbb{D}}(h).$$

现在我们将构造 K 的一个上半连续分解 G，它细化 H，并且使得 K/G 映射到 X 中。对于每个 $h \in H_{\mathbf{Pc}}$，令 $H_{\partial h}$ 为 ∂h 的极大连通子集 J，使得 α 在 $J \cap S^1$ 上为常值。此类 J 的一个端点要么是 ∂h 中某条弦的端点，要么是 $J \cap S^1$ 的一个极限点。由命题 7.3 可知，$H_{\partial h}$ 的元素是闭的。显然，$H_{\partial h}$ 是 ∂h 的单调分解，因此 $\partial h/H_{\partial h}$ 要么是一个点（若 α 在 $h \cap S^1$ 上为常值），要么是一条简单闭曲线。

分别考虑 K 和 S^1 的分解 $G = \Big(H\backslash H_{\mathbf{Pc}}\Big) \cup \Big(\bigcup_{h \in H_{\mathbf{Pc}}} H_{\partial h}\Big)$ $G_{S^1} = \{g \cap S^1 \mid g \in G\}$。令 $\rho_1 \colon S^1 \to S^1/G_{S^1}$ 和 $\rho_2 \colon K \to K/G$ 为商映射。

命题 7.4。 G 和 G_{S^1} 分别是 K 和 S^1 的上半连续分解。

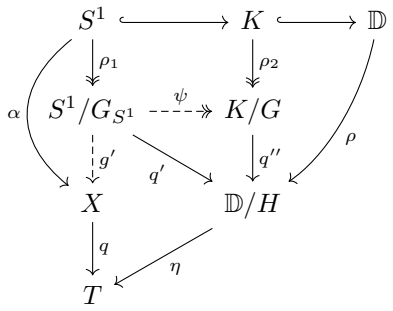
证明。假设 g_1 和 g_2 是 G 的不同元素，分别包含于 H 的不同元素 h_1 和 h_2 中。由于 H 是 $\mathbb{D}$ 的上半连续分解，存在分别包含 h_1 和 h_2 的 U 和 V 个互不相交的 ρ 饱和子集。于是，$U \cap K$ 和 $U \cap K$ 是 K 中分别包含 g_1 和 g_2 的互不相交的 ρ_2 饱和子集。因此，$\rho_2(g_1)$ 和 $\rho_2(g_2)$ 可由互不相交的开集分离。

假设 $g_1, g_2 \in G$ 互不相同，且都包含在 H的同一个元素 h 中。那么 $h \in H_{\mathbf{Pc}}$，因此，h 是 $\mathbb{D}$中的一个凸拓扑圆盘。由于 g_1 和 g_2 是 ∂h的两个互不相同的闭子区间（可能退化），因此存在 $g, g' \in G$ 也包含在 ∂h 中，并在 ∂h中将 g_1 与 g_2 分隔开。令 $x \in g \cap S^1$ 和 $x' \in g' \cap S^1$ 以及U, V为 $\mathbb{D}\backslash[\![x, y]\!]$的两个连通分支。那么 $U \cap K\backslash\{g \cup g'\}$ 和 $V \cap K\backslash\{g \cup g'\}$是互不相交的开饱和集，其中一个包含 g_1，另一个包含g_2。因此，$\rho_2(g_1)$和 $\rho_2(g_2)$可以由互不相交的开集分隔。

因此， K/G 是豪斯多夫的。由于 K 是紧致的， ρ_2 是一个闭映射，这意味着 G 是一个上半连续分解。接着，[8] 第 62 页上的练习 2 表明， G_{S^1} 也是一个上半连续分解。□

不难验证， S^1 到 K 的包含映射会诱导出一个 ψ 的典范同胚： $S^1/G_{S^1} \to K/G$ ，使得 $\rho_2|_{S^1} = \psi \circ \rho_1$。由于 ρ： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/H$ 在 G_{S^1}的各个元素上为常值，因此存在一个商映射 q'： $S^1/G_{S^1} \to \mathbb{D}/H$ ，使得 $q' \circ \rho_1 = \rho|_{S^1}$。令 $q'' = q' \circ \psi^{-1}$。由于 G 的每个元素都包含在 H的某个元素中，因此我们有 $q'' \circ \rho_2 = \rho|_K$。

根据构造， α 在 G_{S^1}的元素上为常值。因此，存在唯一的连续映射 g'： $S^1/G_{S^1} \to X$ ，使得 $\alpha = g' \circ \rho_1$ （见图 5）。令g: $K \to X$为连续映射 $g = g' \circ \psi^{-1} \circ \rho_2$。于是 $g|_{S^1} = \alpha$且 $q \circ g = f|_K$。由于 ρ_1是满射，我们有 $\eta \circ q' = q \circ g'$。下图表可交换，且条件 (1) 得到满足。



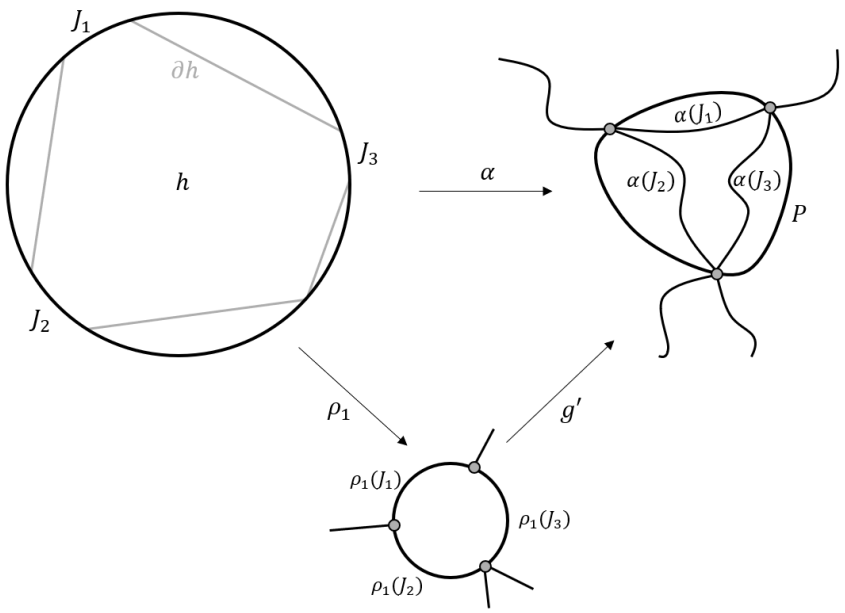


FIGURE 5. 一个集合 $h \in H_{\mathbf{Pc}}$ 使得 J_1的连通分支 J_2, J_3, 被 $\partial h \cap S^1$ 通过 α非平凡地映入 X 的片 P 中。∂h 在商映射 ρ_1 下的像是一条简单闭曲线，其中 $\partial h \backslash (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ 的三个连通分支的闭包是 $H_{\partial h}$ 的元素，因而被识别为点。

回忆一下，$K = \mathbb{D} \backslash \bigcup \text{int}_{\mathbb{D}}(h)$。因此，$K$ 有可数多个补$_{h \in H_{\mathbf{Pc}}}$连通分支，且 g 将每个连通分支的边界映入$\mathbf{Pc}(X)$的单个片中。令 $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, \dots\}$ 为 $\mathbb{D} \backslash K$的（可能有限的）连通分支集的一个枚举。选取 $h_i \in H_{\mathbf{Pc}}$，使得 $\text{int}_{\mathbb{D}}(h_i) = O_i$。由于 h_i 是凸的，O_i也如此，故条件 (2) 得到满足。

空间 S^1/G_{S^1} 是一个皮亚诺连续统，并且由于 η 是光映射，$\eta^{-1}(V)$ 是树状连续体 $\mathbb{D}/H$的完全不连通子集。q' 的一个非退化纤维：$S^1/G_{S^1} \to \mathbb{D}/H$，必须具有 $\rho_1(S^1 \cap h_i)$ 的形式，其中 i是某个对象；由于 $\psi \circ \rho_1(S^1 \cap h_i) = \rho_2(\partial h_i)$，它是一条简单闭曲线，其中 ρ_2 将 ∂h_i的闭连通子集识别起来。特别地，q' 的所有纤维都是道路连通的。此外，由于 $h_i \in H_{\mathbf{Pc}}$，q' 必须将一个非退化纤维 $\rho_1(S^1 \cap h_i)$ 映射到点 $\rho(S^1 \cap h_i) \in \eta^{-1}(V)$。注意，由于 $q \circ g(\partial h_i) = \eta \circ \rho(S^1 \cap h_i) \in V$，且 X 是不相交树分级空间，g 必须将 ∂h_i 映入 X的某个片中，从而得到当前引理的条件（3）。此外，既然引理 3.26 的所有条件现已满足，S^1/G_{S^1} 继承了不相交树分级空间的结构，其参数化为 $(\mathbb{D}/H, \eta^{-1}(V)\ q')$。由于 S^1/G_{S^1}是紧致的，引理 4.9 表明，S^1/G_{S^1} 的各片的直径构成一个零序列（相对于任意选定的相容度量）。因此，它们在 g' 下于 X 中的像也必然构成一个零序列，于是得到条件（4）。

现在我们可以证明引理的最后一个结论。假设 α 是一个本质平凡环路。那么我们可以假设 $f_0 = q \circ f''$是一个映射 $f'' \colon \mathbb{D} \to X$。我们将固定 S^2的上半球和下半球的一个识别

与 $\mathbb{D}$，二者在赤道上重合。通过这一识别，我们可以将 H 视为 S^2 上半球的一个上半连续分解，并将 H' 视为 S^2下半球的一个上半连续分解。

Let $K = S^2 \setminus \bigcup \operatorname{int}_{\mathbb{D}}(h) \subseteq S^2$。于是$h \in H_{\mathbf{Pc}}$ $\sim$ K 是从上半球中去掉一列开圆盘后得到的二球面。

断言 7.5. 设给定 $l\colon K \to X$，其在上半球上的定义为 g，在下半球上的定义为 f''。那么，$H_{\mathbf{Pc}}$ 中的任意两个元素都可以被 $l^{-1}(x)$ 的某个连通分支分离，其中 $x \in \mathbf{Tr}(X)$。

证明。由于 $g|_{S^1} = \alpha = f''|_{S^1}$，映射 l 定义良好且连续。注意，对于 $x \in \mathbf{Tr}(X)$ 和 $t = q(x)$，有 $q^{-1}(t) = \{x\}$，因此

$$l^{-1}(x) = g^{-1}(x) \cup f''^{-1}(x) = (q \circ g)^{-1}(t) \cup (q \circ f'')^{-1}(t) = f^{-1}(t) \cup f_0^{-1}(t).$$

设 h_1 和 h_2 是 H 中互不相同的元素（将其与 S^2 的上半球中相应的子集相认同），并设 C_1 和 C_2 是 H' 中相应的元素（将其与 S^2 的下半球中相应的子集相认同）。由断言 7.2，存在 $C \in H'_{\mathbf{Tr}}$，使得 C 在下半球中分离 C_1 和 C_2，且 $h = \operatorname{hull}(C \cap S^1) \in H_{\mathbf{Tr}}$ 在上半球中分离 h_1 和 h_2。令 $t = f'(C)$，并注意 $t \in T \setminus V$。存在唯一的 $x \in \operatorname{Tr}(X)$，使得 $q(x) = t$。断言 7.2 的最后一个结论保证，$f_0^{-1}(t)$ 中包含于 C 的相应边界连通分支 C' 也在下半球中分离 C_1 和 C_2。由于 q 在 $T \setminus V$ 上是单射，且 $f_0(C') = f'(C) = f(h) = t$，我们有 $f''(C) = g(h) = x$。于是 $C' \cup h$ 在 S^2 和 $C' \cup h \subseteq l^{-1}(x)$ 中分离 h_1 和 h_2。

□

固定 $i \in \mathbb{N}$，其中 O_i 是 $\mathbb{D} \setminus K$ 的一个连通分支。于是 $h_i \in H_{\mathbf{Pc}}$ 满足 $\operatorname{int}_{\mathbb{D}}(h_i) = O_i$。若 S^2 的一个子集与 O_i 不相交（O_i 位于上半球中），我们就称该子集为“有界”。令 $\mathcal{S}$ 为 l 的点原像中所有分离 S^2 的连通分支所成的集合。对于 $D,\ D' \in \mathcal{S}$，若 D 包含在 $S^2 \setminus D'$ 的某个有界连通分支中，我们就称 $D < D'$。

断言 7.6。 $\mathcal{S}$ 中的每个元素都小于或等于某个极大元，且任意两个不同元素互不相交。

断言的证明。断言的第二个结论显然成立。我们希望应用佐恩引理，因此只需证明每条链都有上界。设 $\{D_\iota\}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的一条链，我们不妨假设它没有极大元。令 U_ι 为 $S^2 \setminus D_\iota$ 的有界连通分支之并。注意，这意味着只要 $\iota < \kappa$，就有 $U_\iota \cup D_\iota \subseteq U_\kappa$。令 $U = \cup_\iota U_\iota$。固定 $\epsilon > 0$，并选取 $\delta > 0$，使得 $d(x, y) < \delta$ 蕴含 $d\big(l(x)\ l(y)\big) < \epsilon/2$。注意，$\partial U \subseteq \cup_\iota \mathcal{N}_\delta(U_\iota)$，其中 $\mathcal{N}_\delta(U_\iota)$ 表示 U_ι 的 δ-邻域。由于集合族 $\{\mathcal{N}_\delta(U_\iota)\}_\iota$ 是嵌套的，且 ∂U 是紧致的，对某个 ι 有 $\partial U \subseteq \mathcal{N}_\delta(U_\iota)$。于是，对于任意 $D_\kappa > D_\iota$，我们有 D_κ 将 U_ι 与 ∂U 分离，因此 $\partial U \subseteq \mathcal{N}_\delta(D_\kappa)$。（这是因为我们在 S^2 上使用长度度量。）于是 $\operatorname{diam}\big(l(\partial U)\big) \leq \operatorname{diam}\big(l\big(\mathcal{N}_\delta(D_\kappa)\big)\big) < \epsilon$。由于 ϵ 是任意的，$l|_{\partial U}$ 为常数，且存在 $x \in X$ 使得 $\partial U \subseteq l^{-1}(x)$。

现在我们来验证 ∂U 是连通的。假设 W, V 是 ∂U 的一个开分离。固定 $a \in W \cap \partial U$ 和 $b \in V \cap \partial U$。由于 W 和 V 是开集，且 ∂U 是紧致的，我们可以选取 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(a) \subseteq W$，$B_\delta(b) \subseteq V$，并且 $\mathcal{N}_\delta(\partial U) \subseteq W \cup V$。于是 $U \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial U) = U \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial U) \subseteq \cup_\iota U_\iota$，这意味着存在 ι_0，使得

$U\backslash\mathcal{N}_\delta(\partial U) \subseteq U_{\iota_0}$。因此，对于所有 $D_\kappa > D_{\iota_0}$，都有 $D_\kappa \subseteq U\backslash U_{\iota_0} \subseteq \mathcal{N}_\delta(\partial U) \subseteq W \cup V$。

与证明第一段中一样，存在一个 κ，使得 $D_\kappa > D_{\iota_0}$ 和$\partial U \subseteq \mathcal{N}_\delta$（$D_\kappa$）。因此 $D_\kappa \cap W \neq \emptyset \neq D_\kappa \cap V$，这意味着 W、 V给连通集 D_κ构成了一个开分离；矛盾。因此 ∂U 是连通的。由此可知，包含 ∂U 的 l^{-1}（x）的连通分支是链 $\{D_\iota\}$的一个上界，断言由佐恩引理得证。□

现在我们可以定义 $\tilde{l}$： $S^2\backslash O_i \to X$，它是 $g|_{\partial O_i}$的一个零伦。令 U 为 $\mathcal{S}$的极大元素的所有有界连通分支之并。根据断言 7.5， U 包含$_{\mathbb{D}}$（h_j）的$\bigcup_{j\neq i}$int。对于 $x \in S^2\backslash(O_i \cup U)$，令 $\tilde{l}$（x）$= l$（x）。对于 $x \in U$，令 $\tilde{l}|_D = l$（∂D），其中 x 包含于 $S^2\backslash D$ 的一个有界连通分支中，而 D 是 S的一个极大元素~ ~，也就是说， l 将 U的每个连通分支收缩为一点。显然， $l|_U$~是连续的，且在 ∂U上与 l 一致。因此 l 是连续的，且 ∂O_i 在 X中是非本质的。由于不交树分级的每个片都是一个收缩， ∂O_i 在包含它的片中是非本质的。

□

下一个陈述是引理 6.13 和引理 7.1 的直接组合，也是这些技术性结果最重要的推论。

引理 7.7. 若$(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，其中 X的每个片都是单连通的，且 $\mathbf{Pc}(X)$ 一致地为1-UV_0，则 X 是单连通的。

注 7.8. 引理 6.13 和引理 7.1 也可用于证明下述陈述中非平凡方向：若 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，且d 是 X上的相容路径直径度量，那么当且仅当$\mathbf{Pc}(X)$作为度量子空间一致地为 1-UV_0 时， X 才一致地为 1-UV_0 。由于我们不会直接用到这一事实，因此省略证明。不过，值得注意的是，定理 1.1 中关于$\mathbf{Pc}(X)$的假设，可以替换为假设 X 本身一致地为 1-UV_0。

下一个命题是推论 10.1 的一个弱版本，是我们证明定理 1.1 所需要的。

命题 7.9. 设 $(X, \mathscr{P})$ 和 $(Y, \mathscr{Q})$ 是不相交树分层空间，其中 $Pc(X)$ 是一致 1-UV_0。若 $f: X \to Y$ 是保持分层的单射，满足 $f(Tr(X)) \subseteq Tr(Y)$，且对于任意满足 $f(P) \subseteq Q$ 的 $P \in \mathscr{P}$ 和 $Q \in \mathscr{Q}$，限制映射 $f|_P: P \to Q$ 是 π_1-单射，则 f 是 π_1-单射。

证明. 设 $\beta: S^1 \to X$ 是一个映射，且 $\alpha = f \circ \beta: S^1 \to Y$ 是非本质的。根据引理 7.1，我们可以找到一个紧集 $S^1 \subseteq K \subseteq \mathbb{D}$ 和映射 $g: K \to Y$，使其满足该命题的结论。由于 Im(β) 是紧致的，且 f 是连续单射， f 将 Im(β) 同胚地映射到 Im(α) 上。由于 Im(g) $=$ Im(α)，存在 $h: K \to X$，使得 $f \circ h = g$。设 O 是 $\mathbb{D}\backslash K$ 的一个连通分支。由于 ∂O 是 $\mathbb{D}$ 中的一条简单闭曲线，且对于某个 $Q \in \mathscr{Q}$ 有 $g(\partial O) \subseteq Q$，假设 f(Tr(X)) $\subseteq$Tr(Y) 可确保对于某个 $P \in \mathscr{P}$ 有 $h(\partial O) \subseteq P$，且 $f(P) \subseteq Q$。由于 $g|_{\partial O} = f|_P \circ h|_{\partial O}$ 在 Q 中是非本质的，且假设 $f|_P$: $P \to Q$ 是 π_1-单射，因此 $h|_{\partial O}$ 在 P 中是非本质的（因而在 Pc(X) 中是本质的）。由此可得，对于 $\mathbb{D}\backslash K$ 的每个连通分支 O， $h|_{\partial O}$ 都是非本质的。

由于在紧致度量空间 Im(g) 中，$\lim_{n\to\infty}$diam($g(\partial O_n)$) $= 0$，且 f 将 Im(h) 同胚地映射到 Im(g)，因此 $\lim_{n\to\infty}$diam($h(\partial O_n)$) $= 0$ 属于

$\mathrm{Im}(h) \cap \mathbf{Pc}(X)$。由于 $\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0，由引理 6.13 可知存在映射 $H : \mathbb{D} \to X$，使得 $H|_K = h$。由于 $H|_{S^1} = \beta$，我们得出 β 是非本质的。□

例 7.10. 令 X 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间，在序列 1，$1/2$，$1/3$，$1/4$，.....中的每个点处都附着一个直径固定的圆。类似地构造 Y，但其中圆的直径为零（见图 6）。这两个空间都是不相交树分层空间，其片为 $\{0\}$ 及附着的圆。然而，Y 是紧致的，而 Y 不是紧致的。根据命题 7.9，典范连续保级双射 $f : X \to Y$ 是 π_1-单射，但不是同构，因为 $\pi_1(X)$是可数的，而 $\pi_1(Y)$是不可数的。

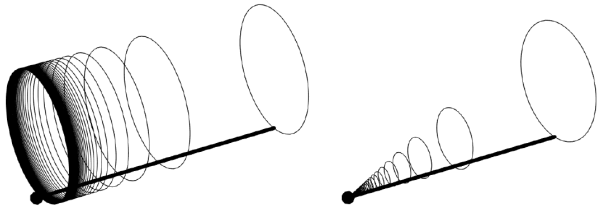


FIGURE 6. 不相交树分层空间 X （左）和 Y （右），以及典范连续保级双射 $f : X \to Y$。

8. Generalized covering maps

我们证明中的一个重要工具是 Fischer-Zastrow [16], 的广义覆盖空间理论，它将覆盖映射通常的提升性质作为定义。

定义 8.1. 映射 $p : E \to X$ 是广义覆盖映射，如果

(1) E 道路连通且局部道路连通；(2) 对每个道路连通且局部道路连通空间 Y、基点映射 $f : (Y, y) \to (X, x)$，以及满足 $f_\#(\pi_1(Y, y)) \leq p_\#(\pi_1(E, e))$ 的点 $e \in p^{-1}(x)$，都存在唯一的映射 $f : (Y, y) \to (E, e)$，使得 $p \circ f = f$。

此外，若对于某个 $e_0 \in E$，$p_\#(\pi_1(E, e_0))$ 是 $\pi_1(X, p(e_0))$ 的正规子群，则称 p 为广义正则覆盖映射。若 E 单连通且 X 道路连通，则称 p 为广义万有覆盖映射，并称 E 为 X 的广义万有覆盖空间。

注 8.2. 注意，每个广义覆盖映射都具有唯一道路提升性质，因此它的所有纤维都是 T_1。

注 8.3. 严格来说，我们不要求广义覆盖映射是满射，因为定义允许 X 有多个道路连通分支。不过，广义覆盖映射 $p : E \to X$ 满射到X的一个路径连通分支上。

注记 8.4 （E的拓扑的一组基）。若 $p : E \to X$ 是一个广义覆盖映射，则 E 的拓扑可识别为所谓的"须状拓扑" [1,引理 5.10]。设 $e \in E$ 和 U 分别是 X中 p（e）的一个开邻域。那么，E 中 e 的一个基本邻域为

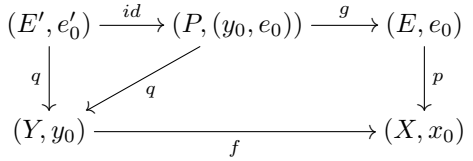
$$N(e, U) = \{\widetilde{\gamma}(1) \mid \gamma : [0, 1] \to U \text{ s.t. } \gamma(0) = p(e) \text{ and } \widetilde{\gamma}(0) = e\}$$

其中 $\widetilde{\gamma}$ 表示从 e出发的 γ 的唯一提升。容易验证， N（e， U）是道路连通的。

例 8.5（局部道路连通核反射）。 广义覆盖映射的一个重要例子是双射但不必是同胚的映射。对任意空间 X，令$\mathbf{lpc}(X)$为与 X具有相同底集、但其拓扑由 X中开集的道路连通分支生成的空间。有时$\mathbf{lpc}(X)$被称为 X的局部道路连通核反射或 X [3]的通用局部道路连通空间。众所周知，$\mathbf{lpc}(X)$是局部道路连通的，恒等映射 id： $\mathbf{lpc}(X)$ $\to X$ 是连续的，并且具有如下性质：若f： $Z \to X$ 是从局部道路连通空间 Z出发的映射，则 f： $Z \to$$\mathbf{lpc}(X)$是连续的。注意，$\mathbf{lpc}(X)$ $= X$ 当且仅当 X 是局部道路连通的。由此可知，只要 X 是道路连通的，恒等函数 id: $\mathbf{lpc}(X)$ $\to X$ 就是广义覆盖映射。

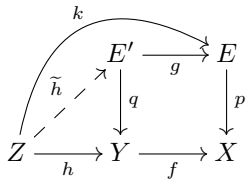
注记 8.6（纤维的离散性）。如果 p: $E \to X$ 是广义覆盖映射，那么 p 是具有唯一道路提升性质的Serre纤维化。然而， p 的纤维不一定彼此同胚。事实上，有些纤维可能是离散的，而另一些则是非离散的。当且仅当对于每个$e \in p^{-1}(x)$，都存在 x 在 X 中的一个开邻域 U_e，使得若 i： $U_e \to X$是包含映射，则 $i_{\#}(\pi_1(U_e, x))$ $\leq$ $p_{\#}(\pi_1(E, e))$，此时纤维 $p^{-1}(x)$ 是离散的。此外，如果存在 x 的一个道路连通且局部道路连通的开邻域 U，使得对于所有 $e \in p^{-1}(x)$，都有$i_{\#}(\pi_1(U, x))$ $\leq$ $p_{\#}(\pi_1(E, e))$，那么 U被 p均匀覆盖（容易验证，当 $e \neq e'$且 p将e映射N同胚地映到 U上时， $N(e, U) \cap N(e', U) = \emptyset$）。因此，若 X是局部道路连通空间，且 X 在 x处半局部单连通，那么 x 有一个被 p均匀覆盖的邻域 U。例如，若$(X, \mathscr{P})$是不相交树分级的，且$p : E \to X$ 是广义覆盖映射，那么 $\mathrm{Tr}(X)$的每个连通分支 U 都被 p均匀覆盖。

注记 8.7（广义覆盖映射的拉回）。若 $p\colon (E, e_0) \to (X, x_0)$ 是基点广义覆盖映射，且 $H = p_{\#}(\pi_1(E, e_0))$，而 $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ 是从道路连通空间 Y 出发的基点映射，则存在一个拉回广义覆盖映射 $q\colon (E', e_0') \to (Y, y_0)$，满足 $q_{\#}(\pi_1(E', e_0'))$ $= f^{-1}\#(H)$ [1, 引理 2.34]。我们简要回顾其构造及一些相关事实。令 $Y \times_X E = \{(y, e) \in Y \times E \mid p(e) = f(y)\}$ 为普通拉回，并令 P 为 (y_0, e_0) 在 $Y \times_X E$ 中所在的路径连通分支。我们令 $E' = \mathrm{lpc}(P)$ 和 $e_0' = (y_0, e_0)$，并令 q: $E' \to Y$ 和 $g : E' \to E$ 为投影映射的限制映射，因此下列连续函数图表可交换（注意， $g : E' \to Y$ 是连续的，因为恒等函数 $id : E' \to P$ 是连续的）。



利用 p 的提升性质以及拉回和局部道路连通核反射的泛性质，可以很容易验证 $q_{\#}$ $(\pi_1(E', e_0'))$ $= f^{-1}\#(H)$，并且 q 具有以下提升性质：若 (Z, z_0) 是道路连通且局部道路连通的带基点空间，且 $h\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$，以及 $k\colon (Z, z_0) \to$

$\widetilde{(E, e_0)}$ 是满足 $p \circ k = f \circ h$ 的映射，则存在唯一的基点映射 h：$\widetilde{(Z, z_0)} \to \widetilde{(E', e_0')}$，使得 $q \circ h = h$ 且 $g \circ h = k$。



我们特别关注这类拉回的以下应用：如果p 是广义万有覆盖映射，且 f 是 π_1-单射，那么 q 也是广义万有覆盖映射。此外，如果 f 是单射映射，那么投影映射 $Y \times_X E \to E$ 是单射，因此 $g : E' \to E$ 也是单射。注意，如果 f 是双射，那么完整的投影映射 $Y \times_X E \to E$ 是双射；然而，受限投影 $g : E' \to E$ 不一定是满射。

引理 8.8. 设 X 道路连通，且 $p : X \to X$ 是基于基点的广义万有覆盖映射，而 A是 X的收缩。若 A 是$p^{-1}(A)$的一个路径连通分支，则 $p|_{\widetilde{A}} : A \to A$ 是广义万有覆盖映射。

证明。固定 $x_0 \in A$，由于 A 道路连通，且 A 是$p^{-1}(A)$的一个路径连通分支，我们可以利用道路提升来选择 $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{A} \cap p^{-1}(x_0)$。令 $i : A \to X$为包含映射，并令 $r : X \to A$ 为满足 $r \circ i = id_A$ 的收缩映射。由于 i 是 π_1- 单射，注记 8.7 表明，沿着 $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$，对 $p : (X, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 作拉回所得的基点广义覆盖映射 $q : (E, e_0) \to (A, x_0)$ 是一个 广义万有覆盖映射。令 $i : E \to X$ 为另一个投影映射，使得 $p \circ i = i \circ q$。由于 X 单连通，映射 $r \circ p : (X, \widetilde{x}_0) \to (A, x_0)$可提升为映射 $\widetilde{r} : (X, \widetilde{x}_0) \to (E, e_0)$。由于 $r \circ i = id_A$，提升的唯一性保证 $\widetilde{r} \circ i = id_E$。因此，$i$ 是一个嵌入。

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{r}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A & \xrightarrow[i]{} & X & \xrightarrow[r]{} & A \end{array}$$

最后，我们注意到，$i(E) = A$ 是由以下假设得出的：A 是 $p^{-1}(A)$的一个道路连通分支，且我们选择了基点 $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{A}$。□

当（X，d）是一个度量空间，且 $p : E \to X$ 是一个广义覆盖映射时，X 上的度量可自然地提升为 E 上的度量，定义如下：给定 a，$b \in E$，令$\mathcal{P}(E, a, b)$表示 E中从 a 到 b的路径集合。定义

$$\widetilde{d}(a, b) = \inf\{\operatorname{diam}_d(\operatorname{Im}(p \circ \widetilde{\alpha})) \mid \widetilde{\alpha} \in \mathcal{P}(E, a, b)\}.$$

引理 8.9。若 $p : E \to X$ 是一个广义覆盖映射，且 d 是 X上的相容度量，则 d 是 E 上的相容路径直径度量，使得 $p :$ （E，d）$\to$（X，d）是非扩张的。此外，若 Y是一个道路连通空间，$f : Y \to E$是一个映射，且$f = p \circ f$，则$\operatorname{diam}(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{diam}(\operatorname{Im}(f))$。

证明。由于 $\mathcal{P}(E, b, a) = \{\widetilde{\alpha}^{-1} \mid \widetilde{\alpha} \in \mathcal{P}(E, a, b)\}$，我们有 $d(a, b) = d(b, a)$。若 $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{P}(E, a, b)$ 且 $\beta \in \mathcal{P}(E, b, c)$，则 $\widetilde{\alpha} \cdot \beta \in \mathcal{P}(E, a, c)$，其中 diam(Im($p \circ (\widetilde{\alpha} \cdot$

$\sim\beta))) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(p\circ\widetilde{\alpha})) + \mathrm{diam}(\mathrm{Im}(p\circ\beta))$。三角不等式由此成立。若 $a=b$，则常值路径给出 $d(a,b)=0$。设 $a\neq b$ 属于 E。若 $p(a)\neq p(b)$，则连接这两点的任意路径的直径都至少为 $d(p(a)\ p(b))$，因此 $d(a,b)>0$。设 $p(a)=p(b)=x$，并且为导出矛盾，假设 $d(a,b)=0$。于是存在路径序列 $\widetilde{\alpha_n}\colon [0,1]\to E$，$n\in\mathbb{N}$，从 a 到 b，使得$\alpha_n = p\circ\widetilde{\alpha}_n$ 是一个以 x 为基点的环路，且 $\{\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\alpha_n))\}_{n\in\mathbb{N}}\to 0$。令 $L_n\subseteq\mathbb{R}^2$ 为端点分别是 $(0,0)$ 和 $h_n=(1/n,1/n^2)$ 的线段，并设 $H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$。定义 $f\colon H\to X$ 为路径 α_n 在 L_n上的取值。由于路径 α_n 的直径趋于零，f 是连续的。此外，由于 H 是树状连续体，存在唯一的提升$\sim f\colon (H,(0,0))\to(E,a)$，其在 L_n 上定义为 $\widetilde{\alpha_n}$。然而 $\{h_n\}\to(0,0)$ 属于 H，$\sim\sim f(0,0)=a$，并且对所有 $n\in\mathbb{N}$，$f(h_n)=b$。这与备注8.2 中的事实矛盾：$p^{-1}(x)$ 是 T_1。因此 $d(a,b)>0$，由此我们得出 d 是一个度量。

要证明 d 诱导了 E的拓扑，注意到对每个 $e\in E$ 和 $\delta>0$，都有 $N(e,B_{\delta/2}(p(e)))\subseteq B_\delta(e)\subseteq N(e,B_{2\delta}(p(e)))$，其中中间的集合是度量 d中的开球。

要证明 (X,d)是非扩张的，注意，对于所有 $\widetilde{\alpha}\in\mathcal{P}(E,a,b)$，都有 $d(p(a)\ p(b))\leq\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(p\circ\widetilde{\alpha}))$。因此，$d(p(a)\ p(b))\leq d(a,b)$。

对于最后一个断言，我们有$\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f))\leq\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f\circ\gamma))$，其中 $\gamma\colon [0,1]\to Y$，从 y_0 到 y_1。于是$\sim\sim\sim f\circ\gamma\in\mathcal{P}(E,f(y_0)\ f(y_1))$，且 $\mathrm{diam}(f\circ\gamma)\leq\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f))$。因此 $d(f(y_0)\ f(y_1))\leq\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f))$，这证明 $\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f))\leq\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(f))$。

最后是一个路径直径度量。给定 $a,b\in E$ 以及 $\widetilde{\alpha}\in\mathcal{P}(E,a,b)$，由上一段可知，$\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha}))=\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(p\circ\widetilde{\alpha}))$。因此

$$\widetilde{d}(a,b)=\inf\{\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(p\circ\widetilde{\alpha}))\mid\widetilde{\alpha}\in\mathcal{P}(E,a,b)\}=\inf\{\mathrm{diam}(\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha}))\mid\widetilde{\alpha}\in\mathcal{P}(E,a,b)\}.$$

□

我们将 E 上的度量 d称为提升度量。转而关注广义覆盖空间的存在性，我们注意到，1-UV_0 性质提供了一个有用的充分条件。

定理8.10。 [2, 定理 6。9] 如果 X 是一个1-UV_0 可度量化空间，则存在一个广义万有覆盖映射 $p\colon X\to X$。

下面两个陈述保证，（一致的）1-UV_0 性质总能提升到一个广义覆盖空间。第一个利用引理 6.7即可直接证明，第二个则由引理 8.9的最后一个陈述容易推出。

引理8.11。 设(X,d) 是一个可度量化空间，且 $p\colon E\to X$ 是一个广义覆盖映射。如果 X是1-UV_0，那么 E是1-UV_0。此外，如果 X是局部道路连通的，则逆命题也成立。

引理 8.12。 设(X,d) 是一个度量空间，$A\subseteq X$ 是一个度量子空间，并且$p\colon E\to X$ 是一个广义覆盖映射。当且仅当 A 关于从(E,d)继承的子空间度量是均匀1-UV_0 时，$p^{-1}(A)$ 才是均匀1-UV_0 。

现在我们将注意力集中于不相交树分层空间的广义覆盖。人们可能会猜想，如果 $p\colon E\to X$ 是一个广义（正规）覆盖

映射，其中 X 是不相交树分层空间，那么 E 会继承一种不交树分级，其中 E 的片是 $p^{-1}(P)$ 的原像中 P 的片的路径连通分支。然而，即使在简单情形下，这也是错误的。

例 8.13. 令 X 为两个不交圆 P_1、P_2 的并，它们由一条弧 A 连接，其中基点 x_0 是 A 与 P_1 的交点。 X 通过取这两个圆为片而具有不交树分级。令 a 为沿 P_1 绕行的环路的同伦类，并令 b 为沿 A 移动、绕行 P_2 后再沿 A 返回基点的环路的同伦类。考虑对应于 $\pi_1(X, x_0)$ 的正规子群 $H = \langle a^2, ba^{-1}, a^{-1}b\rangle$ 的二重覆盖映射 $p\colon E \to X$。那么 $p^{-1}(P_1)$ 和 $p^{-1}(P_2)$ 都是拓扑圆，而 $p^{-1}(A)$ 由两条弧组成，它们的端点都在这些圆上。因此， E 不存在非平凡的不交树分级。

引理 8.14. 设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，且 $p\colon E \to X$ 是一个广义覆盖映射。若 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是一个本质平凡环路，且其像与 $\mathbf{Tr}(X)$ 相交，则 α 到 E 的任何提升都不是单射。

证明。 假设 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是本质平凡的，$\mathrm{Im}(\alpha) \cap \mathbf{Tr}(X) \neq \emptyset$，且 $\widetilde{\alpha}\colon S^1 \to E$ 是 α的一个单射提升。由于$\mathbf{Tr}(X)$ 的每个连通分支 U 都被 p 均匀覆盖（回顾注记 8.6），α 必定是定义 3.10 意义下的树高效。令 J 为 $\alpha^{-1}(\mathbf{Tr}(X))$的一个连通分支。于是存在$\mathbf{Tr}(X)$的一个连通分支 U，使得 $\alpha|_J\colon J \to U$ 是单射。固定 $s \in J$并令 $x = \alpha(s)$。由于 x 分离了 X，必定存在 $\alpha^{-1}(\mathbf{Tr}(X))$的至少另一个连通分支 K 以及一点 $t \in K$，使得 $\alpha(t) = x$。

由于 α 是本质平凡环路，存在映射 $g\colon \mathbb{D} \to X$，使得 $g|_{S^1} = \alpha$。由于 x 将 X 与 g^{-1} 分隔开，$x \cap S^1$ 至少有两个连通分支（根据上一段）。因此， $g^{-1}(x)$ 的某个连通分支 C 必定将 $\mathbb{D}^2$ 分隔开。取分别位于 $C \cap S^1$ 不同连通分支中的点 a、$b \in S^1$。令 A 为 S^1 中端点为 a 和 b 的两条弧之一。定义映射 $h\colon \mathbb{D} \to X$，使其在 $S^1 \cup g^{-1}(x)$ 上与 g 一致，并且在 $\mathbb{D}\backslash g^{-1}(x)$ 中任何与 A 相交的连通分支上也与之相同。若 $\mathbb{D}\backslash g^{-1}(x)$ 的某个连通分支 V 不与 A 相交，则令 $h(V) = x$。于是， $h\colon \mathbb{D} \to X$ 是一个连续映射，它给出了以 x 为基点的环路 $\alpha|_A$ 的零伦。然而，这意味着提升 $\widetilde{\alpha}$ 将 A 的两个端点映射到同一点，这与 $\widetilde{\alpha}$ 是单射的假设矛盾。□

引理 8.15。 设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，且只有有限多个非退化片，并设 $p\colon X \to X$ 是一个广义万有覆盖映射。那么$\widetilde{\ }$存在 $\mathscr{P}$ 上的一个不交树分级，使得

(1) $\widetilde{X}$ 的一个片是某个 X中的片 P的原像 $p^{-1}(P)$ 的一个路径连通分支，$\widetilde{\ }$
(2) X 的每个片都是单连通的，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(3) $p\colon (X, \mathscr{P}) \to (X, \mathscr{P})$ 保持分层，(4) 若 $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathscr{P}}$ 是 $p^{-1}(P)$ 中 $P \in \mathscr{P}$的路径连通分支，则限制映射$\widetilde{\ }p|_{\widetilde{P}}\colon P \to P$ 是一个广义万有覆盖映射。

$\widetilde{\ }$证明。 定义 $\mathscr{P}$ 中的元素使其满足引理陈述中的 (1)，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们有 $\bigcup \mathscr{P} = p^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$。因此，$\bigcup \mathscr{P}$ 在 X 中是闭的。根据构造， $\mathscr{P}$ 中的元素两两不交且道路连通。由于 $\mathscr{P}$ 中的元素是

$\widetilde{\mathbf{Pc}}(X)$ 的道路连通分支，因此 $\mathscr{P}$ 中的元素是 $\bigcup\mathscr{P}$ 的道路连通分支。假设 $\widetilde{\alpha}\colon S^1\to X$ 是一个单射环路。由于 X 是单连通的，$\widetilde{\alpha}$ 和 $\alpha=p\circ\widetilde{\alpha}$ 都是非本质的。然而，引理 8.14 蕴含 $\mathrm{Im}(\alpha)\subseteq\mathbf{Pc}(X)$。特别地，$\alpha$ 的像必定位于单个片 $P\in\mathscr{P}$ 中。因此，$\widetilde{\alpha}$ 的像必定位于 $p^{-1}(P)$ 的某个道路连通分支中。于是，X 中的每条简单闭$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$曲线都包含于 $\mathscr{P}$ 的某个元素中。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$接下来，我们证明 $\mathscr{P}$ 中的元素在 X中是闭的。由于 X 的片是$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$闭的，只需证明：若 $P\in\mathscr{P}$ 是 $P\in\mathscr{P}$的 $p^{-1}(P)$的路径连通分支，则 $\widetilde{P}$ 在 $p^{-1}(P)$中是闭的。设 $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ 为 X的非退化片。若 $P=\{x\}\in\mathscr{P}$ 是 X的一个退化片，则包含 x 的$X\setminus\bigcup_{i=1}^n P_i$ 的连通分支 U 是一个拓扑 $\mathbb{R}$-树。根据注记 8.6，$p^{-1}(x)$是离散的，结论显然成立。因此，我们可以将注意力集中在固定的非退化片 P_i所对应的 $p^{-1}(P_i)$的一个路径连通分支 $\widetilde{P}$ 上。

继续之前，我们先作两个观察。首先，注意我们可以如下明确描述 $p^{-1}(P_i)$ 的路径连通分支 $\widetilde{P}$：固定一点 $e_0\in\widetilde{P}$。那么

$$\widetilde{P}=\{\widetilde{\eta}(1)\mid\eta:[0,1]\to P_i\text{ is a path with }\widetilde{\eta}(0)=e_0\}$$

其中 $\widetilde{\eta}$ 表示从 e_0 出发的 η 的提升。其次，设 V 是包含 P_i 的 $X\setminus\bigcup_{j\neq i}P_j$ 的连通分支。那么 V 在 X 中是开集，且推论 3.17 表明，包含映射 $P_i\to V$ 在基本群上诱导一个同构。

考虑属于 P 的收敛序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，对于所有 ~~$n\in\mathbb{N}$~~，$\widetilde{a}_n\in\widetilde{P}$ 均满足$\widetilde{\ }$。记 $x_0=p(b)$ 和 $a_n=p(\widetilde{a}_n)$，并注意到 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to x_0$ 是 P_i 中的一个收敛序列。取一点 $\widetilde{a}\in\widetilde{P}\cap p^{-1}(x_0)$。由于 $p^{-1}(V)$ 是 $p^{-1}(P_i)$ 的一个开邻域，且 $\widetilde{X}$ 局部道路连通，我们可以找到 $\widetilde{b}$ 的一个道路连通邻域 W，使得 $W\subseteq p^{-1}(V)$。固定一个充分大的 n，使得 $\widetilde{a}_n\in W$。令 $\widetilde{\alpha}\colon[0,1]\to P$ 是一条从 $\widetilde{a}$ 到 $\widetilde{a}_n$ 的路径，并令 $\beta\colon[0,1]\to W$ 是一条从 $\widetilde{a}_n$ 到 b 的路径，其中$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。令 $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\alpha}\cdot\beta$，并注意到 $\gamma=p\circ\widetilde{\gamma}$ 是 V 中以 $x_0\in P$ 为基点的环路。由于包含映射 $P_i\to V$ 是 π_1-满射，γ 与一个以 x_0 为基点的环路$\sim$ $\sim\delta\colon[0,1]\to P_i$ 路径同伦。但若 $\delta\colon[0,1]\to X$ 是从 $\widetilde{a}$ 出发的 δ 的提升，则$\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim$ $\sim\delta(1)=b$。因此 $b\in P$，证明了 P 是闭集。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$既然现已证明 $\mathscr{P}$ 是 X上的不交树分级，显然$\sim$ $\sim p$ 保持分层。此外，由于 X 是单连通的，且根据引理 3.12，$X\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的各片都是 X 的收缩，因此 X 的每个片都是单连通的。对于 (4)，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$注意到，由于 X 的每个片 P 都是 X的收缩，P是局部道路连通的，而$\widetilde{\ }$是单连通的。若 P 是 $p^{-1}(P)$ 在 $P\in\mathscr{P}$下的一个路径连通分支，则由引理 8.8 可知$\widetilde{\ }$ $p|_{\widetilde{P}}\colon P\to P$ 是一个广义万有覆盖映射。□

9. Inverse limits of disjointly tree-graded spaces

这里，我们证明某些不相交树分层空间的逆极限继承了自然的不交树分级。我们将用到的一个基本事实如下。

引理 9.1. 设 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}(T_n,g_{n+1,n})$ 是唯一弧连通豪斯多夫空间 T_n 与连续函数$g_{n+1,n}\colon T_{n+1}\to T_n$所成序列的逆极限。则 $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}(T_n,g_{n+1,n})$ 不含简单闭曲线。此外，若 T_{lim} 是$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}(T_n,g_{n+1,n})$的路径连通分支，则$\mathbf{lpc}(T_{lim})$ 是拓扑树。

证明. 设 g_n 表示该逆极限的投影映射。若 $C \subseteq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}(T_n, g_{n+1,n})$是一条简单闭曲线，则 $D_n = g_n(C)$是树状连续体，且 C 同胚于树状连续统的序列$(D_n, (g_{n+1,n})|_{D_{n+1}})$的逆极限。然而，连续统定理中的标准结果，例如 [20, 练习 2.19] ，可用于证明树状连续统的逆极限不能包含简单闭曲线。□

定义 9.2。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $(X_n, \mathscr{P}_n)$ 是一个不相交树分层空间，且 $f_{n+1,n} : (X_{n+1}, \mathscr{P}_{n+1}) \to (X_n, \mathscr{P}_n)$ 是一个保分层映射。若片的序列 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $P_n \in \mathscr{P}_n$ 满足对所有$n \in \mathbb{N}$都有 $f_{n+1,n}(P_{n+1}) \subseteq P_n$ ，则称该序列为相容的 。

定理 9.3。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设$(X_n, \mathscr{P}_n)$ 是一个不相交树分层空间，且$f_{n+1,n} : (X_{n+1}, \mathscr{P}_{n+1}) \to (X_n, \mathscr{P}_n)$ 是一个保分层映射。假设对于每个相容的片序列 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_{n+1,n}$ 对所有除有限多个 $n \in \mathbb{N}$ 之外的情形，都同胚地映射到 P_n 。

设 X_{lim} 为 $\varprojlim_n(X_n, f_{n+1,n})$ 中固定基点 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的路径连通分支，并设 $X_\infty = \mathbf{lpc}(X_{lim})$。则 X_∞ 具有如下不交树分级： X_∞ 的一个片具有形式 $X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n$ ，其中 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是相干片序列 $P_n \in \mathscr{P}_n$。此外，投影映射 $f_n : X_\infty \to X_n$ 是保分级的，并且对 X_∞ 的每个片 P， f_n 将 P 同胚地映到 X_n 的一个片上，至多除去有限多个 $n \in \mathbb{N}$。

证明。设 $f_n : X_{lim} \to X_n$ 表示该逆极限的第 n个投影映射的限制映射。由于可度量化空间的逆序列的逆极限是可度量化的，$\varprojlim_n(X_n, f_{n+1,n})$ 是可度量化的。回想 X_∞ 与 X_{lim} 具有相同的底集，并注意连续包含映射 $\mathbf{lpc}(X_{lim}) \to \varprojlim_n(X_n, f_{n+1,n})$ 是到 X_{lim} 上的连续双射。由引理 8.9 可知， X_∞ 是道路连通、局部道路连通的可度量化空间。

我们按照定理陈述中的描述，构造 X_∞ 的片段集合 $\mathscr{P}_\infty$: 片 $P \in \mathscr{P}_\infty$ 的形式为非空集合 $P = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n$，其中 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由片 $P_n \in \mathscr{P}_n$ 组成的相容序列。由于恒等函数 $id : X_\infty \to X_{lim}$ 是连续双射，若集合 $S \subseteq X_{lim}$ 是闭的，那么 S 在 X_∞ 中也闭。此外，集合 $S \subseteq X_{lim}$ 道路连通（分别地，是一条简单闭曲线），当且仅当 S 作为 X_∞ 的子空间是道路连通的（分别地，是一条简单闭曲线）。因此，为了验证 $\mathscr{P}_\infty$ 是 X_∞ 上的不交树分级，剩余需要检查的条件可以在 X_{lim} 中检查。

假设 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相容序列的片，使得 $Q = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ 和 $P = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n$ 都包含点 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$。那么对于所有 n ，都有 $a_n \in P_n \cap Q_n$ ；但由于 $\mathscr{P}_n$ 的片两两不交，我们必须对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $P_n = Q_n$ 。因此 $P = Q$。由此可得， $\mathscr{P}_\infty$ 中的元素两两不交。

接下来，注意到对于所有 n， P_n 在 X_n 中是闭的，因此 P 在X_{lim}中是闭的。由于除有限多个 n 外，粘结映射 $f_{n+1、n}$ 都将 P_{n+1} 同胚地映射到 P_n ，因此除有限多个 n 外，$f_n : X_{lim} \to X_n$ 都将 P 同胚地映射到 P_n 。取充分大的 n ，并取嵌入 $i: P_n \to X_{lim}$ 到P，使得 $f_n \circ i = id_{P_n}$。由于 P_n 局部道路连通， $i : P_n :\to X_\infty$ 也连续。因此， $f_n : X_\infty \to X_n$ 也将 P 同胚地映射到 P_n 。

由于对于每个 n，$\mathbf{Pc}(X_n)$ 在 X_n 中是闭集，因此集合 $Y = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Pc}(X_n)$ 在 X_{lim} 中是闭集。包含映射 $\bigcup \mathscr{P}_\infty \subseteq Y$ 显然成立。若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y$，则对于 X_n 的某个片 P_n ，有 $a_n \in P_n$ 。由于 $f_{n+1,n}(a_{n+1}) = a_n \in P_n$ 且 $f_{n+1,n}$ 保持分级，因此必有 $f_{n+1,n}(P_{n+1}) \subseteq P_n$。于是 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相容序列，满足

其中 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n$。因此 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcup \mathscr{P}_\infty$，从而证明了 $\bigcup \mathscr{P}_\infty = Y$。我们得出结论：$\bigcup \mathscr{P}_\infty$ 在 X_{lim} 中是闭集，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$f_n(\bigcup \mathscr{P}_\infty) \subseteq \mathbf{Pc}(X_n)$。

接下来，设 P 和 Q 是上述 $\mathscr{P}_\infty$ 中的两个不同元素。设 $\alpha\colon [0,1] \to \bigcup \mathscr{P}_\infty$ 是一条满足 $\alpha(0) \in P$ 且 $\alpha(1) \in Q$ 的路径。那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，$f_n \circ \alpha\colon [0,1] \to X_n$ 都是 $\mathbf{Pc}(X_n)$ 中的一条路径。由于 $\mathbf{Pc}(X_n)$ 中的路径必须包含在 X_n 的某一个片中，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$，必有 $P_n = Q_n$。于是，$P = Q$。这证明了 $\mathscr{P}_\infty$ 的元素就是 $\mathscr{P}_\infty$ 的路径连通分支。

对于简单闭曲线条件，我们借助参数化。设 (T_n, V_n, q_n) 是 $(X_n, \mathscr{P}_n)$ 的一个参数化。回忆引理 3.22，我们可以假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，q_n 都是一个拓扑商映射。于是存在诱导映射 $g_{n+1,n}\colon T_{n+1} \to T_n$，使得 $g_{n+1,n} \circ q_{n+1} = q_n \circ f_{n+1,n}$ 且 $g_{n+1}(V_{n+1}) \subseteq V_n$。设 $h_{n+1,n}\colon V_{n+1} \to V_n$ 是 $g_{n+1,n}$ 的限制映射。我们得到如下逆系统的态射，其中 $i_n\colon V_n \to T_n$ 是包含映射。

$$
\begin{array}{ccc}
X_{lim} & \longrightarrow & \varprojlim_n X_n \\
\downarrow{\scriptstyle q_\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \varprojlim_n q_n} \\
T_{lim} & \longrightarrow & \varprojlim_n T_n \\
\uparrow{\scriptstyle i_\infty} & & \uparrow{\scriptstyle \varprojlim_n i_n} \\
V_{lim} & \longrightarrow & \varprojlim_n V_n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{f_{4,3}} & X_3 & \xrightarrow{f_{3,2}} & X_2 & \xrightarrow{f_{2,1}} & X_1 \\
& & \downarrow{\scriptstyle q_3} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\
\cdots & \xrightarrow{g_{4,3}} & T_3 & \xrightarrow{g_{3,2}} & T_2 & \xrightarrow{g_{2,1}} & T_1 \\
& & \uparrow{\scriptstyle i_3} & & \uparrow{\scriptstyle i_2} & & \uparrow{\scriptstyle i_1} \\
\cdots & \xrightarrow{h_{4,3}} & V_3 & \xrightarrow{h_{3,2}} & V_2 & \xrightarrow{h_{2,1}} & V_1
\end{array}
$$

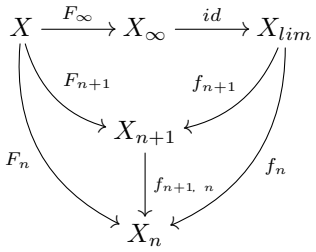
在左侧，我们令 q_∞ 为 $\varprojlim_n q_n$ 到 X_{lim} 和 $T_{lim} = \mathrm{Im}(q_\infty)$ 的限制映射。注意，$\varprojlim_n i_n$ 是闭嵌入，因此我们定义 $V_{lim} = T_{lim} \cap \mathrm{Im}(\varprojlim_n i_n)$。那么，三个未标记的映射都是包含映射。在下一段中，我们证明 q_∞ 满足引理 3.25 的假设。

注意，由于每个集合 V_n 在 T_n 和 $V_{lim} = T_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 中都是闭的，因此 V_{lim} 在 T_{lim} 中是闭的。此外，由于全不连通空间序列的逆极限仍然全不连通，$\varprojlim_n V_n$ 及其子空间 V_{lim} 都是全不连通的。利用上面的图表，可以直接验证 $q_\infty^{-1}(V_{lim}) = \bigcup \mathscr{P}_\infty$。具体而言，如果 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_{lim}$ 且 $P_n = q_n^{-1}(v_n)$，那么 $q_\infty^{-1}((v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n$。接下来，我们验证 q_∞ 将 $X_{lim} \setminus \bigcup \mathscr{P}_\infty$ 单射地映入 $T_{lim} \setminus V_{lim}$。如果 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{lim} \setminus \bigcup \mathscr{P}_\infty$，则存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，都有 $a_n \in \mathrm{Tr}(X_n)$。由于 $q(a_N) \notin V_n$，我们有 $q_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q_n(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \notin V_{lim}$。此外，假设 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_{lim} \setminus \bigcup \mathscr{P}_\infty$ 且 $q_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = q_\infty((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$。取 $M \geq N$，使得对所有 $n \geq M$，都有 $b_n \in \mathrm{Tr}(X_n)$。若 $n \geq M$，则有 $q_n(a_n) = q_n(b_n)$，其中 $a_n, b_n \in \mathrm{Tr}(X_n)$。但 q_n 将 $\mathrm{Tr}(X_n)$ 双射到 $T_n \setminus V_n$ 上。因此，对所有 $n \geq M$，都有 $a_n = b_n$，由此得出 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$。总之，我们看到 q_∞ 的纤维总是道路连通的（要么是一个点，要么是 $\mathscr{P}_\infty$ 的一个元素）。根据引理 9.1，T_{lim} 不包含简单闭曲线（且 T_∞ 是一棵拓扑树）。

引理 3.25 的假设已得到确认，因此，如果 $\alpha : S^1 \to X_{lim}$ 是单射环路，那么 $q_\infty \circ \alpha$ 是常值。X_{lim} 中的每条简单闭曲线的像都必须包含在 q_∞ 的某个非退化纤维中，而该纤维是 $\mathscr{P}_\infty$ 的一个元素。对于 X_{lim}，块集的所有条件均已验证，因此我们得出

这些条件对 X_∞ 也成立。至此，证明了 $\mathscr{P}_\infty$ 是 X_∞ 的不交树分级。□

在本节余下部分，我们固定一个不相交树分层空间 $(X, \mathscr{P})$，它有可数多个非退化片 $P_1, P_2, P_3, \ldots$（也可能有许多退化片）。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathscr{F}_n = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$，并令 X_n 表示第 5 节中的度量商 $X_{\mathscr{F}_n}$，其中所有片 $P \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{F}_n$ 都被压缩为一点。我们将 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 与它们在 X_n 中的同胚像视为相同，并用 $\mathscr{P}_n$ 表示度量商 X_n 上的不交树分层（包括退化片的像）。令 $F_n : X \to X_n$ 和 $f_{n+1,n} : X_{n+1} \to X_n$ 表示典范的保分层度量商映射。令 $X_{lim} = \varprojlim_n (X_n, f_{n+1,n})$ 为逆极限，并令 $f_n : X_{lim} \to X_n$ 为该逆极限的投影映射。映射 F_n 与粘结映射 $f_{n+1,n}$ 相容，因而诱导出一个典范映射 $F_\infty : X \to X_{lim}$，其定义为 $F_\infty(x) = (F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$。令 $X_\infty = \operatorname{lpc}(X_{lim})$，如定理 9.3 所述。根据定义，不相交树分层空间 X 是局部道路连通的，因此由局部道路连通核反射的泛性质可知，$F_\infty : X \to X_\infty$ 是连续的。



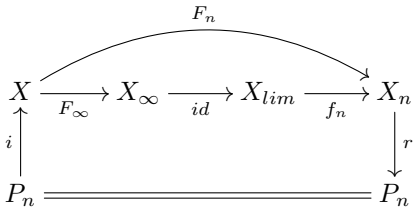
显然，不相交树分层空间的逆系统（X_n，$\mathscr{P}_n$）满足定理 9.3 的假设，因此 X_∞ 具有一个规范的不交树分级，我们将其记为 $\mathscr{P}_\infty$。由于 X 是局部道路连通的，$F_\infty : X \to X_\infty$ 是连续的。尽管 F_∞ 不一定是同胚（见例9.4），但我们证明它确实保留了 X的大部分结构。特别地，X_∞ 可以看作具有可能较粗拓扑的 X。

例9.4。回顾例 7.10 中的 X 和 Y。令 P_n 表示 X 中的圆，该圆在点 $1/n$处连接到 $[0, 1]$。在这种情况下，$F_\infty : X \to X_{lim}$ 不是同胚。事实上，X 不是紧致的。然而，X_{lim} 是紧致的，因为它是不相交树分层空间 $[0, 1] \cup \bigcup_{k=1}^{n} P_k$的紧致空间的逆极限。因此，$X_{lim}$ 与 Y同胚。

引理9.5。映射 $F_\infty : X \to X_\infty$ 是双射、保持分层，并将 X 的片同胚地映射到 X_∞ 的片。此外，若 $\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0，则 $F_\infty : X \to X_\infty$ 是 π_1-单射。

证明。对逆极限的直接分析表明，F_∞ 是双射，并且 F_∞ 将 $P \in \mathscr{P}$映射到 X_∞的片 $F_\infty(P) = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} F_n(P)$。此外，若 P_n 是 X 的一个非退化片，且 $i : P_n \to X$ 是包含映射，则 $F_\infty \circ i : P_n \to X_\infty$ 是一个截面，其左逆为 $r \circ f_n : X_\infty \to P_n$

其中 r： $X_n \to P_n$ 是典范非扩张收缩。



因此， F_∞ 将 X 的各片同胚地映到 X_∞的各片上。注意， F_∞ 满足命题 7.9 所需的假设。因此，若假设$\mathbf{Pc}(X)$一致地 1-UV_0，则由命题 7.9 可知， F_∞ 是 π_1-单射的。□

定理 9.6. 固定 $x_0 \in X$ ，并对所有 $n \in \mathbb{N}$令 $x_n = F_n(x_0)$ 。若$\mathbf{Pc}(X)$ 一致地1-UV_0，则典范同态

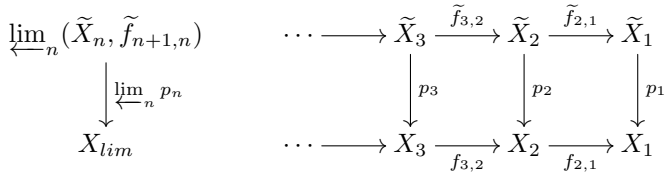
$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to \varprojlim_n (\pi_1(X_n, x_n), f_{n+1,n\#})$$

由 $\phi([\alpha]) = ([F_n \circ \alpha])_{n\in\mathbb{N}}$ 给出，是单射的。

证明。为验证 ϕ的单射性，我们构造广义覆盖映射的逆极限（本证明的大部分内容将用于分析这一构造）。由于 Pc(X)一致地 1-UV_0 ，且 X 的每一片都是 Pc(X)在非扩张收缩映射下的收缩，由推论 6.11 可知， X 的每一片都一致地 1-UV_0 。暂且固定 $n \in \mathbb{N}$。由于 X_n 有有限多个非退化片，且它们全都是 1-UV_0，由引理 6.9 可知 X_n是 1-UV_0。由定理~8.10，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在广义万有覆盖映射 p_n： $\widetilde{X}_n \to X_n$ 。于是，引理 8.15 保证 $\widetilde{X}_n$ 具有一个不交树分级 $\mathscr{P}_n$，其各片由 p_n 下 $\widetilde{X}_n$ 各片的原像的道路连通分支构成。~特别地， $\widetilde{X}_n$ 的每一片都是单连通的，并且 $\widetilde{X}_n$的一个非退化片~是某个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$对应的 $p_n^{-1}(P_i)$的道路连通分支。引理 8.15 的第 (4) 部分保证，若 $\widetilde{Q}$ 是P_i(p_n^{-1})的一个道路连通分支， $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,~， 则 p_n 限制为广义万有覆盖映射 $\widetilde{Q} \to P_i$。令 n 在~中变化，并注意到由于 X_{n+1} 局部道路连通且单连通，~~~~~粘结映射$f_{n+1,n}$： $X_{n+1} \to X_n$ 可提升为映射$\widetilde{f}_{n+1,n} : \widetilde{X}_{n+1} \to \widetilde{X}_n$ ，满足$\widetilde{p}_n \circ \widetilde{f}_{n+1,n} = f_{n+1,n} \circ p_{n+1}$。由于每个$\widetilde{f}_{n+1,n}$ 都保持分层，因此~每个提升$\widetilde{f}_{n+1,n}$ 都是保分层映射。

接下来，我们在广义万有覆盖空间中选取基点。任意选取$\widetilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_1)$。回想推论 3.18，包含映射 $P_i \to X_n$,$1 \le i \le n$ （为各片 P_i 选取某些基点，并适当选取共轭路径）诱导出同构 $*_{i=1}^n \pi_1(P_i) \to \pi_1(X_n)$。对每个 n作此识别后，诱导同态 $f_{n+1,n\#}$ 便可识别为同态 $*_{i=1}^{n+1} \pi_1(P_i) \to *_{i=1}^n \pi_1(P_i)$，它将第 $(n+1)$ 个自由因子压缩掉。因此，粘结映射 $f_{n+1,n} : X_{n+1} \to X_n$ 是 π_1满射，所以每个 $\widetilde{f}_{n+1,n}$ 都将纤维 $p_{n+1}^{-1}(x_{n+1})$满射到 $p_n^{-1}(x_n)$。因此，我们可以~~~递归地选取点 $\widetilde{x}_n \in \widetilde{X}_n$ ，使得 $\widetilde{f}_{n+1,n}(\widetilde{x}_{n+1}) = \widetilde{x}_n$ 且 $x_n = p_n(\widetilde{x}_n)$对每个~~ $n \in \mathbb{N}$均成立。于是 $\widetilde{x}_\infty = (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_n (\widetilde{X}_n, \widetilde{f}_{n+1,n})$。取这些基点后，我们得到如下带基点的广义万有覆盖映射逆系统。

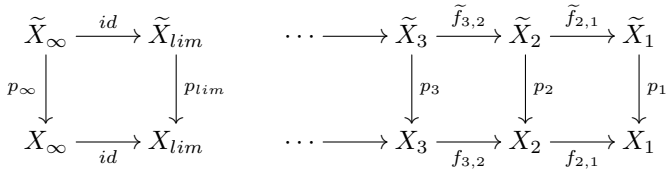
令 $\lim\longleftarrow_n p_n$ 为相应的逆极限映射（在拓扑范畴中）。



令 X_{lim} 为 $\widetilde{x}_\infty$ 在 $\lim\longleftarrow_n(X_n,\ f_{n+1,n})$ 中的路径连通分支，并且 $X_\infty = \mathbf{lpc}(X_{lim})$。

再次固定 $n \in \mathbb{N}$。显然，$f_{n+1,n}$ 将一个退化片同胚地映射到一个退化片。由于 $f_{n+1,n}$ 将 X_{n+1} 的所有非退化片（P_{n+1} 除外）同胚地映射到 X_n 的一个片上，因此不难验证，对于 $1 \le i \le n$，$\widetilde{f}_{n+1,n}$ 将 $p_{n+1}^{-1}(P_i)$ 的每个路径连通分支同胚地映射到 X_n 的一个片上（逆映射的连续性，本质上与引理 8.8 的证明中所用的论证相同）。令 n 变化，并注意，若有一个相干的片序列 $Q_n \in \mathscr{P}_n$（即对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有 $f_{n+1,n}(Q_{n+1}) \subseteq Q_n$），则当 n 充分大时，$f_{n+1,n}$ 将 Q_{n+1} 同胚地映射到 Q_n。因此，定理 9.3 的假设均得到满足，由此可得 X_∞ 继承了不相交树分层空间的结构，其中片是形如 $Q_\infty = X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ 的非空集合，$\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相干片族。此外，定理 9.3 得出，当 n 充分大时，f_n 将 Q_∞ 同胚地映射到 Q_n。

令 $p_{lim} : \widetilde{X}_{lim} \to X_{lim}$ 表示 $\lim\longleftarrow_n p_n$ 到 X_{lim}，令 $\widetilde{f}_n : \widetilde{X}_{lim} \to X_n$ 表示第 n 个投影映射的限制映射，并令 $p_\infty = \mathbf{lpc}(p_{lim}) : X_\infty \to X_\infty$。此构造使 p_∞ 成为基点广义覆盖映射序列 $p_n : (X_n,\ \widetilde{x}_n) \to (X_n,\ x_n)$ 在基点广义覆盖映射范畴中的逆极限，因此 $p_\infty : X_\infty \to X_\infty$ 是一个广义覆盖映射（这可直接结合广义覆盖映射的提升性质与逆极限的泛性质得出，证明见 [1,引理 2.31]）。



在接下来的两个命题中，我们分析 X_∞ 的**不交树分级结构**。**命题 9.7**。$\mathbf{Pc}(\widetilde{X}_\infty) = p_\infty^{-1}(\mathbf{Pc}(X_\infty))$。特别地，$\widetilde{X}_\infty$ 的片恰好是 X_∞ 的各片在 p_∞ 下的原像的路径连通分支。

证明。假设 $(\widetilde{a}_n)$ 是 X_∞ 的片 $X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 中的一个元素，其中 A_n 是 $p_n^{-1}(A_n)$ 的一个路径连通分支，且 $A_n \in \mathscr{P}_n$。那么 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相容序列，并且我们有 $p_\infty((\widetilde{a}_n)) \in X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbf{Pc}(X_\infty)$。这证明了一个包含关系。对于另一方向，假设 $p_\infty((\widetilde{a}_n))$ 位于 X_∞ 的片 $X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 中，其中 $A_n \in \mathscr{P}_n$。令 $\widetilde{A}_n$ 为包含 $\widetilde{f}_n(\widetilde{a}_n)$ 的 $p_n^{-1}(A_n)$ 的路径连通分支。现在 $\{\widetilde{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个相干片序列，因此 $(\widetilde{a}_n) \in X_{lim} \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbf{Pc}(X_\infty)$。由于 X_∞ 的各片是 $\mathbf{Pc}(X_\infty)$ 的路径连通分支（根据不交树分级的定义），第二个陈述由第一个陈述推出。□

命题 9.8。 </style}如果 是的一个片，那么(A_∞) </style}是的一个片，并且限制映射： $A_\infty \to A_\infty$ 是一个广义万有覆盖映射。特别地， X_∞ 的各片都是单连通的。

证明。 A_∞ 是 X_∞ 的一个片，且 $\widetilde{A}_\infty$ 是 $p^{-1}(A_\infty)$ 的一个路径连通分支，这由命题 9.7 得出。取足够大的 n ，使得(1) f_n 将 A_∞ 同胚地映到 X_n的一个片 A_n 上，(2) f_n 将 A_∞ 同胚地映到 X_n上的一个片 A_n ，以及(3) $A_n = p_n(A_n)$。在本证明的第二段中，我们已证明限制映射 p_n ： $A_n \to A_n$ 是广义万有覆盖映射。在下面的图表中，我们将映射与其限制映射混同，由此清楚地表明 p_∞ 在各片上的限制是广义万有覆盖映射。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{A}_\infty & \xrightarrow[\cong]{\widetilde{f}_n} & \widetilde{A}_n \\ {\scriptstyle p_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_n} \\ A_\infty & \xrightarrow[f_n]{\cong} & A_n \end{array}$$

□

遗憾的是，我们不能用引理 7.7 断定 X_∞ 是单连通的，因为尚不清楚**Pc(**X_∞)是否一致地为 1-UV_0 ，而验证这一点似乎十分繁琐。因此，我们将着手在 X 本身之上构造一个类似的不相交树分级空间。应用注记 8.7，取 p ： $X \to X$ 为 p_∞ ： $X_\infty \to X_\infty$ 沿连续双射 F_∞ : $(X, x_0) \to (X_\infty, (x_n))$的拉回基点广义覆盖映射。令 F_∞ ： $X \to X_\infty$ 为投影映射的限制映射。由于 F_∞ 是双射， F_∞ 是单射（注意 F_∞ 不必是双射，因为 X 是通过对拓扑拉回的一个路径连通分支取局部道路连通核反射而构造的）。

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\widetilde{F}_\infty} & \widetilde{X}_\infty & \xrightarrow{id} & \widetilde{X}_{lim} & \xrightarrow{\widetilde{f}_n} & \widetilde{X}_n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\infty} & & \downarrow{\scriptstyle p_{lim}} & & \downarrow{\scriptstyle p_n} \\ X & \xrightarrow{F_\infty} & X_\infty & \xrightarrow{id} & X_{lim} & \xrightarrow{f_n} & X_n \end{array}$$

$$X \xrightarrow{\quad F_n \quad} X_n$$

命题 9.9. $p^{-1}(\mathbf{Pc}(X)) = \widetilde{F}_\infty^{-1}(\mathbf{Pc}(\widetilde{X}_\infty))$.

证明。若 $\widetilde{x} \in X$ 且 $p(\widetilde{x})$ 属于 X 的片 P，则 $p_\infty \circ F_\infty(\widetilde{x}) = F_\infty \circ p(\widetilde{x})$ 属于 X_∞ 的片 $F_\infty(P)$。根据命题 9.7，我们有 $\widetilde{x} \in \widetilde{F}_\infty^{-1}(p_\infty^{-1}(\mathrm{Pc}(X_\infty))) = \widetilde{F}_\infty^{-1}(\mathrm{Pc}(\widetilde{X}_\infty))$。对于另一个包含关系，假设 $\widetilde{F}_\infty(\widetilde{x}) = (\widetilde{a}_n)$ 属于 X_∞ 的片 $\widetilde{X}_{lim} \cap \prod_n A_n$，其中 A_n 是 X_n 中片 A_n 对应的 $p_n^{-1}(A_n)$ 的路径连通分支。于是 $(p_n(\widetilde{a}_n))$ 属于 X_∞ 的片 $X_{lim} \cap \prod_n A_n$。令 A 为 X 中映射到 $X_{lim} \cap \prod_n A_n$ 的唯一的片。由于 $F_\infty \circ p(\widetilde{x}) = (p_n(\widetilde{a}_n)) \in X_{lim} \cap \prod_n A_n = F_\infty(A)$，且 F_∞ 是单射，我们必有 $p(\widetilde{x}) \in A \subseteq \mathrm{Pc}(X)$。□

命题 9.10. $p^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$的一个路径连通分支是 F_∞下某个 X_∞ 的片的原像。

证明。设 $\widetilde{A}$ 是 $p^{-1}(A)$ 的一个路径连通分支，其中 $A \in \mathscr{P}$。由命题 9.9 可知，$F_\infty(A)$ 必须包含于 X_∞的某个片 A_∞ 中。我们验证 $F_\infty(A) = A_\infty$。令 $A_\infty = p_\infty(A_\infty)$。由命题 9.7，$A_\infty$ 是 X_∞的一个片。因此，F_∞ 将 A 同胚地映射到 A_∞。我们有以下图表，其中暂时将映射与各自的限制映射混为一谈。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{A} & \xrightarrow{\widetilde{F}_\infty} & \widetilde{A}_\infty \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\infty} \\ A & \xrightarrow[F_\infty]{\cong} & A_\infty \end{array}$$

设 $b_\infty \in A_\infty$。取定一点 $\widetilde{a}_0 \in A$ 并令 $\widetilde{a}_\infty = F_\infty(\widetilde{a}_0)$。取一条路径 $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to A_\infty$，从 $\widetilde{a}_\infty$ 到 b_∞。根据上面的图表，存在唯一的路径$\delta\colon [0,1] \to A$，使得 $F_\infty \circ \delta = p_\infty \circ \widetilde{\gamma}$。由于 $p(\widetilde{a}_0) = \delta(0)$，我们可以找到唯一的路径 $\delta\colon [0,1] \to X$，满足 $\delta(0) = \widetilde{a}_0$ 以及 $p \circ \delta = \delta$。特别地，由于 δ 的像位于 A中，δ 的像必定位于 A中。现在，$F_\infty \circ \delta\colon [0,1] \to X_\infty$ 是一条以 $\widetilde{a}_\infty$ 为起点且满足 $p_\infty \circ F_\infty \circ \delta = p_\infty \circ \widetilde{\gamma}$的路径。由于 p_∞ 是一个广义覆盖映射，我们有 $F_\infty \circ \delta = \widetilde{\gamma}$。因此，$F_\infty(\delta(1)) = b_\infty$ 对于 $\delta(1) \in A$，从而完成了$A_\infty \subseteq F_\infty(A)$的证明。□

令 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 表示 $p^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$ 的道路连通分支集合。显然，$\widetilde{X}$ 是道路连通、局部道路连通且可度量化的（作为一个覆盖在可度量化空间之上的广义覆盖空间）。由命题 9.10 可知，$\mathscr{P}$ 中的每个元素都是原像 $\widetilde{A} = \widetilde{F}_\infty^{-1}(\widetilde{A}_\infty)$，其中 $\widetilde{A}_\infty$ 是 $\widetilde{X}_\infty$的一个片。由于 $\widetilde{A}_\infty$ 在 $\widetilde{X}_\infty$中是闭的，$\widetilde{A}$ 在 $\widetilde{X}$中也是闭的。此外，由于$\mathbf{Pc}(\widetilde{X}_\infty)$ 在 $\widetilde{X}_\infty$中是闭的，$p_\infty^{-1}(\mathbf{Pc}(\widetilde{X}_\infty)) = \bigcup \widetilde{\mathscr{P}}$ 在 X中也是闭的。如果 $C \subseteq X$ 是一条简单闭曲线，那么 $F_\infty(C)$ 是 X_∞ 中的一条简单闭曲线，因此包含于 X_∞的某个片 A_∞ 中。因此，C 必定包含于原像$\widetilde{A} = \widetilde{F}_\infty^{-1}(\widetilde{A}_\infty)$中，而该原像是 $\mathscr{P}$的一个元素。由于定义 3.1 的所有条件均已满足，我们得出结论：$\mathscr{P}$ 是 X上的一个不交树分级。接下来，我们验证 X 的每个片都是单连通的。

命题 9.11. *F_∞ 将 $\mathscr{P}$ 中的每个元素同胚地映射到 X_∞中的一个片。特别地，$\mathscr{P}$ 中的每个元素都是单连通的。*

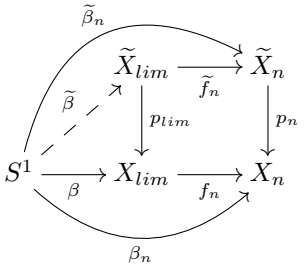
证明。设 $A \in \mathscr{P}$ 和 $\widetilde{a}_0 \in A$。根据命题 9.10，F_∞ 通过连续的双射映射到 X_∞ 的一个片 A_∞。令 $A = p(A)$ 和 $A_\infty = p_\infty(A_\infty)$，并固定基点 $a_0 = p(\widetilde{a}_0) \in A$、$b_0 = F_\infty(\widetilde{a}_0) \in A_\infty$以及 $b_0 = p_\infty(b_0) \in A_\infty$。由于 F_∞ 同胚地映到 A_∞上，我们可以令 $g\colon (A_\infty, b_0) \to (A, a_0)$ 为其逆映射，它满足 $F_\infty \circ g = id_{A_\infty}$。考虑命题 9.10 的证明中给出的交换图。根据命题 9.8，右侧映射 $p_\infty\colon A_\infty \to A_\infty$ 是一个广义万有覆盖映射。由于 p 是广义覆盖映射，且 A_∞是单连通的，映射 $g \circ p_\infty\colon (A_\infty, b_0) \to (A, a_0)$ 唯一提升为映射$\widetilde{g}\colon (\widetilde{A}_\infty, \widetilde{b}_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{a}_0)$，使得 $p \circ \widetilde{g} = g \circ p_\infty$。由于 $\widetilde{g}$的像包含于 $p^{-1}(A)$，且将 b_0映射到 $\widetilde{a}_0$，其像必定包含于 A。此外，由于 $p \circ \widetilde{g} \circ F_\infty = g \circ F_\infty \circ p = p$，根据提升的唯一性可得 $\widetilde{g} \circ F_\infty = id_{\widetilde{A}_\infty}$。因此，$F_\infty$ 同胚地将 A 映射到A_∞上。

在命题 9.8 中，我们证明了 X_∞ 的各个片都是单连通的。因此，当前命题得证。□

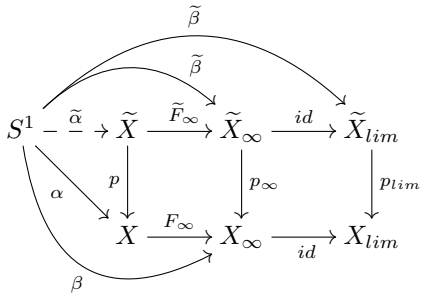
综上，我们已经证明 $p: X \to X$ 是一个广义覆盖映射，并且 X 的各片恰好是的各片在 p下的原像 X 的路径连通分支。由于 $\mathbf{Pc}(X) = p^{-1}(\mathbf{Pc}(X))$，且假设$\mathbf{Pc}(X)$是一致 1-$UV_0$，引理 8.12 表明，当 X 赋予提升度量 d时，$\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0。根据命题 9.11，X 的每个片都是单连通的。现在我们运用引理 7.7，得出 X 是单连通的。由此可知，$p: X \to X$ 是一个广义万有覆盖映射。

上述构造已完成，广义覆盖映射的性质也已验证，最后我们来讨论 ϕ的单射性。为方便起见，我们将环路的基点取为证明（定理 9.6）第二段中固定的基点。设 $\alpha: [0,1] \to X$ 是一个以 x_0 为基点的环路，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\beta_n = F_n \circ \alpha$ 在 X_n 中都是本质平凡环路。我们要证明，α 在 X中是本质环路。

令 $\beta = F_\infty \circ \alpha: S^1 \to X_\infty$，并注意到对于所有 n，都有 $f_n \circ \beta = \beta_n$。每个本质平凡环路 β_n 都可唯一提升为一个环路 $\beta_n: S^1 \to X_n$，其基点为 $\widetilde{x}_n$。提升的唯一性保证对于所有 n，都有 $f_{n+1,\,n} \circ \beta_{n+1} = \beta_n$。因此存在一个诱导环路$\widetilde{\beta}: S^1 \to \widetilde{X}_{lim}$，其基点为 $\widetilde{x}_\infty$，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\widetilde{f}_n \circ \widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}_n$。逆极限 X_{lim} 的泛性质保证了 $p_{lim} \circ \beta = \beta$。



由于 $X_\infty = \mathbf{lpc}(X_{lim})$，$p_\infty = \mathbf{lpc}(p_{lim})$，且 S^1 局部道路连通，$\beta: S^1 \to \widetilde{X}_\infty$ 连续并满足 $p_\infty \circ \widetilde{\beta} = \beta$。由于 $F_\infty \circ \alpha = \beta = p_\infty \circ \widetilde{\beta}$ 和p 是作为拉回广义覆盖映射构造的，因此存在唯一的提升$\widetilde{\alpha}: S^1 \to \widetilde{X}$，以 $\widetilde{x}_0$ 为基点，使得 $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ 和 $\widetilde{F}_\infty \circ \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$。



由于我们已经证明 X 是单连通的，因此 $\widetilde{\alpha}$ 是非本质的。由此可知$\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$ 是非本质的。这就完成了 ϕ 是单射的证明。□

定理 9.6 的另一种表述（包括对 X 所作的假设）如下。注意，这恰好是 X 有可数个非退化片时的定理 1.1。

推论 9.12. 设 $(X, \mathscr{P})$ 为一个具有可数多个非退化片段的不相交树分层空间，且使得 $\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0 的。若 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是一条本质环路，则存在一个有限集 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$，使得若 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon X \to X_{\mathscr{F}}$是度量商映射，则 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha\colon S^1 \to X_{\mathscr{F}}$ 是本质的。

10. A Proof of Theorem 1.1

最后，我们已具备证明主要定理所需的全部要素。回顾引言中的陈述。

定理 *1.1* 的证明. “仅当”方向是显然的。对于相反方向，我们在 X 上固定一个相容路径直径度量 d。假设 $\alpha : S^1 \to X$ 是本质的。由引理 4.10，存在 $(X, \mathscr{P})$ 的一个截面分层子空间 $(Y, \mathscr{Q})$，使得 $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq Y$, Y 在 X 中是闭的，Y 具有可数多个非退化片，并且使得 $\alpha\colon S^1 \to Y$ 在 Y 中是本质的。由于假定 $\mathbf{Pc}(X)$ 在子空间度量下是一致 1-UV_0 的，引理 6.12 表明 $\mathbf{Pc}(Y)$ 在子空间度量下是一致 1-UV_0 的。

推论 9.12 给出了有限子集 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{Q}$ 的存在性，使得如果 $\Gamma_{Y,\mathscr{F}} : Y \to Y_{\mathscr{F}}$ 是将 $\mathscr{Q}\backslash\mathscr{F}$ 的所有元素压缩为一点的度量商映射，那么 $\Gamma_{Y,\mathscr{F}} \circ \alpha\colon S^1 \to Y_{\mathscr{F}}$ 是本质的。

由于包含映射 $i\colon Y \to X$ 和商映射 $\Gamma_{Y,\mathscr{F}}$ 都是非扩张映射，且 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ i$ 在 $\Gamma_{Y,\mathscr{F}}$ 的各纤维上为常值，$\Gamma_{Y,\mathscr{F}}$ 的泛性质诱导出一个非扩张映射 $i_{\mathscr{F}} : Y_{\mathscr{F}} \to X_{\mathscr{F}}$，使得下图中的左侧方块交换。此外，若 $r\colon X \to Y$ 是引理 4.5 中的典范非扩张收缩映射，则 $\Gamma_{Y,\mathscr{F}} \circ r$ 是非扩张映射，且在 $\Gamma_{\mathscr{F}}$ 的各纤维上为常值。因此，存在唯一的非扩张映射 $r_{\mathscr{F}}\colon X_{\mathscr{F}} \to Y_{\mathscr{F}}$，使得右侧方块交换。由于 $r \circ i = id_Y$，$\Gamma_{Y,\mathscr{F}}$ 的泛性质保证 $r_{\mathscr{F}} \circ i_{\mathscr{F}}$ 是 $Y_{\mathscr{F}}$ 的恒等映射。

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\ i\ } & X & \xrightarrow{\ r\ } & Y \\ {\scriptstyle \Gamma_{Y,\mathscr{F}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{\mathscr{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{Y,\mathscr{F}}} \\ Y_{\mathscr{F}} & \xrightarrow[i_{\mathscr{F}}]{} & X_{\mathscr{F}} & \xrightarrow[r_{\mathscr{F}}]{} & Y_{\mathscr{F}} \end{array}$$

由此可得，$Y_{\mathscr{F}}$是 $X_{\mathscr{F}}$的一个收缩，截面为 $i_{\mathscr{F}}$。由于$\Gamma_{Y,\ \mathscr{F}} \circ \alpha\colon\ S^1 \to Y_{\mathscr{F}}$是本质的，且 $i_{\mathscr{F}}$ 是 π_1-单射的，因此$\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha = \Gamma_{\mathscr{F}} \circ i \circ \alpha = i_{\mathscr{F}} \circ \Gamma_{Y,\ \mathscr{F}} \circ \alpha$ 是本质的。□

我们还注意到，拓扑商映射 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon\ X \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 也可用于检测本质环。

推论 10.1。 设$(X, \mathscr{P})$ 是一个不相交树分层空间，其中$\mathbf{Pc}(X)$ 一致1-UV_0。那么，环路 $\alpha\colon\ S^1 \to X$ 是本质的，当且仅当存在有限个片段 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$，使得 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha\colon\ S^1 \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 在拓扑商空间$X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 中是本质的。

证明。 根据定理 1.1，存在有限子集 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$，使得 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha$ 在商度量空间 $X_{\mathscr{F}}$中是本质的。根据引理 5.7，连续恒等映射

函数 $X^{qt}_{\mathscr{F}} \to X_{\mathscr{F}}$ 诱导基本群的一个同构。因此 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha$在 $X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 中是本质的。□

11. Applications of Theorem 1.1

在定理 1.1 的主要应用中，我们确定了足以推出保分层映射为 π_1-单射的条件。

注 11.1. 对于不相交树分层空间（$X, \mathscr{P}$）， X 的每个片 P 都是 X 的收缩，且是$\mathbf{Pc}(X)$的一个路径连通分支。因此，包含$\mathbf{Pc}(X) \to X$是 π_1-单射。由此可知，若保分层映射 $f\colon (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$是$\pi_1$-单射，则其限制映射 $f|_{\mathbf{Pc}(X)}\colon \mathbf{Pc}(X) \to \mathbf{Pc}(Y)$是 π_1-单射。反之则未必成立，因为 f 可能以重叠的方式将 X 中不同的片映入 Y 中的同一个片。

定理1.4 的证明. 关于 f 的假设确保 f 是保分层映射。设 $\alpha : S^1 \to X$ 是一个以点 $x_0 \in X$为基点的本质环路。根据推论 10.1，存在有限个片段 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}$，使得 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha : [0,1] \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 是本质的。令 Q_P表示 Y中满足 $f(P) \subseteq Q_P$的片。令 $\mathscr{G} = \{Q_P \mid P \in \mathscr{P}\}$。根据假设，由 $P \mapsto Q_P$ 给出的函数 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是双射。由于 $\Gamma_{\mathscr{G}} \circ f\colon X \to Y^{qt}_{\mathscr{G}}$ 在 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon X \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 的纤维上为常值，因此存在一个诱导映射 $g\colon X^{qt}_{\mathscr{F}} \to Y^{qt}_{\mathscr{G}}$，使得 $g \circ \Gamma_{\mathscr{F}} = \Gamma_{\mathscr{G}} \circ f$。我们声称 g 是 π_1-单射。证明这一点后，即可推出 $g \circ \Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha = \Gamma_{\mathscr{G}} \circ f \circ \alpha$ 是本质的，因此$f \circ \alpha$ 也是本质的。

令 $y_0 = f(x_0)$、 $x_{\mathscr{F}} = \Gamma_{\mathscr{F}}(x_0)$ 和 $y_{\mathscr{G}} = g(x_{\mathscr{F}})$。对每个 $P \in \mathscr{P}$，固定点 $x_P \in P$，并令 $y_P = f(x_P) \in Q_P$。由推论 3.18，存在从 $x_{\mathscr{F}}$ 到 x_P 的路径 α_P：$[0,1] \to X_{\mathscr{F}}$，$P \in \mathscr{F}$，使得同态 ϕ：
$*_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(P, x_P) \to \pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}})$，由对 $[\gamma] \in \pi_1(P, x_P)$ 的 $\phi([\gamma]) = [\alpha_P \cdot \gamma \cdot \alpha_P^{-1}]$ 所定义，是一个同构。令 $\beta_P = g \circ \alpha_P$：$[0,1] \to Y_{\mathscr{G}}$。由推论 3.18 的最后一条陈述，同态 ψ：$*_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(Q_P, y_P) \to \pi_1(Y_{\mathscr{G}}, y_{\mathscr{G}})$，由对 $[\delta] \in \pi_1(Q_P, y_P)$ 的 $\phi([\delta]) = [\beta_P \cdot \delta \cdot \beta_P^{-1}]$ 所定义，是单射的（但不必是满射的）。最后，回顾每个限制映射 $g|_P : P \to Q_P$ 与 $f|_P : P \to Q_P$ 一致，并且根据假设是 π_1-单射的。因此，自由积

$*_{P\in\mathscr{F}}(g|_P)_{\#}$：$*_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(P, x_P) \to *_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(Q_P, y_P)$是单射。由于下图可交换，因此可知$g_{\#}$ 是单射。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{\mathscr{F}}, x_{\mathscr{F}}) & \xrightarrow{\quad g_{\#} \quad} & \pi_1(Y_{\mathscr{G}}, y_{\mathscr{G}}) \\ \phi \uparrow \cong & & \uparrow \psi \\ *_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(P, x_P) & \xrightarrow[*_{P\in\mathscr{F}}(g|_P)_{\#}]{} & *_{P\in\mathscr{F}}\pi_1(Q_P, y_P) \end{array}$$

□

定义 11.2. 设（X， $\mathscr{P}$）是一个不相交树分层空间（X， $\mathscr{P}$）。若（X， $\mathscr{P}$）具有如下性质，我们称其为弦光空间：其中每个片 P 都与$X \backslash P$ 相交于唯一一点 x_P（称为 P的附着点）。若 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$ 是 X的非退化片集合，则称 $T = X \backslash \bigcup\{P \backslash \{x_p\} \mid P \in \mathscr{Q}\}$为（$X$， $\mathscr{P}$）的弦线。

弦光空间 $(X, \mathscr{P})$ 的弦线 T 可视为度量商 $X_{\mathscr{P}}$，其中 X 的每个片都被识别为一个点。因此， T是一个拓扑

$\mathbb{R}$-树。在下一个对主要结果的应用中，我们考虑映射 $X \to X/T$，它们将弦光空间的弦线压缩，同时允许商空间 X/T 是拓扑商或度量商（形式上，X/T 可以赋予介于商拓扑和由其作为直积 $\prod_{P\in\mathscr{Q}} P$的子空间所诱导的拓扑之间的任意拓扑）。

推论 11.3. 设 $(X, \mathscr{P})$ 是一个弦光空间，带有弦线 T，且$\mathbf{Pc}(X)$ 是一致 1-UV_0。假设 $f\colon X \to Y$ 是一个满足以下条件的映射：

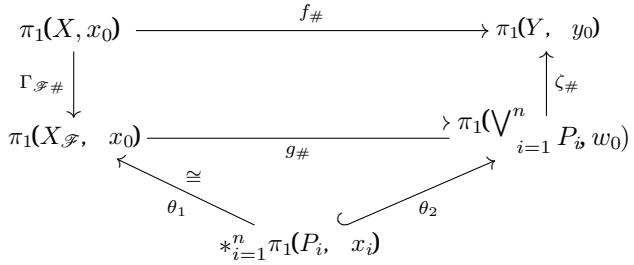
(1) $f(T)$是一个点，(2) f 在 $X\backslash T$ 上是双射，(3) 若 P 是 X 的非退化片，且 $r_P\colon X \to P$ 是典范收缩，则存在映射 $R_P\colon Y \to P$，使得 $R_P \circ f = r_P$。

那么 f 是 π_1-单射。

证明。首先，我们对 f的假设作一观察。令 $\mathscr{Q}$ 表示 X 的非退化片集合，并令 $\sigma_P\colon P \to X$ 表示每个 X的片 P对应的包含映射。那么，当 $P \in \mathscr{Q}$时，$R_P \circ f \circ \sigma_P = r_P \circ \sigma_P = id_P$。因此，$f$将每个 $P \in \mathscr{Q}$同胚地映射到 $f(P)$ 上。令 $\zeta_P = f \circ \sigma_P\colon P \to Y$表示由此得到的嵌入。

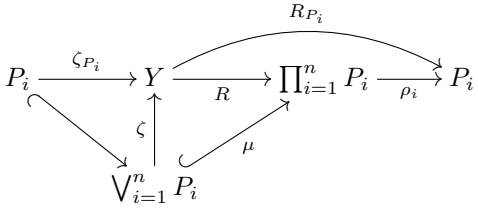
设 $\alpha\colon S^1 \to X$ 是一个以 $x_0 \in T$ 为基点的本质环路，并令 $y_0 \in Y$ 为 T 的像。利用推论 10.1，找出一个 $\mathscr{F} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subseteq \mathscr{P}$ 的有限子集，使得若 $\Gamma_{\mathscr{F}}\colon X \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 是拓扑商映射，则 $\Gamma_{\mathscr{F}} \circ \alpha\colon S^1 \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 是本质的。令 x_i 表示 P_i 的附着点，我们也将其作为 P_i 的基点；令 $\bigvee_{i=1}^n P_i$ 为楔点是 w_0 的有限楔和。令 $g\colon X^{qt}_{\mathscr{F}} \to \bigvee_{i=1}^n P_i$ 为商映射，它将 $\Gamma_{\mathscr{F}}(T)$ 中的拓扑树映到 w_0。关于 f 的假设意味着 f 在 $g \circ \Gamma_{\mathscr{F}}$ 的纤维上为常值，因此存在一个诱导映射 $\zeta\colon \bigvee_{i=1}^n P_i \to Y$，使得 $\zeta \circ g \circ \Gamma_{\mathscr{F}} = f$。我们断言 g 和 ζ 都是 π_1-单射，由此可知 $f \circ \alpha$ 是本质的。

由推论 3.18 可知，包含映射 $P_i \to X^{qt}_{\mathscr{F}}$ 诱导出一个同构 $\theta_1\colon *_{i=1}^n \pi_1(P_i, x_i) \to \pi_1(X^{qt}_{\mathscr{F}}, x_0)$（这里，我们选择从 x_i 到 x_0 的共轭路径，使其像完全包含在 T 中）。包含映射 $P_i \to \bigvee_{i=1}^n P_i$ 也诱导出一个典范同态 $\theta_2\colon *_{i=1}^n \pi_1(P_i, x_i) \to \pi_1(\bigvee_{i=1}^n P_i, w_0)$，已知该同态总是单射 [12, 命题 5]。由于我们为 θ_1 选择了共轭路径，因此有 $\theta_2 = g_{\#} \circ \theta_1$。由此可知，$g_{\#}$ 是单射。



令 $\rho_i : \prod_{i=1}^n P_i \to P_i$ 为乘积投影映射。注意，存在一个典范嵌入 $\mu\colon \bigvee_{i=1}^n P_i \to \prod_{i=1}^n P_i$，使得 $\rho_i \circ \mu = R_{P_i} \circ \zeta$对每个$i$都成立。映射 $R_{P_i}\colon Y \to P_i$ 共同诱导出一个映射 $R : Y \to \prod_{i=1}^n P_i$，使得$\rho_i \circ R = R_{P_i}$。由于对每个 i都有 $\rho_i \circ \mu = R_{P_i} \circ \zeta = \rho_i \circ R \circ \zeta$，因此我们有 $R \circ \zeta = \mu$。于是

μ 是一个嵌入。由此可知， ζ 是一个截面，因此是 π_1-单射。



□

References

[1] J. Brazas, *Generalized covering space theories*, 《范畴理论与应用》30 (2015) 1132–1162。[2] J. Brazas, H. Fischer, *Test map characterizations of local properties of fundamental groups*, 《拓扑学与分析学杂志》12 (2020) 37-85。[3] N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra, *Covering maps for locally path-connected spaces*, 《基础数学》218 (2012) 13-46。[4] D. Burago, Y.D. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[5] J. Burillo, *Dimension and fundamental groups of asymptotic cones*, 《伦敦数学会杂志》59 (1999), 第2期，557-572。[6] G. R. Conner 和 C. A. Kent, *Local topological properties of asymptotic cones of groups*, 《代数与几何拓扑》 **14** 2014 3, 1413 1439 ( ), 第 – 期。J.W. Cannon, G.R. Conner, [7] *On the fundamental groups of one-dimensional spaces*, 《拓扑学应用》153 (2006) 2648-2672。[8] J. W. Cannon, G.R. Conner, *The homotopy dimension of codiscrete subsets of the* 2*-sphere* $\mathbb{S}^2$ **197** 2007 35 66 , 《基础数学》( ) - 。[9] G.R. Conner, M. Meilstrup, D. Repoˇvs, A. Zastrow 和 M. ˇZeljko, *On small homotopies of loops* **155** 2008 1089 1097 , 《拓扑学应用》( ) - 。[10] R. Daverman, *Decompositions of manifolds*, AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。[11] C. Drutu, M. Sapir, *Tree graded spaces and asymptotic cones of groups*, 《拓扑学》44 (2005) 959-1058。[12] K. Eda, *A locally simply connected space and fundamental groups of one point unions of cones* **116** 1992 249 , 《拓扑学应用》( ), 第1期，239- 。[13] K. Eda, K. Kawamura, *The fundamental groups of one-dimensional spaces*, 《拓扑学应用》87 (1998) 163–172。[14] H. Fischer, C. Guilbault, *On the fundamental groups of trees of manifolds*, 《太平洋数学杂志》221 (2005) 49-79。[15] H. Fischer, A. Zastrow, *The fundamental groups of subsets of closed surfaces inject into their first shape groups* **5** 2005 1655 1676 , 《代数与几何拓扑》( ) – 。[16] H. Fischer 和 A. Zastrow, *Generalized universal covering spaces and the shape group*, 《基础数学》197 (2007) 167-196。[17] W. Hojka, *The harmonic archipelago as a universal locally free group*, 《代数杂志》437 (2015) 44-51。[18] C.G. Hruska, B. Kleiner, *Hadamard spaces with isolated flats with an appendix written jointly with Mohamad Hindawi* **9** 2005 1501 1538 , 《几何与拓扑》( ) - 。[19] J.C. Mayer, L.G. Oversteegen, *A topological characterization of* $\mathbb{R}$*-trees*, 《美国数学会汇刊》320 (1990) 395-415。[20] S.B. Nadler Jr., *Continuum theory*, M. Dekker，纽约、巴塞尔和香港，1992年。[21] Morgan, John W.; Morrison, Ian A., *A van Kampen theorem for weak joins*。《伦敦数学会会刊》53 (1986)，第3期，562-576。[22] A. Y. Ol'shanskiˇi, D. V. Osin 和 M. V. Sapir, *Lacunary hyperbolic groups*, 《几何与拓扑》13 (2009)，第4期，2051-2140。[23] S. R. Thomas 和 B. Veliˇckovi´c, *Asymptotic cones of finitely generated groups*, 《伦敦数学会通报》32 (2000)，第2期，203-208。

[24] J. Tits, *A 'Theorem of Lie-Kolchin' for trees*, 《代数文集：献给埃利斯·科尔钦的论文集》（学术出版社，纽约，1977年），377-388。

West Chester University, Department of Mathematics, West Chester, PA 19383,USA

Email address: jbrazas@wcupa.edu

Brigham Young University, Department of Mathematics, Provo, UT 84602, USA
Email address: curtkent@math.byu.edu