arXiv:2603.07318v1 [math.GT] 7 Mar 2026

两个体积的故事：模空间的韦伊–彼得森体积与 Masur–Veech 体积

DAWEI CHEN 和 SCOTT MULLANE

Abstract. 韦伊–彼得森体积和 Masur–Veech 体积分别度量赋予双曲度量和平坦度量的黎曼曲面模空间的大小。在过去几十年中，对这些体积的计算推动了组合枚举、交理论和递推关系的发展。在这篇综述中，我们回顾相关领域的关键成果、方法和开放问题，同时探讨在计算这两类体积的方法中呈现出的有趣对应关系。

Contents

1. 引言 1 2. 韦伊–彼得森体积 2 3. Masur–Veech 体积 12 4. 两类体积的共同主题 28 参考文献 29

1. Introduction

模空间贯穿于数学的各个领域，作为具有相似结构的几何对象的参数空间。当所研究的对象带有度量时，相应的模空间自然会具有测度，从而通过体积量化其大小。对这些体积的研究汇聚了组合枚举、模紧化、交理论和递推关系等多元主题，并成为几何学、动力学、组合学和数学物理的交汇点。

本综述聚焦于黎曼曲面模空间上的两种基本体积概念：*韦伊–彼得森* 与 *Masur–Veech* 体积。魏尔–彼得森体积与黎曼曲面上的双曲度量相关联，这些曲面可以带有尖点、锥奇点或测地线边界。Masur–Veech 体积源于由黎曼曲面上的全纯微分所诱导的、带有锥奇点的平坦度量。我们回顾其定义与计算所依据的主要思想，追溯相关研究中的关键进展，并比较这两种情形下业已形成的方法。我们的目的是凸显它们的类比与对照，并鼓励这两套平行理论之间的进一步交流。由于本综述所涉主题处于多个领域的交叉之处，我们着重传达相关背后的几何直观

Date：2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14H10；次要分类：14C17、32G15、37D40。

概念与思想，同时在不牺牲精确性的前提下尽量减少技术细节，以保持自然流畅的叙述。我们希望来自不同背景的读者即使快速阅读，也能觉得本文易于理解且有所收获。

致谢。 本综述的部分内容基于第一作者在里士满几何会议 2021上所作的报告。作者感谢 Marco Aldi、Allison Moore 和 Nicola Tarasca 筹办这一精彩的系列会议，并诚挚感谢他们邀请作者为会议论文集撰稿。第一作者获得美国国家科学基金会 DMS-2301030 项目资助，以及西蒙斯数学家旅行资助。第二作者获得澳大利亚研究理事会 DECRA 项目 DE220100918 资助。

2. Weil–Petersson volumes

本节将概述韦伊–彼得森体积的定义、计算方法、彼此之间的关系，以及其在高亏格情形下的渐近性。

2.1. 双曲曲面的模空间。

带有标记边界分支的双曲曲面的模空间定义为

$$\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(L_1,...,L_n) \coloneqq \Big\{(\Sigma,\beta_1,...,\beta_n) \mid \Sigma \text{ oriented hyperbolic surface},$$
$$\text{genus } \Sigma = g, \partial\Sigma = \sqcup\beta_j, 2\cosh(L_j/2) = -\mathrm{tr}(A_j)\Big\}/\sim$$

对于满足 $2g-2+n>0$和 $L_j \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup i(0,2\pi)$ 的 g,n，其中 $A_j \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 表示由度量沿边界分支 β_j的单值化所定义的共轭类。商空间是根据保持每个 β_j及其对应共轭类的等距变换定义的。在双曲曲面中，边界分支在几何上表现为长度为 $L_j \in \mathbb{R}_{>0}$的测地线、当 $L_j = 0$时的尖点，或当 $L_j = i\theta_j \in (0,2\pi)i$ 为纯虚数时的锥角 $\theta_j = |L_j|$，后者在带穿孔曲面上给出不完备双曲度量。

此外，当$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$时，Gauss–Bonnet 定理要求

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j = \sum_{j=1}^{n} |L_j| < 2\pi(2g-2+n) \tag{1}$$

模空间非空。

$\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{0})$ 与 $\mathcal{M}_{g,n}$ 之间存在自然同胚；后者是亏格为 g 且带有 n 个标记点的曲线的模空间。该同胚将双曲曲面映射到相应的共形类，其逆映射由一致化定义。Mirzakhani 证明，通过嫁接过程，这一结果可推广为 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 与 $\mathcal{M}_{g,n}$ 之间的同胚，其中 $L_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。当$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$时，McOwen [McO88] 证明，在任意给定的共形类中，存在唯一的锥形度量 $h(\mathbf{L})$，其锥角为 $\theta_j = |L_j|$, $j = 1,...,n$，从而为这些情形提供了同胚。

问题 2.1。 在第 *2.8* 节中，$\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 的定义被扩展为包含 $L_j \in i\mathbb{R}_{\geq 0}$，其几何实现为角度为 $\theta_j = -iL_j$ 的锥形奇点。尽管近期与之密切相关的工作 [GS24,Che24, HT25b] 已经研究了具有不同边界行为的双曲曲面的模空间，

一个有趣的问题是，为 $L_j \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\cup i\mathbb{R}_{\geq 0})$ 给出一个具有几何意义的模空间定义，并扩展 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 的定义域。

2.2. **韦伊–彼得森度量与体积。** 双曲曲面的模空间 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 带有一种有限测度，可通过多种方式构造，包括：

- 在 Fenchel–Nielsen 坐标存在时通过这些坐标构造 [Wol85];
- 取自然辛形式的最高次幂 $\omega^{WP}{}_{\mathbf{L}}$，该形式可通过韦伊–彼得森构造厄米度量来定义，也可通过特征簇上的自然辛形式来定义 [Gol86]；或
- 由相应平坦 PSL(2, $\mathbb{R}$) 联络所定义的自然复形的 Reidemeister挠率 [Wit91]。

我们首先考察前两种构造。

2.2.1. *Fenchel–Nielsen* 坐标。 在 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 中，一个双曲曲面的裤子分解（其中 $L_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）是由该曲面上的一组测地线构成的，这些测地线将曲面分解为带有三个测地边界分支的亏格零曲面。我们用 $\ell_1, \ldots, \ell_{3g-3+n} \in \mathbb{R}_+$ 表示这些测地线的长度。一个带有三个测地边界分支的零亏格双曲曲面由这些测地线的长度唯一确定，不过这样一组零亏格曲面并不足以确定 $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 中的曲面。扭转参数 $\tau_1, \ldots, \tau_{3g-3+n} \in \mathbb{R}$ 决定每对测地线如何粘合在一起，这两组参数通过一个同胚为 Teichm¨uller 空间提供 Fenchel–Nielsen 坐标

$$\mathcal{T}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(L_1, \ldots, L_n) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}$$

在 Teichm¨uller 空间的自然拓扑下。典范辛形式

$$\omega = \sum_{j=1}^{3g-3+n} d\ell_j \wedge d\tau_j$$

随后奇迹般地下降 [Wol85]为模空间$\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$上的辛形式，该模空间是 Teichm¨uller 空间在映射类群作用下的商。所得形式称为 Weil–Petersson 辛形式，并记为 $\omega_{\mathrm{WP}}(\mathbf{L})$。

这可以推广，从而对任意选取的 $\mathbf{L}$ 定义 Weil–Petersson 辛形式 $\omega_{\mathbf{L}}$，只要所参数化的双曲曲面容许裤分解。通过给出带锥角的双曲曲面上的 McShane 恒等式， [TWZ06] 中证明了当 $L_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}\cup i[0,\pi)$ 时存在裤子分解，因而这一构造得以推广。然而，在 [AN25] 中证明，当某些 $L_j \in i(\pi, 2\pi)$ 时，不再保证存在裤分解；在这种情况下，需要另一条路径来定义 Weil–Petersson 辛形式。

问题 2.2. 求出在不存在裤子分解、因而也不存在 *Fenchel–Nielsen* 坐标的情形下，$\mathcal{M}_{g,n}^{hyp}(\mathbf{L})$ 的一个局部坐标系。

2.2.2. 魏尔–彼得森度量。 点 $(C, p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{M}_{g,n}$ 处的余切空间可识别为

$$T^*_{[C,p_1,\ldots,p_n]}\mathcal{M}_{g,n} = H^1(C, T_C(-p_1 - \cdots - p_n))^\vee \cong H^0(C, K_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)),$$

在 $\sum_{i=1}^n p_i$ 上至多有简单极点的亚纯二次微分构成的向量空间。魏尔–彼得森度量 g_{WP} 和魏尔 – 彼得森形式 ω_{WP} 在该点定义为二次微分向量空间上的彼得森配对的实部和虚部：

$$\langle \eta, \xi \rangle \coloneqq \int_C \frac{\overline{\eta}\xi}{h}, \qquad \eta, \xi \in H^0(C, K_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)) \tag{2}$$

其中， h 是 $C \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$上的完备双曲度量。配对（2）定义了$\mathcal{M}_g$上的厄米度量 [Wei58] ，$n$ 其虚部为 K¨ahler 形式ω_{WP}。

通过将完备双曲度量h 替换为锥形双曲度量 h**(L)**，并在点$p_1, \ldots, p_n$处指定锥角，可以将其推广 [ST11] 。对于满足条件（1）的$\mathbf{L} \in i[0, 2\pi)^n$，K¨ahler 度量 $g_{\mathbf{L}}$及其对应的 K¨ahler 形式 ω_{WP}**(L)**分别定义为厄米度量的实部和虚部

$$\langle \eta, \xi \rangle \coloneqq \int_C \frac{\overline{\eta}\xi}{h(\mathbf{L})}, \qquad \eta, \xi \in H^0(C, K_C^{\otimes 2}(p_1 + \cdots + p_n)). \tag{3}$$

总体积定义为模空间的体积：

$$\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})\big) = \int_{\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})} \exp \omega_{\mathrm{WP}}(\mathbf{L}). \tag{4}$$

2.3. **Wolpert：$\mathbf{L} = \mathbf{0}$ 的体积有限。** 相对于 g_{WP} ，$\mathcal{M}_{g,n}$的度量完备化定义了 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}$ ，**(0)**。紧化中的点对应于在节点处带有尖点的带节点双曲曲面。Bers [Ber74] 最先研究了完备带节点双曲曲面在模空间紧化中的作用，随后 [Har74, HK14]进一步发展了这一研究。

Wolpert [Wol85]证明，内部上的同胚可延拓为带节点双曲曲面紧化与模空间的Deligne–Mumford紧化之间的同胚 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}$,**(0)** $\longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ；此外，辛形式 ω_{WP} 可经由Fenchel–Nielsen 坐标光滑延拓为 $\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}$,**(0)**上的闭辛形式，并经由Deligne–Mumford紧化上的复解析结构延拓为闭流$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$。这两种延拓被证明表示同一个上同调类 $[\omega_{\mathrm{WP}}] = 2\pi\kappa_1 \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{R})$。因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{0})\big) &= \int_{\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{0})} \exp \omega_{\mathrm{WP}} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{0})} \exp \omega_{\mathrm{WP}} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \exp \omega_{\mathrm{WP}} \\
&= \frac{(2\pi^2)^{3g-3+n}}{(3g-3+n)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \kappa_1^{3g-3+n}
\end{aligned}$$

是有限的。

2.4. **Mirzakhani：维滕猜想的一个创新证明。** Mirzakhani 进一步证明，对于 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ ，$\mathcal{M}_{g\,n}^{\mathrm{hyp}}$,**(L)** 的体积是有限的，由对称多项式 $V_{\mathrm{Mirz}g,n}(L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}[L_1^2, \ldots, L_n^2]$给出，并提供了两种计算该值的方法：

(1) 借助递推 [Mir07a]，该递推通过从至少具有一个边界分支的双曲曲面上移除裤形曲面来构造，从而将体积的计算归结为一维模空间上的初始计算 $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{0,3}(L_1,L_2,L_3)) = 1$ 与 $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{1,1}(L)) = \frac{1}{48}(L^2+4\pi^2)$，这些计算由 N¨a¨at¨anen 与 Nakanish [NN98] 完成；以及

（2）通过辛约化论证推广 Wolpert 的工作。[Mir07b],Mirzakhani 证明，内部上的同胚可延拓为紧化上的同胚：带节点双曲曲面的紧化与模空间的 Deligne–Mumford 紧化同胚；并证明 $\omega_{\mathrm{WP}}(\mathbf{L})$ 可延拓为 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上的闭流，其表示上同调类

$$[\omega_{\mathrm{WP}}(\mathbf{L})] = [\omega_{\mathrm{WP}}] + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} L_j^2 \psi_j \tag{5}$$

$$= 2\pi^2\kappa_1 + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} L_j^2 \psi_j \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{R}) \tag{6}$$

因此

$$V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n}(\mathbf{L}) \coloneqq \int_{\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L})} \exp \omega_{\mathrm{WP}}(\mathbf{L}) \tag{7}$$

$$= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \exp\left(2\pi^2\kappa_1 + \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} L_j^2 \psi_j\right) \in \mathbb{R}[L_1, ..., L_n]. \tag{8}$$

综合这两项成果，便为维滕猜想中关于最高阶 ψ-交数的取值提供了一种创新的替代证明。

鉴于这项工作与模空间的马苏尔–维希体积研究之间的关联和相似之处，本节其余部分将聚焦于该领域沿以下三个方向开展的后续工作：

- 将体积函数延拓至锥点；由于锥点与 Jackiw–Teitelboim（JT）引力有关，这一点尤其受到物理学家的关注；
- 将不同模空间的体积联系起来的不同递推关系，并提高体积与交数的计算效率；以及
- Mirzakhani体积多项式的大亏格渐近，其可应用于随机曲面与交数渐近。

2.5. **双曲锥曲面的模空间**。带锥点的双曲曲面的研究由 Schumacher 与 Trapani [ST05]开创，而 Do 与 Norbury [DN09]利用这些模空间的极限体积，在米尔扎哈尼多项式 $V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n}(\mathbf{L})$ 中构造了新的递推关系（见§2.7）。

米尔扎哈尼多项式 $V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n}(\mathbf{L})$ 是关于 L_j^2 的多项式。Mirzakhani 证明，当 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 时，它们给出的正是模空间的体积 $\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L})\big)$。当 $L_j \in i[0,2\pi)$ 曲面的边界分支被实现为锥角为 $|L_j|$ 的圆锥点时，参数空间 $i[0,2\pi)^n$ 上的体积函数定义为返回相应模空间的体积

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Vol}\colon & i[0,2\pi)^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \mathbf{L} & \mapsto & \mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L})\big). \end{array}$$

使用锥角的参数也很方便，即 $\boldsymbol{\theta} = -i\mathbf{L}$，满足 $\theta_j = -iL_j$。

Tan、Wong 和 Zhang [TWZ06] 给出了双曲曲面上带有锥角的 McShane 恒等式，它立即推广了 Mirzakhani 关于$\mathbf{L} \in (\mathbb{R}_{\geq 0} \cup (0,\pi)i)^n$的递推。这表明，多项式 $V_{\mathrm{Mirz}g,n}(\mathbf{L})$ 对应于体积函数 $\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n},(\mathbf{L})\big)$（其中$\mathbf{L} \in i[0,\pi)^n$）。然而，Mirzakhani 所用的递推和辛约化论证都极其依赖双曲曲面存在裤子分解，而并非对所有$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$都存在这种分解。对于满足 Gauss–Bonnet 定理、因而对应于非空模空间的$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$，观察发现 $V^{\mathrm{Mirz}}_{g\,n},(\mathbf{L}) < 0$ 表明，米尔扎哈尼多项式并不能在所有情况下推广为体积函数 $\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n},(\mathbf{L})\big)$。具体而言，观察到 [AN25],

$$V^{\mathrm{Mirz}}_{0,4}(0,0,i\theta,(2\pi-\varepsilon)i) < 0$$

对于 $0 < 4\pi\varepsilon < \theta^2 < 4\pi^2$。

通过证明 Weil–Petersson 辛形式可光滑延拓为 Deligne–Mumford 紧化上的一个闭流，且具有相同的上同调类，Anagnostou 和 Norbury [AN25] 进一步证明，Mirzakhani 的多项式确实给出了体积，其中 $\theta_i + \theta_j = |L_i| + |L_j| < 2\pi$ 对所有 i，j 都成立；这包括 Fenchel–Nielsen 坐标不存在的情形，也就是说，当一个角度 $\theta_j \in (\pi,\ 2\pi)$ 时。

随后，Anagnostou、Norbury 和第二作者 [AMN23]证明，体积函数关于 L_j（或 θ_j）是分段多项式，并明确描述了当跨越不同腔室时，多项式如何变化；在每个腔室上，该函数由一个固定的多项式给出。在引入必要的工具之后，我们将在 §2.6 重新讨论这些结果。

2.5.1. 通过度量完备化进行紧化：带节点双曲曲面。对于$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$，我们将 $\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n},(\mathbf{L})$定义为带节点双曲曲面的模空间，即相对于§3中定义的 $g_{\mathbf{L}}$，对$\mathcal{M}_{g,n}$ 作度量完备化所得的空间。

令$\mathbf{L} \geq \mathbf{L}'$，也就是说，对所有 j都有 $|L_j| \geq |L'_j|$。那么，对于任意带标记点曲线$[C, p_1, \ldots, p_n] \in \mathcal{M}_{g,n}$，双曲度量 $h(\mathbf{L}')$支配 $h(\mathbf{L})$ [ST05],，由此可得 [AN25, 命题 2.2]是度量完备化之间的连续映射

$$\overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L}') \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L}).$$

令$\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ 得到一个连续映射

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{hyp}}_{g,n}(\mathbf{L})$$

由Masur的结果 [Mas76], 可知，完备化 $\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n}$,(0)同胚于Deligne–Mumford紧化 $\mathcal{M}_{g,n}$，从而证明度量完备化是紧的（此前已在 [ST11]中证明）。然而，一般而言，此映射并非同胚。由此立即可知，Wolpert和Mirzakhani通过在与度量完备化同胚的代数紧化上运用交理论来计算体积的策略，需要寻找Deligne–Mumford紧化 $\mathcal{M}_{g,n}$之外的新候选对象。

在 [AN25的§2中，2] 作者研究了度量完备化 $\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n}$,(**L**)上万有曲线的局部行为。局部双曲几何表明，对于

任意子集 $S \subset \{1,\dots,n\}$ 使得

$$\sum_{j\in S}\theta_j \geq 2\pi(|S|-1)$$

S 点在$\mathcal{M}_{g,n}$上的万有曲线中可以任意接近，因此在极限时会相撞。任何与 $\mathcal{M}_{g\ n}^{\mathrm{hyp}}$,(**L**)同胚的$\mathcal{M}_{g,n}$ 的代数紧化也必然允许这种现象。由于$\mathcal{M}_{g,n}$ 的Deligne–Mumford紧化并不允许这种现象，我们不得不寻找$\mathcal{M}_{g,n}$ 的其他代数紧化，作为与 $\mathcal{M}_{g\ n}^{\mathrm{hyp}}$,(**L**)同胚的候选对象，以开辟在这些代数紧化上运用交理论来计算Vol($\mathcal{M}_{g\ n}^{\mathrm{hyp}}$,(**L**))的途径。 —

2.5.2. 代数紧化：*Hassett*稳定性。Hassett [Has03]利用依赖于权重$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in (\mathbf{0}, 1]^n$ 的加权稳定曲线，构造了 $\mathcal{M}_{g,\mathbf{a}}$ 的代数紧化；这些权重允许点彼此靠近。

Hassett [Has03] 定义了参数空间

$$\mathcal{D}_{g,n} \coloneqq \{\mathbf{a} \in (0,1]^n \mid \sum a_i > 2-2g\}$$

它们定义了稳定性条件，用以规范一类允许的节点曲线，并据此构造 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的其他紧化。对于 $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{g,n}$，当带标记节点曲线 $(C, p_1, \dots, p_n)$ 满足以下条件时，称其为**a**-稳定：点 $p_1, \dots, p_n$ 位于 C 的光滑轨迹中；扭曲对偶化层 $\omega_C($ $a_1p_1 + \cdots + a_np_n)$ 在 C 的每个不可约分支上均为丰沛；并且 $\{p_j = p \mid j \in J\}$, 则 $\sum a_j \leq 1$。当 $\mathbf{a} = (1^n)_{j\in J}$
这等价于 Deligne–Mumford稳定性条件。

Hassett [Has03] 证明了$\overline{\mathcal{M}}_{g,\mathbf{a}}$ 所有 **a**-稳定曲线的$\mathcal{M}_{g,n}$ 构成一个紧化。此外，正如 [AN25, Thm 1.3], 所示，这些紧化恰好满足我们的需求：给定 $\mathbf{L} \in i[0, 2\pi)^n$，定义

$$a(L_j) \coloneqq 1 + \frac{iL_j}{2\pi} = 1 - \frac{\theta_j}{2\pi},$$

并令 $\mathbf{a} = a(\mathbf{L}) = (a(L_1) \dots, a(L_n))$，则存在一个同胚

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L}) \cong \overline{\mathcal{M}}_{g,\mathbf{a}}. \tag{9}$$

这些模空间可能的同胚类型还会根据参数进一步分解。对于任意满足 $|J| \geq 2$ 的 $J \subset \{1, ..., n\}$，定义墙

$$W_J = \Big\{\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{g,n} \;\Big|\; \sum_{j\in J} a_j = 1\Big\}.$$

$\mathcal{D}_{g,n} \setminus \cup_J W_J$ 的分支是 $\mathcal{D}_{g,n}$ 的腔室 。给定任意 $\mathbf{a}\in \mathcal{D}_{g,n} \setminus \cup_J W_J$，对于任意位于同一腔室的 $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_{g,n}$ ，节曲线 C 是**a**-稳定的，当且仅当它是**b**-稳定的，因此 $\mathcal{M}_{g,}$ $_{\mathbf{a}} \cong \mathcal{M}_{g,\mathbf{b}}$。我们将由腔室 $\mathcal{C}$ 指定的唯一 Hassett紧化记作 $\mathcal{M}_{g,\mathcal{C}}$。

一个腔室 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{g,\ n}$ 由幂集 $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ 上的一个保序函数唯一确定，

$$\mathcal{C}\colon \mathcal{P}(\mathbf{n}) \to \{0,1\} \text{ defined on } J \subset \mathbf{n} \text{ by: } \quad \mathcal{C}(J) = 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{a} \in \mathcal{C},\ \sum_{j\in J} a_j \leq 1 \tag{10}$$

该函数相对于 $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ 上的自然偏序和 $\{0,1\}$上的全序 $0<1$ 保序。满足 $\mathcal{C}(S)=0$ 的集合 $S\subset\{1,\dots,n\}$，就是在紧化中可以发生碰撞的点集。主腔室 $\mathcal{C}^{\mathrm{M}}\subset\mathcal{D}_{g,\,n}$ 包含点 (1^n)，并对应于 Deligne–Mumford紧化。

与墙 W_S 相邻且位于其上方的腔室 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}_{g,\,n}$，特别是 $\mathcal{C}(S)=1$，唯一确定了一个满足以下条件的腔室 $\mathcal{C}'$：对所有 $J\neq S$，均有 $\mathcal{C}'(S)=0$，且 $\mathcal{C}'(J)=\mathcal{C}(J)$。于是 $\mathcal{C}'$ 与 W_S 相邻且位于其下方，而 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}'$ 通过一次简单墙穿越相关联。

对于 一个 $=(a_1,\dots,a_n)\in\mathcal{D}_{g,\,n}$，类 $\psi_j\in H^2(\overline{\mathcal{M}_{g,\,\mathbf{a}}},\,\mathbb{Q})$ 定义如下

$$\psi_j\coloneqq c_1(s_j^*(\omega_\pi))$$

其中 ω_π 是万有族的相对对偶化层

$$\pi\colon\mathcal{C}_{g,\mathbf{a}}\longrightarrow\overline{\mathcal{M}}_{g,\mathbf{a}}$$

而 s_j 是对应于第 j 个点的截面。

我们定义 $\kappa_1\coloneqq\pi_*(c_1(\omega_\pi(\sum_{i=1}^n D_i))^2)$。注意，此定义沿用 [AC96] 的定义，与 Miller–Morita–Mumford 类 $\pi_*(c_1(\omega_\pi)^2)$ 不同，尽管文献中这两类都使用相同的记号。

在 [AMN23] 中，作者使用推前定义了一个类 $\gamma(\mathbf{a})$：

$$\frac{1}{2}\pi_*(2\pi\omega_\pi(\mathbf{a}\cdot D))^2)=2\pi^2\gamma(\mathbf{a}),$$

等价地，这定义了类 $\gamma(\mathbf{a})\in H^2(\mathcal{M}_{g,\mathcal{C}},\mathbb{Q})[\mathbf{a}]$，其定义为

$$\gamma(\mathbf{a})\coloneqq\kappa_1-\sum(1-a_j)^2\psi_j+\sum_{\mathcal{C}(i,j)=0}(2a_ia_j-2)D_{i,j}. \tag{11}$$

将公式 (11) 经拉回映射映入 $H^*(\mathcal{M}_{g,n})$，得到公式 [ET23，方程 (1.2)]（此外还可纳入表示测地边界分支的 ψ 类）。

给定一个腔室 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}_{g,n}$，定义体积多项式 $V_{g,\mathcal{C}}$ 如下：

$$V_{g,\mathcal{C}}(i\boldsymbol{\theta})\coloneqq\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,\mathcal{C}}}\exp(2\pi^2\gamma(\mathbf{a}))\in\mathbb{R}[\theta_1,\dots,\theta_n] \tag{12}$$

其中 $\mathbf{a}_j=a(\theta_j)$。此外，现在可以看出体积函数是分段多项式：在每个 Hassett 腔室上，该函数都是一个固定的多项式。也就是说，

$$V_{g,\mathcal{C}}(i\boldsymbol{\theta})=\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{hyp}}(i\boldsymbol{\theta})\big),\quad\text{when }\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\in\mathcal{C}.$$

公式 (12) 在 $\mathcal{C}=\mathcal{C}^{\mathrm{M}}$ 时与 Mirzakhani 公式 [Mir07b]一致，并将其推广至所有腔室。

2.6. 墙穿越体积多项式。 给定腔室 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}_{g,\,n}$ 它与墙 W_S相邻且位于其上方，因此唯一确定了与其相邻且位于其下方的 W_S $\mathcal{C}'$，我们将墙穿越多项式 $\mathfrak{wc}_{\mathcal{C},\,S}\in\mathbb{R}[\theta_1,\dots,\theta_n]$ 定义为

$$V_{g,\mathcal{C}'}(i\boldsymbol{\theta})=V_{g,\mathcal{C}}(i\boldsymbol{\theta})+\mathfrak{wc}_{\mathcal{C},S}(\boldsymbol{\theta}). \tag{13}$$

对于 $S\subset\{1,\dots,n\}$，我们令 $\boldsymbol{\theta}_S\in[0,2\pi)^S$ 表示将 $\boldsymbol{\theta}\in[0,2\pi)^n$ 限制到由 S 索引的条目上，而 S^c 是 $S\subset\{1,\dots,n\}$ 的补集。

设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{g,\ n}$ 与墙 W_S 相邻且位于其上方，作者在 [AMN23] 中通过交理论论证证明了

$$\mathfrak{wc}_{\mathcal{C},S}(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{\phi_S} V_{g,\mathcal{C}/S}(i\boldsymbol{\theta}_{S^c}, i\theta) \cdot V_{0,\mathcal{C}_1}(i\theta, i\boldsymbol{\theta}_S) \cdot \theta \cdot d\theta \tag{14}$$

其中 $\phi_S = \sum_{j\in S} \theta_j - 2\pi(|S| - 1)$ 以及腔室 $\mathcal{C}/S$ 和 $\mathcal{C}_1$ 按如下方式对应：

- $\mathcal{C}_1$ 是对应于第一项的最小腔室，可被识别为 $\mathcal{D}_{0,|S|+1}$ 中包含元素 $(\mathbf{1}, b^{|S|})$ 的唯一腔室，其中 $\frac{1}{n-1} < b \leq \frac{1}{n-2}$。
- $\mathcal{C}/S$ 是 $\mathcal{D}_{g,n-|S|+1}$ 中的商腔室，它由 [AMN23]，中的一种自然商构造定义，可被识别为包含元素 $(i\theta^{S^c}, \mathbf{1})$ 的唯一腔室。

问题 2.3. 尽管墙穿越公式的形式看起来颇具几何启发性，其中包含相关模空间的两个体积多项式，但其证明基于交理论，因此明确属于代数几何范畴。

一个值得关注的开放问题是：从双曲或辛几何的角度，对墙穿越公式给出几何解释。

此外，能否将韦伊–彼得森度量、体积函数、墙穿越现象和分腔室多项式性推广到模空间 $\mathcal{M}^{hyp}_{g\ n,}(\mathbf{L})$ 定义中 $\mathbf{L}$ 的定义域的任意扩展上（见问题 *2.1*）？

2.7. **递推与广义弦方程和膨胀子方程**。Mirzakhani 递推激发了人们对理解模空间体积之间关系的浓厚兴趣。研究体积之间关系主要有三种方式：

(1) 交理论：相关的上同调类在遗忘标记点 $\mathcal{M}_{g,\ \mathbf{a}}$ 的态射下具有良好的变换性质；在某些条件下，该态射还是平坦态射。这使得人们能够建立不同模空间的交数计算之间的关系，进而建立其体积之间的关系。(2) 移除一个裤子曲面：移除一个裤子曲面可以改变边界分支的数量（如 Mirzakhani 的原始工作所示），从而可用于建立不同模空间体积之间的关系。(3) 2π 极限：随着魏尔–彼得森形式退化，当任意圆锥点趋近 2π 时，体积函数将趋近于零。

多项式 $V^{\mathrm{Mirz}}_{g\ n,}(\mathbf{L})$ 已在 [DN09]，中通过 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上交叉数之间的关系得到证明，并满足以下关系：

$$V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n+1}(\mathbf{L}, 2\pi i) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{L_k} L_k V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n}(\mathbf{L}) dL_k, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n+1}}{\partial L_{n+1}}(\mathbf{L}, 2\pi i) = 2\pi i(2g - 2 + n) V^{\mathrm{Mirz}}_{g,n}(\mathbf{L}). \tag{15b}$$

这些关系可通过墙交叉的视角推广，并为这一启发性的 $2\pi i$ 极限提供几何解释。令 $\theta_j \to 2\pi$，等价地，令 $a_j \to 0$，以定义 $\mathcal{D}_{g,n}$ 中的一条路径，沿该路径穿越墙时只会从上方向下方穿越。一个腔室定义如下：

- 第 i个坐标上平坦 当存在一条路径 $\theta_i \to 2\pi$ 仅穿过满足 $|S| = 2$ 的墙 W_S，并且

- 第 i个坐标上轻 当存在一条路径 $\theta_i \to 2\pi$ ，沿该路径没有墙被穿过。

若腔室$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{g,n+1}$ 在第（$n+1$）个坐标上是轻的，则该腔室与 $2\pi i$ 边界相接。作为Weil–Petersson形式在 2π 极限下退化的推论，体积函数以及因而对应于该腔室的多项式必须在此极限下消失。也就是说，

$$V_{g,\mathcal{C}}(i\theta_1, \dots, i\theta_n, 2\pi i) = 0. \tag{16}$$

这也通过代数几何论证得到证明，即借助上同调类在遗忘态射下的变换。

考虑 $\{\mathcal{B}_j, S_j\}_{j=1}^k$ 在$\mathcal{D}_{g,n+1}$ 中从 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$到在第（$n+1$）个坐标上为轻的腔室 $\mathcal{B}_{k+1}$ 的任意一系列简单墙穿越，体积函数在 2π 极限下的消失从墙穿越的视角给出如下多项式等式：

$$V_{g,\mathcal{C}}(i\theta_1, \dots, i\theta_n, 2\pi i) = -\sum_{j=1}^{k} \mathfrak{wc}_{\mathcal{B}_j, S_j}(\theta_1, \dots, \theta_n, 2\pi) \tag{17}$$

特别地，当应用于主腔室 $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathrm{M}}$ 时，这经由（13）得到关系式（15a）。

方程 (15b) 也可推广到其他腔室。唯一的腔室 $\mathcal{C}|_{\mathbf{n}} \subset \mathcal{D}_{g,n}$ 由腔室 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{g,n+1}$ 确定，后者在第 $(n+1)$ 个坐标上平坦，确定方式为遗忘第 $(n+1)$ 个点。对于任意腔室 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{g,n+1}$，若其在第 $(n+1)$ 个坐标上平坦

$$\frac{\partial V_{g,\mathcal{C}}}{\partial \theta_{n+1}}(i\theta_1, \dots, i\theta_n, 2\pi i) = -2\pi\big(2g - 2 + |q(\mathcal{C})| + \sum_{j \notin q(\mathcal{C})} a(\theta_j)\big) V_{g,\mathcal{C}|_{\mathbf{n}}}(i\theta_1, \dots, i\theta_n) \tag{18}$$

其中 $q(\mathcal{C}) = \{j \mid W_{\{j,n+1\}}$ 被穿越为 $\theta_{n+1} \to 2\pi\}$。

对于主腔室 $\mathcal{C}^{\mathrm{M}}$，(18) 化为 (15b)。当 $\mathcal{C}$ 在第 $(n+1)$ 个坐标上为轻时，(18) 给出分段多项式 $\mathrm{Vol}\big(\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n,}(i\boldsymbol{\theta})\big)$的导数，这先前已在 [ET23, (1.3b)]中得到证明。

该结果可经由墙穿越多项式推广到在第 $(n+1)$ 个坐标上不平坦的腔室 [AMN23, 推论 4.3]；进一步地，[AMN23]中所有结果的证明都允许边界测地线存在，只要所添加的边界分支的长度足够小（见 [AN25, 引理 2.3]）。

2.8. 高锥角。 对于一般的 $\mathbf{L} \in i\mathbb{R}^n_{\geq 0}$，允许锥角为 2π 及更大时，[McO88] 中证明了：在给定的共形类中，具有给定锥角的双曲度量仍然存在，并且该空间带有典范辛形式。然而，只要某些 $\theta_j = |L_j| \geq 2\pi$，(3) 就会发散，因此它不再定义$\mathcal{M}_g$ 上的度量. $_n$ ，我们也失去了通过度量完备化将 $\mathcal{M}^{\mathrm{hyp}}_{g\,n,}$ (**L**) 紧化的途径。

尽管如此，Sauvaget [Sau24a] 最近提出了一种创新的解决思路：将这些模空间的体积定义为 k-微分模空间的 Masur–Veech 体积的极限，并证明在至少有 $n-1$ 个角的情况下，当 $-iL_j = \theta_j < \pi$ 时，这些体积在 $\mathbf{L} \in i[0, 2\pi)^n$ 上取值相同。我们将在 §3.6 和 §4 中进一步详述，因为这个故事中的两种体积之间的直接联系，最适合在讨论这两种观点的共同主题时介绍。

Sauvaget 的工作及相关进展，为若干具有独立研究价值的相关问题提供了动机。受这些进展进一步启发，我们希望解决问题 2.2：在这些情形下，为$\mathcal{M}_{g\,n,}^{\mathrm{hyp}}$ **(L)** 提供坐标。此外，如上所述，只要存在某个 $\theta_j = |L_j| \geq 2\pi$ ，**(3)** 就会发散，因此不再能在 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上定义度量。因此，我们无法通过度量完备化来紧化 $\mathcal{M}_{g\,n,}^{\mathrm{hyp}}$ **(L)**。

问题 2.4. 推进对具有高锥角的双曲曲面模空间的理解。尚未解决的有趣问题包括：

(1) 验证 *Sauvaget* 对体积的定义与这些模空间的 *Weil–Petersson* 体积一致。
(2) 在 $\mathbf{L} \in i\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 的情形下，给出 $\mathcal{M}_{g\,n,}^{\mathrm{hyp}}(\mathbf{L})$ 的一个合适紧化，允许锥角为 $|L_j| > 2\pi$。进一步，给出 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的一个同胚代数紧化，或证明不存在这样的空间。

2.9. **大亏格渐近**。

2.9.1. 早期贡献。 多位作者的贡献证明了存在与 g 无关的常数 $0 < c < C$，使得对固定的 n，关于 g 渐近地

$$c^g(2g)! < V_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0}) < C^g(2g)!.$$

Penner [Pen92] 通过引入装饰 Teichm¨uller 空间以及对 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上顶次微分形式的积分方法，给出了 $V_{g\,1}^{\mathrm{Mirz}}$,**(0)** 的下渐近界的一个估计。Grushevsky [Gru01] 将此推广，得到了 $n \geq 1$ 情形下 $V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}$,**(0)** 的上渐近界。Schumacher 与 Trapani [ST01]借助交理论推广了 Penner 的下界，得到了 $n \geq 0$ 情形下 $V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}$,**(0)** 的下界。

–

2.9.2. 米尔扎哈尼–佐格拉夫展开。 基于数值数据，Zograf [Zog20]猜想了$V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}$,的精确渐近形式。随后，Mirzakhani [Mir13]证明了

$$\frac{V_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0})}{V_{g-1,n+2}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0})} \to 1$$

and

$$\frac{V_{g,n+1}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0})}{2gV_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0})} \to 4\pi^2$$

as $g \to \infty$。两位作者随后将 [MZ15], 结合起来，在这一猜想方面取得了重大进展，证明对于固定的 n， $V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}$,**(0)**存在关于 g倒数幂的完整渐近展开

$$V_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0}) = C_{\mathrm{univ}} \frac{(2g-3+n)!(4\pi^2)^{2g-3+n}}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{c_n^{(1)}}{g} + \cdots + \frac{c_n^{(k)}}{g^k} + O\left(\frac{1}{g^{k+1}}\right)\right)$$

其中 C_{univ} 普适常数被猜想为 $1/\sqrt{\pi}$ ，而 $c_n^{(k)}$是 n中的 $2k$ 次多项式，其系数可以有效计算。

更一般地， $V_{\mathrm{Mirz}g,\ n}$**(**L_1，……， L_n**)** 是关于 L_i^2 的多项式，而理解这些多项式的渐近性对于研究随机曲面至关重要。

2.9.3. 一阶近似。 Mirzakhani 和 佩特里 [MP19]证明了

$$\lim_{g\to\infty}\frac{V_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(L_1,\dots,L_n)}{V_{g,n}^{\mathrm{Mirz}}(\underline{0})}=\prod_{j=1}^{n}\frac{2\sinh(L_j/2)}{L_j}$$

并利用这一估计证明，闭测地线长度的计数函数收敛到一个泊松过程。最近，黄 [Hua25] 证明了木村 [Kim20] 的一个猜想：如果允许长度随 g增长，并且满足 $L_i=o(\sqrt{g})$，则同一公式在相差一个常数的意义下成立。

2.9.4. 高阶展开。 最近，阿南塔拉曼和蒙克 [AM22]扩展了 Mirzakhani 和佩特里的工作，证明$V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}(\mathbf{L})/V_{\mathrm{Mirz}g,n}(\mathbf{0})$存在完整的渐近展开，并给出了显式的二阶项。

2.9.5. 大 n 渐近性。 研究重点一直是大g情形下的渐近性；马宁和 Zograf [MZ00] 考察了$V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}(\mathbf{0})$的情形，而海德和托马斯 [HT25a]将其推广到了 $L_i\geq 0$，并推导出固定 g在大 n 情形下的渐近公式，同时建立了大 n 极限下 ψ-类交数的公式，其行为不同于大 g 情形。

2.9.6. 最优谱隙猜想。 拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱由离散特征值组成

$$0=\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots,$$

其中 λ_1 是第一个非零特征值，它控制着曲面的重要动力学性质，称为谱隙。

最优谱隙猜想 指出，对于任意 $\epsilon>0$，当 $g\to\infty$ 时， $\lambda_1\geq 1/4-\epsilon$ 的韦伊–彼得森概率趋于 1。

粗略地说，塞尔伯格迹公式将拉普拉斯–贝尔特拉米算子的特征值与双曲曲面上闭测地线的长度联系起来；而关于 λ_1 的韦伊–彼得森期望的渐近性问题，归结为理解体积 $V_{g\,n}^{\mathrm{Mirz}}(\mathbf{L})$ 的渐近性。

此外，吴–薛 [WX22] 和利普诺夫斯基–赖特 [LW24] 最近证明了 $3/16-\epsilon$ 的界，随后阿南塔拉曼和蒙克 [AM22] 将其改进为 $2/9-\epsilon$。体积多项式的展开使得能够计算几何函数的期望；这些计算需要高精度（当 N 较大时，精度需达到 $1/g^N$ 的量级），以用于谱界。

问题 2.5. 深入理解 *Mirzakhani* 多项式的高阶渐近性，以改进已知的谱隙界。

3. Masur–Veech volumes

本节将详细概述 Masur–Veech 体积的定义、计算方法及其各种推广。

3.1. **全纯微分分层**。 Masur–Veech 体积定义在黎曼曲面上的全纯微分模空间上（也称为阿贝尔微分）。因此，我们先回顾其几何性质。

令 $\mu=(m_1,\dots,m_n)$ 为 $2g-2$ 的一个整数分拆，其中 $m_i\geq 0$ 对所有 i均成立。给定亏格为 g 的光滑黎曼曲面 X 上一个非平凡全纯微分 ω，假设 ω 在 $z_1,\dots,z_n$ 处有 n 个互异零点，其中每个 z_i 都是阶为 m_i 的零点。那么我们称 ω 为 μ 型。

3.1.1. 带锥点的平移曲面。 全纯微分与带锥点的平移结构之间存在着引人入胜的相互作用。在 ω 的零点之外，我们可以局部选取一个解析坐标 u，使得 $\omega = du$。将 $u = x + \mathrm{i}y$ 视为欧几里得平面上的标准坐标时， ω 在 $X \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ 上诱导出一个平坦度量。如果 v 是另一个满足 $\omega = dv$ 的局部坐标，那么根据微积分基本定理， u 和 v 相差一个平移，而该平移保持诱导平坦度量不变。

在一个阶数为 m_i 的零点 z_i 处，可以找到一个局部坐标 w，使得 $\omega = w^{m_i} dw$。将其与邻近的表达式 $\omega = du$ 进行比较，我们得到 $w = u^{m_i+1}$，相差一个标量因子。因此，当沿着 z_i 绕行一周时，在由 du 诱导的平坦度量下，总角度为 2π（$m_i + 1$）。从这个意义上说， ω 在 X 上诱导出一个平移结构，其圆锥点位于 z_1、.....、 z_n，其中每个 z_i 处的锥角等于 2π（$m_i + 1$）。

3.1.2. 周期坐标。 令 $\mathcal{H}(\mu)$ 表示参数化 μ 类型微分（X， ω）的模空间。在 (X, ω) 附近，空间 $\mathcal{H}(\mu)$ 具有由相对上同调 $H^1(X, \{z_1, \ldots, z_n\}; \mathbb{Z})$ 给出的坐标系。更确切地说，设

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}; \gamma_{2g+1}, \ldots, \gamma_{2g+n-1}$$

构成相对同调 $H_1(X, \{z_1, \ldots, z_n\}; \mathbb{Z})$ 的一组基，其中前 $2g$ 条路径是闭合的，并张成绝对同调 $H_1(X; \mathbb{Z})$，其余每条路径 γ_{2g+i} 都连接 z_i 和 z_n，其中 $i = 1,\ldots, n-1$。于是

$$\int_{\gamma_1} \omega, \ldots, \int_{\gamma_{2g}} \omega; \int_{\gamma_{2g+1}} \omega, \ldots, \int_{\gamma_{2g+n-1}} \omega$$

为 $\mathcal{H}(\mu)$提供局部坐标，称为周期坐标。从由 ω 诱导的平移曲面结构的角度来看，改变这些周期坐标相当于改变围成平移曲面的平行边，同时保持奇点的数量和锥角不变，从而确定 $\mathcal{H}(\mu)$ 中 (X, ω) 的一个邻域。因此， $\mathcal{H}(\mu)$ 是一个维数为

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(m_1, \ldots, m_n) = 2g + n - 1,$$

请注意，轨形结构源于具有非平凡自同构的特殊 (X, ω)。

注意，对固定的 g，对所有分拆 μ， $\mathcal{H}(\mu)$ 的并集是亏格为 g 的黎曼曲面模空间 $\mathcal{M}_g$ 上全纯微分的霍奇丛 $\mathcal{H}_g$ （去掉零截面）。缩短连接两个阶数分别为 m_i 和 m_j 的零点的短周期，会使它们合并，从而在 $\mathcal{H}_g$ 上诱导出自然分层，其分层为 $\mathcal{H}(\mu)$；当且仅当 μ 可通过合并其各部分退化为 μ' 时， $\mathcal{H}(\mu)$ 才在其边界上包含 $\mathcal{H}(\mu')$。从这个意义上说， $\mathcal{H}(\mu)$ 称为类型为 μ 的全纯微分分层。

3.1.3. 全纯微分分层的连通分支。值得注意的是，对于某些μ，全纯微分分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 可能是不连通的。在一项开创性工作中，Kontsevich 和 Zorich 完整地分类了这些连通分支。

定理 3.1 （ [KZ03，定理 1 和 2]的简要版本。全纯微分的 μ 型分层$\mathcal{H}$（μ）至多有三个连通分支，额外的分支源于超椭圆结构和自旋结构。

例如，如果 μ 至少包含一个奇数项，且 $\mu \neq (g-1, g-1)$，那么 $\mathcal{H}(\mu)$是连通的。另一方面，当 $g \geq 4$ 时，极小分层 $\mathcal{H}(2g-2)$由三个连通分支组成： $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{hyp}}$、$\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{odd}}$和 $\mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{even}}$。对于$(X,\omega) \in \mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{hyp}}$，曲线 X 是超椭圆的，而 ω的唯一零点 z 是一个魏尔斯特拉斯点，也就是超椭圆二重覆盖的一个分歧点。对于$(X,\omega) \in \mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{odd}}$， X 是非超椭圆的，且$(g-1)z$ 是奇塞塔特征，也就是说， $h^0(X,(g-1)z) \equiv 1$（模 2）。对于$(X,\omega) \in \mathcal{H}(2g-2)^{\mathrm{even}}$， X 是非超椭圆的，且$(g-1)z$ 是偶塞塔特征，也就是说， $h^0(X,(g-1)z) \equiv 0$（模 2）。从现在起，提及微分的分层时，若该分层不连通，我们通常指其某个连通分支。

3.2. **Masur–Veech 体积：** $\mathcal{H}(\mu)$。 回顾上文引入的$\mathcal{H}(\mu)$的局部周期坐标。设 Z_1，……， Z_{2g+n-1}为 $H^1(X,\ \{z_1,\dots,z_n\};\ \mathbb{C})$的一组基，它由将 ω对 $H_1(X,\ \{z_1,\dots,z_n\};\ \mathbb{Z})$的一组基积分而诱导，其中 $Z_j = X_j + \mathrm{i}Y_j$。考虑标准勒贝格测度，

$$\nu = \prod_{j=1}^{2g+n-1} dX_j \wedge dY_j = \prod_{j=1}^{2g+n-1} \frac{\mathrm{i}}{2} dZ_j \wedge d\overline{Z}_j. \tag{19}$$

它与 $H_1(X,\ z_1,\ \dots,\ z_n;\ \mathbb{Z})$的基的选取无关，因为换基矩阵是行列式为 ± 1的整矩阵。

由于在 $\mathcal{H}(\mu)$中参数化的微分可以任意缩放，上述测度在整个空间 $\mathcal{H}(\mu)$上给出无穷体积。为了有可能得到有限体积，我们考虑“单位双曲面” $\mathcal{H}(\mu)^{\leq 1}$，用以参数化面积为 ≤ 1的平移曲面$(X,\ \omega)$，其中，

$$\mathrm{Area}(X,\omega) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int_X \omega \wedge \overline{\omega}.$$

我们随后将 $\mathcal{H}(\mu)$ 的*Masur–Veech* 体积 定义为

$$\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}(\mu) := \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(\mu) \cdot \int_{\mathcal{H}(\mu)^{\leq 1}} d\nu.$$

值得注意的是，即使我们将范围限制在 $\mathcal{H}(\mu)^{\leq 1}$ 面积有界的平移曲面轨迹上，该空间也并不紧，在接近分层边界时，原则上可能会出现不断增大的体积贡献。因此， $\mathcal{H}(\mu)^{\leq 1}$ 上的体积有限性先验而言并不明确。尽管如此，Masur和Veech分别独立地证明了以下有限性结果。

定理 3.2 ([Mas82, Veech82])。 $\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}(\mu)$ 对于所有全纯微分分层都是有限的。

因此，剩下的问题是计算 $\mathcal{H}(\mu)$ 的马苏尔–维希体积，并研究其数值性质。

3.3.**通过枚举方格铺砌曲面计算 Masur–Veech 体积**。方格铺砌曲面对应于全纯微分层中周期坐标下的整点。因此，它们的渐近增长率可以确定该分层的体积。

3.3.1. 方格铺砌曲面与环面的分歧覆盖。设 $(E,\ q)$ 是一个带有标记点 q的平坦环面，即一条复椭圆曲线，其平坦度量对应于一个处处不为零的全纯微分 dz。给定一个 $2g-2$的分拆$\mu=(m_1,\ \ldots,\ m_n)$，考虑次数为d的连通分支覆盖

$$\pi\colon X\to E$$

亏格为 g，使得 π 的唯一分支点是 q，且在q 上方的分歧类型为 μ，也就是说，

$$\pi^*(q)=(m_1+1)z_1+\cdots+(m_n+1)z_n+w_1+\cdots+w_{d-(2g-2+n)},$$

其中 z_i 和 w_j 互不相同。换句话说，π 的分歧点为z_1、……、z_n，且每个 z_i的分歧阶为 m_i。

请注意，这一设定满足黎曼–赫尔维茨公式。特别地，拉回微分 $\omega=\pi^*(dz)$在 z_1、……、z_n处有零点，其中每个 z_i都是阶为 m_i的零点。因此，$(X,\ \omega)\in\mathcal{H}(\mu)$。从平移曲面的角度来看，如果 E 是一个单位正方形平坦环面，且 q 位于正方形的一个顶点处，那么与 ω 相关联的平移曲面由 d 个单位正方形铺成 X，其中圆锥点 z_1、……、z_n出现在这些正方形铺块的某些顶点处，而 q 的非分歧原像点 w_j 则出现在其余顶点处。在这种情况下，$(X,\ \omega)$ 称为正方形铺砌曲面。正方形铺砌曲面的面积等于铺成该曲面的单位正方形数量，这也就是环面覆盖的次数。

以下结果表明，方格铺砌曲面对应于全纯微分分层中关于周期坐标的整点，因此在微分模空间和 Teichmüller 动力学的研究中发挥着基础性作用。

引理3.3 ([EO01，引理3。1])。设 (X,ω) 是类型为μ、由分层 $\mathcal{H}(\mu)$参数化的全纯微分。那么，(X,ω) 的每个周期坐标都属于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\mathrm{i}$，当且仅当$(X,\omega)$ 是方格铺砌曲面。

证明略。设 γ是 $H_1(X,\{z_1,\ldots,z_n\};\mathbb{Z})$ 中的一条路径。如果 (X,ω) 是方格铺砌曲面，那么

$$\int_\gamma\omega=\int_{\pi_*\gamma}dz.$$

注意，$\pi_*\gamma\in H_1(E,q;\mathbb{Z})$，其中 E是单位正方形环面。因此，$\int_\gamma\omega\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\mathrm{i}$。

反之，若对所有 $\gamma\in H_1(X,\{z_1,\ldots,z_n\};\mathbb{Z})$ 均有 $\int_\gamma\omega\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\mathrm{i}$，则

$$\pi(x)=\int_{x_0}^{x}\omega$$

定义了所需的覆盖映射 $\pi\colon\ X\to\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\mathrm{i}\cong E$，其中 $x_0\in X$ 是一个固定基点。□

3.3.2. 计数方格铺砌曲面的大次数渐近。令 $C_d(\mu)$ 表示 $\mathcal{H}(\mu)$中面积为 d 的方格铺砌曲面数，它等于次数为d 、具有一个分支点且分歧型为 μ的连通环面覆盖的 Hurwitz 数。由于 $\mathcal{H}(\mu)$是一个锥，且实数缩放 $t\omega$ 会使平坦曲面的面积乘以 t^2，因此 $\mathcal{H}(\mu)$的 Masur–Veech 体积为

由下式确定

$$\lim_{D\to\infty} D^{-\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}(\mu)}\sum_{d=1}^{D} C_d(\mu)$$

再乘以一个明确的体积归一化因子。

作为起点，Eskin 和 Okounkov 证明了生成函数

$$C(\mu)=\sum_{d=0}^{\infty} q^d C_d(\mu)$$

是变量 q 的拟模形式。他们进一步设计了一种精细的算法，利用 n-点函数和累积量提取 $C(\mu)$ 的首项系数。特别是，他们证明了以下引人注目的有理性结果，该结果最初由 Kontsevich 和 Zorich 猜想。

推论 3.4 ([EO01，注 6。8])。令 $\mathcal{H}(\mu)$ 为亏格 g 、类型为 μ 的全纯微分层。那么

$$\frac{1}{\pi^{2g}}\operatorname{Vol}\mathcal{H}(\mu)\in\mathbb{Q}.$$

在第 3.5 节中，我们将看到， π-因子中的指数 $2g$ 可以从交理论的角度得到解释。

3.4. 微分分层的紧化。 在任何模空间上进行交数计算之前，先决条件是对模空间进行紧化，使得紧化后的模空间具有几何上可理解的边界，用以参数化具有类似结构的退化元素。

由 $\mathcal{H}(\mu)$参数化的微分（X， ω）可以通过几种方式退化。首先，可以将 ω 缩放到任意大或任意小。通过研究参数化类型为 μ的典范除子的射影化分层，便可轻松解决这一问题：

$$\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)=\mathcal{H}(\mu)/\mathbb{C}^*,$$

这类似于从向量空间转到其射影化。更严重的是，如果我们对局部周期坐标作过大的变形，底层的平移曲面可能会改变其零点类型——例如，两个不同的零点相撞——甚至不再是光滑黎曼曲面；绝对周期收缩至零时就可能发生这种情况。为了解决这些问题，我们可以研究 Deligne–Mumford 稳定节曲线，其标记点对应于微分的零点。

3.4.1. 扭曲微分。 过去十年间，对微分分层进行紧化，已成为研究微分模空间与 Teichm¨uller 动力学的一项重大突破。一系列基于极限线性级数、对数几何和拼接方法的研究，都导向了同一类退化对象，称为扭曲微分。简言之，节曲线 Y 上的扭曲微分 由 (Y_i,η_i) 组成，其中每个 Y_i 都是 Y 的一个不可约分支，而 η_i是定义在 Y_i上的一个可能为亚纯的微分。在连接两个分支 Y_i 和 Y_j的每个节点处，微分 η_i 在一侧（例如 Y_i上）有一个零点，而 η_j 在另一侧有一个极点，使得零点和极点的阶数之和为 -2。这里我们为极点的阶数赋予负号，以强调它表示的是极点而不是零点。

为理解扭曲微分如何产生，考虑一族微分ω_t：它从光滑曲线 X_t 退化为节曲线 Y，当 $t \to 0$时发生这一退化。我们假设，将 ω_t的零点视为标记点后，它们收敛到 Y 上远离节点的光滑点；换言之，我们研究标记点对应于微分零点的稳定曲线。然而， ω_t 的极限可能在 Y的某个不可约分支上恒等于零，从而丢失该分支所承载的信息。为解决这一问题，在 Y的每个不可约分支Y_i 附近，我们可以写成

$$\omega_t = t^{\ell_{Y_i}} \eta_t,$$

其中 $\ell_{Y_i} \in \mathbb{N}$ 刻画了 ω_t 沿 Y_i的消失速率。等价地，扭曲极限

$$\eta_{Y_i} = \lim_{t \to 0} t^{-\ell_{Y_i}} \omega_t$$

是定义在 Y_i 上的非恒等于零微分。若 $\ell_{Y_i} > \ell_{Y_j}$，这一过程会在连接 Y_i 和 Y_j 的节点处，为 η_i 产生极点，并为 η_j 产生零点。它们的阶满足由局部坐标变换 $z_i z_j = t$ 导出的关系，即 $z_i^m dz_i \sim z_j^{-m-2} dz_j$（相差一个标量），因此 $m + (-m-2) = -2$。从平坦几何的角度看， Y_i 周围的子曲面比 Y_j 周围的子曲面收缩得更快，从而使 Y_j 显得更大——正如阶为 m 的零点的平坦邻域扩展为阶为 $-$ 的极点（$m+2$）。因此，比较这些扭曲指数 $-\ell_{Y_i} \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$ 会在 Y 的对偶图上诱导出一种层级结构，其中一条边的上端对应扭曲微分的阶为 m 的零点，下端对应阶为 $-$ 的极点（$m+2$）。

3.4.2. 全局留数条件与多尺度微分。 反过来，给定一个扭曲微分，我们可以问它能否变形到分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 的内部。事实证明存在一个障碍，称为**全局留数条件**。简而言之，设 $V = \{q_1, \ldots, q_k\}$ 是 Y 的垂直节点的一个子集，其最高阶极点的下端位于层级 $-\ell$，且移除 V 后会使Y断开，也就是说， V附近的消失圈 V_t 在 $H_1(X_t; \mathbb{Z})$ 中是平凡同调类。因此 $\int_{V_t} \omega_t = 0$，于是

$$\lim_{t \to 0} \int_{V_t} t^{-\ell} \omega_t = 0. \tag{20}$$

由于对于层级 $-\ell$ 上的每个分支 Y_i，$\lim_{t\to 0}(t^{-\ell}\omega_t)|_{Y_i} = \eta_{Y_i}$，由此可得 (20)

$$\sum_{q_j^- \in Y_i} \mathrm{Res}_{q_j^-} \eta_{Y_i} = 0,$$

其中 q_j^- 表示 q_j 的极点下端。

Bainbridge、Gendron、Grushevsky、M¨oller 和第一作者证明，类型为 μ 的扭曲微分可以平滑化为 $\mathcal{H}(\mu)$，当且仅当它满足全局留数条件；参见 [BCG+18]。满足此条件的扭曲微分称为多尺度微分，其模空间迄今为止给出了 $\mathcal{H}(\mu)$ 最全面（也最复杂）的紧化；参见 [BCG+24]。

3.4.3. 分层紧化概述。 根据研究动机和应用，已有多种相关紧化得到研究，它们引入了额外的边界分支，并对全局留数条件给出了不同的诠释。为避免偏离我们的主要目标，这里仅列举以下文献：关于不施加全局留数条件的紧化，以及从拼接、极限线性级数和对数几何的视角出发的研究，参见 [Gen18, Che17, FP18, Gu´e16, CC19b, CGH$^+$22]；关于在热带几何和 Berkovich 几何中，以及利用 Gorenstein 奇点对全局留数条件的诠释，参见 [MUW21, TT22, BB24, CC24]；关于对 k-微分分层的类似紧化，参见 [BCG$^+$19, CMZ24]；关于从平坦几何视角出发的非代数紧化，参见 [MW17, CW21]；关于分层中线性子簇的紧化，参见 [Ben23, BDG22]；关于比较其中若干种紧化的介绍性文章，参见 [Doz25]。

从现在起，我们将简记为 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$，即在 [BCG$^+$24]中构造的、类型为 μ 的多尺度微分紧化分层。 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 的边界由亏格更低且奇点阶更为特殊的微分组成，为递归进行交数计算提供了便利的框架。

3.5. **通过交理论计算 Masur–Veech 体积**。 正如向量空间的射影化一样，类型为 μ 的全纯微分射影化分层 $\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)$ 带有一个典范全纯线丛 $\mathcal{O}(-1)$，它在射影等价类 $[(X,\omega)]$ 上的纤维由 ω 张成。 $\mathcal{O}(-1)$ 的对偶丛记为 $\mathcal{O}(1)$，称为万有线丛。

3.5.1. 面积埃尔米特度量。 设 $(Z_i, Z_{g+i})_{i=1}^g$ 是通过沿着$H_1(X;\mathbb{Z})$ 的一组辛基对 ω 积分而得到的绝对周期坐标空间的一组基。根据黎曼双线性关系，平移曲面 (X,ω) 的面积可表示如下：

$$\begin{aligned}\operatorname{Area}(X,\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_X \omega\wedge\overline{\omega}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{g}(Z_i\overline{Z}_{g+i} - \overline{Z}_i Z_{g+i}).\end{aligned}$$

由于面积泛函为正，它在丛 $\mathcal{O}(-1)$ 上诱导出一个奇异厄米度量 h。根据陈–韦伊理论，曲率 (1,1)-形式

$$\varpi = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\partial\overline{\partial}\log h$$

表示万有线丛的第一陈类，记作

$$\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{H}(\mu)}(1)).$$

注意， ϖ^{2g-1} 捕捉了 Masur–Veech 体积形式 (19) 中绝对周期的分量；由于采用射影化设置，指数取 $2g-1$，而非 $2g$。特别地，对于极小分层 $\mathbb{P}\mathcal{H}(2g-2)$，我们可以预期，其 Masur–Veech 体积由最高自交数 ξ^{2g-1} 决定，体积中相差一个明确的归一化因子。

然而，要使上述想法严谨成立，一个障碍是证明由面积形式诱导的厄米度量在延拓到紧化分层的边界时仍然良好，从而相应的曲率形式仍表示 ξ。Costantini、M¨oller 后来通过技术论证解决了这一技术问题，

Zachhuber 利用多尺度紧化进行显式坐标计算，Nguyen 则从霍奇结构变分的角度更一般地处理了这一问题；参见 [CMZ24、Ngu25]。

3.5.2. 作为交数的 *Masur–Veech* 体积。 除去延拓至边界的问题，Sauvaget 建立了以下关于极小分层的 Masur–Veech 体积的交理论公式。

命题 3.5 ([Sau18, 命题 1.3])。 对于 $g \geq 1$，我们有

$$\operatorname{Vol}\mathcal{H}(2g-2) = \frac{2(2\pi\mathrm{i})^{2g}}{(2g-1)!}\int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(2g-2)} \xi^{2g-1}.$$

值得注意的是，面积形式无法捕捉连接 ω 的两个不同零点的相对周期的变化。因此，要建立含有多个零点的全纯微分分层的 Masur–Veech 体积的交理论公式，除了 ξ^{2g-1} 之外，我们还必须利用能够记录零点相对位置的其他除子类。正如 Witten 猜想中所见，与作为标记点的 ω 的零点 z_i 相关联的 ψ-类 ψ_i 是这一用途的自然候选。事实上，M¨oller、Sauvaget、Zagier 和第一作者建立了以下一般公式。

定理 3.6 ([CMSZ20，定理 1.1])**.** 对于任意具有特征 $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ 的全纯微分分层，我们有

$$\operatorname{Vol}\mathcal{H}(\mu) = \frac{2(2\pi\mathrm{i})^{2g}}{(2g-3+n)!}\int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}(\mu)} \frac{1}{m_i+1}\xi^{2g-1}\psi_1\cdots\widehat{\psi_i}\cdots\psi_n \tag{21}$$

对所有 $1 \leq i \leq n$。

在详细阐述 (21) 的证明之前，我们先作几点观察。首先，由于这些除子类是 $\mathbb{Q}$-Cartier 的，它们的交数是有理的。因此，上述公式为有理性结果提供了另一种解释

$$\frac{1}{\pi^{2g}}\operatorname{Vol}\mathcal{H}(\mu) \in \mathbb{Q},$$

该结果最初由 Eskin 和 Okounkov 通过枚举方格铺砌曲面证明，如推论 3.4 中所回顾。

其次，对于 (21) 中的 ψ-类乘积，省略 ψ_i 相当于除以 m_i+1。这些选择之所以得到相同的值，本质上是因为除子类关系

$$(m_i+1)\psi_i \sim (m_j+1)\psi_j$$

模去紧化分层的边界除子类；见 [Che19，命题 2.1 (i)]。这些关系在直观上是合理的，因为 ω 可以局部表示为 $d(z_i^{m_i+1})$，而 ψ_i-丛对应于在每个标记零点 z_i 处由 dz_i 生成的余切空间。

3.5.3. 探寻 ψ的平坦几何意义。为证明（21），一个自然的想法是在每个 ψ_i-丛上寻找一个厄米度量，并证明它们的曲率形式之积捕捉到了 Masur–Veech 体积形式（19）中相对周期的分量。遗憾的是，这一方法至今尚未成功实现。相反， [CMSZ20] 中的证明采用了一种相当间接的方式：作者证明，（21）右侧的交数满足某些递归关系，而这些关系对由计数平方平移曲面的高次数渐近性得到的 Masur–Veech

体积也成立。由于这两类量在极小分层 $\mathcal{H}(2g-2)$ 上相等（如命题 3.5 所示），因此这两组量——Masur–Veech 体积和（21）中的交数——在所有分层 $\mathcal{H}(\mu)$上都相等。我们将本次讨论中的未决问题总结如下。

问题 3.7. 令 ψ_i 表示与 $\mathcal{H}(\mu)$中微分的第 i 个零点相关联的 ψ 丛。构造丛 ψ_i 上的厄米度量，使其曲率形式的乘积对应于 ***Masur–Veech***体积形式 (19)中的相对周期分量。

此外，研究这些厄米度量向多尺度紧化边界的延拓。因此，推导一个直接证明交理论公式 (21) 的方法，用以计算 $\mathcal{H}(\mu)$的 ***Masur–Veech*** 体积。

3.5.4. ***Masur–Veech*** 体积的大亏格渐近。 基于数值实验，Eskin 和 Zorich 对全纯微分分层的 Masur–Veech 体积大亏格渐近性提出了精确的猜想性描述。利用通过交数表示的体积递推，M¨oller、Sauvaget、Zagier 和第一作者证明了这一猜想；与此同时，Aggarwal 则通过对 Eskin 和 Okounkov 开发的算法进行精细的组合分析，给出了另一种证明。

定理 3.8 （ [EZ15，主要猜想 1], [Agg20，定理 1$4$], [CMSZ20，定理 1的简明版本）。全纯微分分层的 ***Masur–Veech*** 体积的大亏格渐近满足

$$\lim_{g\to\infty}(m_1+1)\cdots(m_n+1)\mathrm{Vol}\,\mathcal{H}(m_1,\ldots,m_n)=4.$$

我们指出，对于主分层和极小分层这两个特殊情形，其 Masur–Veech 体积的大亏格渐近性早先已分别由[CMZ18] 和 [Sau18], 确立。此外，在 [Sau21], 中，Sauvaget 证明了这些体积存在完全渐近展开，且该展开仅取决于亏格和奇点的数量。

当分层因超椭圆或自旋结构而不连通时，也可以应用上述思路和方法研究每个单独连通分支的 Masur–Veech 体积；例如参见 [EOP08，CMSZ20]。值得注意的是，就大亏格体积渐近性而言，自旋分支在数值上的表现与连通分层相似，而超椭圆分支则大不相同；例如参见 [EZ15，第 484]页。事实上，由于超椭圆二重覆盖，超椭圆分支的 Masur–Veech 体积及其他几何不变量通常可以对所有亏格显式计算，因为这会将问题归结为研究黎曼球面上的二次微分分层；详见下文小节。

3.6. **二次微分，** k**-微分、锥度量和亚纯微分**。本节将讨论从全纯微分推广到其他一些类似结构的若干一般化。

3.6.1. k-微分和 $(1/k)$-平移曲面。 在光滑复曲线X上， k-微分 ζ 是 X的典范丛的 k次幂的一个截面。微分一形式的许多性质自然地推广到更高阶的 k-微分

上。例如， k-微分 ζ 确定一种$(1/k)$-平移结构，允许进行平移以及按 $2\pi/k$的整数倍角度旋转。在诱导平坦度量下， ζ 的一个阶数为 m 的奇点具有 $2\pi(m+k)/k$的锥角。注意，只要 $m > -k$，这个角度就是良定义的。因此，令 ν 为 $k(2g-2)$的一个整数分拆，其各项都大于 $-k$。用$\mathcal{H}^k(\nu)$表示 k-微分的分层，它参数化类型为 ν 的配对(X, ζ)，其对应的$(1/k)$-平移曲面具有有限面积。

回到微分一形式，存在一个典范循环覆盖$\pi\colon\ \widehat{X} \to X$ ，其次数为 k ，满足 $\pi^*\zeta = \omega^k$；其中 ω 是由 ν确定的 X 上的$\widehat{\ }$型全纯一形式，并且在 π的覆盖变换作用下，是一个本原 k次单位根对应的特征向量。因此，除去 k次单位根的选择，可以将 $\mathcal{H}^k$（ν）提升为全纯一形式$\mathcal{H}$（μ）对应分层中的一个子簇，其中$\mathcal{H}$（μ）中的相应周期坐标特征子空间为$\mathcal{H}^k$（ν）提供局部坐标。例如，当 $k = 2$时，这些就是典范双覆盖下的反不变周期。关于 k-微分的分层及其紧化的详细介绍，请参阅 [BCG$^+$19] 。

我们指出，由于缺少 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用以及相应的垂直流分解，$(1/k)$-平移曲面上的 k-微分分层的连通分支分类对于 $k \geq 3$ 仍基本未解决；这与 $k = 1, 2$ 的情形形成对比。关于部分结果及相关讨论，参见 [CG22] 。

3.6.2. 二次微分层的 *Masur–Veech* 体积。如前所述，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用仅在 $k = 1, 2$ 时才在 k-微分分层上定义良好。因此，除了一形式的情形外，唯一的其他情况是二次微分，其分层记作 $\mathcal{Q}(\nu)$。与一形式的情形一样，二次微分分层也可能不连通；关于其连通分支的分类，参见[Lan08、CM14、CG22]。

如上所述，我们允许二次微分具有简单极点，这对应于等于 π 的锥角，而由此得到的半平移曲面仍具有有限面积。由于典范双覆盖诱导的对合保持格 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathrm{i} \subset \mathbb{C}$，相对上同调$H^1(\widehat{X}, \{\widehat{z}_i\}; \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\mathrm{i})$ 的反不变部分在 $H^1(\widehat{X}, \{\widehat{z}_i\}; \mathbb{C})$ 中张成一个格。我们可以将此格归一化为余体积为一，从而在 $\mathcal{Q}(\nu)$ 上定义一个 Masur–Veech 体积形式。当限制到面积不超过 $1/2$ 的半平移曲面所构成的双曲面 $\mathcal{Q}(\nu)^{\leq \frac{1}{2}}$ 时，Masur 和 Veech 的有限性定理（如定理 3.2 所述）仍然成立，因此为分层 $\mathcal{Q}(\nu)$ 定义了有限的 Masur–Veech 体积。

与方格铺砌曲面类似，二次微分分层 $\mathcal{Q}(\nu)$ 中的整点对应于枕套覆盖，即在 $\mathbb{CP}^1$ 四个点处分支的覆盖。例如，$\mathbb{CP}^1$ 上具有四个简单极点的二次微分，可以通过沿中线折叠一个 2×1 矩形，使左右两侧的正方形相互识别，从而形成一个枕套。与他们关于阿贝尔微分的结果相呼应，Eskin 和 Okounkov [EO06]证明了枕套覆盖的生成函数也是拟模的，并由此给出了计算 $\mathcal{Q}(\nu)$ 体积的理论算法。沿着这一研究方向，Goujard [Gou16]计算了维数不超过 10 的二次微分分层的 Masur–Veech 体积显式值。Kontsevich 早先猜想的亏格 0 分层体积显式公式，后来由 Athreya、Eskin 和 Zorich [AEZ16, 定理 1.1]利用亏格 0 中面积 Siegel–Veech 常数的值证明

这些值来自 Eskin、Kontsevich 和 Zorich 的研究 [EKZ14, 定理 3],; 该定理将这些不变量与 Teichm¨uller 测地线流下的李雅普诺夫指数之和联系起来。

尽管取得了这些进展，枕套覆盖的渐近分析比方格铺砌曲面的渐近分析复杂得多。因此，尽管人们预期类似的相交论体积公式对所有二次微分层都成立（见 [CMS23，猜想 1.1]），但在这一情形下，定理 3.6 的间接证明尚未得到充分发展。只有在所有周期都是绝对的特殊情形下——也就是说，当二次微分的所有奇点阶都是奇数时——面积埃尔米特度量方法仍然适用；M¨oller、Sauvaget 和第一作者已在 [CMS23，定理 1.2]中证明了这一点。

由带有单零点和极点的二次微分构成的主层 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$ 在所有二次微分层中占据特殊地位，因为它可识别为 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的余切丛的一个开子集。基于此，研究者发展了若干不同方法来计算 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$ 的马苏尔–维希体积，并研究其在大 g 和 n时的渐近行为。关于拓扑递归的观点，见[ABC$^+$23] 和 [CMS23，附录]; 关于以 ψ-类相交数表示的公式（这些相交数也出现在魏尔–彼得森体积的计算中），见[DGZZ21]; 关于体积渐近，见 [CMS23、YZZ20、Kaz22、Agg21]。尤其是，Aggarwal 在 [Agg21，定理 1.7] 中证明了 $\mathcal{Q}(1^{4g-4+n}, -1^n)$ 的体积的大亏格极限，正如 [ADG$^+$20]最初猜想的那样。

值得注意的是， [ADG$^+$20] 对其他二次微分层的 Masur–Veech 体积的大亏格极限给出了猜想性描述，这些问题在很大程度上仍未解决。即便对于仅含奇数阶奇点的二次微分层，[CMS23, Theorem 1.2] 中其体积的交理论公式也无法递归求值，因为沿边界某些奇数阶奇点可能合并而形成偶数阶奇点。最近，Duryev、Goujard 与 Yakovlev [DGY25] 通过计数出现在 Kontsevich 对维滕猜想的证明中的带状图，将某些仅含奇数阶奇点的二次微分完备化层的体积表示为稳定图上的求和。这些完备化层包含一些超出纯奇数阶情形的相邻层，仍需予以剔除。

我们如下总结与二次微分层的 Masur–Veech 体积相关的若干未决问题。

问题 3.9. 证明 [CMS23，猜想1.1]中提出的猜想公式，用以通过交理论计算二次微分层的 *Masur–Veech* 体积。

进而，推导枕套覆盖的渐近性及相关交数的递推关系，并比较它们的结构。

此外，按照 [ADG$^+$20，猜想 1]中的预测，建立二次微分层的 *Masur–Veech* 体积的大亏格渐近。

3.6.3. 分层的体积 k-微分。现在，考虑 $k \geq 3$ 的 k-微分分层。在这种情况下，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用与角度为 $2\pi/k$ 的旋转不交换。此外，典范 k-覆盖上的 k 次根阿贝尔微分，以及 $\mathcal{H}^k(\mu)$ 的相应周期坐标，都取决于原始 k 次单位根的选择。因此，即使要定义 $\mathcal{H}^k(\mu)$ 的 Masur–Veech 体积形式，也需要额外的工作。Nguyen 证明了 $\mathcal{H}^k(\mu)$ 带有一种体积

形式，该形式在 $\mathbb{P}\mathcal{H}^k(\mu)$ 上诱导有限总体积，其定义依赖于所选的原始 k 次单位根 ζ_k；参见 [Ngu22，定理 1.1]。他还说明了当 ζ_k 的选择改变时，这种体积形式如何变化；特别是，当 $k = 3$，4，6 时，它与选择无关；参见 [Ngu22，注 5.5]。

或者，对于 $k = 3$、4、6 这几种情形，Engel [Eng21] 研究了与某些六边形、正方形和三角形镶嵌相对应的椭圆轨形覆盖。与 $k = 1$、2 这些情形类似，相关 Hurwitz 数的大次数渐近性提供了一种算法，可用于计算三次、四次和六次微分分层的 Masur–Veech 体积。关于这些体积形式的比较，参见 [Ngu22, Section 5.2]；相关研究参见 [KN21] 。

3.6.4. 带锥度量的平坦曲面模空间的体积。对于亏格为零的球面上的平坦锥度量，这方面的研究尤为丰富；这里的锥度量是指局部等距于平坦锥的开子集的度量，例如由欧几里得三角形对球面进行三角剖分。请注意，一般而言，配备锥度量的曲面未必对应于某个微分形式，因为过渡函数不一定是平移，也不一定是角度为 π 的有理倍数的旋转。尽管如此，计算相关模空间的体积仍是一个活跃的研究课题，其研究也与 Weil–Petersson 体积的双曲几何方面相联系；例如参见 [Thu98, McM17, ES18, KN18, Ngu24]；另请参见 [KT99] ，其中从空间多边形模空间的角度对此作了相关讨论。

对于一般亏格 g，令 $\mathcal{M}(a)$ 表示锥角（模 2π）由 $a = (a_1, \dots, a_n)$ 所指定、且满足 $a_i \in \mathbb{R}^+$ 和 $\sum_{i=1}^n a_i = 2g - 2 + n$ 的锥度量模空间。每个 $\mathcal{M}(a)$ 均微分同胚于 $\mathcal{M}_{g,n}$，如 Troyanov[Tro86] 所示。Veech [Vee93]引入了局部坐标系，并在 $\mathcal{M}(a)$ 上构造了一个测度。如第 2.8 节所述，在最近的一项工作中，Sauvaget [Sau24b]发现了一个有理分段多项式；在相差一个显式归一化因子的意义下，它对所有不含整数坐标的有理向量 a 确定了 $\mathcal{M}(a)$ 的体积。此外，该归一化体积公式可连续延拓，并被猜想对所有 a 都能计算 $\mathcal{M}(a)$ 的体积。

Sauvaget 方法的一个关键洞见，在于对无整数奇点的 k-微分分层之 Masur–Veech 体积的显式递推关系，以及对它们在 $k \to \infty$ 时体积渐近的研究。在此情形下，由 k-微分诱导的度量表现得如同所有锥度量模空间中的有理点，而大 k 渐近性则类似于用大分母的有理数来逼近实数。正如 Sauvaget 所指出的，要完全解决他的猜想，模空间 $\mathcal{M}(a)$ 的一种紧化——类似于 [BCG+18、BCG+19、BCG+24、CMZ24] 中微分分层的多尺度紧化——将起到至关重要的作用；关于一亏格情形的相关讨论，参见 [GP17、GP20] ；然而，对一般的 g，文献中仍缺少这样的构造。

3.6.5. 探寻亚纯微分分层的体积。最后，考虑亚纯微分分层，它们对应于具有无限面积的平移曲面。在这种情况下，分层内不存在面积有界的亚纯微分双曲面，因此 Masur–Veech 体积形式如何定义仍不清楚。相比之下，亚纯微分分层仍可构造多尺度紧化，且所有典范除子

类及其交数都有明确的定义。特别是，Sauvaget [Sau25] 利用式（21）中的交数，为仅含简单极点的亚纯微分分层定义了虚拟体积，并证明这些虚拟体积满足类似于全纯情形的性质。一般而言，探究任意极点阶数的亚纯微分分层中这些交数的平坦几何解释是有意义的，例如，确定其中哪些可能对应于类体积不变量。

我们总结一下 上述提及的开放问题如下。 流

问题 3.10。对于一般的 k-微分分层和锥度量，证明 [Sau24b，猜想 1。6] 中提出的用于计算其 *Masur–Veech* 体积的交理论公式猜想，并分析其大亏格渐近性。

此外，对于亚纯微分分层，定义一个有意义的体积形式，并识别由典范除子类产生的交数的平坦几何解释，类似于全纯微分情形中体积–相交公式里出现的那些解释。

3.7. **线性子簇与西格尔–韦奇常数**。Eskin、Mirzakhani 和 Mohammadi 的一项突破性成果证明，全纯微分分层中的每个 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道闭包，局部都由周期坐标中的线性方程定义；Filip 后来证明这些方程的系数是代数数；参见 [EMM15, EM18, Fil16]。因此，这些轨道闭包也称为线性子簇。

3.7.1. 线性子簇的 *Masur–Veech* 体积。只要在线性子簇的周期坐标子空间中，“单位立方体”元素有明确定义——例如，当定义该子簇的线性方程是在 $\mathbb{Q}$上定义时——我们便可以像之前一样定义其 Masur–Veech 体积。这类例子包括由方格铺砌曲面生成的算术 Teichmüller 曲线、通过典范双覆盖提升至相应阿贝尔微分分层的二次微分分层，以及近期发现的若干全测地子簇；参见 [MMW17, EMMW20]。

对于算术 Teichm¨uller 曲线，其体积可由同一 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-轨道中方格铺砌曲面的数量确定；这一数量对应于方形环面上具有一个分支点且分歧型预先给定的分支覆盖的 Hurwitz 数。这里有一个微妙之处：相关 Hurwitz 空间的连通分支分类仍大多悬而未决，即便在亏格二的情形下也是如此。换言之，一个给定的 Hurwitz 数可能对应于若干条不同算术 Teichm¨uller 曲线的总体积。关于亏格二算术 Teichm¨uller 曲线的连通分支，详尽讨论请参见 [Dur24] 。至于哥特轨迹，这一在 [MMW17]，中发现的全测地子簇，其 Masur–Veech 体积是在 [TT20]，中计算的，该计算以 [MTT20] 中关于包含于哥特轨迹的 Teichm¨uller 曲线欧拉示性数的公式为基础。

如果线性子簇在局部仅由绝对周期生成，则称为*REL* 零。此类例子包括极小分层 $\mathcal{H}(2g-2)$、具有奇数阶奇点的二次微分层，以及哥特轨迹。在这种情况下，如第 3.5 节所述，典范丛 $\mathcal{O}(-1)$ 上由面积形式诱导的厄米度量定义了一个体积形式，因此

$\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$ 在紧化线性子簇上的最高自交数给出了相应的体积。Nguyen [Ngu25] 证明了这一方法适用于任意 REL 零线性子簇。对于 Teichm¨uller 曲线，ξ 的次数对应于其欧拉示性数；参见 [CM12，公式 (15)]。对于哥特轨迹，ξ 的最高自交数由 [Che22]，计算，这也确定了其 Masur–Veech 体积（相差一个归一化因子）。

问题 3.11. 为全纯微分分层中的 *REL* 非零线性子簇建立一种 *Masur–Veech* 体积的概念，并说明它与(21)中出现的交数类型有何关联。

3.7.2. 平坦曲面上的测地线计数。 与 Masur–Veech 体积并存的另一类不变量是西格尔–韦奇常数。粗略地说，它们描述了当长度趋于无穷时，平坦曲面上某些与测地线相关的结构数量的二次增长率。例如，连接两个指定零点且长度小于 L 的鞍连接的数量 $N(L)$ 关于 L 呈二次增长：

$$N(L) \sim cL^2$$

其首项系数（相差一个归一化因子）定义了这类鞍连接的西格尔–韦奇常数。除了鞍连接，还可以统计长度小于 L的闭测地线，或由闭测地线填充的圆柱，并按其高宽比加权。二次增长现象可通过一个简单例子轻松说明：统计连接整数格点与原点、长度小于 L 的线段数量；这相当于统计单位正方形环面上连接一个标记点与其自身且长度有界的鞍连接数量。一般而言，Eskin 和 Masur [EM01] 系统地研究了这种二次渐近行为。

Siegel–Veech 常数的计算与 Masur–Veech 体积的计算一样，既深奥又复杂。为避免本篇论述过于冗长，我们简要概述二者之间的关系。将 Siegel–Veech 常数定义中所计数的结构逐渐缩小——例如，使由鞍连接相连的零点合并，或将圆柱的核心曲线捏缩——便会趋近微分模空间的某些边界分层。这些边界邻域的体积除以模空间的总体积，再乘以计数问题所产生的组合因子，就能得到以 Masur–Veech 体积表示 Siegel–Veech 常数的递归公式。Eskin、Masur 和 Zorich 的工作 [EMZ03]，对此方法作了详细阐述，并将相应的边界分层称为主边界。此后，该方法广泛应用于阿贝尔微分和二次微分的 Siegel–Veech 常数计算，以及相应模空间紧化的几何研究；参见 [BG15, Gou15, AEZ16, CC19a, CGM25]。

3.7.3. 面积 *Siegel–Veech* 常数作为交数。在所有西格尔–韦奇常数中，面积 西格尔–韦奇常数 c_{area}——它对长度有界的圆柱进行计数，并以其模数（即高除以宽）加权——从交理论的角度来看尤其重要。直观而言，当将圆柱的核心曲线捏缩成一个节点时，所得节点的局部类型

由圆柱模数编码，这类似于按适当的重数计算交数。

面积 Siegel–Veech 常数的一个显著特点，是 Eskin、Kontsevich 和 Zorich 的这一卓越公式 [EKZ14, 定理 1]，它将面积 Siegel–Veech 常数 c_{area} 与李雅普诺夫指数之和 L 联系起来，适用于阿贝尔微分类型为 μ、位于分层 $\mathcal{H}(\mu)$ 中的任意线性子簇 $\mathcal{M}$：

$$L(\mathcal{M}) = \frac{\pi^2}{3} \cdot c_{\mathrm{area}}(\mathcal{M}) + \kappa_\mu,$$

其中 $\kappa_\mu = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{(m_i+2)\,m_i+1}$ 是由零点类型 $\mu = (m_1, \ldots, m_n)$确定的常数。这个公式在代数几何中的体现是 Mumford 关系（也称为诺特公式）：

$$\lambda = \frac{\delta + \kappa}{12},$$

其中 λ 是霍奇丛在 $\mathcal{M}_g$上的第一陈类，δ 是边界除子类，而 κ 是第一 Miller–Morita–Mumford 类；参见 [Mum77, p. 102]。

这两种公式之间的对应关系可以直观地理解如下。在霍奇丛于 Teichm¨uller 测地流下分裂为不变子丛的特殊情形中，每个不变子丛都对相应的李雅普诺夫指数有所贡献，因此它们的和对应于整个霍奇丛的第一陈类。此外，捏缩每个圆柱的核心曲线会产生一个由$\mathcal{M}_g$的边界参数化的结点曲面。最后，常数 κ_μ 自然地来源于类型为 μ 的微分模空间上的重言除子类关系。这一对应关系可以在 Teichm¨uller 曲线的情形下得到严格论证，这也与对其斜率的研究相关联；参见 [CM12, CM14]。因此，建立一种能够计算所有线性子簇的面积 Siegel–Veech 常数的交理论公式将是有意义的。

事实上，这样的公式在 [Kon97 的主定理]中针对全纯微分分层被推测，并在 [CMS23 的猜想 4.3] 中对所有线性子簇被明确猜想如下：

$$c_{\mathrm{area}}(\mathcal{M}) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{M}}} \xi^{a-2}\psi_1 \cdots \psi_r \delta}{\int_{\mathbb{P}\overline{\mathcal{M}}} \xi^{a-1}\psi_1 \cdots \psi_r}, \tag{22}$$

其中，a 是 $\mathcal{M}$的绝对周期空间的秩，r 是（严格）相对周期空间的秩，δ 表示多尺度紧化 $\mathbb{P}\mathcal{M}$的边界除子，ξ是泛线丛类，而 ψ_1，……，ψ_r 是与标记零点相关的 ψ类，其变化生成了 $\mathcal{M}$的相对周期空间。注意，猜想公式中的分母与（21）中计算 Masur–Veech 体积的交理论表达式形式相同。这是自然的，因为分子度量了将圆柱的核心曲线捏缩至边界交点所得到的总贡献，而除以线性子簇的总体积后，便得到平均量。此外，面积 Siegel–Veech 常数是针对 $\mathcal{M}$内禀定义的，不依赖于其体积归一化的选择；（22）中的表达式亦然，因为任何此类归一化都会在分子和分母之间相互抵消。

除了 Teichmüller 曲线外，猜想公式 (22) 也已知适用于阿贝尔微分的分层 [Sau18, CMSZ20、主分层 25], ，以及

二次微分层 [CMS23], 、哥特轨迹 [Che22], ，以及所有 REL 零的线性子簇 [CGM25], ；后者尤其包括具有奇数阶奇点的二次微分层。然而，当一个线性子簇允许自由相对周期时，猜想公式一般仍未得到证明。

值得注意的是，(22) 中的曲线类 $\xi^{a-2}\psi_1\cdots\psi_r$ 预计代表 Kontsevich 猜想中的微分形式 β，而一般情况下 β 是否为有理上同调类仍是未知的。另一方面，β 似乎类似于大次数算术 Teichm¨uller 曲线数值类经过适当归一化后的 “ 极限 ”。例如，若已知 $\mathbb{P}\mathcal{M}$ 的有理皮卡群（然而，即使对于微分分层，这个问题仍大多未解），那么比较 Teichm¨uller 曲线与 β 类和内部及边界除子类的交数，或许能够得到它们之间的比例关系。

我们将这些问题概述如下。

问题 3.12。 研究 *REL* 非零线性子簇的主边界，并推导一个递推关系，以体积和交数表示其面积 *Siegel–Veech* 常数。

或者，可以通过除子类的交数以及 *Teichm¨uller* 曲线的大次数极限，为 *Kontsevich* 的 β 类提供论证。

无论采用哪种方法，都要在完全一般的情形下确立猜想公式(22) 。

3.7.4. 西格尔–韦奇常数的变体。 最后，还可以考虑以圆柱面积的不同幂次加权的西格尔–韦奇常数，以及这些常数在覆盖构造下的表现；参见 [ACM+26]。也可以研究平移曲面以外的平坦曲面的西格尔–韦伊型不变量。对于具有 $k \geq 3$ 的（$1/k$）-平移曲面（即 k-微分），由于不存在 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用，关于圆柱和鞍连接西格尔–韦伊常数，只在 Ces`aro 均值意义下建立了某些较弱的二次渐近，见 [Ayg25] 。对于锥角为 π 的无理倍数的锥面球， [Fu25]针对鞍连接和闭测地线提出了经典西格尔–韦伊公式的推广。对于具有极点的亚纯微分（即无限面积的平移曲面），尽管 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-作用在亚纯微分分层上定义良好，但通常并非遍历；见 [Boi15, Appendix A]。相比之下，亚纯微分分层具有墙室分解，其中圆柱和鞍连-接的计数预计满足 Kontsevich 和 Soibelman 的墙穿越公式[KS08], ；对此的研究与布里奇兰稳定性条件、BPS 不变量和唐纳森–托马斯理论密切相关。关于这一快速发展的领域，我们仅作不完整的概述，并请读者参阅 [GMN13, BS15, HKK17, All23, KW24, HM25], 了解众多代表性成果。对于高维情形，K3 曲面是平坦环面的推广，也具有有趣的几何不变量，其行为类似于平坦曲面的西格尔–韦奇常数和李雅普诺夫指数；见[Fil18, Fil20, AFL23]。

我们将上述讨论的现象归纳为以下一个较为模糊、但从长远来看颇具意义的问题。

问题 3.13。 比较全纯微分、亚纯微分、 k-微分以及配备锥度量的曲面中的 *Siegel–Veech* 型不变计数结构，以及它们的高维类比。

探究它们内在的联系，并考察它们是否与其他经典枚举理论（如格罗莫夫–维滕理论、唐纳森–托马斯理论和镜像对称）呈现结构上的类比。

4. Common themes of both volumes

我们以总结韦伊–彼得森体积和马苏尔–维希体积研究中的若干共同特征，为这篇综述作结。

首先，度量和锥角的输入，以及体积表达式和将测地线计数为交数，这些方面都清楚地体现了两种体积之间的显著相似性。尤其是，由类 κ_1 表示的魏尔–彼得森度量，以及与平坦曲面面积相关、由类 ξ 表示的厄米度量，揭示了一种内在的几何思想；在两种情形下，计算体积时都会通过交数运用这一思想。

此外， ψ-类也出现在两种体积的计算中。在双曲曲面上，作为一个 S^1-丛，每个 ψ-类都可以解释为相应尖点周围的双曲测地边界。在平坦曲面上，粗略地说（见问题 3.7），每个 ψ-类都记录了相应圆锥点的变化。

与这两种体积密切相关的背景是 Kontsevich 对维滕猜想的证明（见 [Kon92]）：在相应的平坦度量下， ψ-类表现为围绕施特雷贝尔微分（一种特殊的二次微分）双极点的多边形边界；另见 [Mon11] ，其中阐述了双曲视角与平坦视角之间的衔接如何产生带状图，而带状图是 Kontsevich 证明维滕猜想的关键结构。

此外，Pandharipande 和 Okounkov 给出的维滕猜想另一种证明（见 [OP09]）关键地运用了从 $\mathbb{P}^1$出发的分支覆盖的 Hurwitz 数；而从环面出发的分支覆盖的 Hurwitz 数，则统计了全纯微分分层中的格点，其大次数渐近性决定了 Masur–Veech 体积。

最后，如前所述，Sauvaget [Sau24a] 最近为解决锥角大于 2π时计算韦伊–彼得森体积这一未决问题提出了创新思路：他将这些模空间的体积定义为 $k \to \infty$趋于k时，{v}-微分模空间的 Masur–Veech 体积的极限。

回顾一下，在黎曼曲面上，具有 $> -k$ 阶零点或极点的 k-微分会在该曲面上给出一个有限面积的平坦度量，并在 $m > -k$ 阶零点或极点处产生角度为 $2\pi($ $\frac{m}{k}+1)$ 的锥奇点。直观来说，固定 n 个点处的锥角，并考虑在这些点之外具有单零点的 k-微分，这些单零点便形成小型的负曲率集中；随着 $k \to \infty$ 均匀分布，它们会近似出一个常负曲率的光滑度量。这种启发式收敛已用于理论物理：在含膨胀子的引力理论 Jackiw–Teitelboim（JT）理论中，Weil– Petersson 测度被用来计算配分函数。

结合最近在 [Sau24b中提出的k微分模空间的猜想Masur–Veech体积，猜想 1.6], 为体积函数提供了更一般的猜想性描述。Sauvaget证明，当$-iL_j = \theta_j < \pi$ 至少有 $n-1$ 个角时，这一描述与$\mathbf{L} \in i[0,2\pi)^n$ 的Weil–Petersson体积相对应。

References

[ABC+23] Jørgen Ellegaard Andersen、Ga¨etan Borot、S´everin Charbonnier、Vincent Delecroix、Alessandro Giacchetto、Danilo Lewa´nski 和 Campbell Wheeler。Masur-Veech 体积的拓扑递归。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，107(1):254–332，2023。[AC96] Enrico Arbarello 和 Maurizio Cornalba。曲线模空间上的组合与代数几何上同调类。 *J. Algebraic Geom.*，5 749，1996 4 705( ): – .[ACM+26] David Aulicino、Aaron Calderon、Carlos Matheus、Nick Salter 和 Martin Schmoll。一般平移曲面循环覆盖的 Siegel–Veech 常数。

J. Lond. Math. ，( ):论文编号 e 。[ADG+20] Amol Aggarwal、Vincent Delecroix、 ´Elise Goujard、Peter Zograf 和 Anton Zorich。二次微分分层的 Masur-Veech 体积及面积 Siegel-Veech 常数的大亏格渐近猜想。 *Soc. (2)* 113 1 70413, 2026

Arnold Math. J.，6 161，2020 2 149( ): – .[AEZ16] Jayadev S. Athreya、Alex Eskin 和 Anton Zorich。 $\mathbb{C}P^1$. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.(4)*上的直角台球与二次微分模空间的体积。[，49(6):1311–1386，2016。附有 Jon Chaika 撰写的附录。[AFL23] Jayadev S. Athreya、范宇伟和 Heather Lee。K3曲面中特殊拉格朗日类与半稳定Mukai向量的计数。 *Geom. Dedicata*，217(5):论文编号 89，21，2023。[Agg20] Amol Aggarwal。阿贝尔微分分层体积的大亏格渐近。 *J. Amer. Math. Soc.*，33(4):941–989，2020。附有 Anton Zorich 撰写的附录。[Agg21] Amol Aggarwal。交数及二次微分主分层体积的大亏格渐近。 *Invent. Math.*，226(3):897–1010，2021。[All23] Dylan G. L. Allegretti。关于二次微分的墙穿越公式。

Int. ，( ): – .[A *Math. Res. Not. IMRN* 9 8033 8077, 2023

M22] Nalini Anantharaman 和 Laura Monk。Weil-Petersson 体积多项式的高亏格渐近展开。 *J. Math. Phys.*，63(4):论文编号 043502，26，2022。[AMN23] Lukas Anagnostou、Scott Mullane 和 Paul Norbury。Weil-Petersson 体积、稳定性条件与墙穿越，2023。[AN25] Lukas Anagnostou 和 Paul Norbury。带锥点的双曲曲面模空间的体积，2025。[Ayg25] Juliet Aygun。素数阶 k微分上的测地线计数，2025。[BB24] Luca Battistella 和 Sebastian Bozlee。超椭圆Gorenstein曲线与对数微分。 *Forum Math. Sigma*，12:论文编号 e127，28，2024。[BCG+18] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller。阿贝尔微分分层的紧化。 *Duke Math. J.*，167 12 2347 2416，2018 ( ): – .[BCG+19] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller。 k微分分层。 *Algebr. Geom.*，6(2):196–233，2019。[BCG+24] Matt Bainbridge、Dawei Chen、Quentin Gendron、Samuel Grushevsky 和 Martin M¨oller。多尺度微分模空间，2024。[BDG22] Frederik Benirschke、Benjamin Dozier 和 Samuel Grushevsky。微分分层中线性子簇的方程。 *Geom. Topol.*，26(6):2773–2830，2022。[Ben23] Frederik Benirschke。线性子簇的边界。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，25 11 4521 4582，2023 ( ): – .[Ber74] Lipman Bers。退化黎曼曲面的空间。载于*Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)* *Discontinuous groups and*，

第 79 卷（丛书 *Ann. of Math. Stud.*），第 43–55 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974年。[BG15] Max Bauer 和 Elise Goujard。平坦曲面上周期区域的几何及其相关的 Siegel-Veech 常数。 *Geom. Dedicata*，174:203–233，2015。[Boi15] Corentin Boissy。亚纯微分模空间分层的连通分支。 *Comment. Math. Helv.*，90(2):255–286，2015。[BS15] Tom Bridgeland 和 Ivan Smith。作为稳定性条件的二次微分。 *Publ.Math. Inst. Hautes Études Sci.*，121:155–278，2015。

[CC19a] Dawei Chen 和 Qile Chen。阿贝尔微分和二次微分模空间的主边界。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，69(1):81–118，2019年。[CC19b] Dawei Chen 和 Qile Chen。对数扭曲微分的旋特征与超椭圆结构。 *Selecta Math. (N.S.)*，25(2):论文编号20，42，2019年。[CC24] Dawei Chen 和 Qile Chen。多尺度微分的 Gorenstein 收缩，2024年。[CG22] Dawei Chen 和 Quentin Gendron。迈向 k-微分分层的连通分支分类。 *Doc. Math.*，27:1031–1100，2022年。[CGH+22] Dawei Chen、Samuel Grushevsky、David Holmes、Martin M¨oller 和 Johannes Schmitt。两个模空间的故事：对数微分与多尺度微分，2022年。[CGM25] Dawei Chen、Elise Goujard 和 Martin M¨oller。REL 零的仿射不变子流形的面积 Siegel–Veech 常数，2025年。[Che17] Dawei Chen。阿贝尔微分的退化。 *J. Differential Geom.*，107 3 395 453，2017年 ( ): – 。[Che19] Dawei Chen。微分分层的重言环。 *Manuscripta Math.*，158(3- 4):345–351，2019年。[Che22] Dawei Chen。flex 轨迹与 gothic 轨迹上的动力学不变量和交理论。*Eur. J. Math.*，8:S42–S52，2022年。[Che24] Leonid O. Chekhov。傻瓜冠、喇叭与施瓦茨导数，2024年。[CM12] Dawei Chen 和 Martin M¨oller。低亏格阿贝尔微分的李雅普诺夫指数的非变化和。 *Geom. Topol.*，16(4):2427–2479，2012年。[CM14] Dawei Chen 和 Martin M¨oller。低亏格中的二次微分：例外分层与非变化分层。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，47(2):309–369，2014年。[CMS23] Dawei Chen、Martin M¨oller 和 Adrien Sauvaget。Masur-Veech 体积与交理论：二次微分的主分层。 *Duke Math. J.*，172 9 1735 1779，2023年 ( ): – 。[CMSZ20] Dawei Chen、Martin M¨oller、Adrien Sauvaget 和 Don Zagier。阿贝尔微分模空间上的 Masur-Veech 体积与交理论。 *Invent. Math.*，222(1):283–373，2020年。[CMZ18] Dawei Chen、Martin M¨oller 和 Don Zagier。Siegel-Veech 常数的拟模性与大亏格极限。 *J. Amer. Math. Soc.*，31(4):1059–1163，2018年。[CMZ24] Matteo Costantini、Martin M¨oller 和 Jonathan Zachhuber。面积是足够好的度量。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，74(3):1017–1059，2024年。[CW21] Dawei Chen 和 Alex Wright。WYSIWYG 紧化。

J. Lond. Math. , ( ): – 。[*Soc. (2)* 103 2 490 515, 2021

DGY25] Eduard Duryev、Elise Goujard 和 Ivan Yakovlev。二次微分奇分层的体积，2025年。[DGZZ21] Vincent Delecroix、 ´Elise Goujard、Peter Zograf 和 Anton Zorich。Masur-Veech 体积、简单闭测地线频率与曲线模空间的交数。 *Duke Math. J.*，170(12):2633–2718，2021年。[DN09] Norman Do 和 Paul Norbury。魏尔-彼得森体积与锥面。

Geom. , : – 。[*Dedicata* 141 93 107, 2009

Doz25] Benjamin Dozier。微分分层的紧化，2025年。[Dur24] Eduard Duryev。亏格二中的 Teichm¨uller 曲线：方格铺砌曲面与模曲线。 *Geom. Topol.*，28(9):3973–4056，2024年。[EKZ14] Alex Eskin、Maxim Kontsevich 和 Anton Zorich。关于 Teichm¨uller 测地流，霍奇丛的李雅普诺夫指数之和。 *Publ. Math. Inst.Hautes Études Sci.*，120:207–333，2014年。[EM01] Alex Eskin 和 Howard Masur。平坦曲面上的渐近公式。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* 21 2 443 478, 2001 , ( ): – 。[

EM18] Alex Eskin 和 Maryam Mirzakhani。模空间上 SL(2 ℝ 127 95 324, ,) 作用的不变测度和平稳测度。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，: – 。[EMM15] Alex Eskin、Maryam Mirzakhani 和 Amir Mohammadi。SL(2, ℝ) 作用在模空间上的孤立性、等分布与轨道闭包。 *Ann. of Math. (2)*，182 2 673 721，2015年 ( ): – 。[EMMW20] Alex Eskin、Curtis T. McMullen、Ronen E. Mukamel 和 Alex Wright。台球、四边形与模空间。 *J. Amer. Math. Soc.*，33(4):1039–1086，2020年。

[EMZ03] Alex Eskin、Howard Masur 和 Anton Zorich。阿贝尔微分模空间：主边界、计数问题与 Siegel-Veech 常数。 *Publ.Math. Inst. Hautes Études Sci.*，(97):61–179，2003年。[Eng21] Philip Engel。椭圆轨形的赫尔维茨理论 I。 *Geom. Topol.*，25 274，2021年 1 229( ): – 。[EO01] Alex Eskin 和 Andrei Okounkov。环面分支覆盖数与全纯微分模空间体积的渐近性。 *Invent. Math.*，145(1):59–103，2001年。[EO06] Alex Eskin 和 Andrei Okounkov。枕形与拟模形式。在 *Algebraic geometry and number theory* 253 *Progr. Math.* 1 25 ¨ ，第 卷，页码 – 。Birkhauser Boston，Boston，MA，2006年。[EOP08] Alex Eskin、Andrei Okounkov 和 Rahul Pandharipande。分支覆盖的塞塔特征。 *Adv. Math.*，217(3):873–888，2008年。[ES18] Philip Engel 和 Peter Smillie。用三角形、正方形或六边形铺砌球面的凸镶嵌数量。 *Geom. Topol.*，22(5):2839–2864，2018年。[ET23] Lorenz Eberhardt 和 Gustavo J. Turiaci。二维膨胀子引力与带锥形缺陷的魏尔-彼得森体积，2023年。[EZ15] Alex Eskin 和 Anton Zorich。阿贝尔微分分层的体积与大亏格中的 Siegel-Veech 常数。 *Arnold Math. J.*，1(4):481–488，2015年。[Fil16] Simion Filip。仿射不变流形上的混合霍奇结构分裂。 *Ann.* , ( ): – 。[*of Math. (2)* 183 2 681 713, 2016
Fil18] Simion Filip。K3曲面族与李雅普诺夫指数。 *Israel J. Math.*，226 1 29( ): –69，2018年。[Fil20] Simion Filip。在 K3曲面的扭子族中计数特殊拉格朗日纤维化。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，53(3):713–750，2020年。附录由 Nicolas Bergeron 和 Carlos Matheus 撰写。[FP18] Gavril Farkas 和 Rahul Pandharipande。扭曲典范除子的模空间。 *J. Inst. Math. Jussieu*，17(3):615–672，2018年。[Fu25] Kai Fu。凸平坦锥面的 Siegel-Veech 测度，2025年。[Gen18] Quentin Gendron。$\Omega\mathcal{M}_g$分层的戴利涅-芒福德紧化与关联簇紧化。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，68(3):1169–1240，2018年。[GMN13] Davide Gaiotto、Gregory W. Moore 和 Andrew Neitzke。墙穿越、希钦系统与 WKB近似。 *Adv. Math.*，234:239–403，2013年。[Gol86] William M. Goldman。李群上的不变函数与曲面群表示的哈密顿流。 *Invent. Math.*，85(2):263–302，1986年。[Gou15] Elise Goujard。二次微分模空间分层的 Siegel-Veech 常数。 *Geom. Funct. Anal.*，25(5):1440–1492，2015年。[Gou16] Elise Goujard。二次微分模空间分层的体积：获得显式值。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，66(6):2203–2251，2016年。[GP17] Selim Ghazouani 和 Luc Pirio。具有指定的全纯单值群的平坦环面模空间。*Geom. Funct. Anal.*，27(6):1289–1366，2017年。[GP20] S´elim Ghazouani 和 Luc Pirio。平坦环面模空间与椭圆超几何函数。 *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*，(164):viii+183，2020年。[Gru01] Samuel Grushevsky。带 puncture 黎曼曲面模空间的魏尔-彼得森体积的显式上界。 *Math. Ann.*，321(1):1–13，2001年。[GS24] Alexander B. Goncharov 和 Zhe Sun。双曲曲面模空间的指数型体积，2024年。[Gu´e16] J´er´emy Gu´er´e。通过对数几何推广双重分歧循环，2016年。[Har74] William Harvey。离散群的夏布蒂空间。在 *Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)* ，第 *Ann. of Math. Stud.*卷第79号，页码239–246。Princeton Univ. Press，Princeton，NJ，1974年。[Has03] Brendan Hassett。带权标记稳定曲线的模空间。 *Adv. Math.*，173 2 316( ): –352，2003年。[HK14] John H. Hubbard 和 Sarah Koch。曲线模空间的戴利涅-芒福德紧化的解析构造。 *J. Differential Geom.*，98 313，2014年 2 261( ): – 。

[HKK17] Fabian Haiden、Ludmil Katzarkov与Maxim Kontsevich。平坦曲面与稳定性结构。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，126：247–318，2017年。[HM25] Johannes Horn与Martin M¨oller。经由谱网络的壁穿越公式，2025年。[HT25a] Will 海德与Joe 托马斯。带边双曲曲面模空间的魏尔-彼得森体积的大n 渐近。 *Comm. Math. Phys.*，406(9)：论文第203号，41，2025年。[HT25b] Yi 黄与Ivan Telpukhovskiy。开弦模空间具有多重对数米尔扎哈尼体积，2025年。[Hua25] Xuanyu 黄。大亏格情形下魏尔-彼得森体积的渐近系数，2025年。[Kaz22] Maxim Kazarian。二次微分模空间的Masur-Veech体积递推。 *J. Inst. Math. Jussieu*，21(4)：1471–1476，2022。[Kim20] Yusuke 木村。JT引力与渐近魏尔-彼得森体积。

Phys. Lett. , ：135989, *B* 811
6，2020年。[KN18] Vincent Koziarz与Duc-Manh Nguyen。带标记亏格零曲线模空间中的复双曲体积与边界除子的相交。 *Ann. Sci. Éc.Norm. Supér. (4)*，51(6)：1549–1597，2018年。[KN21] Vincent Koziarz与Duc-Manh Nguyen。霍奇结构变分与用三角形和正方形铺砌曲面的计数。 *J. Éc. polytech. Math.*，8 857，2021年 831：–。[Kon92] Maxim Kontsevich。曲线模空间上的交理论与矩阵艾里函数。 *Comm. Math. Phys.*，147(1)：1–23，1992。[Kon97] Maxim Kontsevich。李雅普诺夫指数与霍奇理论。载于 *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)* 24 *Adv. Ser. Math. Phys.* 318 ，卷，第–332页。World Sci. Publ.，River Edge，NJ，1997。[KS08] Maxim Kontsevich与Yan Soibelman。稳定性结构、动机唐纳森-托马斯不变量与簇变换，2008年。[KT99] Yasuhiko Kamiyama与Michishige Tezuka。空间多边形模空间的辛体积。 *J. Math. Kyoto Univ.*，39(3)：557–575，1999。[KW24] Omar Kidwai与Nicholas J. Williams。布里奇兰-史密斯对应的唐纳森-托马斯不变量，2024年。[KZ03] Maxim Kontsevich与Anton Zorich。具有指定奇点的阿贝尔微分模空间的连通分支。 *Invent. Math.*，153 678，2003年 3 631( )：–。[Lan08] Erwan Lanneau。二次微分模空间分层的连通分支。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，41(1)：1–56，2008年。[LW24] Michael Lipnowski与Alex Wright。迈向大亏格情形下的最优谱隙。*Annals of Probability*，52(2)：545–575，2024年。发表于2024年3月。[Mas76] Howard Masur。韦伊-彼得森度量到泰希米勒空间边界的延拓。 *Duke Math. J.*，43(3)：623–635，1976。[Mas82] Howard Masur。区间交换变换与测度叶状结构。

Ann. of , ( )：–。[*Math. (2)* 115 1 169 200, 1982
McM17] Curtis T. McMullen。锥流形的高斯-博内定理与模空间体积。 *Amer. J. Math.*，139(1)：261–291，2017年。[McO88] Robert C. McOwen。黎曼曲面上的点奇点与共形度量。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，103(1)：222–224，1988。[Mir07a] Maryam Mirzakhani。简单测地线与带边黎曼曲面模空间的魏尔-彼得森体积。 *Invent. Math.*，167(1)：179–222，2007。[Mir07b] Maryam Mirzakhani。魏尔-彼得森体积与曲线模空间上的交理论。 *J. Amer. Math. Soc.*，20(1)：1–23，2007。[Mir13] Maryam Mirzakhani。魏尔-彼得森体积的增长与大亏格随机双曲曲面。 *J. Differential Geom.*，94(2)：267–300，2013。[MMW17] Curtis T. McMullen、Ronen E. Mukamel与Alex Wright。三次曲线与模空间的全测地子簇。 *Ann. of Math. (2)*，185(3)：957–990，2017年。[Mon11] Gabriele Mondello。带边黎曼曲面与Teichm¨uller空间的自然三角剖分。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，13(3)：635–684，2011。

[MP19] Maryam Mirzakhani与Bram 佩特里。大亏格随机曲面上闭测地线的长度。 *Comment. Math. Helv.*，94(4)：869–889，2019年。[MTT20] Martin M¨oller与David Torres-Teigell。哥特Teichm¨uller曲线的欧拉示性数。 *Geom. Topol.*，24(3)：1149–1210，2020年。[Mum77] David Mumford。射影簇的稳定性。 *Enseign. Math. (2)*，23 110，1977 1 2 39(-)：– 。[MUW21] Martin M¨oller、Martin Ulirsch与Annette Werner。热带典范除子的可实现性。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，23(1)：185–217，2021年。[MW17] Maryam Mirzakhani与Alex Wright。仿射不变子流形的边界。 *Invent. Math.*，209(3)：927–984，2017年。[MZ00] Yuri I. 马宁与Peter Zograf。可逆上同调场论与魏尔-彼得森体积。 *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，50(2)：519–535，2000。[MZ15] Maryam Mirzakhani与Peter Zograf。迈向曲线模空间上相交数的大亏格渐近。 *Geom. Funct. Anal.*，25 1289，2015年 4 1258( )：– 。[Ngu22] Duc-Manh Nguyen。 d-微分模空间上的体积形式。 *Geom. Topol.*，26 7 3173( )：–3220，2022。[Ngu24] Duc-Manh Nguyen。球面上平坦度量模空间的交理论与体积。 *Geom. Dedicata*，218(2)：论文第32号，42，2024年。附Nguyen与Vincent Koziarz所撰附录。[Ngu25] Duc-Manh Nguyen。论射影化阿贝尔微分模空间中线性子簇的体积。 *Math. Ann.*，391(1)：937–964，2025年。[NN98] Marjatta N¨a¨at¨anen与Toshihiro Nakanishi。环面模空间的魏尔-彼得森面积。 *Results Math.*，33(1-2)：120–133，1998。[OP09] A. Okounkov与R. Pandharipande。Gromov-Witten理论、Hurwitz数与矩阵模型。载于 *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*，*Proc. Sympos. Pure Math.*第80卷第一部分，第325–414页。Amer. Math. Soc.，Providence，RI，2009。[Pen92] R. C. Penner。魏尔-彼得森体积。 *J. Differential Geom.*，35(3)：559–608，1992。[Sau18] Adrien Sauvaget。 $\mathcal{H}(2g-2)$的体积与Siegel-Veech常数及霍奇积分。 *Geom. Funct. Anal.*，28(6)：1756–1779，2018年。[Sau21] Adrien Sauvaget。Masur-Veech体积的大亏格渐近展开。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(20)：15894–15910，2021年。[Sau24a] Adrien Sauvaget。双曲曲面模空间的平坦视角，2024年。[Sau24b] Adrien Sauvaget。平坦曲面模空间的体积，2024年。[Sau25] Adrien Sauvaget。具简单极点的亚纯微分分层的虚拟体积，2025年。[ST01] Georg Schumacher与Stefano Trapani。经由有效除子估计魏尔-彼得森体积。 *Comm. Math. Phys.*，222(1)：1–7，2001年。[ST05] Georg Schumacher与Stefano Trapani。黎曼曲面上锥度量的变分。 *J. Math. Anal. Appl.*，311(1)：218–230，2005年。[ST11] Georg Schumacher与Stefano Trapani。双曲锥黎曼曲面族的魏尔-彼得森几何。 *Michigan Math. J.*，60(1)：3–33，2011。[Thu98] William P. Thurston。多面体的形状与球面的三角剖分。载于 *The Epstein birthday schrift* 1 *Geom. Topol. Monogr.* 511 549 ，卷，第–页。Geom. Topol. Publ.，Coventry，1998。[Tro86] Marc Troyanov。具锥奇点的欧几里得曲面 ` ´。 *Enseign. Math. (2)*，32 1 2 79 94，1986年 (-)：– 。[TT20] David Torres-Teigell。哥特轨迹的Masur-Veech体积。 *J. Lond. Math. Soc.* , ( )：– 。[*(2)* 102 1 405 436, 2020 TT22] Michael Temkin与Ilya Tyomkin。Berkovich曲线上微分形式的约化与提升问题。 *Adv. Math.*，397：论文第108208号，23，2022。[TWZ06] Ser Peow Tan、Yan Loi Wong与Ying Zhang。McShane恒等式向双曲锥曲面的推广。 *J. Differential Geom.*，72(1)：73–112，2006年。[Vee82] William A. Veech。区间交换映射空间上变换的高斯测度。 *Ann. of Math. (2)*，115(1)：201–242，1982。[Vee93] William A. Veech。平坦曲面。 *Amer. J. Math.*，115(3)：589–689，1993。[vIS25] Jan-Willem van Ittersum与Adrien Sauvaget。圆柱计数与面积Siegel-Veech常数的自旋细化。 *Comment. Math. Helv.*，100(3)：559–617，2025年。

[魏尔58] Andr ´ *Séminaire Bourbaki; 10e année:* e *1957/1958* 7 ´ ´ 1958 ´ Weil。《黎曼曲面的模》。载于，第 页。数学秘书处，巴黎，。会议讲稿；Expos´es 152 `a 168；第 2 版，修订版，Expos´e 168。[Wit91] 爱德华·威滕。关于二维量子规范理论。 *Comm. Math. Phys.*，141 1 153( )：– 209，1991。[Wol85] 斯科特·沃尔珀特。关于曲线模空间的魏尔-彼得森几何。

Amer.，( )：–。[WX22]

J. Math. 107 4 969 997, 1985
Yunhui Wu 和 Yuhao Xue。大亏格随机双曲曲面的第一特征值大于 $3/16 - \varepsilon$。

Geometric and Functional Analysis，33(2)，2022。[YZZ20] Di Yang、Don Zagier 和 Youjin Zhang。二次微分的 Masur-Veech 体积及其渐近性。 *J. Geom. Phys.*，158:103870，12，2020年。[Zog20] Peter Zograf。魏尔-彼得森体积的大亏格渐近，2020年。

Department of Mathematics、 Boston College、 Chestnut Hill、 MA 02467、 USA
Email address: dawei.chen@bc.edu

School of Mathematics and Statistics、 University of Melbourne、 Australia
Email address: mullanes@unimelb.edu.au