arXiv:2603.07324v1 [math.FA] 7 Mar 2026

算子较少的巴拿赫空间的无条件结构

F. ALBIAC 和 J. L. ANSORENA

摘要。本文最初旨在证明 Gowers 在 [16] 中构造的巴拿赫空间 $\mathbb{G}$ 具有唯一无条件基；该构造是为了解决巴拿赫超平面问题。这一唯一性结果促使我们进一步探究，能否通过改造 Gowers 的原始构造推导出更多结构性见解。结果表明，对 $\mathbb{G}$ 关于 $1 < p < \infty$、$p \neq 2$进行 p-凸化，可得到一族巴拿赫空间，其中每个空间都具有唯一无条件基，并且包含一些块基，其扩张模型与 ℓ_1、ℓ_2 或 c_0 的单位向量基均不等价。这一结果以否定的方式解决了一个悬而未决四十年的问题。Bourgain、Casazza、Lindenstrauss 和 Tzafriri 在 1985年 的回忆录 [10], 中提出了这一问题；他们研究了这三个空间的无限直和中的无条件结构唯一性，旨在对所有具有唯一无条件基的巴拿赫空间进行分类。作为我们工作的副产品，我们还推翻了结构理论中的一个猜想：具有唯一无条件基的空间必与其自身的平方同构；并证明，当一个具有无条件基的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的算子较少时，该空间本身及其所有可补子空间都具有唯一无条件结构。

1. 引言

自无条件基理论诞生以来，无条件基在巴拿赫空间及其在分析中的应用研究中一直发挥着重要作用。仅仅假设存在一个不具特殊性质的 Schauder基，并不能为我们提供多少关于空间结构的信息。然而，假设存在一个无条件基，则可能带来显著的改善，因为这通常有助于研究空间的几何和拓扑特征，例如序、逼近性质、型与余型、自反性、有限维分解，

2020 数学主题分类。46B15,46B03,46B20,46B42,46B45。关键词与短语。无条件基的唯一性、巴拿赫格、Gowers 空间、严格奇异算子。本文所报告的研究部分是在作者访问维也纳埃尔温·薛定谔国际数学与物理研究所期间开展的，访问缘于研讨会巴拿赫空间中的结构。作者感谢西班牙科学与创新部通过 PID2022-138342NB-I00 项目资助逼近理论与应用中的泛函分析技术。

某类算子的存在、可补子空间结构、嵌入的存在，或 ℓ_p-空间的有限可表示性，仅举数例。将无条件基与其他结构性质结合起来，为分析巴拿赫空间提供了强有力的工具，也有助于建立各个空间之间的联系。许多实例展现了这些相互作用的丰富性；或许，James 在20世纪50年代发表的文章最能说明，当其他结构特征与基的无条件性相互交织时，会产生怎样的协同效应。

这些性质之一恰恰是无条件基的唯一性（在等价意义下）。具有这一性质的巴拿赫空间十分罕见。事实上，有且仅有三个无穷维巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ ，其中所有归一化无条件基都等价，即 c_0、 ℓ_1或 ℓ_2；此时该基必定是对称的（见 [25]）。基的对称性蕴含该空间的自相似性，其含义是 $\mathbb{X}$ 与自身的平方同构，从而由归纳可知，它与自身任意有限多个副本的直和同构。

对于具有非对称无条件基的空间，还可以再进一步，转而考虑那些经其元素的适当置换后变得等价的归一化基。沿这一方向的首个结果由Edelstein与Wojtaszczyk[14], 获得，他们证明了具有唯一无条件基的这三个空间的有限直和具有唯一无条件基（在置换意义下）。

这一研究课题于1985年迎来了一个重要里程碑：Bourgain 等人发表了颇具影响力的论文 [10] 。作者在文中研究了 c_0、 ℓ_1 和 ℓ_2 的无限直和的无条件基唯一性，并证明，虽然 ℓ_1（c_0）、ℓ_1（ℓ_2）、 c_0（ℓ_1） c_0（ℓ_2）确实具有唯一无条件基，但空间 ℓ_2（c_0）及其对偶空间 ℓ_2（ℓ_1）却不具有唯一无条件基。出乎意料的是，他们还发现了一种奇异巴拿赫空间，即 2-凸化的 Tsirelson 空间 $\mathcal{T}^{(2)}$，它同样具有唯一无条件基，尽管它并非由仅有的三个具有唯一无条件基的经典序列空间中的任何一个构造而成的直和。

回忆录 中遗留的未解问题，成为推动一个此前鲜少受到关注的研究主题向前发展的契机。Casazza 和 Kalton [11, 12] 于 1998年证明，Tsirelson 空间 $\mathcal{T}$ 具有唯一无条件基，但$c_0(\mathcal{T})$并不具有唯一无条件基，从而解决了 [10]中提出的两个问题。具体而言，他们对这样一个一般性问题给出了否定答案：具有唯一无条件基的空间，其按 c_0 意义下的直和是否也具有唯一无条件基。此外，他们还发现了一个具有唯一无条件基的巴拿赫空间，该空间有一个可补子空间，其无条件基并非唯一，由此解决了另一个问题

源自 [10]。除这三个问题外，Bourgain 等人在回忆录 中提出的所有问题至今仍未解决。

近年来，具有置换意义下唯一无条件基的空间名单又增加了几个 [1, 2, 7],，这似乎清楚地表明，试图对所有具有这一性质的巴拿赫空间进行分类是徒劳的；而那些零散存在、具有置换意义下唯一无条件基的空间之间缺乏统一模式，也让人不禁思考，至少是否存在一类或一族共享这一性质的巴拿赫空间。另一方面，就我们先前提到的自相似性质而言，尽管通过现有文献发现的所有具有唯一无条件基的空间也都与其平方同构，但从理论上说，一个空间完全可能具有唯一无条件基，却不与其平方同构。迄今为止，尚无此类空间的明确实例，其存在性仍是泛函分析中的一个开放问题。本文发现了一整类同时满足这两项要求的空间，为巴拿赫空间的结构理论带来了新的见解。

为此，在预备性的第 2 节中，我们汇集术语并奠定本文的基调；在第 3 节中，我们讨论具有基的空间中严格奇异算子的情形。我们的结构结果依赖于存在具有无条件基、且其上定义的算子空间较小的巴拿赫空间。这一多少有些奇特的现象，是通过对角算子加严格奇异算子以及基的概念来考察的。在第 4 节中，我们给出此类巴拿赫空间的一般性质。第 5 节包含本文的主要结果。我们首先对来自 [15]的 Gowers 空间 $\mathbb{G}$作 p-凸化。然后我们证明，所得到的所有新空间（包括 $\mathbb{G}$）都具有唯一无条件基，包含不同于 c_0、 ℓ_1和ℓ_2的扩张模型，并且不能与其平方同构。我们在第 6 节以若干与本文所报告研究相关的问题结束全文。

2. 术语与预备结果

设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是定义在实数域或复数域 $\mathbb{F}$上的 Banach 空间。我们用 $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 表示从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$的所有有界线性算子构成的 Banach 空间，用 $\mathcal{B}(\mathbb{X}) = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ 表示 $\mathbb{X}$的所有自同态构成的巴拿赫代数。符号 $\mathbb{X} \simeq \mathbb{Y}$ 表示 $\mathbb{X}$ 与$\mathbb{Y}$ 同构。若 $\mathbb{X}$可补嵌入 到 $\mathbb{Y}$中，且 $\mathbb{X}$ 同构于 $\mathbb{Y}$的一个可补子空间，也就是说，存在 $J \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 和 $P \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$，使得 $P \circ J = \mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$，则称 $\mathbb{X}$可补嵌入 到 $\mathbb{Y}$中，并记作 $\mathbb{X} \trianglelefteq \mathbb{Y}$。

我们称巴拿赫空间 $\mathbb{X}$的两个子空间 $\mathbb{Y}$与 $\mathbb{U}$ 在 $\mathbb{X}$内是合同的，如果存在 $\mathbb{X}$的自同构 T ，使得$T(\mathbb{Y}) = \mathbb{U}$。若 $\mathbb{Y}$ 是可补的，则它与 $\mathbb{U}$ 合同，当且

仅当 $\mathbb{U}$是可补的，并且这两个空间及其补空间都是同构的。设 $c_{\mathbb{Y}} := \operatorname{codim}(\mathbb{Y};\mathbb{X}) < \infty$ 且$c_{\mathbb{U}} := \operatorname{codim}(\mathbb{U};\mathbb{X}) < \infty$。由于任何有限余维的闭子空间都是可补的， $\mathbb{Y}$ 与 $\mathbb{U}$ 合同当且仅当 $c_{\mathbb{Y}} = c_{\mathbb{U}}$。

给定巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的一个族 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$，我们用 $[\mathcal{X}]$或 $[\boldsymbol{x}_n\colon n\in\mathcal{N}]$ 表示它的闭线性张成。更一般地，给定 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{N}$，我们设 $[\mathcal{X}|\mathcal{A}] = [\boldsymbol{x}_n\colon n\in\mathcal{A}]$。如果 $[\mathcal{X}] = \mathbb{X}$，我们称 $\mathcal{X}$在 $\mathbb{X}$ 中是完备的。如果

$$\inf_{n\in\mathcal{N}} \|\boldsymbol{x}_n\| > 0, \quad \sup_{n\in\mathcal{N}} \|\boldsymbol{x}_n\| < \infty,$$

我们称 $\mathcal{X}$ 是半归一化的。

测度空间上的***Köthe*空间** $\boldsymbol{K}$ 是关于可测函数集合上的通常序的巴拿赫格。如果简单可积函数在 $\boldsymbol{K}$ 中稠密，我们就称 $\boldsymbol{K}$ 是极小的。原子格是指定义在可数集上的计数测度上的 Köthe 空间。如果 $\boldsymbol{K}$ 是定义在 $\mathcal{N}$ 上的原子格，且 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$，我们用 $\boldsymbol{K}[\mathcal{M}]$表示 $\boldsymbol{K}$ 在 $\mathcal{M}$上的限制。若单位向量系 $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是 $\boldsymbol{K}$的半归一化族，我们就称原子格 $\boldsymbol{K}$ 是正规化的。正规化原子格的一些例子包括 $\ell_\infty(\mathcal{N})$、$c_0(\mathcal{N})$ 以及勒贝格空间 $\ell_p(\mathcal{N})$、 $1\le p<\infty$，它们以可数集 $\mathcal{N}$ 为模型。除第一个外，其余都是极小的。

巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的完备极小系 是一个完备序列 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$，其中 $\mathbb{X}$ 中存在一个序列 $\mathcal{X}^* = (\boldsymbol{x}_n^*)_{n\in\mathcal{N}}$，使得

$$\boldsymbol{x}_k^*(\boldsymbol{x}_n) = \delta_{k,n},$$

其中 $\delta_{k,\ n} = 1$ （若 $k = n$ ），否则 $\delta_{k,\ n} = 0$ 。我们称 $\mathcal{X}^*$ 为 $\mathcal{X}$的对偶族 或对偶基。若相对于$\mathcal{X}$的系数变换

$$x \mapsto (\boldsymbol{x}_n^*(x))_{n\in\mathcal{N}}, \quad x\in\mathbb{X},$$

是一一映射，则称 $\mathcal{X}$ 为***Markushevich* 基**。$x\in\mathbb{X}$ 相对于 $\mathcal{X}$ 的支撑是集合

$$\operatorname{supp}(x) = \{x\in\mathbb{X}\colon \boldsymbol{x}_n^*(x)\neq 0\}.$$

设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{N}$ 和 $\beta = (b_n)_{n\in\mathcal{A}} \in \mathbb{F}^{\mathcal{A}}$。若存在一个有界线性算子

$$M := M_\beta[\mathcal{X}] \in \mathcal{B}([\mathcal{X}|\mathcal{A}],\mathbb{X})$$

使得对所有 $n\in\mathcal{A}$， $M(\boldsymbol{x}_n) = b_n\,\boldsymbol{x}_n$，则称 β是相对于 $\mathcal{X}$的乘子。若 χ_A 是乘子，我们用以下符号表示

$$S_A[\mathcal{X}] = M_{\chi_A}[\mathcal{X}]$$

相对于 $\mathcal{X}$到 $[\mathcal{X}|A]$上的典范投影。若 $\mathcal{N} = \mathbb{N}$，则对每个$n\in\mathbb{N}$，我们定义

$$S_n[\mathcal{X}] = S_A[\mathcal{X}], \quad A = [1,n]\cap\mathbb{Z}.$$

若序列 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbb{X}$，且对每个 $x\in\mathbb{X}$，都存在唯一的序列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ 属于 $\mathbb{F}$，使得级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{x}_n$ 收敛到 x（在范数意义下），则称族 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 属于 $\mathbb{X}$（$\mathcal{N}$ 可数）是 $\mathbb{X}$ 的无条件基，若对每个 $x \in \mathbb{X}$，都存在唯一的族 $(a_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 属于 $\mathbb{F}$，使得级数 $\sum_{n\in\mathcal{N}} a_n \boldsymbol{x}_n$ 无条件收敛到 x。无条件基和 Schauder 基是 Markushevich 基的特殊情形，因此有时我们会使用这种更一般的基的型来陈述对这两种基都成立的结论。事实上，Schauder 基是那些以 $\mathbb{N}$ 为模型的完备极小系统 $\mathcal{X}$，并且存在常数 K，使得对所有有限整数区间 J，都有 $\|S_J[\mathcal{X}]\| \leq K$。反过来，无条件基是那些每个有界序列都是乘子的完备极小系统 $\mathcal{X}$。此外，若 $\mathcal{X}$ 是以集合 $\mathcal{N}$ 为模型的无条件基，则存在常数 $C \geq 1$，使得对所有 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ 以及所有 $\beta = (b_n)_{n\in\mathcal{A}} \in \ell_\infty(\mathcal{A})$，都有 $\|M_\beta[\mathcal{X}]\| \leq C\|\beta\|_\infty$。反之，若 $\mathcal{X}$ 是以 $\mathcal{N}$ 为模型的完备极小系统，且存在常数 C，使得

$$\|S_A[\mathcal{X}]\| \leq C, \quad A \subseteq \mathcal{N}, \tag{2.1}$$

那么 $\mathcal{X}$ 是一个无条件基。(2.1) 中的最优常数 C 称为 $\mathcal{X}$的抑制无条件常数。

如果 $\mathcal{X}$ 是一个完备极小系，其对偶基 $\mathcal{X}^* = (\boldsymbol{x}_n^*)_{n\in\mathcal{N}}$有界，那么系数变换定义了一个从 $\mathbb{X}$ 到 $c_0(\mathcal{N})$的有界线性算子。半归一化 Schauder 基和半归一化无条件基具有这一性质。

若巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的 Schauder 基 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 的对偶基是对偶空间的完备序列，则称该基收缩。如果存在 $x \in \mathbb{X}$，其关于 $\mathcal{X}$ 的系数为 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$，只要

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n \boldsymbol{x}_n \right\| < \infty,$$

我们称 $\mathcal{X}$ 是有界完备的。

给定分别属于巴拿赫空间 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$的族 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 和 $\mathcal{Y} = (\boldsymbol{y}_n)_{n\in\mathcal{M}}$，若存在双射 $\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 以及同构嵌入 $T\colon [\mathcal{X}] \to \mathbb{Y}$，使得对所有 $n \in \mathcal{N}$都有 $T(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{y}_{\pi(n)}$，则称 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是置换等价的，并记作 $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$。如果 π是恒等映射，则称 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是等价的。如果需要考虑常数，则称 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 C-等价的，条件是

$$\max\left\{\|T\|, \left\|T^{-1}\right\|\right\} \leq C.$$

如果 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$的某个子族等价，也就是说，映射 π 只是单射而非双射，我们就称 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{Y}$的子等价，并记为$\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y}$。如果 $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是无条件的和/或半归一化的，那么 $\mathcal{X}$也如此。无条件基 $\mathcal{Y}$ 的子族称为 $\mathcal{Y}$的子基。

我们用 $\sqcup_{n\in\mathcal{N}}\mathcal{A}_n$ 表示族 $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathcal{N}}$的不交并，即，

$$\mathcal{R}:=\sqcup_{n\in\mathcal{N}}\mathcal{A}_n=\cup_{n\in\mathcal{N}}\left(\mathcal{A}_n\times\{n\}\right).$$

设 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathcal{N}$ 上的一个原子格，并且对每个 $n\in\mathcal{N}$，令 $\boldsymbol{K}_n$ 为 $\mathcal{A}_n$ 上的一个原子格。那么

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathcal{N}}\boldsymbol{K}_n\right)_{\boldsymbol{K}}$$

是 $\mathcal{R}$ 上的一个原子格。假设 $\mathcal{N}$ 是有限的，并且对每个 $n\in\mathcal{N}$，$\mathcal{X}_n=(\boldsymbol{x}_{n,a})_{a\in\mathcal{A}_n}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}_n$ 中的一个族。令 L_n 为 $\mathbb{X}_n$ 到巴拿赫空间 $\mathbb{X}=\oplus_{n\in\mathcal{N}}\mathbb{X}_n$ 的典范嵌入。设

$$\mathcal{X}=\bigoplus_{n\in\mathcal{N}}\mathcal{X}_n=\left(L_n(\boldsymbol{x}_{a,n})\right)_{(a,n)\in\mathcal{R}}.$$

若对所有 $n\in\mathcal{N}$，$\mathcal{X}_n$ 都是无条件的、完备的或半归一化的，则 $\mathcal{X}$ 也如此。若对某个 $m\in\mathbb{N}$，$\mathcal{N}=\mathbb{N}\cap[1,m]$ 成立，且存在一个族 $\mathcal{X}$，使得对所有 $n\in\mathcal{N}$，$\mathcal{X}_n=\mathcal{X}$ 成立，则我们记 $\mathcal{U}=\mathcal{X}^m$。

相对于巴拿赫空间中的序列 $\mathcal{X}:=(x_n)_{n=1}^{\infty}$，我们将满足以下条件的序列 $\mathcal{Y}=(y_k)_{k=1}^{\eta}$, $\eta\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 称为一个块序列：存在一个递增整数序列 $(n_k)_{k=0}^{\eta}$，使得 $n_0=0$，且每个向量 y_k 都是 $(x_n)_{n=1+n_{k-1}}^{n_k}$ 的线性组合。通常，$\mathcal{X}$ 是一个 Schauder基，且 $\mathcal{Y}$ 由非零向量组成；在这种情况下，我们称 $\mathcal{Y}$ 为一个块基本序列。

我们将使用几种有限可表示性。我们称 ℓ_p,$1\leq p\leq\infty$ 在巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中是粗略有限可表示的，如果存在 $C\geq1$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和每个 $\varepsilon>0$，都存在一个 n-元组 $\mathcal{X}_n=(x_k)_{k=1}^n$，它与 ℓ_p^n 的单位向量基是 $(C+\varepsilon)$-等价的。如果每个 $\mathcal{X}_n$ 都是给定序列 $\mathcal{Y}:=(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 的块序列，我们就称 ℓ_p 相对于 $\mathcal{Y}$ 是粗略有限块可表示的。如果 $\mathbb{X}$ 是一个格，并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{X}_n$ 都是两两不交支撑的，我们就称 ℓ_p 是粗略不交有限可表示的。如果对于每个 $n\in\mathbb{N}$，见证该等价性的算子 $T_n\colon[\mathcal{X}_n]\to\ell_p^n$ 可延拓为算子 $P_n\colon\mathbb{X}\to\ell_p^n$，其

$$\|P_n\|\left\|T_n^{-1}\right\|\leq C+\varepsilon,$$

我们称 ℓ_p 在 $\mathbb{X}$中是粗略有限不交可补可表示的。在所有情况下，如果我们可以选择 $C=1$，就省略“粗略”一词。

给定可数无限集 $\mathcal{N}$，拓扑空间中族 $\mathcal{X}=(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 的收敛性并不取决于是否存在 $\mathcal{X}$ 的排列。事实上，$\lim_{n\in\mathcal{N}}x_n=x$ 当且仅当对于 x 的每个邻域 U，都存在有限的 $N\subseteq\mathcal{N}$，使得对所有$n\in\mathcal{N}\setminus F$都有 $x_n\in U$。请注意，采用此定义后，每个有限族都收敛。类似地，如果 $\mathcal{X}$ 是 $[-\infty,\infty]$ 中的一个族，并且我们令

$$\limsup_{n\in\mathcal{N}}x_n=\inf_{|F|<\infty}\sup_{n\in\mathcal{N}\setminus F}x_n,\quad\liminf_{n\in\mathcal{N}}x_n=\sup_{|F|<\infty}\inf_{n\in\mathcal{N}\setminus F}x_n,$$

约定 $\sup\emptyset = -\infty$ 和 $\inf\emptyset = \infty$，若 $\mathcal{N}$ 有限，则

$$\limsup_{n\in\mathcal{N}} a_n = -\infty, \quad \liminf_{n\in\mathcal{N}} a_n = \infty.$$

我们用 $c_{00}(\mathcal{N})$ 表示 $\mathcal{N}$ 上所有最终为零的标量族所构成的线性空间，并令 $c_{00} = c_{00}(\mathbb{N})$。

2.1.无条件基的唯一性与基的幂。若巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 具有一个（半归一化的）无条件基 $\mathcal{X}$，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{X}$ 的唯一无条件基（在归一化、置换和等价意义下），即当 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathbb{X}$ 的另一个半归一化无条件基时，$\mathcal{Y}\sim\mathcal{X}$，则称巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 具有唯一无条件基。

所有已知的具有唯一无条件基的空间 $\mathbb{X}$ 都具有一个（半归一化的）无条件基 $\mathcal{X}$，该基与其平方置换等价。此外，这一特征在证明 $\mathbb{X}$ 具有唯一无条件基的过程中发挥着关键作用。回顾来看，文献中我们找到的所有关于给定巴拿赫空间具有唯一无条件基的证明，都遵循下面引理所体现的模式。

引理2.1（见 [5]）。设 $\mathbb{X}$ 是一个具有半归一化无条件基 $\mathcal{X}$ 的巴拿赫空间。假设 $\mathcal{X}^2\sim\mathcal{X}$，并且对于分别具有半归一化无条件基 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{U}$ 的巴拿赫空间 $\mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{U}$，若 $\mathbb{Y}\trianglelefteq\mathbb{U}$ 且 $\mathcal{U}\subsetneq\mathcal{X}$，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{Y}\subsetneq\mathcal{X}^m$。那么 $\mathbb{X}$ 具有唯一无条件基。

然而，无条件基具有唯一性与该基置换等价于其平方之间，事先并无关联。因此，以下问题早已隐含其中。

问题 2.2. 是否存在一个巴拿赫空间 $\mathbb{X}$，它具有唯一无条件基 $\mathcal{X}$，但该基不置换等价于其平方?

2.2. 无条件基的唯一性与最优格估计。回忆一下，若存在常数 C，使得对于 $\boldsymbol{K}$ 中的每个有限族 $(x_j)_{j\in F}$，我们都有：则称测度空间 $(\Omega\ \Sigma,\mu)$ 上的 Köthe空间 $\boldsymbol{K}$ 是格 p-凸（分别为 p-凹）的，$1\le p\le\infty$。

$$\left\|\left(\sum_{j\in F}|x_j|^p\right)^{1/p}\right\| \le C\left(\sum_{j\in F}\|x_j\|^p\right)^{1/p},$$

（分别为，

$$\left(\sum_{j\in F}\|x_j\|^p\right)^{1/p} \le C\left\|\left(\sum_{j\in F}|x_j|^p\right)^{1/p}\right\|).$$

如果这些估计对支撑互不相交的族成立，我们就称 $\boldsymbol{K}$ 满足上（分别为下） p-估计。已知 [24]：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}) &:= \sup\{p \in [1,\infty]\colon \boldsymbol{K} \text{ satisfies an upper } p\text{-estimate}\}\\ &= \sup\{p \in [1,\infty]\colon \boldsymbol{K} \text{ is lattice } p\text{-convex}\},\\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K}) &:= \inf\{p \in [1,\infty]\colon \boldsymbol{K} \text{ satisfies a lower } p\text{-estimate}\},\\ &= \sup\{p \in [1,\infty]\colon \boldsymbol{K} \text{ is lattice } p\text{-concave}\}.\end{aligned}$$

给定 $1 \le p < \infty$， p-凸化

$$\boldsymbol{K}^{(p)} = \{f \in L_0(\mu)\colon |f|^p \in \boldsymbol{K}\}$$

的 $\boldsymbol{K}$满足 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}^{(p)}) = p\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K})$，且 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K}^{(p)}) = p\,\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K})$。

尽管凸化是一种从已有空间构造新巴拿赫空间的相当朴素的方法，但应当注意，应用这一过程会显著改变空间的线性结构。例如，空间 $L_p(\mu)$、 $1 < p < \infty$ 可以视为 $L_1(\mu)$ 上的 p-凸化，而且它们的表现确实与 $L_1(\mu)$ 大不相同。相比之下，存在一些巴拿赫格 $\boldsymbol{K}$，例如 $L_\infty(\mu)$、 c_0，或原始的 Tsirelson空间 $\mathcal{T}^*$，使得 $\boldsymbol{K}^{(p)} = \boldsymbol{K}$ 对所有 $p \in [1,\infty)$ 都成立。注意，这类格 $\boldsymbol{K}$ 对所有 $p \in [1,\infty)$ 必然是格 p-凸的，因此 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K}) = \infty$。根据观察到的规律，我们可以预期 $\boldsymbol{K}$ 只有在.....时才具有唯一无条件基

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}), \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K})\} \subseteq \mathcal{I} := \{1, 2, \infty\}.$$

例如，按照约定， ℓ_∞ 表示 c_0，我们可以观察到，当 $1 \le p \le \infty$ 时，空间 ℓ_p 具有唯一无条件基当且仅当 $p = \boldsymbol{\sigma}(\ell_p) = \boldsymbol{\tau}(\ell_p) \in \mathcal{I}$（见 [22, 23, 26]）。类似地， p-凸化的Tsirelson空间 $\mathcal{T}^{(p)}$， $1 \le p < \infty$ 具有唯一无条件基当且仅当 $p = \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}_{(p)}) = \boldsymbol{\tau}(\mathcal{T}_{(p)}) \in \mathcal{I}$（见 [4, 10, 11]）。原始的Tsirelson空间 $\mathcal{T}^*$ 同样具有唯一无条件基，而且正如我们刚才指出的， $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{T}^*) = \boldsymbol{\tau}(\mathcal{T}^*) = \infty$。

现在让我们看看上述混合范数序列空间的情况。按照 [10], ，我们对p、 $q \in [1,\infty]$、 $p \ne q$令$Z_{p,q} = \ell_q(\ell_p)$。这些空间是原子格，并且 $\boldsymbol{\sigma}(Z_{p,q}) = \min\{p, q\}$。这些空间具有唯一无条件基当且仅当 $p = 1$ 与 $q = \infty$、 $p = \infty$ 与 $q = 1$，或 $p = 2$ 与 $q \in \{1, \infty\}$ （见[10]）。注意，在所有这些情形中，我们有 $\boldsymbol{\sigma}(Z_{p,q}) = \min\{p, q\} \in \mathcal{I}$以及 $\boldsymbol{\tau}(Z_{p,q}) = \max\{p, q\} \in \mathcal{I}$。基于这些例子，自然产生如下问题。

问题 2.3。 是否存在一个原子格 $\boldsymbol{K}$ ，它具有唯一的无条件基，使得交集集合

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}), \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K})\} \cap ((1,2) \cup (2,\infty))$$

是非空的?

令 $p = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K})$（相应地， $p = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K})$）。Schep [27] 证明了 ℓ_p 在 $\boldsymbol{K}$ 中是有限不交可表示的。若定义 p 的上确界（相应地，下确界）被取到，则下述（新颖的）Krivine 定理版本在 $\boldsymbol{K}$ 中给出 ℓ_p^n 的互补副本。

引理 2.4. 设巴拿赫格 $\boldsymbol{K}$ 满足常数为 C 的上 p-估计（$1 \leq p \leq \infty$）。设 $(x_k^*)_{k=1}^n$ 是 $\boldsymbol{K}^*$ 中一个两两不交支撑序列，且该序列与 ℓ_q^n 的典范基 D-等价，其中 q 是 p的共轭指数。那么，对于任意 $E > D$，存在以下线性算子： $J\colon \ell_p^n \to \boldsymbol{K}$和 $Q\colon \boldsymbol{K} \to \ell_p^n$，使得 $P \circ S = \mathrm{Id}^{\ell_p^n}$，$\|J\|\,\|P\| \leq E$，且对于所有 $k = 1, \ldots, n$，$\operatorname{supp}(J(\boldsymbol{e}_k)) = \operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_k^*)$。

引理 2.5. 设巴拿赫格 $\boldsymbol{K}$ 满足常数为 C 的下 p-估计（$1 \leq p \leq \infty$）。设 $\mathcal{X} = (x_k)_{k=1}^n$ 是 $\boldsymbol{K}$ 中一个两两不交支撑序列，且该序列与 ℓ_p^n 的典范基 D-等价。那么，存在以下线性算子： $J\colon \ell_p^n \to \boldsymbol{K}$和 $Q\colon \boldsymbol{K} \to \ell_p^n$，使得 $P \circ S = \mathrm{Id}^{\ell_p^n}$，$\|J\|\,\|P\| \leq CD$，且对于所有 $k = 1, \ldots, n$，$J(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{x}_k$。

引理 2.4 和引理 2.5 的证明。固定 $k = 1$、.....、 n。为证明引理 2.4，我们取 $x_k \in \boldsymbol{K}$，使其满足 x_k^*，且 $\boldsymbol{x}_k^*(\boldsymbol{x}_k) = 1$，$\operatorname{supp}(k_k) = \operatorname{supp}(k_k^*)$，并且 $\|x_k\|$足够接近于 1。为证明引理 2.5，我们取 x_k^* 作为 x_k 的赋范泛函。令 $J\colon \ell_p^n \to \boldsymbol{K}$ 和 $Q\colon \ell_q^n \to \boldsymbol{K}^*$ 由 $J(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{x}_k$ 及 $Q(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{x}_k^*$ 对所有 $k = 1$、.....、 n 定义。令 $P\colon \boldsymbol{K} \to \ell_p^n$ 为 Q 的对偶算子在 $\boldsymbol{K}$ 上的限制。由于对所有 $f \in \boldsymbol{K}$， $P(f) = (\boldsymbol{x}_k^*(f))_{k=1}^n$，$P \circ S = \mathrm{Id}^{\ell_p^n}$。在证明引理 2.4 时，$\|P\| \leq D$，并且我们可以选择 $(x_k)_{k=1}^n$，使得 $\|J\|$ 任意接近 C。在证明引理 2.5 时， $\|J\| \leq D$，并且根据 [24, 命题 1.f.5]， $\|P\| \leq C$。□

定理 2.6. 设 $\boldsymbol{K}$ 为一个巴拿赫格，且 $p \in [1, \infty]$。假设以下任一条件成立：

- $\boldsymbol{K}$ 满足上 p-估计，但对任意 $r > p$都不满足上 r-估计；或者
- $\boldsymbol{K}$ 满足下 p-估计，但对任意 $r < p$都不满足下 r-估计。

那么， ℓ_p 在 $\boldsymbol{K}$中粗略有限不交可补可表示。

证明。令 q 为 p的共轭指数。在第一种情况下，根据[24, 命题 1.f.5]，$\boldsymbol{K}^*$ 满足一个下 q 估计，且 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{K}^*) = q$。因此， ℓ_q 在 $\boldsymbol{K}^*$中有限不交可表示，结论由引理 2.4 得出。在第二个假设成立的情况下， ℓ_p 在 $\boldsymbol{K}$中有限不交可表示，因此结论由引理2.5得出。□

令 $1 < p < \infty$。我们注意到，从 [26],出发的佩尔琴斯基一致同构

$$\ell_p^{2^n-1} \simeq \left(\bigoplus_{j=0}^{n-1} \ell_2^{2^j} \right)_{\ell_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

除非 $p = 2$，否则无法使 ℓ_p 拥有唯一无条件基。因此，定理 2.6 将问题 2.3 与以下问题联系起来。

问题 2.7。 </style}令 (1,2) ∪ (2, ∞)。 ℓ_p 能否粗略地有限可补地表示于某个具有唯一无条件基的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中?

2.3. 具有唯一无条件基的巴拿赫空间的扩张模型。 </style}若一个巴拿赫空间的单位向量系 ()是一个归一化的 1-抑制无条件基，并且对每个递增映射 : ，都与 ()等距等价，则称其为一个次对称序列空间 </style}。已知，对于任意巴拿赫空间中的任意弱零归一化序列 ()，存在子序列 ()和一个次对称序列空间 (， $\|\cdot\|_{\mathbb{S}}$)，使得

$$\|s\|_{\mathbb{S}} = \lim_{(n_j)_{j=1}^m \in \mathbb{N}^{(m)}} \left\| \sum_{j=1}^m a_j \, x_{n_j} \right\|$$

对于每个 $s = \sum_{j=1}^m a_j \, \boldsymbol{e}_j \in c_{00}$。这样的序列 $\mathcal{X}$ 被称为良序列，而 $\mathbb{S}$ 则称为与 $\mathcal{X}$相关联的 $\mathbb{X}$的无条件扩张模型 。

在发现原始 Tsirelson 空间 $\mathcal{T}^*$ 不包含任何与次对称序列空间同构的巴拿赫空间（见 [13,30]）之后，巴拿赫空间的（无条件）扩张模型结构研究在泛函分析中变得重要。因此，Bourgain 等人发现了一个具有唯一无条件基、且不是由 c_0、 ℓ_1和 ℓ_2 的直和构成的空间（即 2-凸化齐雷尔松空间 $\mathcal{T}^{(2)}$）后，根据他们在回忆录中的结果，他们推测，具有唯一无条件基的巴拿赫空间的唯一无条件扩张模型应为 c_0、 ℓ_1 或 ℓ_2。后来，其他无条件基唯一性的结果也得以确立，这些结果印证了 Bourgain 等人的预测。然而，以下一般性问题仍未得到解答。

问题 2.8 ([10, 问题 11.6])。 假设 $\mathcal{X}$ 是一个具有唯一无条件基的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$的无条件基。那么， $\mathbb{X}$的每个无条件扩张模型是否都等价于 ℓ_1、 ℓ_2或 c_0的单位向量基?

为了明确说明，迄今已知的具有唯一无条件基的空间都无法对问题 2.8 给出否定答案，我们暂且绕道简要讨论这些空间的扩张模型结构

。我们先陈述一个著名结果，它可由小扰动原理与滑动驼峰技巧结合得到。

引理 2.9. 设 $\mathbb{S}$ 是具有 *Schauder*基 $\mathcal{X}$的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的一个无条件扩张模型。则 $\mathbb{S}$ 与相对于 $\mathcal{X}$的一个块基本序列相关联。

给定 $1 \le p \le \infty$，我们称 Schauder基 $(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 为一个渐近 ℓ_p-基，如果存在常数 C，使得对所有 $m \in \mathbb{N}$都存在 $k = k(m) \in \mathbb{N}$，使得相对于 $(\boldsymbol{x}_n)_{n=k}^{\infty}$ 的每一个 m元组块都C-等价于 ℓ_p^m的单位向量基。由引理 2.9，空间ℓ_p （若 $p=\infty$则为c_0 ）是具有渐近 ℓ_p-基的巴拿赫空间的唯一扩张模型。

Tsirelson 空间 $\mathcal{T}$的典范基是一个渐近 ℓ_1-基[13], ，因此 Tsirelson 空间 $\mathcal{T}^{(2)}$ 的典范基是一个渐近 ℓ_2-基。由对偶性（见引理 2.4），原始 Tsirelson 空间 $\mathcal{T}^*$ 的典范基是一个渐近 ℓ_∞-基，而 ($\mathcal{T}^{(2)}$)* 的典范基是一个渐近 ℓ_2-基。

给定一个非增函数

$$\varphi\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$$

满足 $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 1$，我们定义

$$F(t) = \exp\left(- \int_0^{-\log(t)} \varphi(s)\, ds \right), \quad 0 \le t \le 1.$$

来自 [11] 且具有唯一无条件基的空间，若它们含有一个具有非唯一无条件基的可补子空间，则它们是由归一化块基本序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 张成的 Orlicz 序列空间 ℓ_F的子空间，其中 F 如上所述，且满足

$$\lim_n \|x_n\|_\infty = 0.$$

这些空间等距同构于与满足以下条件的序列 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 相关联的 Musielak-Orlicz 序列空间：

$$\lim_n F_n(t) = t \text{ uniformly on } [0,1/2]. \tag{2.2}$$

可以证明，满足 (2.2) 的 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 所对应的 Musielak-Orlicz 空间$\ell(F_n)$ 的典范基是渐近 ℓ_1-基。

Cassaza 与 Kalton [11] 证明了：与收敛于 1 或无穷大的序列 $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ 相关联的 Nakano 空间 $\ell(p_n)$，在 $\ell(p_n)$ 与其平方格同构的情形下具有唯一无条件基。若 $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 1，则空间 $\ell(p_n)$ 是与满足 (2.2) 的序列 $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ 相关联的 Musielak-Orlicz 序列空间，因此其典范基是渐近 ℓ_1-基。由对偶性，与收敛于无穷大的序列 $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ 相关联的 Nakano 空间 $\ell(p_n)$ 的典范基是渐近 ℓ_∞-基。

为了描述具有唯一无条件基的空间之直和的扩张模型结构，我们需要一些额外的工具。设 $(\boldsymbol{K}, \|\cdot\|_{\boldsymbol{K}})$ 是可数集 $\mathcal{N}$，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 上的原子格，$(\mathbb{S}_n, \|\cdot\|_{\mathbb{S}_n})_{n\in\mathcal{M}}$ 是次对称序列空间的可数族，且 $(\lambda_n)_{n\in\mathcal{M}} \in (0,\infty)^{\mathcal{M}}$ 属于 $\boldsymbol{K}[\mathcal{M}]$ 的单位球面。则

$$\mathbb{S} := \left(\bigcap_{n\in\mathcal{M}} \lambda_n \mathbb{S}_n\right)_{\boldsymbol{K}} = \left\{\alpha \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \colon \left\|\left(\lambda_n \|\alpha\|_{\mathbb{S}_n}\right)_{n\in\mathcal{M}}\right\|_{\boldsymbol{K}[\mathcal{M}]} < \infty\right\}$$

是一个次对称序列空间。如果 $\mathcal{M}$ 是有限的，那么不同的格 $\boldsymbol{K}$ 和不同的族 $\boldsymbol{\lambda}$ 只会在同一个向量空间上给出不同的等价范数。因此，在这种情况下，我们只需记作 $\mathbb{S} = \cap_{n\in\mathcal{M}} \mathbb{S}_n$。

引理 2.10。 设 $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是一族巴拿赫空间，$\boldsymbol{K}$ 是 $\mathcal{N}$ 上的极小原子格。设 $\mathbb{S}$ 是与弱零良序列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ 相关联的一个无条件扩张模型，其中

$$\mathbb{X} := \left(\bigoplus_{n\in\mathcal{N}} \mathbb{X}_n\right)_{\boldsymbol{K}}.$$

令 $S_{\mathcal{J}} \colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 表示与 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{N}$ 相关联的坐标投影；对于每个 $n \in \mathcal{N}$，令 $P_n \colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}_n$ 表示典范坐标映射。假设对于每个 $\varepsilon > 0$，存在有限的 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{N}$，使得

$$\{j \in \mathbb{N} \colon \|x_j - S_{\mathcal{J}}(x_j)\| > \varepsilon\}$$

是有限的。那么存在 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$、$(\lambda_n)_{n\in\mathcal{M}} \in (0,\infty)^{\mathcal{M}}$，它们属于 $\boldsymbol{K}[\mathcal{M}]$ 的单位球面；并且对于每个 $n \in \mathcal{M}$，存在一个 $\mathbb{X}_n$ 的无条件扩张模型，使得 $\mathbb{S} = (\cap_{n\in\mathcal{M}} \lambda_n \mathbb{S}_n)_{\boldsymbol{K}}$。此外，若对所有 $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ 令 $\lambda_n = 0$，则存在 $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_j \|P_n(y_j)\| = \lambda_n, \quad n \in \mathcal{N}.$$

证明。 运用康托尔对角线法，取一个子序列后，我们可以假设 $(\|P_n(x_j)\|)_{j=1}^{\infty}$ 收敛到某个 $\lambda_n \in [0,\infty)$，对每个 $n \in \mathcal{N}$ 都成立。令

$$\mathcal{M} = \{n \in \mathcal{N} \colon \lambda_n \neq 0\}.$$

进一步取一个子序列，再次运用康托尔对角线法，我们可以假设，对每个 $n \in \mathcal{M}$

$$\left(\frac{P_n(x_j))}{\|P_n(x_j)\|}\right)_{j=1}^{\infty}$$

是与 $\mathbb{X}_n$上的无条件扩张模型$\mathbb{S}_n$ 相关联的良序列。在$(0,\infty)$中选取零序列$(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$。再取一个子序列后，我们递归构造由递增至 $\mathcal{N}$ 的有限集组成的$(\mathcal{J}_k)_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\|(x_j - S_{\mathcal{J}_k}(x_j)\| \leq \varepsilon_k, \quad j \geq k.$$

固定 $k \in \mathbb{N}$ 与 $\alpha = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in c_{00}$。设 $m \in \mathbb{N}$ 使得对$i > m$有 $a_i = 0$。存在 $\mathbb{N}$ 中的递增 m元组$(j_i)_{i=1}^{m}$，使得

$$\left| \|\alpha\|_{\mathbb{S}} - \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i \, x_{j_i} \right\| \right| \leq \varepsilon_k,$$

$$\left| \lambda_n \|\alpha\|_{\mathbb{S}_n} - \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i \, P_n(x_{j_i}) \right\| \right| \leq \frac{\varepsilon_k}{\left\| \sum_{n \in \mathcal{J}_k} \boldsymbol{e}_n \right\|_{\boldsymbol{K}}}, \quad n \in \mathcal{J}_k,$$

$$\|x_{j_i} - S_{\mathcal{J}_k}(x_{j_i})\| \leq \varepsilon_k.$$

综上所述，

$$\left| \|\alpha\|_{\mathbb{S}} - \left\| \sum_{n \in \mathcal{J}_k} \lambda_n \|\alpha\|_{\mathbb{S}_n} \boldsymbol{e}_n \right\|_{\boldsymbol{K}} \right| \leq (2 + \|\alpha\|_1) \, \varepsilon_k.$$

令 k 趋于无穷，且 α 遍历 c_{00}，即得证。 □

引理 2.10 尤其适用于有限族，此时它给出如下结论。

命题 2.11. 设$(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathcal{N}}$为巴拿赫空间的一个有限族。若$\mathbb{S}$ 是 $\oplus_{n \in \mathcal{N}} \mathbb{X}_n$的一个无条件扩张模型，则存在 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{N}$，且对每个 $n \in \mathcal{J}$ 存在 $\mathbb{X}_n$ 的一个无条件扩张模型 $\mathbb{S}_n$，使得 $\mathbb{S} = \cap_{n \in \mathcal{J}} \mathbb{S}_n$。

我们还给出一个关于无限直和的结果。

命题 2.12. 设 $p \in [1, \infty]$ 与$(\boldsymbol{K}_n)_{n \in \mathcal{N}}$为满足一致上 p-估计的极小原子格的一个可数族。设$\boldsymbol{K}$ 为 $\mathcal{N}$上的一个极小原子格。设 $\mathbb{S}$ 为

$$\mathbb{X} := \left(\bigoplus_{n \in \mathcal{N}} \boldsymbol{K}_n \right)_{\boldsymbol{K}}.$$

(i) 假设 ℓ_p （若 $p = \infty$，取 c_0）是 $\boldsymbol{K}$ $\mathbb{S} = \ell_p$ $\mathcal{M} \subseteq$ 的唯一无 $\mathcal{N}$ $\lambda_n \, {}_{n \in \mathcal{N}} \in$ 0 ∞ $^{\mathcal{N}}$ $\boldsymbol{K}[\mathcal{M}]$ 条件扩张模型。那么，要么，要么在 的单位球面中存在 ,()(,)，并且对每个 $n \in \mathcal{M}$，存在 $\boldsymbol{K}_n$ 的无条件扩张模型 $\mathbb{S}_n$，使得 $\mathbb{S} = (\cap_{n \in \mathcal{N}} \lambda_n \mathbb{S}_n)_{\boldsymbol{K}}$。

(ii) 假设对每个 $n \in \mathcal{N}$，空间 ℓ_p 都是 $\boldsymbol{K}_n$ 的唯一无条件扩张模型。那么，要么 $\mathbb{S} = \ell_p$，要么 $\mathbb{S}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的扩张模型。

证明。 根据引理 2.9， $\mathbb{S}$与两两不交序列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$相关联。由于 $\mathbb{X}$ 是满足上 p-估计的原子格，$\ell_p \subseteq \mathbb{S}$。根据康托尔对角线论证，我们可以假设存在 $(\lambda_n)_{n \in \mathcal{N}}$ 属于 $[0, \infty)$，使得

$$\lim_j \|P_n(x_j)\| = \lambda_n, \quad n \in \mathcal{N},$$

其中 $P_n\colon\ \mathbb{X}\to\mathbb{X}_n$ 为典范坐标映射。根据引理 2.10，我们可以假设存在 $\varepsilon>0$，使得对所有有限的 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{N}$ 以及所有 $j_0\in\mathbb{N}$，都存在 $j>j_0$，使得 $\|S_{\mathcal{J}}(x_j)\|>c$。取一个子序列后，我们找到两两不交序列 $(\mathcal{N}_k)_{k=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{N}$，使得对所有 $j\in\mathbb{N}$都有 $\|y_j\|\geq c$，其中

$$y_j=S_{\mathcal{N}_j}(x_j).$$

此外，如果

(A) $\lambda_n=0$ 对所有 $n\in\mathcal{N}$,

那么，利用滑动驼峰技巧，我们可以得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j-y_j\|<\infty.$$

由于 $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ 与 $\boldsymbol{K}$中的一个序列等距等价，进一步取一个子序列后，我们可以假设存在一个与 $(y_j/\|y_j\|)_{j=1}^{\infty}$相关联的 $\boldsymbol{K}$ 的无条件扩张模型 $\mathbb{S}_0$。取 $\varepsilon>0$ 和$\alpha=(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 属于 c_{00}。令 $m\in\mathbb{N}$ 满足：对 $k>n$，有 $a_n=0$。存在一个递增的 m-元组 $(j_k)_{k=1}^{m}$，属于 $\mathbb{N}$，使得

$$\left|\|\alpha\|_{\mathbb{S}}-\left\|\sum_{k=1}^{m}a_kx_{j_k}\right\|\right|<\varepsilon,\quad \left|\|\alpha\|_{\mathbb{S}_0}-\left\|\sum_{k=1}^{m}a_k\frac{y_{j_k}}{\|y_{j_k}\|}\right\|\right|<\varepsilon.$$

由于

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{m}a_kx_{j_k}\right\|&\geq\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_kS_{\mathcal{N}_{j_i}}(x_{j_k})\right\|\\&\geq\left\|\sum_{i=1}^{m}a_iS_{\mathcal{N}_{j_i}}(x_{j_i})\right\|\\&\geq c\left\|\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{y_{j_i}}{\|y_{j_i}\|}\right\|,\end{aligned}$$

我们得到

$$\|\alpha\|_{\mathbb{S}}\geq c\,\|\alpha\|_{\mathbb{S}_0}-(1+c)\varepsilon.$$

令 ε趋于零，并使 α 遍历 c_{00}中的所有序列，便得到 $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{S}_0$。这一嵌入完成了 (i) 的证明。

我们来证明 (ii)。若 (A) 成立，则 $\mathbb{S}=\mathbb{S}_0$ 为小扰动原理。反之，若存在 $n\in\mathcal{N}$ 使得$\lambda_n>0$，我们将引理 2.10 应用于 $\mathbb{X}_n$ 与其显然的补空间的直和。由此可知，存在 $\boldsymbol{K}_n$ 和 $\mathbb{X}$ 的无条件扩张模型 $\mathbb{S}_n$ 和 $\mathbb{S}_1$，分别满足$\mathbb{S}=\mathbb{S}_n$ 或 $\mathbb{S}=\mathbb{S}_n\cap\mathbb{S}_1$。无论哪种情况，均有 $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{S}_n$。□

众所周知 [2, 定理 4.4] 由c_0, ℓ_1, ℓ_2, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}_{(2)}$ 和 $(\mathcal{T}_{(2)})^*$ 构成的任意有限直和都有唯一无条件基。

由命题 2.11 可知，这些直和的无条件扩张模型只能是 c_0、 ℓ_1和 ℓ_2 。由命题 2.12 可知，$Z_{p,q}$, p, $q \in [1,\infty]$的唯一无条件扩张模型是 ℓ_p 和 ℓ_q 。特别地， $c_0(\ell_1)$、 $\ell_1(c_0)$、 $c_0(\ell_2)$或 $\ell_1(\ell_2)$的任意无条件扩张模型都是 c_0、 ℓ_1 或 ℓ_2。

那些仍然期待巴拿赫空间具有良好普适结构性结果的人，或许会猜想问题 2.8 的答案是肯定的；然而，正如我们将在第 5 节看到的，事实并非如此。

2.4. **超平面问题及相关问题**。给定一个巴拿赫空间 $\mathbb{X}$，存在 $h = h(\mathbb{X}) \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$\{m \in \mathbb{N}\colon \mathbb{X} \oplus \mathbb{F}^m \simeq \mathbb{X}\} = \{hk\colon k \in \mathbb{N}\}$$

（见 [7, 引理 2.8]）。

定义 2.13. 我们称巴拿赫空间 $\mathbb{X}$为超平面稳定的，如果 $h(\mathbb{X}) = 1$，即 $\mathbb{X} \oplus \mathbb{F} \simeq \mathbb{X}$。如果 $h(\mathbb{X}) > 0$，也就是说，存在 $h \in \mathbb{F}$ 使得$\mathbb{X} \simeq \mathbb{X} \oplus \mathbb{F}^h$，我们称 $\mathbb{X}$ 为超平面和稳定的。

类似地，存在 $s = s(\mathbb{X})$ 使得

$$\{m \in \mathbb{N}\colon \mathbb{X}^m \simeq \mathbb{X}\} = \{1 + sk\colon k \in \mathbb{N}\}\,.$$

定义 2.14. 如果 $s(\mathbb{X}) = 1$，即$\mathbb{X}^2 \simeq \mathbb{X}$，则称巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 为平方稳定 的。如果 $s(\mathbb{X}) > 0$，也就是说，存在 $m \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ 使得 $\mathbb{X}^m \sim \mathbb{X}$，我们称 $\mathbb{X}$ 为幂稳定的。

在泛函分析中自然出现的大多数空间既是超平面稳定的，也是平方稳定的。这一规律的第一个反例可追溯至 [19], ，当时 James 构造了一个巴拿赫空间 $\mathbb{J}$，满足 $s(\mathbb{J}) = 0$ 且 $h(\mathbb{J}) = 1$。

Gowers [15] 构造的空间 $\mathbb{G}$ 证明，巴拿赫超平面问题的答案是否定的，也就是说，存在超平面非稳定的巴拿赫空间。事实上，Gowers [15] 证明了$h(\mathbb{G}) = 0$ ，后来 Gowers 和 Maurey [17] 证明了 $s(\mathbb{G}) = 0$。因此，Gowers 空间 $\mathbb{G}$ 证明了存在既非超平面稳定、也非平方稳定的巴拿赫空间。

Gowers 随后在 [16] 构造了一个巴拿赫空间 $\mathbb{M}$ ，满足 $s(\mathbb{M}) = 2$。之后，Gowers 和 Maurey [17] 为每个 $m \in \mathbb{N}$ 构造了一个巴拿赫空间 $\mathbb{S}_m$ ，满足 $s(\mathbb{S}_m) = m$；还构造了另一个巴拿赫空间 $\mathbb{H}_m$ ，满足$h(\mathbb{H}_m) = m$。在同一篇论文中，Gowers 和 Maurey 猜想，对于所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有$h(\mathbb{S}_m) = 0$ 。据我们所知，这个问题仍未解决。同样，我们也不知道空间 $\mathbb{H}_m$、 $m \in \mathbb{N}$ 是否平方稳定。事实上，下一个问题似乎仍未解决。

问题 2.15. 是否存在一个未能成为超平面稳定的平方稳定巴拿赫空间?

关于巴拿赫空间的施罗德–伯恩斯坦问题询问：假设 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 是满足 $\mathbb{X} \trianglelefteq \mathbb{Y} \trianglelefteq \mathbb{X}$的巴拿赫空间，那么 $\mathbb{X} \simeq$

$\mathbb{Y}$。出自 [16]的Gowers 空间 $\mathbb{M}$以及出自 [17] 的Gowers–Maurey空间 $\mathbb{H}_n$ 与 $\mathbb{S}_n$、$n \geq 2$证明了它在一般情况下并不成立。相比之下，关于无条件基的Schröder-Bernstein型原理确实成立，其有效性已在基的结构理论中得到充分运用。

定理 2.16 （[31, 推论 1]）。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 的无条件基。假设 $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$。则 $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$。

另一个与无条件基的施罗德–伯恩斯坦原理相关的重要结果是幂消去原理，现陈述如下。

定理 2.17 （[1, 定理 2.3]）。设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 的无条件基。假设存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{X}^m \subsetneq \mathcal{Y}^m$。则 $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y}$。

我们强调，将定理 2.16 与定理 2.17 结合起来即可得到引理2.1。这两个结果结合起来还表明，当无条件基 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $\mathcal{X}^m \sim \mathcal{Y}^m$ 时，$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$。巴拿赫空间范畴中的相应结果并不成立。事实上，巴拿赫空间 $\mathbb{X} = \mathbb{S}_4$ 和 $\mathbb{Y} = \mathbb{S}_4^3$ 不同构，而 $\mathbb{Y}^2 = \mathbb{S}_4^6 \simeq \mathbb{S}_2^2 = \mathbb{X}^2$。不过，关于定理 2.17 的巴拿赫空间对应结论，似乎尚无相关信息。

问题 2.18. 是否存在巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$，使得 $\mathbb{X}^2 \trianglelefteq \mathbb{Y}^2$ 与 $\mathbb{X} \ntrianglelefteq \mathbb{Y}$?

下述结果表明，唯一无条件基的存在性提供了超平面和稳定性与幂稳定性之间的联系。

命题 2.19. 设 $\mathbb{X}$ 是具有唯一无条件基 $\mathcal{X}$ 的巴拿赫空间。

(i) 假设 $\mathbb{X}$ 是幂稳定的。则 $\mathcal{X}^2 \sim \mathcal{X}$，并且 $\mathbb{X}$ 既是平方稳定的，也是超平面稳定的。*(ii)* 假设 $\mathbb{X}$ 是超平面和稳定的。则对任意有限基 $\mathcal{V}$，有 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{V} \sim \mathcal{X}$，并且 $\mathbb{X}$ 是超平面稳定的。

证明。设 $\mathcal{U}$ 是一维空间 $\mathbb{F}$ 中的一个基。假设存在 $m \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, 使得 $\mathbb{X}^m \sim \mathbb{X}$。由于 $\mathcal{X}^m$ 是与 $\mathbb{X}$ 同构的空间的半归一化无条件基,

$$\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X} \oplus \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{X}^2 \subsetneq \mathcal{X}^m \sim \mathcal{X}.$$

根据定理 2.16，$\mathcal{X} \sim \mathcal{X} \oplus \mathcal{U} \sim \mathcal{X}^2$。因此，$\mathbb{X} \simeq \mathbb{X} \oplus \mathbb{F} \simeq \mathbb{X}^2$。

现在假设存在 $m \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, 使得 $\mathbb{X} \oplus \mathbb{F}^m \simeq \mathbb{X}$。由于 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{U}^m$ 是与 $\mathbb{X}$ 同构的空间的半归一化无条件基,

$$\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X} \oplus \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}^m \sim \mathcal{X}.$$

根据定理 2.16， $\mathcal{X} \sim \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$ 从而 $\mathbb{X} \simeq \mathbb{X} \oplus \mathbb{F}$。 □

命题 2.19 提醒我们，若要回答问题 2.2，我们必须集中关注使得 $s(\mathbb{X}) = 0$的巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 。事实上，任何一个具有唯一无条件基的平方非稳定巴拿赫空间都会提供一个反例，从而对问题 2.2 给出肯定的解答。

3. 具有基的空间之间的严格奇异算子

回顾一下，两个巴拿赫空间 $\mathbb{X}$与 $\mathbb{Y}$ 之间的算子 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$是严格奇异的，如果它在 $\mathbb{X}$ 的任意无限维子空间上的限制都不是同构嵌入。从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的所有严格奇异算子所成的空间是一个在左复合与右复合下封闭的向量空间，并且它包含所有紧算子所成的空间（见 [21]）。

定义 3.1. 设 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 与 $\mathcal{Y} = (\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 分别为巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$的Markushevich基。设$(\boldsymbol{y}_n^*)_{n\in\mathcal{N}}$为 $\mathcal{Y}$的对偶基。 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$相对于 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 的矩阵是二重序列

$$\boldsymbol{\mu}(T; \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \left(\boldsymbol{y}_k^*(T(\boldsymbol{x}_n))\right)_{n\in\mathcal{N},k\in\mathcal{K}}.$$

若算子 T 相对于 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是大致对角算子，则 $\boldsymbol{\mu}(T; \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的行和列分别是 $c_{00}(\mathcal{K})$ 和 $c_{00}(\mathcal{N})$ 中的序列。

注意，若 T 是大致对角算子，则只要 $f \in \mathbb{X}$ 有限支撑， $T(f)$ 就是有限支撑的。

设 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是巴拿赫空间的 Markushevich 基。令 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$。给定任意算子 $T \in \mathcal{B}([\mathcal{X}|\mathcal{A}], \mathbb{X})$，令

$$\boldsymbol{\mu}(T; \mathcal{X}) = (a_{n,k})_{n\in\mathcal{A},k\in\mathcal{N}}$$

为 T 相对于 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{X}$ 的矩阵。 T 的对角线将是族

$$\boldsymbol{\delta}(T; \mathcal{X}) = (a_{n,n})_{n\in\mathcal{A}}.$$

由于 $\boldsymbol{\delta}(T; \mathcal{X}) \in \ell_\infty(\mathcal{A})$，若 $\mathcal{X}$ 是无条件基，我们便可以放心地定义

$$\operatorname{diag}(T; \mathcal{X}) = M_{\boldsymbol{\delta}(T;\mathcal{X})}[\mathcal{X}] \in \mathcal{B}([\mathcal{X}|\mathcal{A}], \mathbb{X}).$$

定义 3.2。设 $\mathbb{X}$ 是具有 Schauder基 $\mathcal{X}$ 的巴拿赫空间， $\mathbb{Y}$ 是一个巴拿赫空间。若满足以下条件，我们称 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 相对于 $\mathcal{X}$ 是严格奇异的

$$\lim_n T(x_n) = 0$$

对于相对于 $\mathcal{X}$ 的每个半归一化块序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 。

引理 3.3。 设 $\mathbb{X}$ 是一个带有 *Schauder*基 $\mathcal{X}$的 *Banach* 空间。假设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ 相对于 $\mathcal{X}$是严格奇异的。那么 T 是严格奇异的。

证明。我们将证明其逆否命题。设 $\mathbb{V}$ 是 $\mathbb{X}$ 的一个无限维子空间，使得 $T|_{\mathbb{V}}$ 是一个同构嵌入。在 $\mathbb{V}$的单位球中取一个一致分离序列 $(z_k)_{k=1}^{\infty}$。设 $(\boldsymbol{x}_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{X}$的对偶基。利用康托尔对角线法，取一个子序列后，我们可以假设对于所有$n \in \mathbb{N}$，$(\boldsymbol{x}_n^*(z_k))_{k=1}^{\infty}$ 均收敛。该序列

$$y_k = z_{2k-1} - z_{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

以及 $(T(y_k))_{k=1}^{\infty}$ 是半归一化的，并且对所有$n \in \mathbb{N}$有 $\lim_k \boldsymbol{x}_n^*(y_k) = 0$。选取 $c > 0$，并利用滑动驼峰技巧，通过取子序列，选取整数序列 $(n_k)_{k=0}^{\infty}$，满足 $n_0 = 0$，使得这些投影

$$x_k = S_{J_k}[\mathcal{X}](y_k)$$

与整数区间 $J_k = (n_{k-1}, n_k] \cap \mathbb{Z}$ 相关联，满足

$$\|y_k - x_k\| \leq c$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$。选取足够小的 c，我们得到 $(x_k)_{k=1}^{\infty}$与 $(T(x_k))_{k=1}^{\infty}$ 都是半归一化的。□

引理 3.4. 设 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 分别为具有 *Schauder*基 $\mathcal{X} =(\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 与 $\mathcal{Y} = (\boldsymbol{y}_k)_{k=1}^{\infty}$的巴拿赫空间，并设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$。假设 $\mathcal{X}$ 是收缩的，且任一大致对角算子 $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$满足

$$|\boldsymbol{\mu}(S; \mathcal{X}, \mathcal{Y})| \leq |\boldsymbol{\mu}(T; \mathcal{X}, \mathcal{Y})|$$

相对于 $\mathcal{X}$ 是严格奇异的。因此，T 相对于 $\mathcal{X}$ 是严格奇异的。

证明。 我们将证明逆否命题。设 $(\boldsymbol{x}_n^*)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(\boldsymbol{y}_k^*)_{k=1}^{\infty}$ 分别是 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 的对偶基。设 $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ 是相对于 $\mathcal{X}$ 的半归一化块序列，使得

$$\limsup_j \|T(z_j)\| > 0.$$

取一个子序列后，我们可以假设 $c_1 := \inf_j \|T(z_j)\| > 0$。令 $c_2 = \sup_j \|z_j\|$。取 $0 < c < c_1$，并定义 $\varepsilon > 0$ 为

$$2\varepsilon c_2 = c_1 - c.$$

取 $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $\mathbb{N}$ 中的一个，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $k_n > n$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\boldsymbol{x}_n^*\| \, \|T(\boldsymbol{x}_n) - S_{k_n}[\mathcal{Y}](T(\boldsymbol{x}_n))\| \leq \varepsilon.$$

那么，存在 $E_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$，其中 $\|E_1\| \leq \varepsilon$ 由下式给出

$$E_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_n^*(z) \left(T(\boldsymbol{x}_n) - S_{k_n}(T(\boldsymbol{x}_n))\right), \quad z \in \mathbb{X}.$$

还取 $(n_k)_{k=1}^{\infty}$，使得 $n_k > k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\boldsymbol{y}_k\| \left\|T^*(\boldsymbol{y}_k^*) - R_{n_k}^*(\boldsymbol{y}_k^*)\right\| \leq \varepsilon.$$

那么，存在 $E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$，其中 $\|E_2\| \leq \varepsilon$ 由下式给出

$$E_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(T^*(\boldsymbol{y}_k^*) - R_{n_k}^*(\boldsymbol{y}_k^*)\right)(z)\, \boldsymbol{y}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{y}_k^* \left(T\left(f - R_{n_k}(z)\right)\right) \boldsymbol{y}_k.$$

设 $T_1 = T - E_1 - E_2$ 并令

$$\boldsymbol{\mu}(T; \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}, \quad \boldsymbol{\mu}(T_1; \mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (b_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$$

当 $n > n_k$ 或 $n > n_k$时，有$b_{n,\,k} = 0$；否则，有$a_{n,\,k} = b_{n,\,k}$。此外，

$$\|T_1(z)\| \geq \|T(z)\| - \frac{c_1 - c}{c_2} \|z\|, \quad z \in \mathbb{X}.$$

因此，对所有 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\|T_1(z_j)\| \geq c$。 □

引理3.5。设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 分别为具有*Schauder*基 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $\mathcal{Y} = (\boldsymbol{y}_k)_{k=1}^{\infty}$的巴拿赫空间，并设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 为一个大致对角算子。假设对于 $\mathbb{X}$中的任意半规范化有限支撑序列$(z_j)_{j=1}^{\infty}$，只要由下式定义的序列$(C_j)_{j=1}^{\infty}$

$$C_j = \bigcup_{k\in\operatorname{supp}(z_j)} \{k\} \cup \operatorname{supp}(T(\boldsymbol{x}_k))$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$均满足$\max(C_j) < \min(C_{j+1})$。那么，$T$ 相对于 $\mathcal{X}$是严格奇异的。

证明。我们将通过证明逆否命题来进行。定义

$$\Psi(A) = \bigcup_{n\in A} \{n\} \cup \operatorname{supp}(T(\boldsymbol{x}_n)), \quad A \subseteq \mathbb{N}.$$

设 $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{X}$ 中的半规范化块基序列，满足 $\inf_m \|T(y_m)\| > 0$。我们将利用如下性质：对每个 $k \in \mathbb{N}$，集合

$$A_k := \{m \in \mathbb{N} \colon k \in \Psi(\operatorname{sup}(y_m))\}$$

是有限的，以此递归地构造 $\mathbb{N}$ 中的 $(m_j)_{j=1}^{\infty}$。令 $m_1 = 1$。设 $j \in \mathbb{N}$，并假定 m_j 已定义。令

$$k_j = \max\left(\Psi(\operatorname{supp}(y_{m_j}))\right), \quad D_j = \bigcup_{k=1}^{k_j} A_k, \text{ and } m_{j+1} = \min(\mathbb{N} \setminus D_j).$$

注意，$m \in D_j$ 当且仅当 $[1, k_j]$ 与 $\Psi(\operatorname{supp}(y_m))$ 相交。因此，根据构造，

$$k_j < \min\left(\Psi(\operatorname{supp}(y_{m_{j+1}}))\right).$$

由于由 $z_j = y_{m_j}$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$ 给出的序列 $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ 是半正规化的，且 $(T(z_j))_{j=1}^{\infty}$ 不收敛到零，因此结论成立。□

4. 算子空间较小的巴拿赫空间的可补子空间无条件结构

1994 年，Gowers 构造了一个具有无条件基、且不同构于 $\mathbb{G}\oplus\mathbb{R}$ 的巴拿赫空间 $\mathbb{G}$，从而对一个被称为超平面问题的 Banach 问题给出了否定答案。随后，Gowers 和 Maurey [17]证明了更强的结果：定义在 $\mathbb{G}$ 上的每个算子都是一个对角算子与一个严格奇异算子之和。因此可以说，$\mathbb{G}$ 的算子数量已少至可能的程度。这促使我们引入一种新型的基，称为严格奇异加对角基，并研究具有无条件基且额外具有这一性质的巴拿赫空间的可补子空间无条件结构。

我们用 $\mathcal{F}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y})$ 表示从 $\mathbb{X}$ 到 $\mathbb{Y}$ 的所有半弗雷德霍姆算子的集合，也就是所有满足以下条件的 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\ \mathbb{Y})$：
(a) $T(\mathbb{X})$ 在 $\mathbb{Y}$ 中是闭的，且
(b) $d_1:=\dim(\text{核}(T))<\infty$。
If

$$d_2:=\operatorname{codim}(f(\mathbb{X});\mathbb{Y})<\infty,$$

条件 (a) 是多余的。T 的弗雷德霍姆指标为

$$\operatorname{ind}(T)=d_1-d_2.$$

若 $\operatorname{ind}(T)\in\mathbb{Z}$，即 $d_2<\infty$，则 T 是一个弗雷德霍姆算子。此类算子的存在意味着 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 之间存在密切关系。事实上，若 $\operatorname{ind}(T)\geq 0$，则 $\mathbb{X}\simeq\mathbb{Y}\oplus\mathbb{F}^{\operatorname{ind}(T)}$。反过来，若 $\operatorname{ind}(T)\leq 0$，则 $\mathbb{X}\simeq\mathbb{Y}_0$，其中 $\mathbb{Y}_0$ 是 $\mathbb{Y}$ 的任意子空间，且 $\operatorname{codim}(\mathbb{Y}_0,\ \mathbb{Y})=-\operatorname{ind}(T)$。

我们将使用以下扰动结果。

定理 4.1 (见 [17, 引理 18])。设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是巴拿赫空间，$T\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是半弗雷德霍姆算子，而 $S\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 是严格奇异算子。那么，$T+S$ 是半弗雷德霍尔姆算子，且 $\operatorname{ind}(T)=\operatorname{ind}(T+S)$。

定义 4.2。巴拿赫空间 $\mathbb{X}$的基 $\mathcal{X}$ 具有对角加严格奇异性质（简称 D+S），如果对所有 $T\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$，差算子 $T-\operatorname{diag}(T;\ \mathcal{X})$ 都是严格奇异的。

引理 4.3。设 $\mathcal{X}=(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是巴拿赫空间的 D+S 无条件基。设 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{N}$和 $T\in\mathcal{B}([\mathcal{X}|\mathcal{A}],\mathbb{X})$ 满足 $\delta(T;\ \mathcal{X})\in c_0(\mathcal{A})$。那么，$T$ 是严格奇异的。

证明。由于 $M_\beta[\mathcal{X}]$ 是紧算子，如果 $\beta\in c_0(\mathcal{A})$，那么 $\operatorname{diag}(T;\ \mathcal{X})$ 也是紧算子。令$S=T\circ M_{\mathcal{A}}[\mathcal{X}]$。根据假设，$R:=S-\operatorname{diag}(S;\ \mathcal{X})$ 是严格奇异的。因此，算子 $Q:=R|_{[\mathcal{X}|\mathcal{A}]}$ 是严格奇异的。于是，$P:=Q+\operatorname{diag}(T;\ \mathcal{X})$ 是严格奇异的。由于 $P=T$，证毕。□

引理 4.3 的部分逆命题也成立。

引理 4.4。 设 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 的 *D+S* 无条件基。设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$和 $T\colon\ [\mathcal{X}|\mathcal{A}] \to \mathbb{X}$ 是同构嵌入。那么 下极限 $\boldsymbol{\delta}(T;\ \mathcal{X}) > 0$。

证明。 令 $\boldsymbol{\delta}(T;\ \mathcal{X}) = (d_n)_{n\in\mathcal{A}}$并反设

$$\liminf_{n\in\mathcal{A}} d_n = 0.$$

于是，存在无限的 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ ，使得 $\lim_{n\in\mathcal{M}} d_n = 0$。令 $S = T|_{[\mathcal{X}|\mathcal{M}]}$。一方面， S是一个同构嵌入。另一方面，根据引理 4.3， S 是严格奇异的。□

我们将通过证明 $\mathcal{X}$ 的任意两个子基仅在平凡情形下才置换等价，来加深对 D+S 无条件基 $\mathcal{X}$的理解。

引理 4.5。 设 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是半归一化的 *D+S* 无条件基。若 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子集，且 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{M}} \sim (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{K}}$，则

$$|\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}| = |\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}| < \infty.$$

证明。 设 $\pi\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ 是一个双射，且存在一个同构S，将 $[\mathcal{X}|\mathcal{M}]$ 映到 $[\mathcal{X}|\mathcal{K}]$，使得对所有 $n \in \mathcal{M}$， $S(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_{\pi(n)}$。注意到

$$\boldsymbol{\delta}(S;\mathcal{X}) = (\delta_{\pi(n),n})_{n\in\mathcal{M}}.$$

由引理 4.4，存在 $F \subseteq \mathcal{M}$ 有限的，使得 $\pi(n) = n$ 对所有 $n \in \mathcal{M} \setminus F$都成立。□

Gowers 和 Maurey 根据以下结果得出了 Gowers 空间 $\mathbb{G}$ 既不是幂稳定的，也不是超平面稳定的这一事实；我们用本文的工具重述该结果。

定理 4.6 (参见 [17, 推论 30])。 设 $\mathbb{X}$ 是具有 *D+S* 无条件基的巴拿赫空间。那么， $\mathbb{X}$ 不同构于其任何真子空间。

证明。 设 $T\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 是到子空间$\mathbb{Y}$上的一个同构嵌入。由引理 4.4，diag$(T;\ \mathcal{X})$ 是一个零指标的弗雷德霍姆算子。因此，由定理 4.1， T 是一个零指标的弗雷德霍姆算子。因此， $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$。□

以下结果表明，存在 D+S 无条件基会带来齐性可补子空间结构。我们注意到，具有唯一无条件基的矩阵空间$Z_{p,\ q}$ 也具有类似的齐性可补子空间结构，正如 Bourgain 等人在 [10]中所证明的那样。

定理 4.7。 设 $\mathbb{X}$ 是一个具有 *D+S* 无条件基 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 的 *Banach* 空间。则 $\mathbb{X}$ 的任意可补子空间都与某个 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ 同构于 $[\mathcal{X}|\mathcal{A}]$。

证明。设 P_1、 $P_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ 为互补投影。令 $\mathbb{Y}_j = P(\mathbb{X}_j)$，以及 $\boldsymbol{\delta}(P_j; \mathcal{X}) = (a_{n,\ j})_{n\in\mathcal{N}}$ $j = 1,\ 2$。反设

$$\gamma := \limsup_{n\in\mathcal{N}} \min_{j=1,2} |a_{n,j}| > 0.$$

于是存在无穷集 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，使得族 $(a_{n,j})_{n\in\mathcal{M}}$, $j = 1, 2$ 远离零。根据博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理，存在无穷集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ 和 $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \infty)$，使得 $\lim_{n\in\mathcal{K}} a_{n,j} = \alpha_j$, $j = 1, 2$。令

$$T = \frac{P_1}{\alpha_2} - \frac{P_2}{\alpha_1}, \quad S = T|_{[\mathcal{X}|\mathcal{K}]}.$$

一方面， T是 $\mathbb{X}$的自同构。另一方面， $\boldsymbol{\delta}(S;\ \mathcal{X}) \in c_0(\mathcal{K})$，因此根据引理 4.3, S 是严格奇异的。

这个荒谬的结论证明了 $\gamma = 0$。因此，存在 $\mathcal{N}$ 的一个划分 $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, 使得 $\lim_{n\in\mathcal{N}_j} a_{n,i} = 0$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$。令

$$T_j = M_{\mathcal{N}_j}[\mathcal{X}] \circ \operatorname{diag}(P_j; \mathcal{X}), \quad R_j = T_j \circ P_j, \quad j = 1, 2.$$

根据引理 4.3, $P_j - T_j$, $j = 1, 2$ 是严格奇异算子。因此，该算子

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{X}} - R_1 - R_2 = P_1^2 + P_2^2 - T_1 \circ P_1 - T_2 \circ P_2 = (P_1 - T_1) \circ P_1 + (P_2 - T_2) \circ P_2$$

是严格奇异的。根据定理 4.1, $R_1 + R_2$ 是零指标弗雷德霍姆算子。因此，该算子

$$(R_1, R_2) \colon \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_2 \to [\mathcal{X}|\mathcal{N}_1] \oplus [\mathcal{X}|\mathcal{N}_2]$$

是零指标弗雷德霍姆算子。因此， $R_j \colon\ \mathbb{Y}_j \to [\mathcal{X}|\mathcal{N}_j]$、 $j = 1$、 2 是相反指标的弗雷德霍姆算子。不妨假设 $k := \operatorname{ind}(R_1) \geq 0$。那么，

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_2| &\geq \operatorname{codim}(R_2(\mathbb{Y}_2); [\mathcal{X}|\mathcal{N}_2])) \\ &\geq \operatorname{codim}(R_2(\mathbb{Y}_2); [\mathcal{X}|\mathcal{N}_2])) - \dim(\operatorname{Ker}(R_2)) = k. \end{aligned}$$

取 $F \subseteq \mathcal{N}_2$，使得 $|F| = k$，并令 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_1 \cup F$ 和 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{N}_2 \setminus F$。我们推得 $\mathbb{Y}_j \simeq [\mathcal{X}|\mathcal{M}_j]$、 $j = 1$、 2。□

我们称巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 中的族 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 是可补的，如果 $[\mathcal{X}]$ 是 $\mathbb{X}$ 的可补子空间。如果 $\mathcal{X}$ 是无条件且可补的，那么存在 $\mathbb{X}^*$ 中的 $\mathcal{X}^* = (\boldsymbol{x}_k^*)_{k\in\mathcal{K}}$ ，使得该映射

$$f \mapsto Q(f) := \sum_{k\in\mathcal{K}} \boldsymbol{y}_k^*(f)\, \boldsymbol{y}_k, \quad f \in \mathbb{X},$$

定义了一个从 $\mathbb{X}$ 到 $[\mathcal{X}]$的有界线性投影。如果情况如此，我们称 $\mathcal{X}^*$是 $\mathcal{X}$ 的投影泛函 ，并称 $Q = Q[\mathcal{X}, \mathcal{X}^*]$为与双正交系（$\mathcal{X}, \mathcal{X}^*$）相关联的投影。

给定 Köthe空间 $\boldsymbol{K}$ 以及 $\boldsymbol{K}\setminus\{0\}$中的一个族 $\mathcal{Y}=(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathcal{K}}$，我们用 $\boldsymbol{L}[\mathcal{Y}]$ 表示由函数范数定义在 $\mathcal{K}$ 上的原子格

$$(a_k)_{k\in\mathcal{K}}\mapsto\left\|\left(\sum_{k\in\mathcal{K}}|a_n|^2\,|\boldsymbol{y}_k|^2\right)^{1/2}\right\|_{\boldsymbol{K}}.$$

这一构造可追溯到 [10], ，在那里它被称为格化过程。

引理 4.8 ([5, 定理 4.2]). 设 $\boldsymbol{K}$ 为一个 *Köthe*空间。设 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathcal{K}}$为 $\boldsymbol{K}$ 中的可补无条件族，其投影泛函为$(\boldsymbol{x}_k^*)_{k\in\mathcal{K}}$。设 $\mathcal{Y}=(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 为 $\boldsymbol{K}$ 中的一个族，使得

$$\inf_{k\in\mathcal{K}}|\boldsymbol{x}_k^*(\boldsymbol{y}_k)|>0$$

并且存在常数 C，使得对所有 $k\in\mathcal{K}$ 有 $|\boldsymbol{y}_k|\le C\,|\boldsymbol{x}_k|$ 。则$\mathcal{Y}$ 等价于原子格 $\boldsymbol{L}[\mathcal{Y}]$ 的单位向量系。

下面的引理包含了我们对定理 5.6 的证明的实质性部分。

引理 4.9. 设 $\mathcal{X}=(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 为巴拿赫空间 $\mathbb{U}$ 的可补无条件基本序列，该空间具有 *D+S* 无条件基 $\mathcal{U}$。若 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{U}$ 是半归一化的，则 $\mathcal{X}\subsetneq\mathcal{U}$。

证明。 我们可以用极小归一化原子格 $\boldsymbol{K}$ 替换 $\mathbb{U}$，并用其单位向量系 $(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 替换 $\mathcal{U}$。令 $(\boldsymbol{x}_k^*)_{k\in\mathcal{K}}$ 为 $\mathcal{X}$ 的投影泛函。考虑矩阵

$$a_{k,n}=\boldsymbol{x}_k^*(\boldsymbol{e}_n),\ b_{k,n}=\boldsymbol{e}_n^*(\boldsymbol{x}_k),\ c_{k,n}=a_{k,n}b_{k,n}\quad k\in\mathcal{K},\ n\in\mathcal{N},$$

及其行 $\alpha_k=(a_{k,\,n})_{n\in\mathcal{N}}$、 $\beta_k=(a_{k,\,n})_{n\in\mathcal{N}}$ 和 $\gamma_k=(c_{k,\,n})_{n\in\mathcal{N}}$、 $k\in\mathcal{K}$。由于 $(\alpha_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 是 $\ell_\infty(\mathcal{N})$ 中的有界族，且 $(\beta_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 是 $c_0(\mathcal{N})$ 中的有界族，因此 $(\gamma_k)_{k\in\mathcal{K}}$ 是 $c_0(\mathcal{N})$ 中的有界族。令

$$C_k=\|\gamma_k\|_\infty=\max_{n\in\mathcal{N}}|c_{k,n}|,\quad k\in\mathcal{K}.$$

反设 $\liminf_{k\in\mathcal{K}}C_k=0$。那么，存在无穷多个 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{N}$ 使得 $\sum_{k\in\mathcal{J}}C_k<\infty$。令 $\mathcal{Y}=(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathcal{J}}$ 和 $\mathcal{Y}^*=(\boldsymbol{x}_k^*)_{k\in\mathcal{J}}$。投影 $Q=Q[\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*]$ 的对角线 $\boldsymbol{\delta}(Q;\,\mathcal{X})=(d_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 给出为

$$d_n=\sum_{k\in\mathcal{J}}c_{k,n},\quad n\in\mathcal{N}.$$

根据控制收敛定理，$\lim_{n\in\mathcal{N}}d_n=0$。因此，由引理 4.3， Q 是严格奇异的。由于 Q 在 $[\mathcal{Y}]$ 上是恒等算子，我们便得到一个荒谬的结论。

这一矛盾证明，族 γ_k、 $k\in\mathcal{K}$最终达到峰值，也就是说，存在 $\mathcal{K}$ 的一个划分$(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)$，使得 $|\mathcal{K}_1|<\infty$，并且对每个 $k\in\mathcal{K}_2$，存在 $n(k)\in\mathcal{N}$，使得

$$\inf_{k\in\mathcal{K}_2}\left|c_{k,n(k)}\right|>0.$$

因此，

$$\inf_{k\in\mathcal{K}_2}\left|a_{k,n(k)}\right|>0,\quad \inf_{k\in\mathcal{K}_2}\left|b_{k,n(k)}\right|>0.$$

取 $\mathcal{U}=(\boldsymbol{e}_{n(k)})_{k\in\mathcal{K}_2}$ 和

$$\mathcal{A}_n=\{k\in\mathcal{K}_2\colon n(k)=n\},\quad n\in\mathcal{N}.$$

根据引理 4.8，$(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{K}_2}$ 与 $\boldsymbol{L}[\mathcal{U}]$ 的单位向量系等价。进而，$\boldsymbol{L}[\mathcal{U}]$ 与

$$\boldsymbol{T}:=\left(\bigoplus_{n\in\mathcal{N}}\ell_2(\mathcal{A}_n)\right)_{\boldsymbol{K}}.$$

由于 $[\mathcal{X}|\mathcal{K}_1]\oplus\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 同构，因此存在一个同构嵌入 $S\colon \boldsymbol{T}\to\boldsymbol{K}$。对每个 $n\in\mathcal{N}$，令 $L_n\colon \ell_2(A_n)\to\boldsymbol{T}$, $n\in\mathcal{N}$ 为典范嵌入，并设

$$\varphi_n=\boldsymbol{e}_n^*\circ S\circ L_n.$$

由于 φ_n 是 $\ell_2(\mathcal{A}_n)$ 上的泛函，只要……，核(φ_n) 就非零

$$n\in\mathcal{N}_1:=\{n\in\mathcal{N}\colon\ |\mathcal{A}_n|\geq 2\}.$$

反设 $\mathcal{N}_1$ 是无限的。对每个 $n\in\mathcal{N}_1 f_n\in\ell_2(\mathcal{A}_n)$，选取满足 $\varphi_n(f_n)=0$ 且 $\|f_n\|=1$ 的……。存在一个等距嵌入

$$R\colon \boldsymbol{K}[\mathcal{N}_1]\to\boldsymbol{T}$$

使得对所有 $n\in\mathcal{N}_1$，$R(\boldsymbol{e}_n)=f_n$。一方面，$S\circ R$ 是一个同构嵌入。另一方面，根据构造，$\operatorname{diag}(S\circ R)=0$。因此，根据引理 4.3，$S\circ R$ 是严格奇异的。

这一矛盾表明 $\mathcal{N}_1$ 是有限的。因此，若

$$\mathcal{N}_2=\{n\in\mathcal{N}\colon\ |\mathcal{A}_n|=1\},\quad \mathcal{A}=\sqcup_{n\in\mathcal{N}_1}\mathcal{A}_n,$$

$\boldsymbol{T}$ 的单位向量系与 $\ell_2(\mathcal{A})\oplus\boldsymbol{K}[\mathcal{N}_2]$ 的单位向量系置换等价。因此，若 $\mathcal{D}=\mathcal{A}\sqcup\mathcal{K}_1$，则 $\mathcal{X}$ 与 $\ell_2(\mathcal{D})\oplus\boldsymbol{K}[\mathcal{N}_2]$ 的单位向量系置换等价。

反设 $\mathcal{D}$ 是无限的。于是，根据定理 4.7，存在 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{N}$ 使得 $\boldsymbol{K}[\mathcal{S}]\simeq\ell_2$。由于 ℓ_2 有唯一的无条件基，$(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathcal{S}}$ 与 $\ell_2(\mathcal{S})$ 的单位向量系置换等价。特别地，对每个无限的 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{S}$，$(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathcal{S}}\sim(\boldsymbol{e}_n)_{n\in\mathcal{H}}$。由于这一断言与引理 4.5 矛盾，$\mathcal{D}$ 是有限的。设

$$k=|\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}_2|-|\mathcal{D}|\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}.$$

如果 $k<0$，那么将存在 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$，使得 $|\mathcal{K}\setminus\mathcal{M}|=-k$，从而 $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{M}}$ 将与 $\boldsymbol{K}$ 的单位向量系等价。因此，$\boldsymbol{K}$ 将同构于 $[\mathcal{X}|\mathcal{M}]$。由于这一断言与定理 4.6 矛盾，$k\geq 0$，故存在 $\mathcal{N}_2\subseteq\mathcal{N}_3\subseteq\mathcal{N}$，使得 $|\mathcal{N}_3\setminus\mathcal{N}_2|=k$。我们推得 $\mathcal{X}$ 与 $\boldsymbol{K}[\mathcal{N}_3]$ 的单位向量系置换等价。

□

定理 4.10. 设 $\mathbb{X}$ 是一个带有 *D+S* 无条件基 $\mathcal{X}$ 的 *Banach* 空间。那么 $\mathbb{X}$ 的每个可补子空间 $\mathbb{Y}$ 都有唯一的无条件基 $\mathcal{Y}$。此外，如果 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是半归一化的，那么$\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{X}$。

证明。 由引理 4.3，性质 D+S 可传递到子基。因此，根据定理 4.7，只需证明 $\mathbb{X}$具有唯一无条件基。设$\mathcal{Y}$ 是 $\mathbb{X}$的另一个半归一化无条件基。由引理 4.9，存在 $\mathcal{X}$的一个子基 $\mathcal{U}$，使得 $\mathcal{Y} \sim \mathcal{U}$。因此， $\mathbb{X} \simeq [\mathcal{U}]$。由定理 4.6， $\mathcal{U} = \mathcal{X}$。□

以下结果与定理 4.7 结合起来，确定了具有 D+S 无条件基的巴拿赫空间的可补子空间结构。

定理 4.11。 设 $\mathcal{X} =(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 是巴拿赫空间中的 *D+S* 半归一化无条件基。假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{N}$ 的子集，且满足 $[\mathcal{X} \mid \mathcal{M}] \simeq [\mathcal{X} \mid \mathcal{K}]$。那么

$$|\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}| = |\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}| < \infty.$$

证明。 结合定理 4.10 和引理 4.5 即可。 □

定理 4.11 的以下推论告诉我们，具有 D+S 无条件基的巴拿赫空间的可补子空间不具有自相似性。

推论 4.12. 设 $\mathbb{X}$ 是具有 *D+S* 无条件基 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$的巴拿赫空间。设 $\mathbb{Y}$ 是一个与其某个真可补子空间同构的巴拿赫空间。那么 $\mathbb{Y}$不能可补地嵌入 $\mathbb{X}$。特别地，如果 $\mathbb{Y}$ 是超平面和稳定或幂稳定的，则它不能可补地嵌入 $\mathbb{X}$。

证明。 假设 $\mathcal{X}$ 是半归一化的。设 $\mathbb{U}$是 $\mathbb{U}$的一个真可补子空间。假设 $\mathbb{Y} \trianglelefteq \mathbb{X}$。由定理 4.7，存在$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$使得 $\mathbb{Y} \simeq [\mathcal{X}|\mathcal{A}]$ 且 $\mathbb{U} \simeq [\mathcal{X}|\mathcal{B}]$。由定理 4.11，$\mathbb{Y}$ 与 $\mathbb{U}$不同构。□

由于自反巴拿赫空间的无条件基是收缩的，以下结果表明，在引理 3.4 中假设基是收缩的确有必要。从 [17,第 5 节1]开始的讨论似乎遗漏了这一条件。

推论 4.13. 设 $\mathbb{X}$ 是一个具有 *D+S* 无条件基的巴拿赫空间 $\mathcal{X}$。那么 $\mathbb{X}$ 是自反的。

证明。根据推论 4.12， ℓ_1 和 c_0 都不能可补嵌入到 $\mathbb{X}$中。众所周知 [18] ，这意味着 $\mathbb{X}$ 是自反的。□

5. Gowers 空间及其凸化的无条件基的唯一性

Gowers 为解决巴拿赫超平面问题而在 [15] 中构造的巴拿赫空间是一个原子格。本节通过证明 Gowers 空间 $\mathbb{G}$ 及其 p-凸化空间 $\mathbb{G}^{(p)}$、$1 \leq p < \infty$具有唯一无条件基，对问题 2.2、2.3、2.7 和 2.8 给出肯定回答。

为方便读者，我们介绍与 $\mathbb{G}$ 相关、并用于处理这一问题的特定术语和性质。

回顾一下，函数 $f\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$ 属于 Schlumprecht 引入的 $\mathcal{F}$ 类 [28]，当且仅当

- $f(1) = 1$ 且 $f(x) < x$ 对于 $x \in (1, \infty)$,
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x\to\infty} x^{-q} f(x) = 0$ 对所有 $q > 0$ 均成立,
- $f(xy) \leq f(x)f(y)$ 对所有 $x, y \in [1,\infty)$，并且
- 函数 $x \mapsto x/f(x)$ 是凹函数。

设 $\mathbb{G}[f]$ 是按照[15]中的相同方式，由给定函数 $f \in \mathcal{F}$构造的巴拿赫空间。Gowers 空间 $\mathbb{G}$在 $f(x) = \log_2(1+x)$（$x \geq 1$）时恰好就是 $\mathbb{G}[f]$。一般而言，对于任意 $f \in \mathcal{F}$，$\mathbb{G}[f]$都是 $\mathbb{N}$ 上的最小规范化柯特空间。根据$\mathbb{G}[f]$ 的定义可知,

$$\sum_{j=1}^{n} \|y_j\| \leq f(n) \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \right\|$$

对于相对于 $\mathbb{G}[f]$的单位向量系 $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ 的所有块序列 $(y_j)_{j=1}^{n}$，均有此下估计。该下估计阻止 ℓ_q, $1 < q \leq \infty$ 粗略块有限可表示于 $\mathcal{E}$ 中。进而，根据 [15, 引理 7]，对于任意 $\varepsilon > 0$、任意 $m \in \mathbb{N}$，以及相对于 $\mathbb{G}[f]$ 的典范基的任意无限规范化块基本序列，都存在 $n \geq m$ 一个进一步的规范化块基本序列 $(y_j)_{j=1}^{n}$，使得

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \right\| \leq (1+\varepsilon) \frac{n}{f(n)}.$$

因此，典范基 $\mathbb{G}[f]$ 的任何块基本序列都不等价于 ℓ_1 的典范基。我们记录一下这些事实所带来的一些直接推论。

命题 5.1。设 $f \in \mathcal{F}$。

(i) 如果 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathbb{N}$ 的某个无限子集上的 $\mathbb{G}[f]$ 的限制，那么 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}) = 1$。***(ii)*** c_0 的典范基和 ℓ_q、$1 \leq q < \infty$ 均不等价于相对于 $\mathbb{G}[f]$ 的典范基的块基本序列。***(iii)*** ℓ_1 可有限块表示于相对于 $\mathbb{G}[f]$ 的典范基的任意（无限）块基本序列中（参见 [15, 引理 1]）。

证明。(i) 和 (ii) 显然，而 (iii) 是 Krivine 定理的推论（见 [8,定理 12.3.9]）。□

给定 $1 \le p < \infty$ 与 $f \in \mathcal{F}$，令 $\mathbb{G}[p,f]$ 表示 $\mathbb{G}[f]$的 p-凸化。下述定理汇集了这些空间的若干性质。在陈述并证明它们之前，我们指出，巴拿赫格中仅涉及两两不交支撑族的那些特征显然可传递到其凸化。特别地，

$$\frac{1}{f^{1/p}(m)}\left(\sum_{j=1}^{m}\|y_j\|^p\right)^{1/p} \le \left\|\sum_{j=1}^{m} y_j\right\| \le \left(\sum_{j=1}^{m}\|y_j\|^p\right)^{1/p}. \tag{5.1}$$

对相对于$\mathbb{G}[p,f]$的单位向量系的所有块序列$(y_j)_{j=1}^m$ 。

定理 5.2. 设 $f \in \mathcal{F}$ 与 $1 \le p < \infty$。

(i) 若 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathbb{G}[p,f]$ 在 $\mathbb{N}$的某个无限子集上的限制，则$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{K}) = p$。*(ii)* ℓ_q、$1 \le q < \infty$与 c_0 均不嵌入 $\mathbb{G}[p,f]$。*(iii)* $\mathbb{G}[p,f]$ 的典范基是有界完备且收缩的无条件基。*(iv)* $\mathbb{G}[p,f]$ 是自反的。*(v)* 若$(\mathbb{S},\|\cdot\|_{\mathbb{S}})$ 是 $\mathbb{G}[p,f]$的无条件扩张模型，则

$$\frac{1}{f^{1/p}(m)}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_j|^p\right)^{1/p} \le \|s\|_{\mathbb{S}} \le \left(\sum_{j=1}^{m}|a_j|^p\right)^{1/p}.$$

对所有 $s=\sum_{j=1}^m a_j\,\boldsymbol{e}_j \in c_{00}$。

(vi) ℓ_p 在相对于 $\mathbb{G}[p,f]$ 的典范基的任意（无限）块基本序列中有限块可补表示。

证明。(i) 由命题 5.1(i) 得出。要得到 (ii)，只需将命题 5.1(ii) 与 [6, 命题 2.3] 结合。根据 James定理（参见 [8, 定理 3.3.1 和 3.3.2]），(ii) 蕴含 (iii) 和 (iv)。将引理 2.9 与 (5.1) 结合可得 (v)。

注意，定理 2.6 表明，ℓ_p 在 $\mathbb{G}[p,f]$ 中可粗略地不交有限可补表示。为证明更强的结果 (vi)，我们考虑 p 的共轭指数 q 。根据 (5.1) 和 [24,命题 1.f.5],， $\mathbb{G}[p,f]$ 的对偶空间的范数满足以下估计

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\|x_k^*\|^q\right)^{1/q} \le \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k^*\right\| \le f^{1/p}(m)\left(\sum_{k=1}^{m}\|x_k^*\|^q\right)^{1/q}$$

对于相对于典范基的每个块基本序列 $(x_k^*)_{k=1}^m$ 。这些估计表明，ℓ_r，$r \ne q$ 不能在典范基中粗略地有限块可表示。因此，结合 Krivine 定理与引理 2.4，便可得证。□

作者尚不清楚 $\boldsymbol{\tau}(\mathbb{G}[p,f])$ 的值。块可表示性与不交可表示性之间的细微差别需要澄清，才能回答这个问题。我们还指出，定理 5.2 为了解 $\mathbb{G}[p,f]$ 的扩散模型结构提供了有价值的信息，但并未彻底解决这一问题。

Gowers 和 Maurey 证明了 $\mathbb{G}$ 的典范无条件基具有 D+S 性质。在这里，我们将证明一个更一般的结果。首先，我们记录 [17] 中的一个技术性结果，随后给出一个组合引理。

引理 5.3 （见 [17, 引理的证明 27]）。设 $f \in \mathcal{F}$。设 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 c_{00} 中的非零向量序列，我们将其视为 $\mathbb{G}[f]$ 中的序列。对所有 $n \in \mathbb{N}$，令 $A_n = \operatorname{supp}(x_n)$、$B_n = \operatorname{supp}(y_n)$ 以及 $C_n = A_n \cup B_n$。假设

- $A_n \cap B_n = \emptyset$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，
- $\max(C_n) < \min(C_{n+1})$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，并且
- 存在一个有界线性映射 $V\colon [x_n\colon n \in \mathbb{N}] \to \mathbb{G}[f]$ 使得 $V(x_n) = y_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。

于是，$\lim_n \|y_n\| / \|x_n\| = 0$。

引理 5.4. 设 $\mathbb{X}$ 是一个具有 *Markushevich* 基 $\mathcal{X} = (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ 的巴拿赫空间。设 $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$ 满足 $\operatorname{diag}(T;\mathcal{X}) = 0$。设 $x \in \mathbb{X}$ 和 $J \subseteq \mathcal{N}$ 为有限的，使得

$$\bigcup_{n\in\operatorname{supp}(f)} \{n\} \cup \operatorname{supp}(T(\boldsymbol{x}_n)) \subseteq J.$$

Then

$$T(x) = 2 \operatorname*{Ave}_{A\subseteq J} S_A[\mathcal{X}] \circ T \circ S_{J\setminus A}[\mathcal{X}](x).$$

证明。只需证明在 $x = \boldsymbol{x}_n$ 的情形下结论成立，其中 $\{n\} \cup \operatorname{supp}(T(\boldsymbol{x}_n)) \subseteq J$。令 $\boldsymbol{\mu}(T) = (a_{n,k})_{(n,k)\in\mathcal{N}^2}$。我们有

$$\sum_{A\subseteq J} S_A[\mathcal{X}] \circ T \circ S_{J\setminus A}(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{A\subseteq J\setminus\{n\}} \sum_{k\in A} a_{n,k}\, \boldsymbol{x}_k = 2^{|J|-1} \sum_{k\in J\setminus\{n\}} a_{n,k}\, \boldsymbol{x}_k.$$

由于 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_n) \subseteq J \setminus \{n\}$，故结论成立。 □

定理 5.5. 设 $f \in \mathcal{F}$ 且 $1 \le p < \infty$。那么，$\mathbb{G}[p,f]$ 的典范无条件基具有 *D+S* 性质。

证明。反设典范基 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ of $\mathbb{X} = \mathbb{G}[p,f]$ 不具有 D+S 性质。那么存在一个非严格奇异算子 $T_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$，使得 $\operatorname{diag}(T_1;\mathcal{E}) = 0$。由引理 3.3、3.4 和 3.5，存在 $c > 0$, $T_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$，使得 $\operatorname{diag}(T_2;\mathcal{E}) = 0$；存在一个递增整数序列 $(n_j)_{j=0}^{\infty}$，满足 $n_0 = 0$；还存在一个半归一化序列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$，属于 $\mathbb{X}$，使得 $\|T_2(x_j)\| \ge 2c$，并且

$$\bigcup_{n\in\operatorname{supp}(x_j)} \{n\} \cup \operatorname{supp}(T_2(\boldsymbol{e}_n)) \subseteq J_j := (n_{j-1}, n_j] \cap \mathbb{Z}$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立。由引理 5.4，存在 J_j 的一个划分 $(A_j,\ B_j)$，使得向量

$$y_j = S_{A_j}[\mathcal{E}] \circ T \circ S_{B_j}[\mathcal{E}](x_j)$$

满足 $\|y_j\| \geq c$。设 $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$、$B = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ 和 $T_3 = S_A \circ T_2 \circ S_B$。置

$$z_j = S_{B_j}[\mathcal{E}](x_j),$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$，$C_j = \mathrm{supp}(z_j)$ 且 $D_j = \mathrm{supp}(y_j)$。对所有 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $T_3(z_j) = y_j$、$C_j \cap D_j = \emptyset$ 和 $C_j \cup D_j \subseteq J_j$。

对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们用 $u_j = |z_j|^{1/p}$ 和 $v_j = |y_j|^{1/p}$ 定义 $\mathbb{Y} := \mathbb{G}[f]$ 中的向量。序列 $\mathcal{U} := (u_j)_{j=1}^{\infty}$ 和 $\mathcal{V} := (v_j)_{j=1}^{\infty}$ 是半正规化的，且对所有 $j \in \mathbb{N}$，$\mathrm{supp}(u_k) = C_k$ 且 $\mathrm{supp}(v_k) = D_j$。由于 $\mathcal{U}$ 的向量是两两不交支撑的，存在有界线性映射 $T_4 \colon [\mathcal{U}] \to \mathbb{Y}$，使得对所有 $j \in \mathbb{N}$ 有 $T(u_j) = v_j$。由引理 5.3，$\lim_j \|v_j\| / \|u_j\| = 0$。这一矛盾使证明结束。□

现在我们可以对问题 2.2、2.3、2.7 给出肯定回答，并对问题 2.8 给出否定回答。

定理 5.6。设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{G}[p, f]$ 的一个无限维可补子空间，其中 $f \in \mathcal{F}$ 和 $1 \leq p < \infty$。那么：

(i) $\mathbb{X}$ 有唯一无条件基。*(ii)* $\mathbb{X}$ 不是幂稳定的。*(iii)* $\mathbb{X}$ 不是超平面和稳定的。*(iv)* $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{X}) = p$。*(v)* c_0 和 ℓ_q、$1 \leq q < \infty$、$q \neq p$ 都不是 $\mathbb{X}$ 的扩张模型。特别地，若 $p \notin \{1, 2\}$，则 $\mathbb{G}[p, f]$ 有一个不同于 c_0、ℓ_1 或 ℓ_2 的扩张模型。

定理 *5.6* 的证明。只需结合定理 5.5、定理 4.10、定理 4.6 和定理 5.2。□

6. 开放问题

研究格结构唯一性中的一个著名一般性问题如下。

问题 6.1（见 [7, 问题 1.1]）。设 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{Y}$为具有唯一无条件基的 Banach 空间。$\mathbb{X} \oplus \mathbb{Y}$ 是否具有唯一无条件基?

由于无条件基唯一性理论主要针对与其平方同构的 Banach 空间发展起来，因此在 $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ 的情形下讨论问题 6.1 从未被提上日程。鉴于定理 5.6，这种情形值得研究。

问题 6.2. 设 $m \in \mathbb{N}$、$m \geq 2$。$\mathbb{G}^m$ 是否有唯一的无条件基?

注意到 $\mathbb{G}^m$ 可以自然地识别为 $\mathbb{G}(\mathbb{V})$，其中$\mathbb{V}$ 是一个 m 维巴拿赫空间，并且可以在此背景下发展 D+S 理论。给定 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$，属于 $\mathbb{G}(\mathbb{V})$ 或 $\mathbb{G}^*(\mathbb{V}^*)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $x_n = x(n)$。若存在序列 $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{B}(\mathbb{V})$，使得对所有 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{G}(\mathbb{V})$，$T$ ($\mathbb{G}(\mathbb{V})$) 是对角的，即满足$T(x) = (T_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$，则称端同态 T 为对角端同态。用这一术语来说，我们可以利用向量格 $\mathbb{G}(\mathbb{V})$ 具有 D+S 性质这一点，证明 $\mathbb{G}[\mathbb{V}]$ 的任意补无条件基$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathcal{K}}$，若其投影泛函 $(\boldsymbol{x}_k^*)_{k\in\mathcal{K}}$ 属于 $\mathbb{G}^*(\mathbb{V}^*)$，则满足

$$\liminf_k \sup_n \|\boldsymbol{x}_k^*(n)\|\,\|\boldsymbol{x}_k(n)\| > 0.$$

然而，为了利用引理 4.8，我们应当弥合这个估计与

$$\liminf_k \sup_n |\boldsymbol{x}_k^*(n)(\boldsymbol{x}_k(n))| > 0.$$

关键在于，至少先验地看，$\boldsymbol{x}_k^*(n)$ 和 $\boldsymbol{x}_k(n)$ 相对于 $\mathbb{V}$ 的某个基，可能在不同的坐标上达到峰值。

凸化过程定义了乘法半群 $[1,\infty)$ 在巴拿赫格类上的作用。若考虑 $0 < p < 1$ 的 p-凸化空间，就得到一个群作用。为获得这种更丰富的结构，我们付出的代价是拓宽研究范围，进而研究拟巴拿赫格。

问题 6.3. $\mathbb{G}^{(p)}$, $0 < p < 1$ 是否有唯一无条件基?

尽管迄今为止，拟巴拿赫格理论已奠定了坚实基础，这主要归功于 Kalton 的工作（见 [5, 20]），但在处理问题 6.3 之前，仍有一些背景结果需要澄清。事实上，拟巴拿赫空间之间算子的扰动理论似乎尚付阙如。无论如何，试图将定理 5.6 的证明原样推广到 $0 < p < 1$ 的情形，是行不通的。我们指出，当 $p < 1$ 时，$\mathbb{G}[p, f]$, $f \in \mathcal{F}$ 的典范基不是收缩的，因此引理 3.4 不适用于这个基。我们还指出，在缺乏局部凸性的情况下，引理 5.4 并不能给出我们所取平均的某些向量的拟范数下界。因此，我们不知道 $\mathbb{G}[p, f]$, $0 < p < 1$ 的典范基是否具有 D+S 性质。

参考文献

[1] F. Albiac 和 J. L. Ansorena，关于无条件基的平方的置换等价，《数学进展》**410** (2022)，第 108695 号论文，26 页。[2] , 无条件基的唯一性 $\ell^2 \oplus \mathcal{T}^{(2)}$，《美国数学会会刊》**150**(2022)，第 2 期，709–717 页。[3] , 准巴拿赫空间无限直和的无条件基唯一性，《正性》**26** (2022)，第 2 期，第 35 号论文，43 页。

[4] ——,Tsirelson 空间及其凸化中的贪婪型基的结构，Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 25 (2024)，第 3 期，1357–1382 页。[5] ,向量值 H_p-空间之间的同构，针对 $0 < p \leq 1$ 以及无条件结构的唯一性，arXiv 预印本（2025）。[6] F. Albiac、J. L. Ansorena、S. J. Dilworth 和 D. Kutzarova，次对称基本序列的二分定理及其在 Garling 空间中的应用，Trans. Amer. Math. Soc. 374 (2021)，第 3 期，2079–2106 页。[7] F. Albiac、J. L. Ansorena 和 P. Wojtaszczyk，H_p（$\mathbb{T}$）的无条件基唯一性，以及 H_p（$\mathbb{T}$）对于 $0 < p < 1$ 的无条件基唯一性，J. Funct. Anal. 283 (2022)，第 7 期，第 109597 号论文，24 页。[8] F. Albiac 和 N. J. Kalton，《巴拿赫空间理论专题》，第二版，Graduate Texts in Mathematics，第 233 卷，Springer，[Cham], 2016。Gilles Godefroy 作序。[9]B. Beauzamy 和 J.-T. Lapresté，《巴拿赫空间的展开模型》，Travaux en Cours。[进行中的工作], Hermann，巴黎，1984。[10] J. Bourgain、P. G. Casazza、J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，具有唯一无条件基（相差一个置换）的巴拿赫空间，Mem. Amer. Math. Soc. 54 (1985年)，第 322 期，iv+111。[11] P. G. Casazza 和 N. J. Kalton，巴拿赫空间中无条件基的唯一性，Israel J. Math. 103 (1998年)，141–175 页。[12] ，c_0-积中的无条件基的唯一性，Studia Math. 133 (1999)，第 3 期，275–294 页。[13] P. G. Casazza 和 T. J. Shura，《Tsirelson 空间》，Lecture Notes in Mathematics，第 1363 卷，Springer-Verlag，柏林，1989年。附录由 J. Baker、O. Slotterbeck 和 R. Aron 撰写。[14] I. S. Edelstein 和 P. Wojtaszczyk，巴拿赫空间直和中的投影与无条件基，Studia Math. 56 (1976)，第 3 期，263–276 页。[15] W. T. Gowers，巴拿赫超平面问题的解，Bull. London Math. Soc. 26 (1994)，第 6 期，523–530 页。[16] ,巴拿赫空间施罗德-伯恩斯坦问题的解，Bull. London Math. Soc. 28 (1996)，第 3 期，297–304 页。[17] W. T. Gowers 和 B. Maurey，算子空间很小的巴拿赫空间，Math. Ann. 307 (1997)，第 4 期，543–568 页。[18] R. C. James，巴拿赫空间中的基与自反性，Ann. of Math. (2) 52 (1950)，518–527 页。[19] ，一致非方形巴拿赫空间，Ann. of Math. (2) 80 (1964)，542–550 页。[20]N. J. Kalton，非局部凸格的凸性条件，Glasgow Math. J. 25 (1984)，第 2 期，141–152 页。[21] T. Kato，线性算子的零度、亏格及其他量的扰动理论，J. Analyse Math. 6 (1958)，261–322 页。[22] G. Köthe 和 O. Toeplitz，《具有无穷多个坐标的线性空间与无穷矩阵环》，J. Reine Angew. Math. 171 (1934)，193–226 页。[23] J. Lindenstrauss 和 A. Pełczyński，L_p-空间中的绝对求和算子及其应用，Studia Math. 29 (1968)，275–326 页。[24] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri，《经典巴拿赫空间。II——函数空间》，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [《数学及其交叉领域成果》], 第 97 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1979年。[25] J. Lindenstrauss 和 M. Zippin，具有唯一无条件基的巴拿赫空间，J. Functional Analysis 3 (1969)，115–125 页。[26] A. Pełczyński，某些巴拿赫空间中的投影，Studia Math. 19 (1960)，209–228 页。

[27] A. R. Schep，*Krivine* 定理与巴拿赫格的指标，1992，第111–121页。巴拿赫格上的正算子与半群（库拉索，1990）。[28] T. Schlumprecht，一个可任意扭曲的巴拿赫空间，Israel J. Math. **76**（1991），第1-2期，81–95。[29] I.Singer，巴拿赫空间中的基 *II*，罗马尼亚社会主义共和国科学院出版社，布加勒斯特；Springer-Verlag，柏林—纽约，1981。[30] B. S. Tsirelson，不可能将 ℓ_p 或 c_0 嵌入任意巴拿赫空间，《功能分析与应用》**8**（1974），第2期，57–60。[31] M. Wójtowicz，关于 F-空间中无条件基的置换等价，《函数逼近与数学评论》**16**（1988），51–54。

数学、统计与计算机科学系，以及 InaMat^2，纳瓦拉公立大学，潘普洛纳 31006，西班牙电子邮箱: fernando.albiac@unavarra.es

数学与计算机科学系，拉里奥哈大学，洛格罗尼奥 26004，西班牙电子邮箱: joseluis.ansorena@unirioja.es