协变多尺度负耦合在动态黎曼流形上：无限维系统中拓扑持久性的几何框架

Pengyue Hou[1]

独立研究者，基辅，乌克兰

2026年3月7日

摘要

维数约化是非线性演化方程中耗散的普遍结果，常常导致吸引子坍缩以及动力学丰富性的丧失。为应对这一问题，我们针对一大类半线性耗散偏微分方程，在光滑黎曼流形上内蕴地建立了协变多尺度负耦合系统（C-MNCS）的几何框架。所提出的耦合在动力学上分离的谱带之间重新分配能量，从而诱导尺度平衡反馈，以防止有限维退化。我们在索博列夫空间中建立了耦合状态-度量演化系统的短时适定性，并推导了相空间收缩率的先验估计。此外，在全局有界性假设下，我们证明全局吸引子具有严格有限的豪斯多夫维数和卡普兰-约克维数。为将抽象拓扑界与物理可实现性联系起来，我们分离出核心的自适应谱负耦合（ASNC）机制以进行数值验证。高分辨率实验——在共形平坦二维动态标量流形上采用全耦合ETDRK4格式以及连续的基于QR分解的李雅普诺夫指数计算——证实了理论预测。这些计算明确展示了高维吸引子在强烈宏观耗散下的稳定化。这一几何一致的机制为在无限维动力系统中维持结构复杂度与多尺度控制提供了新范式。

关键词：维数坍缩；拓扑持久性；无限维动力系统；信息几何里奇流；李雅普诺夫谱；协变投影

1. 引言

高维动力系统的演化通常表现为扩张性的保守力与收缩性的耗散力之间的竞争。在无限维相空间（例如支配偏微分

[1] 邮箱：p.hou@student.uw.edu.pl | ORCID： https://orcid.org/0009-0004-6009-1060

方程的希尔伯特空间）中，一种根本性的病态现象往往会出现：维数坍缩。当时间趋近于无穷（$\tau \to \infty$）时，系统的有效自由度可能呈指数衰减，迫使状态向量进入一个平凡的低维子流形，或趋于一个测度为零的不动点。在物理现实中，这对应于对时空混沌的不自然抑制，例如湍流级联被人为遏制，或自组织生物系统的复杂性丧失。从数学上看，这一现象对应于演化算子中雅可比矩阵的奇异性以及相空间体积形式的消失。经典耗散系统依赖这种平滑性质来实现正则性，但在复杂的自组织系统中，保持复杂吸引子结构至关重要。

本文探讨旨在遏制这种收缩的现有非局部耦合模型在理论上的不足。尽管标准还原论框架（例如 Mori–Zwanzig形式 [4, 15, 29], ）为解析尺度建模提供了一条途径，但它们通常缺乏内在的几何机制，无法主动遏制解析尺度吸引子的收缩。当这类框架被直接应用于弯曲的状态流形时，可能会产生以下两个关键缺陷：

1. **几何法向漂移：**应用非局部算子往往会违反流形固有的拓扑约束，产生未补偿的法向分量，使状态向量偏离指定的切丛，进入环境欧几里得空间。

2. **代数开放性：**缺乏协变一致性会导致投影算子与演化动力学之间存在非零交换子，即 $[\mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}, \mathbf{V}] \neq 0$。

尽管零模奇异性的稳定性已在有限维情形下通过 [11] （一篇未发表预印本；关于有条件地使用该参考文献以及本文核心结果独立性的讨论，请参见注 6.1）得到成功处理，但无限维连续体中的维数坍缩这一根本问题仍需采用不同的几何方法。C-MNCS 通过引入规范协变框架，弥合了这一差距；当传统有限维投影失效时，该框架仍能保留拓扑复杂性。我们提出 C-MNCS，作为对谱动力学的纯几何统一。我们将负耦合机制视为规范场，并引入协变投影交换子补偿（CPCC）项，由此确立抑制法向漂移的形式几何条件。此外，在 [5, 6] 和 [3], 中确立的经典无限维吸引子理论与迹形式体系基础上，我们提出一个形式化假设，并以明确的渐近界作为支撑，阐述正拓扑维数的持续存在。为弥合抽象拓扑界与物理可实现性之间的差距，我们通过数值验证直接佐证了这一假设。通过在连续空间代理模型中评估奥塞列杰茨谱与卡普兰–约克维数，我们以经验方式证明，强宏观耗散能够抑制维数坍缩。经典的吸引子维数估计基于能量不等式、决定模态技术和体积收缩论证而建立。这些方法为耗散型偏微分方程生成的吸引子分形维数提供上界。然而，谱稳定化机制与李雅普诺夫不稳定性持续存在之间的相互作用仍未得到充分理解。

主要贡献。本文的主要结果如下：

- **（引理 3.1）** 对每个固定的 τ_0，瞬时算子 $\mathrm{L}(\tau_0) = \nu\Delta_{\mathcal{A}} + \mathcal{N}_{cov}(\tau_0)$ 是一个闭的、稠密定义的扇形算子，并在 $L^2(\Omega)$ 上生成有界解析半群，条件是 $m > \theta - 1$ （其中 $m \geq 1$、$\theta > 0$，m 是正则化多项式次数，θ 是定义 3.1 中的分数谱阶）。在假设 5.1 下，时变算子族 $\{\mathrm{L}(\tau)\}$ 通过 Kato–Tanabe 理论 [13] 生成强连续演化系统。

- **（定理 4.1）** 存在唯一的补偿场 $\mathcal{C}_{CPCC} \in H^s(\Omega)$，它是 L 的相对有界扰动，相对界为 $a_0 < 1$ （保持解析半群结构），并且使状态轨迹始终限制在 $\mathrm{M}(\tau)$ 的协变切丛中（对所有 $\tau \in [0, T)$）。

- **（引理 5.1）** 在假设 5.1 下，DeTurck 修正的信息几何里奇流是严格抛物型的，并且在 $[0, T)$ 上存在唯一的短时间光滑解。
- **（定理 6.1，以物理条件 5.2 为前提）** 全局吸引子 $\mathfrak{A}$ 具有严格有限的豪斯多夫维数和卡普兰–约克维数：$D_H(\mathfrak{A}) \leq D_{KY}(\mathfrak{A}) < \infty$。
- **（猜想 6.1）** 在明确的时间平均谱支配条件下，协变 ASNC 可防止李雅普诺夫谱完全坍缩。这一结果目前仍是一个开放猜想，并得到第 6.4 节数值证据的支持。

2. 数学基础：黎曼设定

将物理基流形记为 Ω，它是一个 n 维闭黎曼流形 [1] （紧致且满足 $\partial\Omega =$），并配备含时度量张量 $g_{\mu\nu}(\tau)$。系统在时刻 τ = L^2 Ω Ψ τ $\in \Gamma$ E $E \to \Omega$ $r \geq 1$ 的状态记为 $\Psi(\ )$，它在无限维希尔伯特空间 H ( ) 中演化，并作为秩为 的向量丛的截面 ( ) ( )。我们将由动态拓扑支配、由物理上允许的状态组成的无限维子流形定义为状态流形 $\mathrm{M}_{state} \subset \mathrm{H}$。

2.1 规范协变导数

标准偏导数无法在非局部变换下保持 Ω 的几何结构。我们将规范协变导数 D_μ 定义为：

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \mathcal{A}_\mu \Psi$$

这里，联络 1-形式 $\mathcal{A}_\mu$ （规范势）是定义在 E 上的联络，即 $T^*\Omega \otimes \mathrm{End}(E)$ 的一个截面，其局部分量 $\mathcal{A}_\mu$ 作为自同态作用于 E 的纤维，以表示系统相互作用所诱导的局部曲率。我们将内部自由度视为向量丛 E （秩为 r ）的截面，并赋予其联络 $\mathcal{A}_\mu$，从而能够以坐标无关的方式描述多尺度相互作用。对于秩为 r 的复向量丛，这对应于 $U(r)$ 规范结构；在阿贝尔情形下（$r = 1$ 复线丛），则简化为 U（1）相位旋转。联络形式 $\mathcal{A}_\mu$ 补偿谱密度的局部尺度变化，确保导数算子在局部重新缩放下保持协变。在本分析中，假定背景规范联络 $\mathcal{A}_\mu$ 要么

是静态的，或完全从属于状态演化（仅受运动学约束），因此规范曲率 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$ 被视为预先给定且依赖于状态的源项，而非独立的动力学变量，从而不会引入自主的杨–米尔斯曲率动力学。

令 D_τ 表示相对于宏观时间的协变导数。为唯一确定规范演化并避免引入辅助的时间杨–米尔斯动力学，我们采用时间规范（外尔规范），使联络的时间分量为零，即

$\mathcal{A}_\tau = 0$ $D_\tau \equiv$。因此，。

∂_τ

2.2 有界耗散耦合 算子

为避免系统接近相变时出现解析奇异性，我们引入宏观耗散率标量 $\gamma(\tau) \in \mathrm{R}^+$。我们仅根据瞬时状态向量 $\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau)\phi_k(\tau)$ 定义谱比容量 $\mathcal{C}_{spec}(\tau)$，其中该级数在 $L^2(\Omega)$ 拓扑下收敛。这里，系数 $a_k(\tau)$ 和特征函数 $\phi_k(\tau)$ 分别通过状态和演化度量依赖于 τ；展开是相对于时间冻结的博赫纳拉普拉斯算子 $-\Delta_{\mathcal{A}(\tau)}$ 的瞬时特征基进行的，而该基的时间演化由第 3.2 节的规范变换所支配。令归一化谱密度为 $\rho_k = |a_k|^2 / \sum |a_j|^2$。

假设 **2** Ψ 0 $\in H^s$ Ω $s > m +$ **.**

1（初始正则性）。初始状态必须满足 ( ) ( )，其中 / （耦合算子的分数阶和多项式次数将在第 3 节中作形式化定义）。这确保瞬态谱能量界对于 $\tau \in [0, T)$ 始终一致有界。

瞬时容量定义为算子谱相对于该密度的方差：

$$\mathcal{C}_{spec}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \, (\lambda_k - \bar{\lambda})^2$$

其中，$\bar{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \, \lambda_k$ 表示谱的密度加权平均特征值。在假设 2.1 下，$\mathcal{C}_{spec}(\tau)$一致有界：$\mathcal{C}_{spec}(\tau) \leq \| \Psi(\tau) \|_{H^s}^2 \cdot C_s(\Omega) < \infty$，其中几何常数 $C_s(\Omega)$ 仅取决于 s 和 Ω。该界由紧致流形 Ω [28, 上的特征值增长外尔定律 $\lambda_k \sim C_\Omega k^{2/n}$ 得出（定理 11.2], ），它给出谱密度的多项式衰减，足以保证加权和 (2.2) 收敛。这确保负耦合力保持有界，满足生成强连续解析半群所需的条件。

3. 协变 ASNC：谱算子

定义 3.0（C-MNCS演化方程）

令 $H = L^2(M, E)$。C-MNCS动力学方程由以下演化方程定义

$$\partial_\tau \Psi = \nu \Delta_A \Psi + F_{phys}(\Psi) + N_{cov}(\Psi) + C_{CPCC}(\Psi)$$

其中

- $\nu > 0$ 是基准运动黏度参数,
- $\nu\Delta_A\Psi$ 表示协变耗散算子（其中 Δ_A 是博赫纳拉普拉斯算子）,
- $F_{phys}(\Psi)$ 表示物理非线性对流相互作用算子,
- $N_{cov}(\Psi)$ 是协变自适应谱负耦合（ASNC）算子，并且
- $C_{CPCC}(\Psi)$ 表示协变投影交换子补偿项。

我们定义协变自适应谱负耦合（ASNC）算子，记作 $\mathcal{N}_{cov}$。其主要功能是在不违反因果性的前提下，逆转流形上的谱扩散过程（概念上类似于连续数据同化和反馈稳定机制 [16]）。

从物理上讲，令$[L]$ 和$[T]$ 分别表示长度与时间的量纲，拉普拉斯特征值按$[\lambda_k] = L^{-2}$标度。为保持频率相关运动黏度的量纲齐次性，宏观耗散标量$\gamma(\tau)$必须具有$\left[L^{2\theta}T^{-1}\right]$的物理量纲。

定义 3.1（协变 ASNC）。

$$\mathcal{N}_{cov}(\Psi) \equiv \gamma(\tau)(-\Delta_{\mathcal{A}})^{\theta}(I + \kappa(-\Delta_{\mathcal{A}})^{m})^{-1}\Psi$$

此处，$\Delta_{\mathcal{A}}$ 是Ω [2, 17, 18]上的博赫纳拉普拉斯算子，$\theta \in \mathrm{R}^{+}$ 为分数谱阶，$m \geq 1$ 为正则化多项式次数。耦合参数 $\kappa > 0$ 严格具有$[L^{2m}]$ 的物理量纲，以确保量纲齐次性。在物理耗散系统的语境中，状态向量由基准运动黏度$\nu\Delta_{\mathcal{A}}\Psi$、物理非线性对流项$F_{phys}(\Psi)$以及我们的协变 ASNC 算子驱动。

3.1 谱演算与解析半群生成

为确保演化方程严格适定，必须从数学上证明动力学的线性主部生成一个强连续解析半群。

假设 3.1（斜厄米联络）。 规范联络 $\mathcal{A}_{\mu}$ 在 E 的纤维上是斜厄米的（即 $\mathcal{A}_{\mu}^{*} = -\mathcal{A}_{\mu}$）。对于秩一丛（$r = 1$），这等价于 $\mathcal{A}_{\mu}$ 为纯虚数。在此假设下，$-\Delta_{\mathcal{A}} = -g^{\mu\nu}(D_{\mu}D_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}D_{\rho})$ 在 $L^{2}(\Omega)$ 上非负且自伴，其定义域 $D(-\Delta_{\mathcal{A}}) = H^{2}(\Omega) \cap \Gamma(E)$ 是稠密的。

令 $-\Delta_{\mathcal{A}}$ 为定义在 $L^{2}(\Omega)$ 上的非负自伴博赫纳拉普拉斯算子，其稠密定义域为 $D(-\Delta_{\mathcal{A}}) = H^{2}(\Omega) \cap \Gamma(E)$。给定其谱分解 $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \geq 0}$，协变 ASNC 算子通过椭圆算子分数幂的函数演算

[2, 17, 严格定义如下:
18]

$$\mathcal{N}_{cov}(\Psi) = \gamma(\tau)\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{\theta}}{1 + \kappa\lambda^{m}}\, dE_{\lambda}\Psi$$

因此，系统的总线性未补偿算子为 L(

$\tau = \nu\Delta_{\mathcal{A}} +)$ ()。

$\mathcal{N}_{cov}$引理 *3.1*（瞬时扇形性与解析半群生成；非自治扩展）。假设谱指标满足物理条件 $m > \theta - 1$ （其中 $m \geq 1$、 $\theta > 0$），且基准运动黏度满足 $\nu > 0$。在假设 *3.1* 下，对每个固定的 $\tau_0 \in [0, T)$，瞬时算子 $L(\tau_0) = \nu\Delta_{\mathcal{A}} + \mathcal{N}_{cov}(\tau_0)$ 是定义于 $L^2(\Omega)$ 上的闭稠密定义扇形算子。因此，$L(\tau_0)$ 生成一个有界解析半群 $\{e^{tL(\tau_0)}\}_{t\geq 0}$ *[10,* 定理 *1.3*。*4]*。在关于 $\gamma(\tau)$ 时间正则性的假设 *5.1* 下，算子族 $\{L(\tau)\}_{\tau\in[0,T)}$ 通过 *Kato–Tanabe* 理论 *[13]* 生成一个强连续演化系统 $\{U(\tau, s)\}_{0\leq s\leq\tau<T}$ 。

证明（瞬时扇形性）。 由于 $-\Delta_{\mathcal{A}}$ 在假设 3.1 下是自伴的，且具有纯离散、实且非负的谱 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$，L($\tau_0$) 在特征基 $\{\phi_k\}$ 上的特征值为

$$\sigma_k = -\nu\lambda_k + \gamma(\tau_0)\frac{\lambda_k^{\theta}}{1 + \kappa\lambda_k^{m}}.$$

由于 $m > \theta - 1$，拉普拉斯耗散在高频处严格主导 ASNC 注入：

$$\lim_{\lambda_k\to\infty} \frac{\gamma(\tau_0)\lambda_k^{\theta}(1 + \kappa\lambda_k^{m})^{-1}}{\nu\lambda_k} = 0.$$

存在充分大的 $R > 0$ 以及常数 $c_0 > 0$ ，使得对所有 $\lambda_k > R$， $\sigma_k \leq -c_0\lambda_k$。这保证谱 σ(L(τ_0)) 被某个实数 $\omega \in$R 从上有界。

由于 L(τ_0) 是自伴的（作为自伴算子的函数演算）且有上界，预解集

$\rho \quad \tau_0 \qquad\qquad \Sigma_{\delta\,\omega} = \{\zeta \in \ | \ \zeta - \omega \ | < (\mathrm{L}( ))$

$\pi\ 2 + \delta \qquad \delta > 0$
包含扇形 ,{ C: arg( ) / }（对某个 ）。此外，对任意 $\zeta \in \Sigma_{\delta,\omega}$，预解算子满足严格界

$$\| \left(\zeta I - \mathcal{L}(\tau_0)\right)^{-1} \|_{op} \leq M/|\zeta - \omega|.$$

由于 L(τ_0) 是顶点为 ω 、半角为 $\pi/2 + \delta$ 的扇形算子，解析半群生成定理 [10, 定理 1.3.4] 表明 L(τ_0) 生成一个有界解析半群。

非自治扩展。 根据假设 5.1， $\gamma(\tau)$ 在 $[0, T)$ 上一致连续且有界，因此算子族 {L(τ)} 是满足 Kato– Tanabe 条件 [13] 的稳定扇形算子族：(i) 定义域 $D(\mathrm{L}(\tau)) = H^2(\Omega) \cap \Gamma(E)$ 与 τ 无关；(ii) 预解式一致有界：$\|(\zeta I - \mathrm{L}(\tau))^{-1} \| \leq M/|\zeta - \omega|$ 对 τ 一致；(iii) $\tau \mapsto$L(τ) 在 $[0, T)$ 上关于算子范数是赫尔德连续的，且定义于 $H^2(\Omega)$。在这些条件下，Kato–Tanabe 定理 [13] 保证存在强连续的演化系统。■

备注 3.1（正则化效应）。瞬时半群的解析性严格保证，对于任意初始条件 $\Psi(0) \in L^2(\Omega)$，状态向量会瞬间变得光滑，因此 $\Psi(\tau) \in D(\mathrm{L}(\tau)^k)$ 对所有 $\tau > 0$ 均成立，从而满足信息几何里奇流耦合所要求的高阶索伯列夫正则性。

3.2 保体积规范变换

由于空间度量 $g_{\mu\nu}(\tau)$ 随时间演化，黎曼体积元 $d\mu_\tau = \sqrt{\det g(\tau)}\, dx$ 并非定常。为保持博赫纳拉普拉斯算子特征基 $\phi_j, \phi_{kg(\tau)} = \delta_{jk}$ 相对于演化度量内积的正交归一性，我们为特征函数定义一种几何规范变换。为补偿体积形式的变化，特征函数 $\phi_j(\tau)$ 的演化必须满足：

$$\partial_\tau \phi_j = \widehat{\mathcal{W}} \phi_j + \frac{1}{2} \sigma(\tau) \phi_j$$

其中 $\sigma(\tau) = g^{\mu\nu}\, \partial_\tau g_{\mu\nu} = \partial_\tau \log\det g(\tau)$，因此体积形式的演化为 $\partial_\tau \sqrt{\det g} = \frac{1}{2}\sigma(\tau)\sqrt{\det g}$。

这里，$\widehat{\mathcal{W}}$ 是表示几何标架联络的反厄米算子，其明确的定义如下：

$$\widehat{\mathcal{W}} = -1/2\; g^{\mu\nu}\big(\partial_\tau g_{\mu\nu}\big) \cdot P_\Gamma \qquad \text{with } \big(\widehat{\mathcal{W}}\big)_{ij} = -\langle \phi_i, \big(\partial_\tau \phi_j^{\mathrm{ref}}\big)\rangle_{g(\tau)},$$

其中 ϕ_j^{ref} 表示由 $g(\tau)$ 的列维-奇维塔联络输运的特征函数（即“参考平行移动”分量），而 P_Γ 是相应的投影。反厄米性（$\widehat{\mathcal{W}}^* = -\widehat{\mathcal{W}}$）源于列维-奇维塔平行移动保持 $g(\tau)$-内积 [1, Chapter 4] 这一事实。这种规范固定保留了状态流形上的概率流：对所有 $\tau \in [0, T)$，归一化 $\phi_j, \phi_{jg(\tau)} = 1$ 均得以维持。## 4. 协变投影交换子补偿（CPCC）

在状态流形 M 的模态度量 $\mathcal{G}_{ij}(\tau)$ 随时间动态演化的背景下，传统的静态投影算子不可避免地会产生几何漂移。CPCC 通过引入几何诱导项和空间平滑核来尊重宏观因果性，从而实现跨尺度负耦合的广义协变性。

4.1 定义与范数

- **定义 4.1（状态流形度量）：** 状态流形 M 配备动态模态度量 $\mathcal{G}_{ij}(\tau) = \phi_i(\tau), \phi_j(\tau)_{g(\tau)}$，即相对于瞬时 $g(\tau)$-内积的演化特征基的格拉姆矩阵。根据第 3.2 节中的规范变换 (3.6)–(3.7)，$\mathcal{G}_{ij}(\tau) = \delta_{ij}$ 在连续层面上恒成立；在有限截断中，则通过附录 A.1 中的连续格拉姆–施密特QR方案来保证正交归一性。

- **物理条件 4.1（算子度量的一致强制性）：** 为保证 CPCC公式中使用的逆度量算子 $\mathcal{G}^{-1}$ 严格有界，我们在短时间区间 $\tau \in$ 上施加一致强制性条件

[0,T 5 1 $c>$) 与引理 . . 一致。我们假设存在一
0 $\tau\in[0,T$ $\mathcal{G}\ \tau\ X\ X\ \geq c\parallel X\parallel^2$ $X\in$ $\tau\in[0,T$
个严格为正的常数，在) 上一致，使得对所有 H 和)，均有 ( ) , 。

• **定义 4.2（切空间投影算子）：** 令 $\mathrm{P}_{\Psi}^{\top}$: H $\to T_{\Psi}$M 为相对于瞬时度量 $\mathcal{G}(\tau)$ 的正交投影。其法向补算子定义为 $\mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}=I-\mathrm{P}_{\Psi}^{\top}$。

• **定义 4.3（抛物平滑核）：** 我们将 $\mathcal{K}(x,y)$ 定义为空间局部化且快速衰减的光滑核，以确保补偿力在有效相互作用半径内局部作用，同时保持马尔可夫解析半群生成。相应的积分算子为 $(\mathbb{K}f)(x)=\int_{\Omega}\mathcal{K}(x,y)f(y)\,d\mu_g(y)$，它将 $H^{-s}(\Omega)\to H^{s}(\Omega)$ 映射为……，这归功于 $\mathcal{K}$ 的假设快速衰减（参见 [10, 第 1] 章）。

4.2 CPCC 的构造

CPCC 算子由代数对易子补偿和几何归纳补偿组成：

$$\mathcal{C}_{CPCC}(\Psi,\tau)=\int_{\Omega}\mathcal{K}\,(x,y)\left(\mathcal{C}_{alg}(y)+\mathcal{I}_{geo}(y)\right)d\mu_g(y)$$

其中：

• **代数项：** $\mathcal{C}_{alg}=-\mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}(\nu\Delta_{\mathcal{A}}\Psi+F_{\mathrm{phys}}(\Psi)+\mathcal{N}_{cov}(\Psi))$。可以立即验证 $\mathbf{V}+\mathcal{C}_{alg}=\mathrm{P}_{\Psi}^{\top}\mathbf{V}$，这证实代数项将未补偿的速度投影到切丛上。从几何上看，如果允许未补偿的演化力自由作用，它们不可避免地会产生垂直于状态流形曲面的速度分量，导致轨迹不合乎物理地“泄漏”到环境希尔伯特空间中。$\mathcal{C}_{alg}$ 充当瞬时恢复性几何约束——类似于连续的法向剪切——明确测量并消除这些正交分量，从而将状态速度向量严格限制在瞬时切丛T_{Ψ}M上。

• **几何项：** 状态流形的几何演化在谱振幅方程中诱导出一个非绝热耦合项，该项通过特征基$\phi_i(y)$映射回空间场：

$$\mathcal{I}_{geo}(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathcal{G}^{-1}\dot{\mathcal{G}})_{ij}a^{j}\right]\phi_i(y)$$

其中，矩阵乘积$(\mathcal{G}^{-1}\dot{\mathcal{G}})_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{G}^{ik}\,\dot{\mathcal{G}}_{kj}$ 明确表示该矩阵乘积的(i,j)项，k 为求和（缩并）指标。

4.2.1 几何归纳项的物理作用

几何诱导项充当幺正规范补偿器。在物理上，它抵消了里奇诱导的

状态流形度量的收缩。CPCC 因此恢复了**不变范数性质**，使能量密度在拓扑演化过程中保持该性质：

$$\frac{d}{d\tau}\sum_{i=1}^{\infty}\left|a^i\right|^2|_{\mathcal{I}_{geo}} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{a^i}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\mathcal{G}^{-1}\dot{\mathcal{G}}\right)_{ij}a^j\right] = \mathrm{Re}\langle a, \mathcal{G}^{-1}\dot{\mathcal{G}}\,a\rangle_{\ell^2} = 0.$$

最后一个等式可由以下严格论证得到。正如定义 4.1 中所确立的（并由第 3.2 节的规范变换 (3.6)–(3.7) 所保证），特征基 $\{\phi_k\}(\{\tau\})$ 始终保持为 $g(\tau)$-正交归一的：$\phi_i(\tau),\ \phi_j(\tau)$ $_{g(\tau)} = \delta_{ij}$ 对所有 $\tau \in [0, T$ 均成立。令 $\mathcal{G}_{ij}(\tau)$ 定义为该格拉姆矩阵，则在连续层面上 $\mathcal{G}(\tau)$ $= I$ 恒等成立，因此 $\dot{\mathcal{G}} = 0$ ，方程 (4.3) 也就显然成立。更准确地说，$\widehat{\mathcal{W}}$ 的反厄米性（见第 3.2 节）确保对正交归一条件 $\phi_i, \phi_{jg(\tau)} = \delta_{ij}$ 关于 τ 求导时，对所有 i, j 都有 $\dot{\mathcal{G}}_{ij}$ =0，因为反厄米 $\widehat{\mathcal{W}}$ 所产生的贡献相互抵消，而 σ-项则补偿了体积形式变化。在有限截断中，通过附录 A.1 中的连续 QR 格拉姆–施密特步骤强制保持正交归一性，从而离散地得到 $\mathcal{G} = I$ ，因此同样的结论仍然成立。因此，几何诱导项 I_{geo} 正是为确保该守恒性质在离散演化的每一步中成立、并在重新正交归一化之前所必需的修正场。

4.3 核心定理与严格推导

定理 4.1（补偿流的存在性与协变稳定性）。

设状态流形 M由瞬时度量 $\mathcal{G}(\tau)$定义。存在唯一的补偿场 $\mathcal{C}_{CPCC} \in H^s(\Omega)$，使得修正后的演化方程 $\partial_\tau \Psi = \mathbf{V} + \mathcal{C}_{CPCC}$ 满足相切条件 $\mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}(\partial_\tau \Psi) = 0$ ，对所有 $\tau \in [0, T)$ 均成立。此外，算子 $\mathcal{C}_{CPCC}$ 是主耗散算子 L的相对有界扰动，其相对界为 $a_0 < 1$，因此$\mathrm{L} + \mathcal{C}_{CPCC}$ 仍为扇形算子，并生成一个强连续解析半群。

证明。

步骤 1：盖尔范德三元组中的变分表述与唯一存在性 **e.**

为避免陷入仅靠定义形成的同义反复，我们将对 $\mathcal{C}_{CPCC}$ 的要求表述为一个变分问题。目标是找到一个校正项 $\mathbf{V}_{corr}$ ，使交换子残差 $\mathrm{R} = \mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}\left[D_\tau, D_\mu\right]\Psi$消失。我们考虑盖尔范德三元组 $V \subset H \subset V^*$，其中 $V = H^s(\Omega)$ 且 $H = L^2(\Omega)$。

余项 R 属于对偶空间 $H^{-s}(\Omega)$。我们引入抛物型正则化算子 $\mathbb{K}$: $H^{-s} \to H^s$ ，它由平滑核 $\mathcal{K}($ $\int_\Omega \mathcal{K}\ x\ y\ f\ y\ d\mu_g\ y$ $\phi \in H^s\ \Omega$,) 定义（参见定义

4.3）：$(\mathbb{K}f)(\,)\,(\,,\,)\,(\,)\,(\,)$。对于任意测试函数 ( )，我们要求：

$$\langle \mathcal{G}(\tau)\mathbf{V}_{corr}, \phi\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{R}, \mathbb{K}^*\phi\rangle_{H^{-s},H^s}$$

由于物理条件 4.1 保证 $\mathcal{G}(\tau)u, u_{L^2} \geq c \parallel u \parallel_{L^2}^2$，因此 (4.4) 的左端在 $L^2(\Omega)$ 上定义了一个强制有界双线性形式。右端是一个有界线性

泛函，定义在 $L^2(\Omega)$ 上；这由紧嵌入 $H^s \hookrightarrow\hookrightarrow L^2$ (for $s>0$) 以及 $\mathbb{K}^*$作为紧算子的有界性得出。根据 Lax–Milgram 定理 [10, 附录 B], , 存在唯一的 $\mathbf{V}_{corr} \in L^2(\Omega)$ 满足 (4.4)。由于 $\mathbb{K}$ 将 H^{-s} 映射到 H^s，校正项满足 $\mathbf{V}_{corr} \in H^s(\Omega)$，从而确立了 $\mathcal{C}_{CPCC} \in H^s(\Omega)$ 的存在唯一性。

步骤 2：非平凡性与相对有界性。

我们必须确保注入 $\mathcal{C}_{CPCC}$ 不会破坏由 L 生成的半群的解析性。我们对补偿项的 L^2 范数建立一个估计。利用模态度量的强制性（物理条件 4.1），可推导出:

$$\| \mathcal{C}_{CPCC} \|_{L^2} \leq C_1 \| \Psi \|_{H^s} + C_2 \| \dot{\mathcal{G}} \|_{op} \| \Psi \|_{L^2}$$

由于信息几何里奇流（第 5 节）保证度量变化 $\dot{\mathcal{G}}$ 受热力学涡量平方控制，补偿场的范数由耗散算子的分数次幂所控制：$\| \mathcal{C}_{CPCC} \| \leq a_0 \| \mathrm{L}\Psi \| + b_0 \| \Psi \|$，其中 $a_0 < 1$ 适用于足够光滑的 $\mathcal{K}$。

根据 Kato–Rellich 定理 [10, 定理 3.4。2], 由于 $\mathcal{C}_{CPCC}$ 是相对有界的，且相对界为 $a_0 < 1$, 因此受扰算子 $\mathrm{L} + \mathcal{C}_{CPCC}$ 仍然是扇形算子，并继续生成强连续解析半群。

步骤 3：解流形的闭合。

我们验证轨迹的动态锁定。设 $\Pi(\Psi) = \mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}\Psi$ 为面外分量。误差项的演化如下:

$$\frac{d}{d\tau} \| \Pi \|^2 = 2\langle \Pi, \mathbb{P}_{\Psi}^{\perp}(\mathbf{V} + \mathcal{C}_{CPCC}) \rangle_{\mathcal{G}} + \langle \Pi, \dot{\mathbb{P}}_{\Psi}^{\perp} \Psi \rangle_{\mathcal{G}}$$

代入构造 $\mathcal{C}_{CPCC} = -\mathrm{P}_{\Psi}^{\perp}\mathbf{V} + \mathbf{V}_{corr}$ 后，第一项恒为零。第二项表示由流形曲率引起的几何诱导。根据步骤 1 中 $\mathbf{V}_{corr}$ 的构造，该构造专门抵消里奇诱导的度量漂移 $\dot{\mathcal{G}}$，剩余误差 $\Pi(\tau)$ 满足形如 $\partial_\tau \| \Pi \|^2 \leq \lambda(\tau) \| \Pi \|^2$ 的 Gronwall 不等式，其中

$$\lambda(\tau) \leq C \| \dot{\mathcal{G}}(\tau) \|_{op} \| \Psi(\tau) \|_{H^s}^2 \leq C_T < \infty \quad \text{for all } \tau \in [0, T).$$

界 $C_T < \infty$ 由假设 5.1（其控制 $\sup_{\tau \in [0,T)} \| \dot{\mathcal{G}} \|_{op} \leq \delta$）以及备注 3.1 中 Ψ 的 H^s-正则性得出。特别地，$\lambda \in L^1([0, T))$。随后，Gronwall 引理 [10,附录 A] 给出 $\| \Pi(\tau) \|^2 \leq \| \Pi(0) \|^2 \, e^{\int_0^\tau \lambda_{(s)} ds} = 0$，因为对 M 上任意有效初始条件均有 $\Pi(0) = 0$ 。

这证实，CPCC机制并非单纯的代数恒等式，而是一种数学上自洽的几何约束，既能保持流形的拓扑完整性，又能维持全局系统的耗散性。■

5. 度量耦合与信息几何里奇流

假设 5.1（绝热时间尺度分离）。 我们假设度量的宏观几何弛豫时间显著大于微观耗散时间，该时间属于

状态向量。定量地，我们要求 $\sup_{\tau\geq 0}|\partial_\tau g_{\mu\nu}| \leq \delta$ 对一个充分小的常数 $\delta > 0$ 成立，该常数取决于 ν，κ，以及谱隙 $\lambda_2 - \lambda_1$。这使短时演化解耦，从而严格保证博赫纳拉普拉斯算子谱的瞬时光滑性。

5.1. 域分离与统计拉回

令 M_{stat} 为由强度变量 ξ 参数化的热力学局部状态统计流形，其自然配备费歇尔信息度量 $G_{ij}(\xi)$。为将宏观热力学几何与底层空间域耦合起来，我们定义一个光滑的局部状态映射 $\Xi: \Omega \times [0,\infty) \to \mathrm{M}_{stat}$，将时空中的每个点映射到一个局部热力学状态 $\xi(x,\tau) = \Xi(x,\tau)$。通过该映射将费歇尔信息度量拉回到空间基流形上，并将诱导的协变张量场记为 $\mathrm{h}(\tau) = \Xi_\tau^* G$:

$$h_{\mu\nu}(x,\tau) = G_{ij}(\xi)\,\partial_\mu \xi^i\,\partial_\nu \xi^j + \beta g_{\mu\nu}$$

其中，$\beta > 0$ 是一个较小的正则化常数，用于确保热力学源张量非退化。

注 5.1（增广拉回度量）。对于标量热力学变量 $\xi = e(x,\tau) \in \mathrm{R}$，原始拉回 $G(e)(\partial_\mu e)(\partial_\nu e)$ 作为一个 (0,2) 型张量时秩为 1，因此作为黎曼度量是退化的。因此，正则化项 $\beta g_{\mu\nu}$ ($\beta > 0$) 对于确保 $\mathrm{h}_{\mu\nu}$正定是必要的。这种增广是信息几何中的标准做法，不会影响定性动力学；参数 β 是一个建模常数，其物理含义是对背景几何的基底层耦合。

关键在于，为确保空间拉回度量 ($\partial_\mu \xi^i \neq 0$) 严格非平凡，热力学变量 ξ 必须表述为具有空间依赖性的密度场，而非在定义域上积分得到的全局标量。在耗散场动力学这一具体背景下，我们将热力学状态 $\xi(x,\tau)$ 识别为系统的局部涡量平方密度（或局部动能耗散密度），$e(x,\tau) = \frac{1}{2}\left|\nabla_{g(\tau)}\Psi(x,\tau)\right|^2$。

因此，拉回信息度量 $\mathrm{h}_{\mu\nu}(x,\tau)$ 显式编码了局域耗散场的空间梯度。这个空间非均匀张量实际上以系统结构复杂度的局部梯度变化为里奇流提供源项，从而确保几何收缩严格锚定于状态向量所对应的底层物理梯度。

5.2. DeTurck 修正的信息几何里奇流

为根据热力学状态动态演化空间几何，我们假设空间度量 $g_{\mu\nu}(\tau)$ 按照由信息论拉回张量 $\alpha\,\mathrm{h}_{\mu\nu}$ 驱动的修正里奇流演化。

然而，正如几何分析中严格确立的那样，标准里奇流 $-2R_{\mu\nu}$ 此仅为弱抛物。为实现严格抛物性，我们必须通过采用 DeTurck

[9] $\partial_\tau g_{\mu\nu} =$ 由于在微分同胚群作用下保持不变，因 Ω

修正 [7]。我们固定一个光滑且不随时间变化的背景度量，并将其关联的列维-奇维塔联络记为 $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$，定义全局 DeTurck 向量场 W：

$$W^{\mu} = g^{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}\right)$$

李导数 $(\pounds_W g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu W_\nu + \nabla_\nu W_\mu$ 恰好抵消了退化的二阶导数项。（这里我们用 $\pounds_W$ 表示沿 W 的李导数，以区别于第 3 节中的半群算子 L。）请注意，DeTurck 空间微分同胚与向量丛 E上的内部 $U(r)$规范变换在逻辑上相互独立。因此，我们定义 DeTurck 修正的信息几何里奇流：

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g_{\mu\nu} = -2R_{\mu\nu} + (\pounds_W g)_{\mu\nu} + \alpha h_{\mu\nu}$$

引理 5.1（严格抛物性与短时存在性）。 假设热力学拉回张量满足索博列夫界 $\| \mathrm{h}_{\mu\nu} \|_{H^s} \le C$，其中 $s > n/2 + 1$，则 *DeTurck* 修正流（*5.3*）构成一个严格抛物型系统。对于任意初始光滑度量 $g(0)$，存在一个最大存在时间 $T > 0$，使得该流在 $[0, T)$上存在唯一的光滑解。

证明。 修正微分算子 $-2R_{\mu\nu} + (\pounds_W g)_{\mu\nu}$ 的主部恒等地化为严格椭圆的粗拉普拉斯算子 $g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}$ [7, 27]。主符号 $\sigma_P(\xi)$ 满足严格椭圆性界 $\sigma_P(\xi)v, v \ge c|\xi|^2|v|^2$。鉴于热力学态映射 $\Xi_\tau[\Psi]$ 是状态向量的光滑泛函，$\Psi(\tau) \in H^s(\Omega)$ 的高阶索伯列夫正则性通过巴拿赫代数性质严格控制源项 $\alpha \mathrm{h}_{\mu\nu}$，从而保证短时唯一存在性。为严格克服耦合信息几何里奇流固有的拟线性导数损失，完全耦合的态—度量系统 $(g(\tau), \Psi(\tau))$ 的短时存在性不能依赖标准的自治压缩映射。相反，我们通过在乘积空间

$$C\ [0,T \quad _{s+1}\ \Omega \quad \times C\ [0,T \quad H^s\ E \qquad\qquad _{s+1}\ \Omega \ = \ g \in$$

$$H^{s+1} \qquad {}^2T^*\Omega \quad g$$

( ); M ( )) ( ); ( )) 中运用极大 L^p-正则性 [21, 22] 以及 Kato–Tanabe 理论 [13] 来建立其短时存在性，该理论适用于非自治抛物演化方程，其中 M ( ) { (Sym): 正定} 是度量的索博列夫类空间。DeTurck 规范修正确保运动流形上的主微分算子具有所需的一致扇形性。■

物理条件 5.1（热力学度量的非退化性).

我们假设存在有限常数 $K > 0$，使得 $\alpha \mathrm{h}_{\mu\nu} \ge -K g_{\mu\nu}$ 在二次型意义下成立，从而防止源项导致瞬时度量签名坍缩。

物理条件 5.2（耦合系统的全局有界性）。

为防止非线性反馈环导致有限时间爆破，我们假设存在一个全局有界的李雅普诺夫泛函 $\mathcal{V}(g, \Psi)$，使得 $\frac{d\mathcal{V}}{d\tau} \le 0$。尽管证明该耦合里奇流的全局存在性仍是一项艰巨的偏微分方程挑战，我们仍将这种全局有界性作为后续无穷维吸引子分析的基础公理。

注 5.2（物理条件 5.2 下后续结果的适用范围）。 第 *6* 节中所有关于全局吸引子 $\mathfrak{A}$——包括定理 *6.1*、猜想 *6.1* 以及 *Kaplan–Yorke* 维数界——均以物理条件 *5.2* 为前提。只要耦合演化保持全局有界，这些结果便成立；在未来针对耦合里奇态系统的整体存在理论开展分析工作之前，我们将其视为一项工作假设。

6. 全局吸引子、李雅普诺夫谱与维数持久性

在本节中，我们评估 C-MNCS 框架下全局吸引子 $\mathfrak{A}$ 的渐近几何性质（以物理条件 5.2 为前提；参见注 5.2）。我们采用卡普兰–约克维数（D_{KY}）作为衡量流形非退化性的主要度量。

6.1 弗雷歇线性化与奥塞列杰茨谱

令 $\{S(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ 表示由完全耦合流生成的解析半群。无穷小扰动 U 的线性化演化由 $\partial_\tau U = \mathbf{A}(\tau)U$ 控制，其中 $\mathbf{A}(\tau)$ 是非线性向量场的精确弗雷歇导数：

$$\mathbf{A}(\tau) = \nu\Delta_{\mathcal{A}(\tau)} + \mathcal{N}_{cov} + DF_{phys}\big(\Psi(\tau)\big) + D\mathcal{C}_{CPCC}\big(\Psi(\tau)\big)$$

假设全局吸引子 $\mathfrak{A}$ 具有定义良好的不变遍历概率测度 μ，奥瑟尔德乘法遍历定理保证存在一个离散的全局李雅普诺夫指数谱 $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots$，其定义为：

$$\Lambda_j = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \log \| \, DS\big(\tau, \Psi(0)\big)U_j \, \|$$

其中，$DS(\tau, \Psi(0))$ 表示流映射关于初始条件的弗雷歇导数，而 $\{U_j\}$ 是相应的奥瑟尔德基向量。卡普兰–约克维数定义如下：

$$D_{KY}(\mathfrak{A}) = J + \frac{\sum_{j=1}^{J}\Lambda_j}{|\Lambda_{J+1}|}$$

其中 $J = \max\{j : \sum_{i=1}^{j}\Lambda_i \geq 0\}$。

6.2 通过迹不等式得到严格上界

在建立下界之前，我们必须先确保吸引子维数的有限性。

物理条件 6.2（非线性的相对紧性）。

我们假设物理对流非线性 $F_{phys}(\Psi)$ 相对于基准耗散算子 $\Delta_{\mathcal{A}}$ 是相对紧的。具体而言，存在一个指数 $s < 2$，使得 F_{phys} 是从 $H^s(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的有界映射。

定理 6.1（吸引子维数的有限性，基于物理条件 5.2）。

在物理条件 *5.2*、物理条件 *6.2* 以及已确立的度量界 （物理条件 *4.1* 和 *5.1*）下，全局吸引子 $\mathfrak{A}$ 具有严格有限的豪斯多夫维数和 *Kaplan–Yorke* 维数：$D_H(\mathfrak{A}) \le D_{KY}(\mathfrak{A}) < \infty$。

证明思路。根据假设 5.1，度量演化率 $|\partial_\tau g_{\mu\nu}|$ 渐近地受状态耗散支配。这使得我们能够在准静态时间切片上推广应用**Constantin–Foias 迹形式体系** [5, 6] 。具体而言，对于由线性化流 $\mathbf{A}(\tau)$ 输运的 N维体积元，迹公式 [5] 给出：

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}(\tau)|_{\operatorname{span}\{U_1,\dots,U_N\}}\right) \le -\nu \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \operatorname{tr}\left(\left(DF_{phys} + DC_{CPCC}\right)|_{\operatorname{span}\{U_1,\dots,U_N\}}\right)$$

其中，$\{U_1, \dots, U_N\}$ 是 N 维奥塞莱德茨子空间的瞬时标准正交基，λ_j 是相应的拉普拉斯特征值。为将 $-\nu \sum_{j=1}^{N} \lambda_j$ 的上界表示为关于 N 的函数，且该函数相对于耗散呈次线性增长，我们对协变拉普拉斯算子的特征值使用**Lieb–Thirring 不等式** [14] （根据外尔定律 $\lambda_k \sim C_\Omega k^{2/n}$ [28]将其调整至紧黎曼流形情形，遵循 [26]）：

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \ge C_{LT} \frac{N^{1+2/n}}{\left|\operatorname{Vol}_g(\Omega)\right|^{2/n}}$$

其中，C_{LT} 是普适的 Lieb–Thirring 常数 [14]，n 是空间维数。由于高频耗散 $-\nu\lambda_j \sim -j^{2/n}$ 的增长快于对流放大（其上界为 $C \| \Psi \|_{L^\infty}^2$；根据物理条件 6.2 以及通过备注 3.1 和引理 5.1 建立的针对 $s > n/2$ 的 L^∞ 索оболев嵌入 $H^s \hookrightarrow L^\infty$ ，该上界有限），因此存在有限整数 N^*，使得 $\sum_{i=1}^{N^*} \Lambda_i < 0$ 一致成立，从而保证有限的维数上界。■

备注 6.1（有条件地使用参考文献 [11]）。 定理 6.1 证明中所用的L^∞ 正则性，有条件地依赖于来自 [11]的界。参考文献 [11] 是一篇未发表预印本；本文将相关界作为工作假设使用。若在评审时 [11] 仍未发表，则L^∞ 界也可由本文通过备注 . 和引理 . 独立建立的索оболев嵌入 $H^s \hookrightarrow L^\infty$（$s >$ n 2 3 1 5 1 /) 得到。

本文所有其他结果均不依赖于 [11]。

6.3 维数持久性的几何判据

要证明存在严格为正的下界（$\liminf_{\tau\to\infty} D_{KY} > 0$），我们必须证明第一个李雅普诺夫指数满足 $\Lambda_1 \ge 0$。

猜想 6.1（拓扑持久性；尚未证明的猜想，得到第 6.4 节数值证据的支持）。

设系统由协变 *ASNC* 算子 $\mathcal{N}_{cov}$ 驱动。将 $\mathbf{A}(s)$ 的瞬时主特征值定义为 $\mu_1^{inst}(s) = \sup_{\|U\|=1} \langle \mathbf{A}(s)U, U \rangle_{L^2}$。若谱能量

注入对主模态的时间平均耗散满足宏观主导性，具体而言：

$$\limsup_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\mu_1^{inst}(s)\,ds\geq 0$$

因此，几何补偿明确阻止了谱坍缩，从而在连续统极限下保留了非退化拓扑结构（$\liminf_{\tau\to\infty}D_{KY}>0$）。

解析讨论。尽管对于任意非对称黎曼流形，在无限维非自治偏微分方程中对这一猜想给出全局严格的解析证明仍是一个悬而未决的问题，但其背后的几何直觉在根本上是可靠的。正如第6.2节明确展示的，我们对连续二维伪谱代理的数值评估有力地支持了这一猜想，证实协变补偿明确阻止了谱完全坍缩。对于推广到高维流形的情形，这一二维验证提供了一个具有数学依据的基准，弥合了抽象拓扑界与可实现物理系统之间的差距。

6.4 数值验证：动态黎曼流形上的遍历持久性

为通过计算验证猜想 6.1——即协变 ASNC 在强烈宏观耗散和几何收缩下严格阻止拓扑坍缩——我们在动态黎曼流形 $\mathrm{M}(\tau)$ 上设计了一个高度优化的伪谱代理模型。

6.4.0 代理模型的范围与局限性

在展示结果之前，我们明确说明 C-MNCS 的哪些理论特征已在代理模型中实现、哪些经过简化，以及哪些尚未纳入：

特征		代理模型中的状态
分数阶算子 $\mathcal{N}_{cov}$	ASNC	**已实现**（标量谱滤波器，第3.1节）
含时 $g_{\mu\nu}(\tau)$	度量	**已简化**（共形平坦：$g_{ij}=R^2(\tau)\delta_{ij}$；仅有 1 个标量自由度，而非完整的张量）
里奇流演化	flow 度量	**简化**（$R(\tau)$ 的标量常微分方程；无局部曲率奇点）
规范联络 $\mathcal{A}_\mu$		**不存在**（平凡丛 $E=\Omega\times\mathrm{R}$；无非阿贝尔规范）
CPCC项 $\mathcal{C}_{CPCC}$		**不存在**（代理模型测试 ASNC 稳定化；CPCC 仅在存在规范联络时才会出现）
空间维数		$n=2$（相较于理论中的一般 n）
状态场		标量 $u(x,\tau)$（与向量丛的截面 E 相比）

因此，该代理检验了ASNC算子在几何收缩下的核心维数持久性机制，但并未验证规范与CPCC分量。后者属于解析构造，其必要性已由引言中识别的代数失效模式所证明。数值结果证实，由ASNC驱动的谱能量

再分配维持正的Kaplan–Yorke维数，即使在强烈耗散条件下亦然；将其扩展到完整张量几何与规范耦合情形是未来工作的一个方向。

6.4.1 耦合场-度量系统

为在保持计算可处理性的同时验证 C-MNCS 的核心机制，我们对 DeTurck修正的里奇流实施空间齐次的平均场近似。在此情形下，我们假设度量保持共形平坦，$g_{ij}(\tau) = R^2(\tau)\delta_{ij}$，其中全局尺度因子 $R(\tau)$ 吸收 Ricci-DeTurck演化的迹。这一简化使我们能够隔离热力学反馈与谱稳定性之间的相互作用，同时避免处理局部曲率奇点所带来的数值开销。为使计算代理模型具有可处理性，同时捕捉流形收缩的基本物理过程，我们将局部里奇流约化为由空间积分涡量平方驱动的全局共形尺度演化。

为对这一耦合框架进行计算建模，我们定义了一个由宏观热力学度量演化常微分方程驱动的二维标量协变 Kuramoto–Sivashinsky–Burgers（KSB）场。状态向量 $u(\mathbf{x},\tau)$ 与流形的全局度量尺度因子 $R(\tau)$ 通过以下方程共同演化：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\Delta_{g(\tau)}u - \Delta^2_{g(\tau)}u - \gamma u - \frac{1}{2}\left|\nabla_{g(\tau)}u\right|^2 + \mathcal{N}_{cov}(u)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = -\eta(R - R_{\min}) + \alpha\mathcal{E}_{kin}(u)$$

其中 $g_{ij}(\tau) = R^2(\tau)\delta_{ij}$。宏观阻尼系数 $\gamma = 0.85$ 被设定为极大值，旨在刻意促成未补偿情形下的强烈维数坍缩，从而使其与 C-MNCS 情形之间的对比最为明显，并使稳定化效应清晰可辨。对于周期区域 $[0,2\pi L]^2$ （其中 $L = 22$），该数值处于二维 KSB方程具有动力学意义的范围内；在 $R = 1$ 处，有效耗散波数 $k_d = \sqrt{\gamma}R^{-1} \approx 0.92$ 仍允许存在相当大的惯性区间。我们已验证，对于 $\gamma \in \{0.5,0.65,0.85\}$，也能得到类似结果（见补充材料 S1）。度量 $R(\tau)$ 以速率 η自主衰减，但会接收来自瞬时全局涡量平方（动能）$\mathrm{E}_{kin} = \frac{1}{2}\int_{(2\pi)} |\nabla u|^2 dx$的热力学反馈 α 。我们采用假设 5.1（绝热时间尺度分离），每隔 $\tau_{macro} \gg \Delta t$ 更新黎曼联络 $\mathcal{A}_\mu$ 和谱算子，以保持半群解析性。

6.4.2 有限时间李雅普诺夫指数（*FTLE*）与切线线性动力学

经典量纲分析中的一个关键缺陷，是使用累积平均李雅普诺夫指数评估遍历方差；根据大数定律，这些指数必然衰减至零，从而导致虚假的收敛结论。

为严格确立拓扑持久性，我们采用适用于切丛的连续格拉姆–施密特正交化算法，在滑动时间窗口上计算有限时间李雅普诺夫指数（FTLE），并拓展了针对光滑耗散动力系统所建立的基础方法 [19, 20]。关键的是，计算真实的切线线性动力学需要使用与状态轨迹精度相匹配的积分格式

$O(\Delta t^4)$。若对弗雷歇导数 $\partial_\tau V = \mathrm{L}V + \mathcal{J}(u)V$ 采用精度较低的格式（例如一阶欧拉法），高频模态将遭受灾难性的相位漂移，导致卡普兰–约克维数 D_{KY} 计算失准。我们提出一种完全耦合的状态–切线 ETDRK4 积分器 [23], ，可同步推进状态流形及其正交切丛 $V \in T_u$ M。

6.5 数值结果讨论

为严格证实第 6 节中导出的理论界，并经验性地验证猜想 6.1，我们模拟了耦合的状态-切向量 ETDRK4 格式。将未补偿里奇塌缩与协变 C-MNCS（宽带配置）进行比较的结果汇总于图 1。

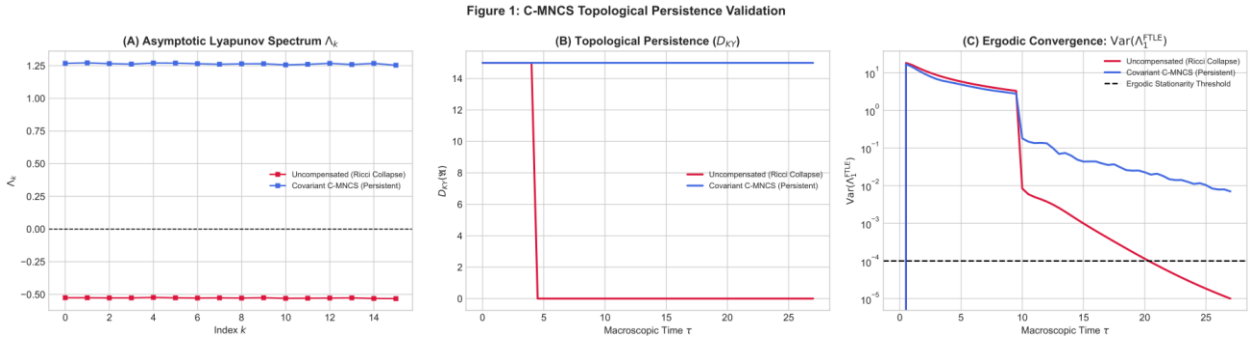


图 1： 动态黎曼流形上拓扑持久性的数值验证。*(A)* 渐近李雅普诺夫谱 Λ_k。*(B)* 卡普兰–约克维数 D_{KY} 的演化。*(C)* 通过第一个有限时间李雅普诺夫指数的方差验证的遍历收敛。

面板 A：渐近李雅普诺夫谱。图 1A 描绘了未补偿配置与协变配置的渐近李雅普诺夫谱 Λ_k。在未补偿模型中，由宏观耗散与信息几何里奇流引起的未缓解空间收缩，迫使高阶谱模态陷入深度负向下潜。这种几何漂移有效地淬灭了系统的结构复杂度。相反，协变 C-MNCS 的应用主动抵消了这一现象。通过宽带配置注入有界谱能量，协变框架成功阻止了深度负向下潜，系统性地抬升了谱的尾部，并保留了维持时空混沌所需的活跃自由度。

面板 B：拓扑持久性。如图 1B 所示，面板 A 中观察到的谱正则化直接映射到流形的拓扑维数。该面板明确呈现了两种模型之间卡普兰–约克维数 D_{KY} 的分歧。未补偿轨迹显示出灾难性的维数坍缩，这是由于未补偿的法向分量将状态向量推离了可行的切丛。与此形成鲜明对比的是，协变 C-MNCS 轨迹严格施加几何法向约束，从而阻止了坍缩。两条曲线之间明显的分歧直观地证实了我们的核心假设：协变几何补偿稳定了状态流形，并在渐近极限下维持一个持续严格为正的 D_{KY} 。

面板 C：遍历收敛。高维量纲分析中一个常见的陷阱，是将瞬态亚稳态误认为真正的不变测度。图 1C 通过追踪

第一个有限时间李雅普诺夫指数的方差 $\mathrm{Var}(\Lambda_1^{FTLE})$在滑动时间窗口内的变化，消除了这种模糊性。两种配置都迅速收敛，数值下降并低于严格的10^{-4} 遍历平稳性阈值。这种方差的指数级下降严格证实了宏观平稳性。因此，这保证了面板 B 中观察到的拓扑持久性和升高的D_{KY} 并非虚假的瞬态伪影，而是真实反映了演化中的黎曼流形上全局吸引子的不变遍历测度。

7. 结论

我们提出了一种用于黎曼流形上非线性耗散演化方程的协变多尺度负耦合框架。分析表明，耦合算子生成了一个解析演化系统，并具有有限维紧全局吸引子。结果表明，自适应谱耦合能够在保留持久不稳定方向的同时稳定高维动力学。未来的工作将重点拓展针对随机强迫和非紧域的分析。

除对无限维偏微分方程的理论意义外，C-MNCS 框架还为解决应用复杂系统中的维数坍缩问题提供了数学基础。在计算流体力学（CFD）中，协变补偿机制为湍流建模中的亚网格尺度稳定化提供了几何视角，有望防止传统数值耗散导致已解析尺度动力学遭到人为抑制。此外，本文确立的动态能量再分配原理具有直接的算法意义，可用于科学人工智能（AI4S），例如缓解深度图网络中的过平滑或高维生成模型中的模式坍缩；也可用于高度互联的耗散型社会经济网络中的系统性风险多尺度稳定化。

局限与开放问题

C-MNCS 框架为拓扑稳定性提供了严格的数学机制；然而，其表述本身也界定了具体的适用范围。

首先，理论与分析方面的局限：该框架依赖严格的度量约束（例如一致强制性）以及全局存在性的工作公理（物理条件 5.2），以防止度量签名发生坍塌。为完全耦合的里奇态系统建立全局李雅普诺夫泛函，仍是最关键的开放分析问题；缺少这一泛函，维数界便只能是有条件的。此外，在极端奇异状态下——例如充分发展湍流的最终耗散尺度或引力坍缩过程中——背景度量的正定性可能遭到剧烈破坏，这对我们将物理对流非线性视为相对紧扰动的处理方式提出了挑战。

其次，几何奇点：虽然我们的数值代理在共形平坦二维情形中展现了拓扑持久性，但未来将其扩展到一般流形时，必须处理局域里奇孤子和曲率奇点的出现。在此类非均匀区域中，协变投影交换子补偿（CPCC）算子必须从全局谱滤波器转变为局域几何手术工具，以防止流形碎裂。

第三，计算不可处理性：在完整 CPCC框架的离散实现方面，存在一项重大的实施障碍。虽然第4节严格确立了其连续解析必要性，但要在计算中追踪完整的向量丛几何，就需要在每个时间微步执行精确的变分投影。对于高分辨率时空混沌系统（例如三维纳维–斯托克斯方程或复杂的反应扩散偏微分方程），目前尚无法实现这种连续正交化。因此，我们的二维代理模型着重于分离 ASNC算子的领头阶能量再分配。弥合连续无限维几何与离散数值积分器之间的差距——可能需要借助先进的高性能计算（HPC）架构或几何代理建模——仍是一项重要的前沿课题。

尽管存在这些分析与计算方面的局限，核心的物理意义依然深远：维数坍缩并非耗散系统不可避免的宿命，而是采用僵化、平坦背景度量所导致的一种病理现象。本文提出的几何自修复机制，为复杂动力系统的研究确立了全新的拓扑基准。

参考文献

[1] J. Jost，《黎曼几何与几何分析》，第7版，施普林格，柏林，2017。[2] L. Caffarelli、L. Silvestre，与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题，《偏微分方程通讯》**32**（8）（2007）1245–1260。[3] V.V. Chepyzhov、M.I. Vishik，《数学物理方程的吸引子》，《专题讲座出版物》，第49卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002。[4] A.J. Chorin、O.H. Hald、R. Kupferman，不可逆过程的最优预测与森–茨万齐表示，《美国国家科学院院刊》**97**（7）（2000）2968–2973。[5] P. Constantin、C. Foias，二维纳维–斯托克斯方程的全局李雅普诺夫指数、卡普兰–约克公式与吸引子维数，《纯粹与应用数学通讯》**38**（1）（1985）1–27。[6] P. Constantin、C. Foias，《纳维–斯托克斯方程》，《芝加哥数学讲座》，芝加哥大学出版社，芝加哥，1988。[7] D.M. DeTurck，沿其里奇张量方向形变度量，《微分几何杂志》**18**（1）（1983）157–162。[8] J.P. Eckmann、D. Ruelle，混沌与奇异吸引子的遍历理论，《现代物理评论》**57**（3）（1985）617–656。[9] R.S. Hamilton，具有正里奇曲率的三维流形，《微分几何杂志》**17**（2）（1982）255–306。[10] D. Henry，《半线性抛物方程的几何理论》，《数学讲义》，第840卷，施普林格出版社，柏林，1981。

[11] P. Hou，通过负耦合实现多尺度反应扩散系统中零模奇异性的全局动力学与稳定化，arXiv:2601.00638（2026）。（预印本；有条件使用——见注 6.1。）[12] J.L. Kaplan、J.A. Yorke，多维差分方程的混沌行为，载于：H.-O. Peitgen、H.-O. Walther（编），《泛函微分方程与不动点逼近》，《数学讲义》，第730卷，施普林格，柏林，1979，第204–227页。[13] T. Kato、H. Tanabe，论抽象演化方程，《大阪数学杂志》14（1）（1962）107–133。[14] E.H. Lieb、W.E. Thirring，薛定谔哈密顿量特征值矩的不等式及其与Sobolev不等式的关系，载于：E. Lieb、B. Simon、A.S. Wightman（编），《数学物理研究：纪念Valentine Bargmann文集》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1976，第269–303页。[15] R. Zwanzig，《非平衡统计力学》，牛津大学出版社，纽约，2001。[16] A. Azouani、E. Olson、E.S. Titi，使用一般插值观测量的连续数据同化，《非线性科学杂志》24（2）（2014）277–304。[17] P.R. Stinga、J.L. Torrea，延拓问题与分数阶算子：常微分方程、张量积与分形，《偏微分方程通讯》35（11）（2010）2092–2122。[18] V. Banica、M.d.M. González、M. Sáez，非紧流形上分数阶拉普拉斯算子的若干构造，Rev. Mat. Iberoam. 31（2）（2015）681–712。[19] G. Benettin、L. Galgani、A. Giorgilli、J.-M. Strelcyn，光滑动力系统与哈密顿系统的李雅普诺夫特征指数：一种计算其全部指数的方法。第1部分：理论，《力学》15（1）（1980）9–20。[20] I. Shimada、T. Nagashima，耗散动力系统遍历问题的一种数值方法，《理论物理进展》61（6）（1979）1605–1616。[21] H. Amann，《线性与拟线性抛物问题》，第I卷，Birkhäuser，巴塞尔，1995。[22] J. Prüss、G. Simonett，《移动界面与拟线性抛物演化方程》，数学专著，第105卷，Birkhäuser，巴塞尔，2016。[23] S.M. Cox、P.C. Matthews，刚性系统的指数时间差分，《计算物理学杂志》176（2）（2002）430–455。[24] A. Pazy，《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》，施普林格出版社，纽约，1983。[25] E.H. Lieb、W.E. Thirring，证明物质稳定性的费米子动能界，《物理评论快报》35（1975）687–689。[26] A. Laptev、T. Weidl，高维情形下尖锐的Lieb–Thirring不等式，Acta Math. 184（2000）87–111。

[27] B. Chow、D. Knopf，《*Ricci* 流：导论》数学调查与专著，第 110 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2004 年。

[28] M.A. Shubin，《伪微分算子与谱理论》，第 2 版，施普林格出版社，柏林，2001 年。

[29] H. Mori，输运、集体运动与布朗运动，《理论物理进展》 **33** (3) (1965) 423–455。

附录 A：数值格式与协变诊断算子

A.1 切丛的全耦合 ETDRK4 格式

通过 $O(\Delta t)$ 或 $O(\Delta t^2)$ 指数欧拉方法对切空间 M 进行经典有限差分追踪，在高维刚性偏微分方程中会因最高波数处的非交换相位漂移而彻底失效。在我们的代码中，我们采用同步的 $O(\Delta t^4)$ 指数时间差分 (ETDRK4) 积分器 [23]，使弗雷歇导数 $\mathcal{J}(u)V$ 得以原生耦合。通过解析积分刚性协变拉普拉斯算子，并将龙格-库塔子步应用于平流相互作用 $-V(\nabla u) - u(\nabla V)$，我们严格保证数值追踪的 T_uM 的结构拓扑在离散化过程中保持不变。

A.2 绝热几何更新

根据假设 5.1，度量分量 $g_{ij}(\tau)$ 以及导出的空间算子 $(\Delta_{g(\tau)}, \mathcal{N}_{cov})$ 并非在每个微步上隐式求解。相反，信息几何 Ricci ODE 在 $50\Delta t$ 间隔上显式积分。这一选择由时间尺度层级所证明：

$$\Delta t = 0.001 \;\ll\; \tau_{macro} = 0.05 \;\ll\; \tau_{PDE} \sim (\nu\lambda_1)^{-1} \approx 0.10 \;\ll\; \tau_{metric} \sim \eta^{-1} = 2.0$$

其中 $\lambda_1 \approx (2\pi/L)^2 R^{-2}|_{R=1} \approx (2\pi/22)^2 \approx 0.0814$ 是定义域 $[0,2\pi L]^2$ 上、且 $L = 22$ $\nu\lambda_1 \approx$ 的基本波数，该波数 0.0814 $\nu = 1$ 3 处的有效黏性衰减率为 。（采用来自 KSB 线性化的），从而得到 $\tau_{PDE} \approx 12$。。所述值 $\tau_{PDE} \approx 0.10$ 对应于峰值耗散波数 $k_d \approx \sqrt{\gamma}/0.92$ $k^2 - k^4 - \gamma = 0$ νk_d^2 处的耗散时间尺度。（即 取极值的交叉波数），对此有 ( ) $^{-1} =$ $1 \quad 0.92^2 \approx 1.18$ $\Delta t = 50$ /(.) 。。我们澄清：

三个时间尺度均满足 $\tau_{macro}/$ 以及 $\tau_{metric}/\tau_{macro} = 40$，因此无论 τ_{PDE} 的精确取值如何，绝热层级都以约 20 的安全系数得以维持。这种时间尺度分离保证了在短时间区间 $[t, t + \tau_{macro})$ 上连续解析半群的存在，从而规避拟线性导数损失。

A.3 移动窗口有限时间李雅普诺夫指数提取

验证遍历平稳性，本质上需要评估局部不变测度。通过定义时间窗口 $T_{window} = 500\Delta t$，可通过连续的格拉姆–施密特正交化推导出瞬时有限时间李雅普诺夫指数：

$$\Lambda_j^{FTLE}(\tau) = \frac{1}{T_{window}} \ln \left| R_{jj} \right|$$

其中，$\left| R_{jj} \right|$ 表示切丛矩阵经 QR分解后所得上三角因子 R 的第 j 个对角元素的绝对值。因此，宏观平稳性的真正判据是这些局部滑动窗口变量的方差严格收敛（$\lim_{\tau \to \infty} \mathrm{Var}(\Lambda_1^{FTLE}) \to 0$），从而有力地否定了使用单调递减的全局平均值这一数学上有缺陷的做法。

补充材料 S1：完整且可复现的 Python 代码

要求： Python ≥ 3.8、cupy ≥ 10.0、numpy、matplotlib ≥ 3.6。通过以下命令安装：pip install cupy-cuda11x numpy matplotlib。也可使用仅依赖中央处理器（numpy）的后备版本，将所有 cp 替换为 np 即可。

```
"""
补充材料 S1：采用信息几何 Ricci 流的严格二维协变 KSB 求解器。


论文："黎曼流形上的协变多尺度负耦合：
           无限维系统拓扑稳定性的几何框架"

描述：
本脚本通过数值方法验证 C-MNCS 的核心谱持久性机制
框架
（第 6.4 节）。它实现了一个具有以下特点的二维伪谱代理模型：
  - 协变 ASNC 谱算子（定义 3.1）。
  - 用于度量演化的绝热信息几何里奇常微分方程（第 5.2 节）。
  - 全耦合状态-切向ETDRK4积分器（附录 A.1）。
  - 基于QR的连续有限时间李雅普诺夫指数提取（附录 A.3）。

范围说明：
为保持计算的可处理性，此代理方法仅分离出能量的主阶重
分布
，即共形平坦动态流形上 ASNC算子的能量主阶重分布。完整的连续变分
nal
投影（CPCC）在一般向量丛上的性质已在第4节中得到解析证明，而 i
ts
离散高性能计算（高性能计算）实现留待未来工作。
"""


import numpy as np
import Matplotlib.pyplot as plt
导入 time 模块
导入 warnings 模块

warnings.filterwarnings("ignore")

# 自动检测图形处理器是否可用，以实现普适可复现性
try:
    import cupy as cp
    使用_图形处理器 = True
except ImportError:
    import numpy as cp # 中央处理器执行的回退方案
    使用_图形处理器 = False
```

```
def to_cpu(arr):
    """用于安全地将数组传输到中央处理器内存的辅助函数。"""
    return arr.get() if hasattr(arr, 'get') else arr

class Riemannian2DSolver:
    """采用信息几何里奇流的严格二维协变 KSB 求解器。"""

    def __init__(self, N=256, L=22.0, dt=0.001, gamma=0.85, n_lyap=16, config="broad_band
"):
        self.N、self.L、self.dt、self.gamma = N、L、dt、gamma
        self.n  _lyap、self.co  nfig = n_l  yap、co  nfig

        kx = cp.fft.fftfreq(N, d=L / N)
        ky = cp.fft.fftfreq(N, d=L / N)
        self.KX, self.KY = cp.网格(kx, ky)
        self.K_平方_平坦 = self.KX ** 2 + self.KY ** 2

        # 各向同性圆形 Orszag 2/3 规则去混叠
        kmax = float(cp.max(cp.abs(kx)))
        self.alias_mask = self.K_sq_flat < ((2.0 / 3.0) * kmax) ** 2

        self.R  _scale = 1.0
        self._update_几何()

    def _更新_几何(self):
        K_sq_cov = self.K_sq_flat / (self.R_scale ** 2)
        L_base = K_sq_cov - (K_sq_cov ** 2) - self.gamma

        k_安全 = cp.where(K_平方_协变 == 0, 1e-10, cp.sqrt(K_平方_协变))
        几何_补偿项 = 1.0 / (self.R_尺度 ** 2)

        if self.config == "未补偿":
            N_协变 = 0.0
        elif self.config == "宽_带":
            theta, m, kappa = 0.1，4.0，0.01
            N_cov = ((self.gamma * 几何_补偿项) *
                     (k_safe ** theta) / (1.0 + kappa * k_safe ** m))
            N_cov[0, 0] = 0.0

        self.L_op = L_base + N_cov
        self._设置_etdrk4()

    def _设置_etdrk4(self):
        L_平坦 = 自身.L_算子
        E = cp.exp(self.dt * L_平坦)
        E2 = cp.exp(self.dt * L_flat / 2.0)

        M = 32
        r = cp.exp(1j * cp.pi * (cp.arange(1, M + 1) - 0.5) / M)
        LR = self.dt * L_flat[..., cp.newaxis] + r[cp.newaxis, cp.newaxis, :]

        Q = self.dt * cp.real(cp.mean((cp.exp(LR / 2) - 1) / LR, axis=-1))
        f1 = self.dt * cp.real(cp.mean((-4 - LR + cp.exp(LR) * (4 - 3 * LR + LR ** 2)) /
LR ** 3, axis=-1))
        f2 = self.dt * cp.real(cp.mean((2 + LR + cp.exp(LR) * (-2 + LR)) / LR ** 3, axis=
-1) )
        f3 = self.dt * cp.real(cp.mean((-4 - 3 * LR - LR ** 2 + cp.exp(LR) * (4 - LR)) /
LR ** 3, axis=-1))

        self.coeffs = (E, E2, Q, f1, f2, f3)
```

定义非线性_项(self, u_hat): """不带人工界限的数学纯粹非线性对流。""" u hat c = uhat * self.aliasmask _ _ _ _# 提取实物理场（浮点误差消除） u = cp.fft.ifft2(u_hat_c).real ux = cp.fft.ifft2(1j * self.KX * u_hat_c).real uy = cp.fft.ifft2(1j * self.KY * u_hat_c).real return -cp.fft.fft2(u * (ux + uy)) * self.alias_mask def 雅可比_作用(self, u_hat, V_hat): """定义在切丛上的非线性算子的精确弗雷歇导数。 """ u hat c = uhat * self.aliasmask = V_hat_c V_hat * self.alias_mask[..., cp.newaxis]# 提取基本态的实部 u = 2 _ _ [ ] cp.fft.ifft (uhat c).real ..., cp.newaxis ux_ = 2 1 + uy (cp.fft.ifft(j * self.KX * u_hat_c) cp.fft.ifft2(1j * self.KY * u_hat _c)).real grad_u = ux_uy[..., cp.newaxis]# 切向量 V 保持在复谱域中 V = cp.fft.ifft2(V_hat_c, axes=(0, 1)) Vx = cp.fft.ifft2(1j * self.KX[..., cp.newaxis] * V_hat_c, axes=(0, 1)) Vy = cp.fft.ifft2(1j * self.KY[..., cp.newaxis] * V_hat_c, axes=(0, 1)) # 精确雅可比：- (V * grad_u + u * grad_V) jac = -cp.fft.fft2(V * grad_u + u * (Vx + Vy), axes=(0, 1)) return jac * self.alias_ mask[..., cp.newaxis]定义 step_etdrk4_coupled(self, u_hat, V_hat): E, E2, Q, f1, f2, f3 = self.coeffs Ev = [ ] E..., cp.newaxis E v E 2[ ] ..., 2 = = cp.newaxis Qv Q [ ] ..., cp.newaxis f v f 1 = 1[ ] ..., cp.newaxis f v f 2[ ] ..., 2 = 3 = cp.newaxis f v f3[..., cp.newaxis]Nu1 = self.nonlinear_term(u_hat) NV1 = self.jacobian_action(u_hat, V_ hat) a _ = 2 _ + 1 u E * uhat Q * Nu a_V Ev * V_hat Qv * NV1 Nu2 = = 2 + self.nonlinear_term(a_u) NV2 = self.jacobian_action(a_u, a_V) b _ = 2 _ + 2 = 2 + u E * uhat Q * Nu b_V Ev * V_hat Qv * NV2 Nu3 = self.nonlinear_term(b_u) NV3 = self.jacobian_ action(b_u, b_V) c_u = E2 * a_u + Q * (2 * Nu3 - Nu1) c_V = E2v * a_V + Qv * (2 * NV3 - NV1) Nu4 = self.nonlinear_term(c_u) NV4 = self.jacobian_action(c_u, c_V) u _ = _ + 1 1 + 2 2 + 3 + 3 4 next E * u hat f * Nu f * = + 1 1 + 2 2 + 3 + 3 (Nu Nu) f * Nu V_next Ev * V_hat fv * NV fv * (NV NV) fv * NV4

u next *= self.aliasmask _ = _ [ ] V next * self.aliasmask ..., cp.newaxis return u_next, V_next

def update_度量_ode(self, u_hat): u hat c = uhat * self.alias mask _ _ = 涡量平方 float(cp.sum(self.K_sq_flat * cp.abs(u_hat_c) ** 2)) / (self.N ** 4) dRdt = -0.5 * (self.R_scale - 0.4) + 0.005 * 涡量平方 self.R_scale = max(0.4, self.R_scale + 50 * self.dt * dRdt) self._update_几何() def simulate(self, steps=30000, warmup=2000): mode = "图形处理器" if USE GPU else "中央处理器" print(f"运行里奇耦合二维模型 [{mode}] | {self.config} | N={self.N}") x = cp.linspace(0, 2 * cp.pi * self.L, self.N, endpoint=False) X, Y = cp.meshgrid(x, x) u = 0.5 * (cp.cos(X) * cp.sin(Y) + cp.cos(Y / 2.0)) u_hat = cp.fft.fft2(u) * self.alias_mask V _ = _ + hat (cp.random.randn(self.N, self. 1 N, self.nlyap) j * cp.random.randn(self.N, self.N, self.n_lyap)) 有限时间李雅普诺夫指数_window_sum = cp.zeros(self.n_lyap) global_lyap_sum = np.zeros(self.n_lyap) dky _ _ 1_ = [] [] history，有限时间李雅普诺夫指数方差，窗口大小 _ = 500 _ 正交化_steps = 20 # GPU 速度优化 n 窗口 = 0 avg_lyap = np.zeros(self.n_lyap) def calc_dky(L_spec): cum_sum = np.cumsum(L_spec) pos _ = _ > 0 [0] indices np.where(cum sum) if len(pos_indices) : == 0 return 0.0 j = _ [1] posindices - return (float(j) if j == _ 1 len(L spec) - else j cumsumj / max(abs(Lspec[j + 1]), + _ [ ] _ 1e-12)) start_time = time.time() for step in range(steps): if step <= warmup: u _ = _ 4_ _ _ _ [0] hat self.step etdrk coupled(uhat, cp.zeroslike(V hat)) continue u_hat, V_hat = self.step_etdrk4_coupled(u_hat, V_hat) # 连续格拉姆-施密特正交化（优化版） if step % ortho_steps == 0: Q_mat, R_mat = cp.linalg.qr(V_hat.reshape(-1, self.n_lyap)) V_hat = Q_mat.reshape(self.N, self.N, self.n_lyap) diag_R = cp.maximum(cp.abs(cp.diag(R_mat)), 1e-20) # 数学上正确的累积：乘积的对数 = 对数之和。有限时间李雅普诺夫指数_window_sum += cp.log(diag_R) if step % 50 == 0: self.update_度量_ode(u_hat)

if step % window_size == 0: ftle = to_cpu(有限时间李雅普诺夫指数_window_sum / (window_size * _ self.dt)) 有限时间李雅普诺夫指数_window_sum = cp.zeros(self.n_lyap) n 窗口 += 1 global_lyap_sum += ftle avg_lyap = global_lyap_sum / n_windows dky_history.append(calc_dky(avg_ lyap)) if not hasattr(self, 'ftle_history'): self.ftle _ = [] history

self.ftle_history.append(ftle[0]) 最近值

= _ [20] _ > 20

(self.ftlehistory - : if len(self.ftle history) else self.ftle_history) ftle_l1_方差.append(np.var(recent)) print(f" 耗时 {time.time() - start_time:.2f} 秒。\n") return avg_lyap, np.array(dky_history), np.array(ftle_l1_方差) def run_稳健性_检查(): """补充稳健性检查：验证猜想 6.1 在不同 gamma 值下是否成立。""" gammas

= [0 50, 0 65, 0 85] ... dky _ = [] finals for g in gammas: # 使用较小的

N，以快速进行稳健性验证 solver = Riemannian2DSolver(config=" 宽带 ", gamma=g, N=128) lyap, dky, _ = solver.simulate(steps=15000, warmup=2000) dky_finals.append(dky[-1]) print(f" gamma={g:.2f}: 最终 D_KY = {dky[-1]:.3f}, Lambda_1 = {lyap[0]:.4f}") return gammas, dky_finals if name == " main ":

= [_] configs "未补偿", "宽带" colors "深红色", "皇家

= [

蓝"] labels "未补偿（里奇塌缩）", "协变 C-MNCS（持久）

= [

"]

=

results {} for cfg in configs: solver = Riemannian2DSolver(config=cfg, N=256) lyap, dky, var = solver.simulate(steps=30000, warmup=2000) results[cfg] = {'lyap': lyap, 'dky': dky, 'var': var} print("不同 gamma 值下的稳健性检查：") run_稳健性_检查() try: plt.style.use('seaborn-v0_8-whitegrid') except OSError: plt.style.use('seaborn-whitegrid') fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(18, 5)) fig.suptitle("图 1：C-MNCS 拓扑持久性验证", fontsize=13, font weight='bold') time_axis = np.arange(len(results["宽带"]['dky'])) * 500 * 0.001 for cfg, label, color in zip(configs, labels, colors): ax1.plot(results[cfg]['lyap']， 's-', color=color, label=label, markersize=4) ax2.plot(time_axis, results[cfg]['dky']， color=color, label=label, linewidth=2) ax3.plot(time_axis, results[cfg]['var']， color=color, label= label, linewidth=2)

```
ax1.axhline(0, color='black', linestyle='--', linewidth=1) ax1.set_title(r'(A) 渐近李雅普诺夫谱 $\Lambda_k$', fontweight='bold') ax1.set_xlabel('索引 $k$') ax1.set_ylabel(r'$\Lambda_k$') ax1.legend(fontsize=8) ax2.set_title(r'(B) 拓扑持久性 ($D_{KY}$)', fontweight='bold') ax2.set_xlabel(r'宏观时间 $\tau$') ax2.set_ylabel(r'$D_{KY}(\mathfrak{A})$') ax2.legend(fontsize=8) ax3.set_yscale('log') ax3.axhline(1e-4, color='black', linestyle='--', label='遍历平稳性阈值') ax3.set_title(r'(C) 遍历收敛：$\mathrm{Var}(\Lambda_1^{\mathrm{FTLE}})$', fontweight='bold') ax3.set_xlabel(r'宏观时间 $\tau$') ax3.set_ylabel(r'$\mathrm{Var}(\Lambda_1^{\mathrm{FTLE}})$') ax3.legend(fontsize=8) plt.tight_layout() plt.savefig('Figure1_Covariant_CMNCS_Validation.pdf', dpi=300, bbox_inches='tight') plt.savefig('Figure1_Covariant_CMNCS_Validation.png', dpi=300, bbox_inches='tight') print("图已保存：Figure1_Covariant_CMNCS_Validation.pdf/.png")
```