arXiv:2603.07347v1 [math.CV] 7 Mar 2026

无理级数 I｜$-\infty$邻域内的拉普拉斯变换

奥利维耶·托姆

摘要。指数函数的离散和 $g(w) = \sum a_\beta e^{\beta w}$，其指数为正，在不包含半平面 H 的 $-\infty$邻域内可能不正规收敛。为了将 H 中的全纯函数 g 分解为指数函数之和，我们研究 $-\infty$的一般邻域内的拉普拉斯变换。

我们探讨拉普拉斯变换及其反变换的连续性、取部分和这一运算的连续性，以及重求和公式等问题。

目录

1. 引言 2 1.1. 动机 2 1.2. 拉普拉斯变换与超函数 3 1.3. 结果 4 2. 拉普拉斯变换 5 2.1. 定义 5 2.2. $-\infty$ 8 邻域上的拉普拉斯变换 2.3. 逆拉普拉斯变换 11 2.4. 拉普拉斯变换的性质 14 2.5. $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}^{-1}$ 17 之间的对偶 2.6. 示例：对数半平面 19 2.7. 示例：直半平面 20 3. 拉普拉斯变换的连续性 21 3.1. 局部有限阶超函数 21 3.2. 部分和的连续性 25 4. 对数半平面上的求和公式 26 4.1. 沿对数曲线的拉普拉斯变换 26 4.2. 对角分部积分 29 4.3. 渐隐求和 33 附录 A. 对数邻域的方程 35 参考文献 36

1. 引言

1.1. 动机。本文旨在更好地理解单个复变量中的微分同胚 $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ 的芽（理想情况下，获得完整的解析分类）。在丢番图情形 $\lambda = \mathrm{e}^{2i\pi\alpha}$ 中（其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是无理数，且可由有理数很好地逼近），解析分类仍有待完成。关于这个问题的历史，例如可参见 [7] 的引言。

不涉及细节地说，我来解释微分同胚与本文之间的关系。微分同胚 f 先验地定义在一个小圆盘 $\mathbb{D}$中，我们可以将它提升到带标点圆盘$\mathbb{D}^*$的万有覆盖 $\mathbb{H}$ 上。覆盖映射为 $w \in \mathbb{H} \mapsto z = \mathrm{e}^w \in \mathbb{D}^*$，而 f 的提升为 $\tilde{f}(w) = w + 2i\pi\alpha + a_2\mathrm{e}^w + \dots$。$\mathbb{H}$关于 f的动力系统的商空间可以由一致化函数 g 来编码，该函数实现了商空间 $g : \mathbb{H}/f \to \mathbb{D}^*$（归一化为 $\mathbb{H}/f$ 上的一个坐标；我们将 g 视为在 $-\infty$处的一个芽）。可以证明，函数 g在 $-\infty$的某个邻域 $H \subset \mathbb{H}$ 内有界；若 f 在解析意义下可线性化，则可以证明 g 是一个正规收敛级数

$$g(w) = \sum_{p,q} a_{p,q}\mathrm{e}^{(p+q/\alpha)w}. \tag{1}$$

似乎很自然会认为，即使 f 不可线性化，函数g 仍然可以写成类似的求和形式。然而，对于这类级数，正规收敛的要求过强，必须以不同的方式理解 g 的收敛性。例如，当 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 且 $h \to 0$时，

$$\frac{\mathrm{e}^{(\beta+h)w} - \mathrm{e}^{\beta w}}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{tw})|_{t=\beta} = w\mathrm{e}^{\beta w} :$$

这些级数的系数可能相当大，而其求和仍然有界。

事实上，Écalle 已在 [1] [1]中研究过这个具体问题。在这篇文章中，Écalle 声称，方程 $f^* \circ \tilde{f} = f^* + 2i\pi\alpha$的解——线性化函数 f^*——具有 $f^*(w) = w + \sum c_{p,\,q}\mathrm{e}^{(p+q/\alpha)w}$ 这种形式。当然，我们也可以在 f^*和 g之间切换，分别写成 $g = \mathrm{e}^{\alpha^{-1}f^*}$ 和 $f^* = \alpha\log(g)$。

在本文中，我们研究有界函数 g 在 $-\infty$ 的邻域 $H \subset \mathbb{C}$上的拉普拉斯变换，以便将 g 视为指数函数的（广义）求和。在即将发表的文章中，我们将更精确地研究和式$\sum_{p,\,q\geq 0} a_{p,\,q}\mathrm{e}^{(p+q/\alpha)w}$，并将其称为无理级数。这两篇文章应有助于更系统地处理指数函数级数；特别是，我们可以用另一种方法证明，单值化函数 g 可以写成式（1）的形式。事实上，改变微分同胚 f 的参数 α （而不改变其他系数），便可将 f 视为可线性化函数 f_α 的极限（在某个邻域内一致

[1]非常感谢P. Hazard指出Écalle的工作，并感谢F. Loray、G. Casale和J-M. Lion传达Malgrange的贡献。

），并对商空间 $\mathbb{H}/f_\alpha$ 进行族的一致化。于是， g是某些单值化函数 g_α 的一致极限，而我们知道这些函数具有形式（1）：由此可根据本文证明的拉普拉斯变换的连续性得出结论。

1.2. 拉普拉斯变换与超函数。为了分解在 $-\infty$ 的邻域 $H \subset \mathbb{C}$ 中有界的函数 $g(w)$，我们可以使用拉普拉斯变换 $h(p) = \mathcal{L}g(p)$。众所周知，当 $g(w) = \mathrm{e}^{\beta w}$ 对某个 $\beta > 0$ 成立时，则 $\mathcal{L}g(p) = \frac{1}{p-\beta}$。我们可以将函数 $\mathcal{L}g$ 解释为佐藤在文章 [5] 和 [6] 中定义的超函数。超函数是某种分布，更准确地说，它们是解析函数集合的对偶空间中的元素。

这里我们粗略说明超函数经典理论背后的思想；读者可以通过例如 [3] 了解更多内容。支集在紧区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的超函数，是全纯函数 $h \in \mathcal{O}(U \setminus I)$ 关于 U 上全纯函数的一个等价类（其中 U 可以是 $\mathbb{C}$ 中 I 的任意邻域）。对于每个 $h \in \mathcal{O}(U \setminus I)$，我们都可以通过以下公式在 I 上的解析函数空间 φ 上定义一个线性泛函

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h(p)\varphi(p)dp.$$

这里， γ 是绕 I 一周的闭路：每个解析函数 φ 都可以延拓到 I的某个邻域中，并且令 γ 充分接近 I，该公式便定义良好，且不依赖于 γ。

在 $h(p) = \frac{1}{p-\beta}$的情形下，我们得到的线性泛函是狄拉克 δ_β。有限求和 $g(w) = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 的拉普拉斯变换为 $h(p) = \sum a_\beta \frac{1}{p-\beta}$，它对应于分布 $D = \sum a_\beta \delta_\beta$。逆拉普拉斯变换的做法是将 D 作用于指数函数 $\mathrm{e}_w(t) = \mathrm{e}^{tw}$，因为 $\langle D, \mathrm{e}_w\rangle = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$。

我们关注无穷求和 $\sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，因此，实现逆拉普拉斯变换所需的积分路径 γ 必须是无穷的（我们将取一条“绕 $\mathbb{R}^+$一周”的路径）。由于这条路径不是紧致的，我们还需要修改超函数的定义。事实上，由于我们需要更改定义并检验在此背景下一切是否正常运作，本文不要求读者预先了解超函数。

关于邻域 H 中拉普拉斯变换的一点说明：另一种分解在邻域 H 中定义的函数 g 的思路，是考虑一个单射 $\varphi\colon \mathbb{H} \to H$，并对定义在 $\mathbb{H}$ 上的函数 $g \circ \varphi$ 应用经典的 Borel- 拉普拉斯变换（此处 $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(w) < 0\}$）。Écalle 在 [1] 中用过这一思路（见其命题 3.15），Ilyashenko 也用过，例如 [2] 中就介绍了这种做法（见第 3.4 节）。这种技巧若能解决问题，当然能快速给出答案；不过，拉普拉斯变换对坐标变换的适应性不太好（一般来说，我们希望将 $g(w)$ 分解为若干 $\mathrm{e}^{\beta w}$ 之和，而不是若干 $\mathrm{e}^{\beta\varphi^{-1}(w)}$ 之和）。无论如何，直接在

邻域 H 中进行拉普拉斯变换，无疑有助于阐明这些问题，并对其作更系统的处理。

1.3. 结果。 本文的第一个结果是定理 1。精确表述需要用到第 2.1 节中的大部分定义；粗略地说，该定理指出，拉普拉斯变换和逆拉普拉斯变换建立了如下对应关系：定义在 $-\infty$ 的邻域上的有界全纯函数，与支集位于 $\mathbb{R}^+$ 且具有指数增长的超函数相对应。在这一对应关系中，邻域的形状与超函数的增长相对应。

接下来的结果涉及定义在我们称为对数邻域中的函数：这类邻域 $H \subset \mathbb{C}$ 具有 $\{x+iy \in \mathbb{C} \,|\, x \leq \rho(|y|)\}$ 的形式，其中 $\rho(y) = w_0 - k\log(y)$，且 w_0，$k \in \mathbb{R}$，并且 y 足够大。在定理 1 的对应关系中，它们对应于阶线性增长的超函数，详见第 2.6 节和第 3.1 节。

我们可以通过以下公式定义有界全纯函数 $g(w)$ 在邻域 H 中的部分和

$$S_{[\beta_1,\beta_2]}g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{pw}dp,$$

其中 β_1，$\beta_2 \in \mathbb{R}$ 且 γ 是一个绕 $[\beta_1,\beta_2]$ 恰好一周的小闭路。在 $g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 的情形下，若 R 是 $\mathbb{R}^+$ 的一个离散子集，且 β_1，$\beta_2 \notin R$，则 $S_{[\beta_1,\beta_2]}g(w) = \sum_{\beta_1<\beta<\beta_2} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$。我们可以类似地定义余项 $S_{[\beta_1,\infty[}g(w)$。

映射 $g \mapsto S_{[\beta_1,\beta_2]}g$ 一般来说并不连续：例如，考虑 $g_t(w) = \frac{1}{2t}(\mathrm{e}^{(\beta_1+t)w} - \mathrm{e}^{(\beta_1-t)w})$。为了得到部分和的连续性，我们必须假设 $\mathcal{L}g$ 的支集不会靠近截断点 β_1，β_2。为此，我们引入集合 $E_0^{(I)}(H)$，它由定义在 H 上的有界全纯函数 g 组成，且这些函数的支集与 I 不相交（空间 $E_0^{(I)}(H)$ 赋予上确界范数）。

定理2。 设一个对数邻域 H 包含于 $\{\mathrm{Re}(w) \leq 0\}$，两个点 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$，一个数 $r > 0$ 以及 $I =]\beta_1 - r$、$\beta_1 + r[\cup]\beta_2 - r$、$\beta_2 + r[$。映射 $S_{[\beta_1,\beta_2]}$：$E_0^{(I)}(H) \to E_0^{(I)}(-1+H)$ 是连续的。

同样地，如果 $\beta_3 \in \mathbb{R}^+$ 和 $I =]\beta_3 - r$，$\beta_3 + r[$，则映射 $S_{[\beta_3,+\infty[}$：$E_0^{(I)}(H) \to E_0^{(I)}(-1+H)$ 是连续的。

特别地，对于函数 g，它们是离散求和 $g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$（$R \subset \mathbb{R}^+$ 离散且固定），映射 $g \mapsto a_\beta$ 是连续的。下面的推论也很有意义：

推论 2. 考虑子集 R_n，$R \subset \mathbb{R}^+$，它们由递增数列 $(\beta_{n,k})_k$，$(\beta_k)_k$ 枚举。考虑一个对数半平面 H 以及有界函数 g_n，$g \in E_0(H)$。

假设 $g_n \to g$ 一致收敛，且对每个 k，都有 $\beta_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$；并且对每个 n，超函数 $\mathcal{L}g_n$ 的支集包含于 R_n。那么 $\mathcal{L}g$ 的支集包含于 R。

此外，对于每个 β_1、$\beta_2 \notin S$，当 n足够大时，部分和 $S_{[\beta_1,\beta_2]}g_n$ 有定义，并且在 $-1+H$上一致收敛。

然而，当 n 趋于无穷大时，部分和 $S_{[-1,n]}g$ 并不收敛到 g；通过系数 a_β 求和公式来求得函数 $g(w) = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$的值，比看起来更为微妙。我们在第 4 节研究这个问题：在第 4.2 节中，我们为函数 g 引入分部积分的对角抽取这一概念（简称 DIPP），记作 $I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wt})$，并证明这提供了一种计算函数 $g(w)$ 的方法：

定理 3. 对角分部积分 $I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wt})$ 在对数邻域 H' 内正规收敛，并且对每个 $w \in H'$，都有

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w) = \frac{1}{2i\pi} I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wt}).$$

这解释了为什么部分和 $S_{[-1,n]}g$ 通常不会收敛到 g：考察 DIPP，我们得到的是我们称为渐消~部分和 $S_n g(w) = S_{[-1,n]}g + BT_n^2(w)$ 的对象，其中 BT_n^2是区间 $[-1,n]$上分部积分的边界项。这些渐消部分和满足$_\sim g(w) - S_n g(w) = O(\mathrm{e}^{nw})$，当 $\mathrm{Re}(w) \to -\infty$时成立。它们是部分和与“渐消项” BT_n^2 之和，后者形式上收敛到零。此结果表述如下

~**定理 4.** 渐消部分和序列 $S_n g$ 在 $-\infty$的对数邻域内一致趋于 g。

当 $g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 时，渐消部分和 $\widetilde{S}_n g$ 可以根据系数 a_β明确计算，并且仅取决于 $\beta \le n$对应的系数 a_β。

2. 拉普拉斯变换

2.1. 定义。 先引入一些记号。我们将从 $w_0 \in \mathbb{C}$ 出发、方向为 $v \in \mathbb{C}^*$ 的射线记为

$$R(w_0, v) := \{w = w_0 + tv, t \in \mathbb{R}^+\}.$$

我们将顶点为 w_0、张角为 2θ 的左开锥记为 $\theta \in [0, \pi/2[$

$$C_-(w_0, \theta) := w_0 - \{w \in \mathbb{C}^* \mid |\mathrm{Arg}(w)| < \theta\},$$

以及顶点为 $\beta \in \mathbb{R}$、张角为 2θ、对应于 $\theta \in [0, \pi/2]$ 的右开锥

$$C_+(\beta, \theta) := \beta + \{p \in \mathbb{C}^* \mid |\mathrm{Arg}(p)| < \theta\}.$$

我们将相应的闭锥记为 $\overline{C_-}$ 或 C_+。

方向为 $v \in \mathbb{C}^*$ 的开半平面记作

$$\mathbb{H}_v := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(p\bar{v}) > 0\}.$$

我们将引入以下函数来测量到 $\mathbb{R}^+$的距离

$$N(p) := \begin{cases} |p| & \text{if } \mathrm{Re}(p) \leq 0 \\ |\mathrm{Im}(p)| & \text{if } \mathrm{Re}(p) > 0 \end{cases}$$

定义 1. 本文中，若对于每个角 $\theta \in [0, \pi/2[$，都存在一点 $w_0 \in H$，使得锥$C_-(w_0, \theta)$ 包含于 H，则称子集 $H \subset \mathbb{C}$ 是 $-\infty$ 的邻域。

对于每个 $w_0 \in H \cap \mathbb{R}$，我们可以引入最大的角 $\theta(w_0) \leq \pi/2$，使得$C_-(w_0, \theta(w_0)) \subset H$。为简化拓扑问题，我们将始终假设$H = \cup_{w_0} C_-(w_0, \theta(w_0))$ 是关于 $\mathbb{R}$对称的这类锥的并集。

我们用 $\mathscr{N}(-\infty)$ 表示上述所有 $-\infty$的邻域组成的集合。

注意，当 H 是 $-\infty$的邻域时，上述函数 $\theta(w)$ 满足$\theta(w) \underset{w \to -\infty}{\longrightarrow} \pi/2$，因此并集 $\cup_w C_-(w, \theta(w))$ 也是 $-\infty$的邻域。

邻域 H 的大小可以通过函数 $\theta(\cdot) : \mathbb{R}^- \to [0, \pi/2]$来度量，也可以通过集合 H 的边界 ∂H 来度量。当 $H = \cup_{w \in]-\infty,\ a]} C_-(w, \theta(w))$ 时，边界 ∂H 可以描述为

$$\partial H = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = \rho(|y|)\},$$

其中 $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ 按定义是一个凸函数（这里，数 $a \in \mathbb{R}$ 是 $H \cap \mathbb{R}$的上确界）。当然，∂H 是曲线族$R(w, -\mathrm{e}^{\pm 2i\pi\theta(w)})$ 在 $w \in]-\infty, a]$范围内的包络，并且可以通过这种方式求得 $\rho(\cdot)$与 $\theta(\cdot)$之间的对应关系。

定义 2. 对任意 $H \in \mathscr{N}(-\infty)$，我们将把 $\Theta_H : w \in \mathbb{R}^- \cap H \mapsto \theta(w) \in [0, \pi/2]$ 记为给出最大的锥的函数，使得$C_-(w, \Theta_H(w)) \subset H$。函数 Θ_H 的反函数$\Theta_H^{-1} :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}^-$ 给出张角为 θ 、包含于 H的最右侧的锥 $C_-(\Theta_H^{-1}(\theta)\ \theta)$。

注意，Θ_H 与Θ_H^{-1} 仅在一般情形下互为反函数（当函数 ρ 光滑且严格凸时）。我们总可以用这样的邻域来逼近 H，但这并无必要，因为上文对 Θ_H与 Θ_H^{-1} 的描述已将它们独立地定义出来。

定义 3. 我们将 $-\infty$的对数邻域族（或对数半平面）定义为集合 $\mathscr{LN}(-\infty) \subset \mathscr{N}(-\infty)$，即那些邻域，其函数 $\rho(\cdot)$ 满足 $\rho(y) = w_0 - k\log(y)$，其中对某些 $k > 0$ 与 $w_0 \in \mathbb{R}$，且当 y 充分大时。

这对 (w_0, k) 称为对数邻域的类型；我们用 $\mathscr{LN}_{w_0,\ k}(-\infty)$ 表示类型为 (w_0, k) 的邻域集合。

当然，包含对数邻域的邻域也可以通过限制视为对数邻域。特别地，由函数 ρ with $\rho(y) \geq w_0 - k\log(y)$ 定义的邻域（其中某个 w_0，k 且任意足够大的 y）可以视为对数邻域。

定义 4。对于每个 $H \in \mathscr{N}(-\infty)$，记 $E_M(H)$ 为具有 M 阶指数增长且可连续延拓至边界的函数集合：可连续延拓至边界的全纯函数 $g \in \mathcal{O}(H)$ 属于 $E_M(H)$，如果存在一个常数 $C > 0$，使得对于每个 $w \in H$，都有 $|g(w)| \leq Ce^{M\,\mathrm{Re}(w)}$。

特别地，$E_0(H)$ 是 H 上的有界全纯函数集合，并且这些函数可连续延拓至边界。

有时，为简便起见，我们会写作“有界函数 $g \in E_0(H)$”：需要明确的是，我们所说的所有有界全纯函数都假定可以连续延拓至边界。事实上，只有在需要沿着 H 的边界进行积分时，我们才需要可连续延拓至边界这一假设；而这仅在 H 是一个直半平面 $H = \{\mathrm{Re}(w) < a\}$ 时才是必要的。在其他情况下，这一预防措施是不必要的。

注意，由于我们的集合 H 朝向 $\mathbb{R}^-$，当 $\mathrm{Re}(w)$ 趋于 $-\infty$ 时，$M > 0$ 对应的 $E_M(H)$ 中的函数实际上呈指数递减。我们考虑的是函数 g 的拉普拉斯变换；又由于每个 $g \in E_M(H)$ 都可以与函数 $w \mapsto g(w)e^{-Mw} \in E_0(H)$ 联系起来，因此只需研究 H 中的有界全纯函数。

W我们可以用范数 $\|g\|_H = \sup_H(|g(w)|)$ 为向量空间 $E_0(H)$ 定义拓扑。

定义 5。若开集 $V \subset \mathbb{C}$ 包含某个闭锥 $C_+(-\varepsilon, \theta)$（其中 $\varepsilon, \theta > 0$），则称其为 $\mathbb{R}^+$ 的角邻域。

为简化拓扑问题，我们总是假设 V 要么是 $\mathbb{C}$，要么是某个开锥 $C_+(-\varepsilon, \theta)$（其中 ε，$\theta > 0$）。对于每个邻域 V，我们都将其与 $V^- = V \setminus \mathbb{R}^+$ 联系起来（它仍然是连通的）。

我们将 $\mathscr{N}(\mathbb{R}^+)$（分别将 $\mathscr{N}^-(\mathbb{R}^+)$）记作上述 $\mathbb{R}^+$ 的所有角邻域的集合（分别记作所有满足 V 为角邻域的 V^- 的集合）。为简便起见，只要不会引起混淆，我们仍将这些 V^- 称为邻域。

定义 6。若全纯函数 $h \in \mathcal{O}(V^-)$ 定义在邻域 $V^- \in \mathscr{N}^-(\mathbb{R}^+)$ 内，且对于每个锥 $C_+(-\varepsilon, \theta) \subset V$，都存在 $C, M > 0$，使得对于每个 $p \in V \setminus C_+(-\varepsilon, \theta)$，都有 $|h(p)| \leq Ce^{M\,\mathrm{Re}(p)}$，则称其沿射线具有指数增长。

我们用 $\mathscr{E}(V^-)$ 表示在 V^- 中沿射线具有指数增长的全纯函数的集合。

给定一个函数 $\mu : \theta \mapsto M = \mu(\theta)$，我们可以引入子集 $\mathscr{E}_\mu(V^-) \subset \mathscr{E}(V^-)$，使得上确界 $\sup_{\varepsilon,\,\theta,\,p} N(p)e^{-\mu(\theta)\mathrm{Re}(p)}|h(p)| < \infty$，其中上确界是对每个可容许的 ε、θ 以及每个 $p \in V \setminus C_+(-\varepsilon, \theta)$ 而言的。

如果 h 属于 $\mathscr{E}_\mu(V^-)$，那么我们可以将 h 的范数定义为上面的上确界：于是有

$$|h(p)| \leq \|h\|_\mu \frac{\mathrm{e}^{\mu(\mathrm{Arg}\, p)\mathrm{Re}(p)}}{N(p)}$$

定义 7。若全纯函数 $h \in \mathcal{O}(V)$ 在邻域 $V \in \mathscr{N}(\mathbb{R}^+)$内具有 $M > 0$ 阶指数增长，则称其具有 $M > 0$ 阶指数增长：若存在 $C > 0$，使得对每个 $p \in V$，都有 $|h(p)| \leq C\mathrm{e}^{M\mathrm{Re}(p)}$。我们用 $E_M(V)$ 表示这类函数的集合，用 $E(V) = \cup_M E_M(V)$ 表示具有指数增长的函数的集合。

定义 8。我们将邻域 $V \in \mathscr{N}(\mathbb{R}^+)$ 上的超函数集合 $H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathscr{E})$ 定义为 $\mathscr{E}(V^-)$ 对 $E(V)$ 的商空间。若无歧义，我们将函数 $h \in \mathscr{E}(V^-)$ 与其等价类 $[h] \in H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathscr{E})$ 视为相同。

定义 9。我们如下定义类 $\mathscr{H}_\mu(V) \subset H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathscr{E})$。若由函数 $h \in \mathscr{E}_\mu(V^-)$ 表示的超函数 $[h]$ 满足以下条件，则属于 $\mathscr{H}_\mu(V)$：存在常数 $C > 0$，使得对每个 $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$，对每个 $\varepsilon > 0$ 以及每个满足 $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2} - \theta$ 的方向 $v = -r\mathrm{e}^{i\alpha}$，都存在函数 $f \in E(V)$，使得

$$|h(p) - f(p)| \leq C \frac{\mathrm{e}^{\mu(\theta)\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Re}(vp)}}{N(p)}$$

对每个 $p \in V \setminus \overline{C_+}(-\varepsilon, \theta)$ 都成立。最小的常数 C 称为超函数 $[h]$ 的范数 $\|[h]\|_\mu$。

或许可以先读完关于拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换的章节，再尝试理解这个定义的含义。

$-\infty$ 的对数邻域将对应于增长函数

$$\mu_{a,k}(\theta) = a + k \log(\mathrm{cotan}(\theta)).$$

定义 10. 我们定义类 $\mathscr{E}_{a,k}(V^-) = \mathscr{E}_{\mu_{a,k}}(V^-)$：它是 V^- 中满足以下条件的全纯函数 h 的集合

$$|h(p)| \leq C \frac{\mathrm{e}^{a\mathrm{Re}(p)} \mathrm{Re}(p)^{k\mathrm{Re}(p)}}{|\mathrm{Im}(p)|^{k\mathrm{Re}(p)+1}}$$

对每个满足 $\mathrm{Re}(p) > 0$ 的 $p \in V^-$ 都成立，其中 $C > 0$ 是一个常数。

我们用 $\mathscr{H}_{a,k} = \mathscr{H}_{\mu_{a,k}}$ 表示相应的超函数。

2.2. 邻域上的拉普拉斯变换 $-\infty$。

在本节中，我们将考虑一个固定的邻域 $H \in \mathscr{N}(-\infty)$，并定义有界全纯函数 $g \in E_0(H)$ 的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}$。

考虑一个基点 $w_0 \in H$，并对任意射线 $R(w_1, v) \subset H$ 考虑折线路径 $\Gamma_{w_0, w_1, v} = [w_0, w_1] \cup R(w_1, v)$（其中 $[w_0, w_1]$ 可以是连接 w_0 与 w_1 的任意路径，只要它包含在 H 中；出于实际考虑，我们将只考虑线段 $[w_0, w_1]$ 包含在 H 中的折线路径）。

无理级数 I 在 $-\infty$ 9 邻域内的拉普拉斯变换

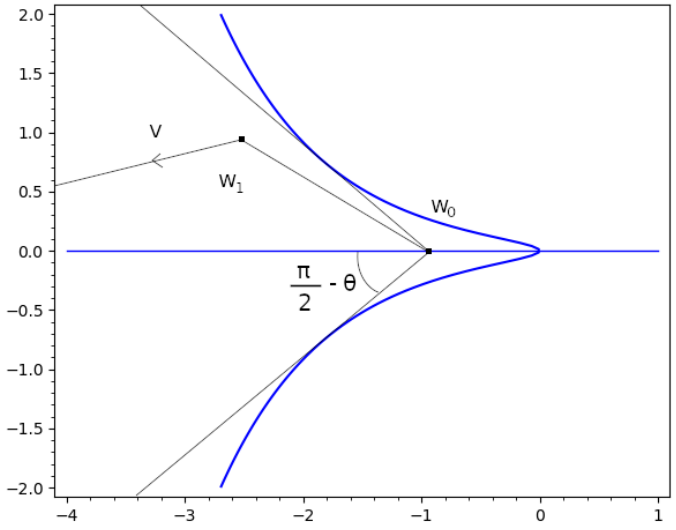


图1。积分路径

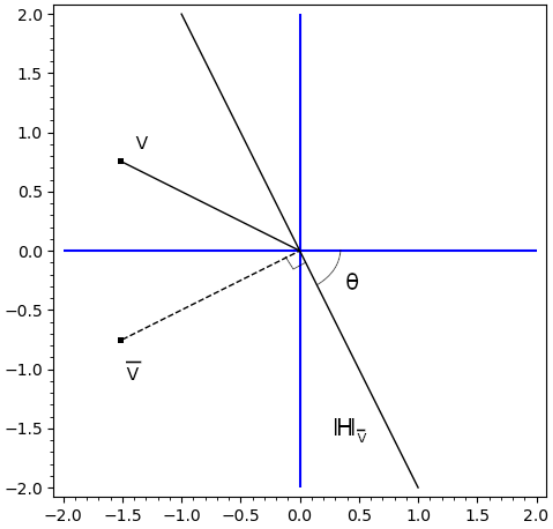


图2。收敛域

定义11. 对任意折线路径 $\Gamma(w_0, w_1, v) \subset H$，我们将有界全纯函数 $g \in E_0(H)$ 的拉普拉斯变换用如下公式定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{w_0,w_1,v}g(p) &:= \int_{\Gamma_{w_0,w_1,v}} g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw \\ &= \int_{w_0}^{w_1} g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw + \mathrm{e}^{-pw_1}\int_{t=0}^{\infty} g(w_1+tv)\mathrm{e}^{-ptv}vdt.\end{aligned}$$

我们还记

$$\mathcal{L}_{w_0,w_1}g(p) := \int_{w_0}^{w_1} g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw.$$

由于 g 有界，只要 $\mathrm{Re}(pv) > 0$，积分就收敛；也就是说，对开半平面 $\mathbb{H}_{\bar{v}}$ 中方向为 $\bar{v}$的每个 p都成立。

现在，只要 $p \in \mathbb{H}_{\bar{v}} \cap \mathbb{H}_{\bar{v}'}$ 属于两个这样的半平面，积分函数的指数衰减和柯西定理便可推出

$$\mathcal{L}_{w_0,w_1,v}g(p) = \mathcal{L}_{w_0,w_1,v'}g(p).$$

基于同样的理由，如果 $R(w_1, v)$ $R(w_1', v)$ 是包含在 H 中、方向相同的两条射线，则有

$$\mathcal{L}_{w_0,w_1,v}g(p) = \mathcal{L}_{w_0,w_1',v}g(p).$$

因此， g 的拉普拉斯变换既不依赖方向 v ，也不依赖点 w_1，对于并集 $\bigcup_{\mathrm{Re}(v)<0} \mathbb{H}_{\bar{v}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 中的每个 p 都有定义。我们将此函数记为 $\mathcal{L}_{w_0}g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)$。

最后，若 w_0， w_0' 是两个基点，我们显然有

$$\mathcal{L}_{w_0}g(p) - \mathcal{L}_{w_0'}g(p) = \mathcal{L}_{w_0,w_0'}g(p) = \int_{w_0}^{w_0'} g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw$$

这是一个具有指数增长的整函数：$\mathcal{L}_{w_0,\ w_0'}g \in E(\mathbb{C})$。于是，我们可以将 g 的拉普拉斯变换定义为一个支集包含于 $\mathbb{R}^+$的超函数：

$$\mathcal{L}g = [\mathcal{L}_{w_0}g] \in H^1_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{C}, \mathscr{E}).$$

命题1. 对于任意邻域 $H \in \mathscr{N}(-\infty)$ 以及任意有界全纯函数 $g \in E_0(H)$，拉普拉斯变换 $\mathcal{L}g$ 是一个定义良好的超函数$\mathcal{L}g \in H^1_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{C}, \mathscr{E})$。

更明确地说，对于任意 $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$，我们可以考虑 $w_0 = \Theta^{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta)$，使得$C_-(w_0, \frac{\pi}{2} - \theta) \subset H$。对于任意 $w_1 = w_0 + w_{01} \in C_-(w_0, \frac{\pi}{2} - \theta)$ 以及任意 $p \in \mathbb{C} \setminus C_+(0, \theta)$，我们有

$$|\mathcal{L}_{w_0}g(p) - \mathcal{L}_{w_0,w_1}g(p)| \leq 4\|g\|_H \frac{\mathrm{e}^{-w_0\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Re}(w_{01}p)}}{N(p)}.$$

特别地， $\mathcal{L}g$ 属于 $\mathscr{H}_\mu(\mathbb{C})$，其中 $\mu(\theta) = -w_0 = -\Theta^{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta)$，并且 $\|\mathcal{L}g\|_\mu \leq 4\|g\|_H$。

证明。 我们需要估计 $\mathcal{L}_{w_0}g(p)$ 沿射线的增长。首先，考虑一个数 $p \in \mathbb{C} \setminus C_+(0, \theta)$，并选择一个角 α ，使得 $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2} - \theta$，其对应的方向为 $v = -\mathrm{e}^{i\alpha}$。选择一点 w_1 ，使闭锥$C_-(w_1, \alpha)$ 包含于 H。然后，我们可以沿路径 $\Gamma_{w_1,w_1,v}$ 计算拉普拉斯变换，并得到以下估计：

$$|\mathcal{L}_{w_1,w_1,v}g(p)| \le \|g\|_H \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(pw_1)} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(pv)t} dt$$
$$\le \|g\|_H \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(pw_1)}}{\mathrm{Re}(pv)}.$$

考虑 $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ 和 $\varepsilon > 0$。选择 $w_0 \in H \cap \mathbb{R}$，使锥 $C_-(w_0, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$ 包含于 H。首先注意到 $\mathcal{L}_{w_0,w_1,v}g(p) = \mathcal{L}_{w_0,w_1}g(p) + \mathcal{L}_{w_1,w_1}g(p)$，并且 $\mathrm{Re}(pw_1) = w_0\mathrm{Re}(p) + \mathrm{Re}(pw_{01})$。

对于任意 $p \in \overline{\mathbb{C} \setminus C_+(0, \theta)}$，我们可以选择使 $|\mathrm{Re}(pv)|$ 最大的角 α（或方向 $v = -\mathrm{e}^{i\alpha}$）。具体来说，我们可以将 $\mathbb{C} \setminus C_+(0, \theta)$ 分解为三个区域：$\mathbb{C} \setminus C_+(0, \theta) = U_- \cup U_i \cup U_{-i}$，其中 $p \in U_-$ 若 $\mathrm{Arg}(p) \in]\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{3\pi}{2} - \theta[$；$p \in U_i$ 若 $\mathrm{Arg}(p) \in]\theta, \frac{\pi}{2} + \theta]$；以及 $p \in U_{-i}$ 若 $\mathrm{Arg}(p) \in [\frac{3\pi}{2} - \theta, 2\pi - \theta[$。在区域 U_- 中，我们可以选择 $\alpha = -\mathrm{Arg}(p)$；在 U_i 中，我们取 $\alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$；最后，在 U_{-i} 中，自然的选择是 $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$。

在 U_- 中，我们得到 $\mathrm{Re}(pv) = |p|$；在区域 $U_{\pm i}$ 中，这给出

$$\mathrm{Re}(pv) = |p| \sin(|\mathrm{Arg}(p) - \theta/2|) \ge |p| \sin(|\theta/2|) \ge |p| \sin(|\theta|)/2$$

这是由正弦函数的凹性得出的。我们将这个不等式写作 $\mathrm{Re}(pv) \ge |\mathrm{Im}(p)|/2$.

由此可得，对于大多数点 p，命题中的估计成立。当 $\mathrm{Re}(p) < 0$ 但 $p \in U_{\pm i}$ 时，分母的估计为 $\mathrm{Re}(pv) \ge |\mathrm{Im}(p)|/2$；但在此区域内，我们有 $|p| \le 2|\mathrm{Im}(p)|$，因此 $\mathrm{Re}(pv) \ge N(p)/4$。（这一修改使我们在上估计中可以使用更方便的函数 $N(p)$，它不依赖于 θ。）

通过对锥 $C_+(-\varepsilon, \theta)$ 的补集上的函数 $1/|p|$ 和 $1/|\mathrm{Im}(p)|$ 作任意上估计，即可得到 $\mathcal{L}_{w_0}g$ 是 $\mathscr{E}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+)$ 的一个元素这一事实。□

2.3. 逆拉普拉斯变换。 本节中，我们将考虑一个固定邻域 $V \subset \mathscr{N}(\mathbb{R}^+)$，并定义函数 $h \in \mathscr{E}(V^-)$ 的逆拉普拉斯变换 $\mathcal{L}^{-1}$；更准确地说，是相应超函数 $[h] \in H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathscr{E})$ 的逆拉普拉斯变换。这里我们不证明 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^{-1}$ 互为逆变换；目前应将记号 $\mathcal{L}^{-1}$ 仅仅视为一种记号。

考虑基点 $-\varepsilon \in \mathbb{R}^- \cap V$ 和方向 $v \in \mathbb{C}^*$，使得 $\mathrm{Arg}(v) \in]0, \pi/2]$ 并且射线 $R(-\varepsilon, v)$ 和 $R(-\varepsilon, \bar{v})$ 包含于 V 中。引入路径 $\gamma_{\varepsilon, v} = R(-\varepsilon, v) \cup R(-\varepsilon, \bar{v})$，其方向向下（朝向负虚数方向）。

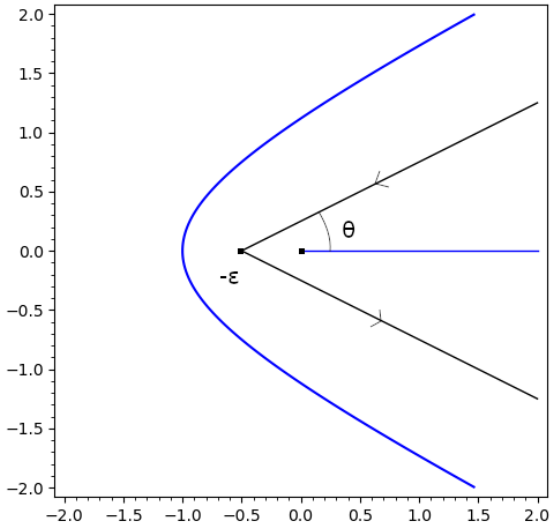


图 3. 积分路径

定义 12。 对于上述任意路径 $\gamma_{\varepsilon,\ v}$ 我们通过公式定义函数 $h \in \mathscr{E}\ (V^-)$ 的逆拉普拉斯变换

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,v}h(w) &:= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{\varepsilon,v}} h(p)\mathrm{e}^{pw}dp \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{t=0}^{\infty} h(-\varepsilon+t\bar{v})\mathrm{e}^{-\varepsilon w}\mathrm{e}^{wt\bar{v}}\bar{v}dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{t=0}^{\infty} h(-\varepsilon+tv)\mathrm{e}^{-\varepsilon w}\mathrm{e}^{wtv}vdt.\end{aligned}$$

根据类 $\mathscr{E}(V^-)$ 的定义，我们在射线 $R(-\varepsilon,v)$ 和 $R(-\varepsilon,\bar{v})$ 上有估计 $|h(p)| \leq C\mathrm{e}^{M\mathrm{Re}(p)}$。由此可知，当 $\mathrm{Re}(wv) < -M\mathrm{Re}(v)$ 时，即在半平面 $-M-\mathbb{H}_{-\bar{v}}$ 上，积分 $\int_{R(-\varepsilon,v)} h(p)\mathrm{e}^{pw}dp$ 收敛。

积分 $\int_{R(-\varepsilon,\bar{v})} h(p)\mathrm{e}^{pw}dp$ 在对称半平面 $-M-\mathbb{H}_{-v}$ 上收敛，而逆拉普拉斯变换在二者的交集上良定义，即在锥 $C_-(-M,\pi/2-\theta)$ 上，其中 $\mathrm{e}^{i\theta} = v/|v|$。

再次由柯西定理，逆拉普拉斯变换既不依赖于 ε，也不依赖于 v，并且可以定义在此前得到的所有锥的并集上。注意，通过取 v 接近 $1 \in \mathbb{R}^+$，上述锥的张角可以任意接近 $\pi/2$，从而 h 的逆拉普拉斯变换在 $-\infty$ 的邻域内有定义。

另请注意，如果 h 属于类 $E(V)$，那么根据柯西定理，我们有 $\mathcal{L}^{-1}h = 0$。

于是，我们可以将超函数 $[h]$ 的拉普拉斯变换定义为其任一代表元的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}^{-1}[h] = \mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,v}h \in \mathcal{O}(H),$$

其中, H 是 $-\infty$ 的一个邻域。

命题 2. 对任意邻域 $V \in \mathscr{N}(\mathbb{R}^+)$ 以及任意函数 $h \in \mathscr{E}^o(V^-)$, h 的逆拉普拉斯变换是在 $-\infty$ 的某个邻域中具有指数增长的函数。

证明。我们需要估计定义该变换的积分。假设对 $C_+(-\varepsilon,\theta)$ 之外的所有 p，都有 $|h(p)| \le C\mathrm{e}^{M\mathrm{Re}(p)}$，并取角为 θ 的方向 v。则

$$\begin{aligned}|\int_{t=0}^{\infty} h(-\varepsilon+tv)\mathrm{e}^{-\varepsilon w}\mathrm{e}^{wtv}v dt| &\le C\mathrm{e}^{-\varepsilon\mathrm{Re}(w)-\varepsilon M}\int_{t=0}^{\infty}\mathrm{e}^{Mt\mathrm{Re}(v)+t\mathrm{Re}(wv)}dt\\ &\le C\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon(M+\mathrm{Re}(w))}}{|\mathrm{Re}(wv)+M\mathrm{Re}(v)|}\end{aligned}$$

当 $\mathrm{Re}(wv)+M\mathrm{Re}(v)<0$ 时。

因此，对 $w \in C_-(-M-r,\frac{\pi}{2}-\theta)$，我们有 $\mathrm{Re}(wv)+M\mathrm{Re}(v) < -r\mathrm{Re}(v) = -r\cos(\theta)$。当 $r>0$ 足够大时，我们将有 $C \le |r\cos(\theta)|$，并且

$$|\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,v}h(w)| \le \frac{2C}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon(M+\mathrm{Re}(w))}}{r\cos(\theta)} \le \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\varepsilon\mathrm{Re}(w)},$$

这表明 $\mathcal{L}^{-1}h$ 在作为并集 $\cup_\theta C_-(-M-r,\theta)$ 得到的 $-\infty$ 的邻域上具有阶为 ε 的指数增长（其中 M 和 r 依赖于 θ）。□

命题 3. 此外，若 $[h] \in \mathscr{H}_\mu(V)$ 对于某个函数 μ成立，且若 $V \subset C_+(a,\theta_0)$ 对于某个 $\theta_0 < \pi/2$成立，则对于每个锥 $C_+(-\varepsilon,\theta) \subset V$，我们可以在此锥的边界上积分（即考虑变换 $\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,v}$，其中 $v=\mathrm{e}^{i\theta}$）。若 $w_0 = -\mu(\theta)-1$且 $w \in C_-(w_0,\frac{\pi}{2}-\theta)$，则有

$$|\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,v}h(w)| \le K(V)\|[h]\|_\mu$$

对于某个常数 $K(V)$，它仅取决于邻域 V。

当 $V=\mathbb{C}$时，常数 K 可取为 $K(\mathbb{C})=2$：我们看到$\mathcal{L}^{-1}h$ 是邻域 H 上的有界全纯函数，该邻域由$H=\cup_{\theta<\theta_0}C_-(-\mu(\theta)-1,\frac{\pi}{2}-\theta)$给出，并且 $\mathcal{L}^{-1}h$ 连续延拓至边界，且$\|\mathcal{L}^{-1}h\|_H \le 2\|[h]\|_\mu$。

证明。对于每个 $\theta<\theta_0$，我们可以考虑 $M=\mu(\theta)$；对于每个满足 $|\mathrm{Arg}(-w_{01})| \le \frac{\pi}{2}-\theta$ 的 $w=w_0+\tilde{w_{01}}$，都存在另一个 $h\in[h]$，使得对于每个 $p \in V\setminus C_+(0,\theta)$，都有

$$\begin{aligned}|\tilde{h}(p)\mathrm{e}^{pw}| &\le C\frac{\mathrm{e}^{M\mathrm{Re}(p)-\mathrm{Re}(w_{01}p)}}{N(p)}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(pw)}\\ &\le C\frac{\mathrm{e}^{(M+w_0)\mathrm{Re}(p)}}{N(p)}.\end{aligned} \tag{2}$$

用 T_r 表示管状区域 $T_r = \{p \in \mathbb{C} \mid d(p, \mathbb{R}^+) \leq r\}$，并假设对于某个 $r > 0$，$T_r \subset V$ 成立。考虑方向 $v = \mathrm{e}^{i\theta}$ 和路径 $\gamma_r = \gamma_{r,i} \cup \gamma_{r,-} \cup \gamma_{r,-i}$，其中 $\gamma_{r,i}$ 由 $\gamma_{r,i}(t) = ir + tv$ 参数化并取负向，路径 γ_- 是圆心为 0、半径为 r 的左半圆，而 $\gamma_{r,-i}$ 由 $-\gamma_{r,-i}(t) = -ir + t\bar{v}$ 参数化。取上述的 $\theta, M, w = w_0 + w_{01}$ 和 h，并假设 $w_0 = -M - 1$（因此 $M + w_0 = -1$）。根据柯西定理，也可以沿路径 γ_r 计算逆拉普拉斯变换。

$h(p)\mathrm{e}^{pw}$ 的积分沿半圆 $\gamma_{r,-}$ 显然可由方程（2）估计为

$$\left| \int_{\gamma_{r,-}} \tilde{h}(p)\mathrm{e}^{pw} dp \right| \leq C\pi \mathrm{e}^r.$$

沿路径 $\gamma_{r,\pm i}$ 我们有类似的估计：

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{r,i}} \tilde{h}(p)\mathrm{e}^{pw} dp \right| &\leq C \left| \int_{\gamma_{r,i}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(p)}}{N(p)} dp \right| \\ &\leq C \int_{t=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t\mathrm{Re}(v)}}{r} \\ &\leq \frac{C}{r\cos(\theta)} \\ &\leq \frac{C\sqrt{2}}{r}. \end{aligned}$$

由此可得

$$|\mathcal{L}^{-1}h(w)| = |\mathcal{L}^{-1}\tilde{h}(w)| \leq \frac{C}{2\pi}(\pi \mathrm{e}^r + 2\sqrt{2}r^{-1}).$$

当 $V = \mathbb{C}$ 时，我们可以取 $r = 1$，从而得到

$$|\mathcal{L}^{-1}h(w)| \leq 2C.$$

这些不等式对 $w \in C_-(w_0 - 1, \frac{\pi}{2} - \theta)$ 成立，因此当 θ 从 θ_0 变化到 0 时，这些集合覆盖并集 $H = \cup_\theta C_-(-\mu(\theta) - 1, \frac{\pi}{2} - \theta)$，而对 $\mathcal{L}^{-1}h$ 的估计在整个 H 上都成立。

取满足 $w_0 + M = -1 + \varepsilon$ 的 w_0，同样的计算表明，$\mathcal{L}^{-1}h$ 实际上可以全纯延拓到更大的开集 $H' \supset H$；特别地，$\mathcal{L}^{-1}h$ 连续延拓到 $\overline{H}$ 的边界。□

2.4. 拉普拉斯变换的性质。拉普拉斯变换的以下性质相当经典；由于我们的背景略有不同，这里列出我们需要的性质。字母 H 和 V 分别表示 $-\infty$ 的一个邻域和 $\mathbb{R}^+$ 的一个邻域。

前两个引理相当显然。

引理 1. 对每一个 $a > 0$ 以及每一个 $g \in E_0(H)$，函数 $\tilde{g}(w) = \mathrm{e}^{aw} g(w)$ 同样有界，并且具有拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_{w_0}\tilde{g}(p) = \mathcal{L}_{w_0} g(p-a)$。

引理 2. 对于任意 $a > 0$ 以及任意 $h \in \mathscr{E}(V^-)$，函数 $h(p) = h(p-a)$ 也属于类 $\mathscr{E}(V^-)$，其逆拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}^{-1}h(w) = \mathrm{e}^{-aw}\mathcal{L}^{-1}h(w)$。

导数和拉普拉斯变换的行为符合预期（相差一个具有指数增长的整函数）。

引理3. 对于任意具有指数衰减的 $g \in E_0(H)$，函数 $\tilde{g}(w) = wg(w)$ 在某个邻域 $H' \subset H$ 内有界，并且有 $(\mathcal{L}_{w_0} g)'(p) = -\mathcal{L}_{w_0}\tilde{g}(p)$。

证明. 我们只需检查 $w\mathrm{e}^{-aw}$ 在邻域 H' 内有界的情形：当 $a > 0$ 时，实际计算是经典的。记作 $w = x + iy$，则有

$$\log|w\mathrm{e}^{-aw}|^2 = \log(x^2+y^2) - 2ax.$$

H' 使该量为负的集合是 $-\infty$ 的一个邻域。 □

引理4。 对于每个 $g \in E_0(H)$，导数 g' 在 $-1+H$ 上有界，并且满足 $\mathcal{L}_{w_0} g'(p) = -g(w_0)\mathrm{e}^{-pw_0} + p\mathcal{L}_{w_0}(p)$，其中任意 $w_0 \in -1+H$ 均成立。特别地，$\mathcal{L}g' = p\mathcal{L}g$ 模去一个具有指数增长的整函数。

证明。 g' 有界这一事实是柯西公式对导数的推论。当 $\mathrm{Re}(p) < 0$ 时，我们可以使用方向 $v = -1$ 定义该变换，并进行分部积分：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{w_0} g'(p) &= \int_{\Gamma_{w_0,w_0,-1}} g'(w)\mathrm{e}^{-pw}dw \\
&= \int_{t=0}^{+\infty} g'(w_0-t)\mathrm{e}^{-pw_0+pt}(-dt) \\
&= -[-g(w_0-t)\mathrm{e}^{-pw_0+pt}]_0^{+\infty} - \int_{t=0}^{+\infty}(-g(w_0-t))p\mathrm{e}^{-pw_0+pt}(-dt) \\
&= -g(w_0)\mathrm{e}^{-pw_0} + p\mathcal{L}_{w_0} g(p).
\end{aligned}$$

由解析延拓即可得出结论。 □

如果 $g \in E_0(H)$ 具有指数衰减（即 $g \in \cup_{a<0} E_a(H)$），那么我们可以将 $Ig \in E_0(H)$ 定义为其满足 $\lim_{\mathrm{Re}(w)\to-\infty} Ig(w) = 0$ 的原函数。

引理5。 对于具有指数衰减的 $g \in E_0(H)$，其原函数 Ig 有界，并满足 $\mathcal{L}_{w_0} Ig(p) = \frac{\mathcal{L}_{w_0} g(p)}{p}$。

证明。 我们可以写成

$$Ig(w) = -\int_{\Gamma_{w,w_0,-1}} g(z)dz$$

对于任意点 $w_0 \in H$ （为简化起见，我们可以取 $w_0 \in \mathbb{R}^-$ ），且当 $\mathrm{Re}(p) < 0$ 时，我们可以沿折线路径 $\Gamma_{w_0,w_0,-1}$ 计算 $\mathcal{L}Ig(p)$。我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{w_0}Ig(p) &= -\int_{w\in\Gamma_{w_0,w_0,-1}}\int_{z\in\Gamma_{w,w_0,-1}} g(z)\mathrm{e}^{-pw}dzdw\\ &= -\int_{z\in\Gamma_{w_0,w_0,-1}}\int_{w\in\Gamma z,w_0,-1} g(z)\mathrm{e}^{-pw}dwdz\\ &= \int_{z\in\Gamma_{w_0,w_0,-1}} g(z)\frac{\mathrm{e}^{-pz}}{p}dz\end{aligned}$$

当 $\mathrm{Re}(p) < 0$ 时，结论成立；由解析延拓可得结论。 □

引理 6. 设 $H \subset \{\mathrm{Re}(w) \leq -1\}$。对于每个 $g \in E_0(H)$，变换 $\mathcal{L}g(p)$ 在 $\mathrm{Re}(p) \to -\infty$ 时指数衰减，且 $I\mathcal{L}_{w_0}g = -\mathcal{L}_{w_0}\binom{g(w)}{w}$。 ——

证明。 函数 $\tilde{g}(w) = -g(w)/w$ 本身有界；$\mathrm{e}^{-w}\tilde{g}(w)$ 指数衰减，因此 $\mathcal{L}_{w_0}(w\mathrm{e}^{-w}\tilde{g}(w)) = -(\mathcal{L}_{w_0}(\mathrm{e}^{-w}\tilde{g}(w)))' = -(\mathcal{L}_{w_0}\tilde{g})'(p-1)$。由此我们推出，对每个 p，$\mathcal{L}_{w_0}g(p-1) = -(\mathcal{L}_{w_0}\tilde{g})'(p-1)$；由于 $\mathcal{L}_{w_0}\tilde{g}(p)$ 和 $-I\mathcal{L}_{w_0}g(p)$ 的导数相同，且当 $\mathrm{Re}(p)$ 趋于 $-\infty$ 时二者都趋于 0，所以它们相等。 □

反函数的拉普拉斯变换也相当经典，不过为求完整，还是在此重述一下。

引理 7. 函数 $i_z : w \in H \mapsto \frac{1}{z-w}$ 的拉普拉斯变换，其中 $z \notin H$ 等于 $\mathcal{L}i_z(p) = \mathrm{e}^{-zp}\log(p)$ ，相差一个指数增长的整函数。

证明。 固定一点 $w_0 \in H$ 和一条积分路径 $\Gamma = \Gamma_{w_0,w_0,v}$ ，使其位于 H 内。记 $h(p) = \mathcal{L}_{w_0}i_z(p)$； h 的导数为

$$h'(p) = \int_\Gamma \frac{-w\mathrm{e}^{-pw}}{z-w}dw,$$

因此

$$zh(p) + h'(p) = \int_\Gamma \mathrm{e}^{-pw}dw = \frac{\mathrm{e}^{-pw_0}}{p}.$$

由此可得

$$\frac{d}{dp}(\mathrm{e}^{zp}h(p)) = \frac{\mathrm{e}^{p(z-w_0)}}{p} = \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{e}^{p(z-w_0)}-1}{p} = \frac{1}{p} + a(p).$$

注意， $a(p)$ 是一个在 $\mathbb{C}$ 上具有指数增长的全纯函数；因此它有一个原函数 $A(p)$，该原函数是具有指数增长的整函数。将积分常数并入函数 A 中，我们得到

$$h(p) = \mathrm{e}^{-zp}\log(p) + \mathrm{e}^{-zp}A(p).$$

请记住，对数必须被视为定义在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$ 上的全纯函数（无论采用哪一种确定方式）。 □

引理 8。 考虑函数 $l_z: \quad p \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{e}^{-zp}\log(p)$。其逆拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}^{-1}l_z(w) = \frac{1}{z-w}$。

证明。固定 $\varepsilon \in]0,1[$ 和 $\theta > 0$ 来定义变换 $\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,\theta}$。那么对于任意 $w \in C_-(\mathrm{Re}(z) - 1, \frac{\pi}{2} - \theta)$，我们看到函数 $l_z(p)\mathrm{e}^{pw}$ 在 $\mathrm{Re}(p) \to +\infty$时呈指数衰减，因此变换 $\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,\theta}l_z(w)$有定义。由此可得$\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,\theta'}l_z(w) = \mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,\theta}l_z(w)$，对任意 $\theta' < \theta$均成立。令 θ' 趋于零，我们得到

$$\lim_{\theta'\to 0}\mathcal{L}^{-1}_{\varepsilon,\theta'}l_z(w) = \int_{p\in\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{p(w-z)}dp = \frac{1}{z-w}.$$

通过解析延拓，我们得出 $\mathcal{L}^{-1}l_z(w) = \frac{1}{z-w}$ 在 $\mathcal{L}^{-1}l_z$的定义域上成立。□

2.5. 与 $\mathcal{L}^{-1}$之间的对偶。 我们将以间接方式证明 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}^{-1}$ 互为反函数：首先，我们证明柯西公式的一种变体，它适用于 H中呈指数衰减的函数；然后，利用对偶性适用于反函数这一事实 $i_z(w) = 1/(z-w)$，以及变换的连续性，得出结论。

在下面的引理中，我们将使用一条形如 $\mathscr{C} \subset \mathbb{C}$ $\mathscr{C} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = \rho(|y|)\}$ 的曲线。我们将选择一个函数 $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，使得 $\mathscr{C} \subset H$,$H_\rho := \{x + iy \mid x \le \rho(|y|)\}$ 属于 $\mathscr{N}(-\infty)$（也就是说，ρ 是次线性且凸的），并且 $\rho(y) \le -\log(1+y)$。（对于对数邻域，我们可以取 $\rho(y) = C - k\log(1+y)$，其中 $k \ge 1$ 和 $C \le 0$。）

事实上，曲线 $\mathscr{C}$ 可以看作是 H 的边界，但当 H 太大时（例如一个半平面），下面的积分可能会发散，因此我们必须选择一条更尖锐的曲线 $\mathscr{C}$。

引理 9. 假设 g 具有指数衰减：$|g(w)| \le C\mathrm{e}^{a\mathrm{Re}(w)}$，其中某些常数为 $C > 0$ 和 $a \ge 2$。考虑一个如上所述的函数 ρ 及相应的曲线 $\mathscr{C}$，它是邻域 $H_\rho \subset H$ 的边界。那么对于每个 $w \in H_\rho$，我们有

$$2i\pi g(w) = \int_{\mathscr{C}} \frac{g(z)}{z-w}dz.$$

该积分在每个邻域 $H_{\rho-\varepsilon} \subset H_\rho$ 上都一致收敛。

证明。为简化起见，在本证明中我们可以假设 $H = H_\rho$。通过沿着 $\mathscr{C}_R$（H 与圆盘 D_R 的交集 $H \cap D_R$ 的边界）进行积分，并令 R趋于无穷大，即可得到该公式。将 $\mathscr{C}_R = (\mathscr{C} \cap D_R) \cup S_R$ 分解后，我们需要证明沿弧 S_R 的积分趋于零，以及沿 $\mathscr{C}$ 的积分收敛。

首先，沿 $\mathscr{C}$ 的积分可以写成

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{g(z)}{z-w}dz = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{g(z(y))}{z(y)-w}z'(y)dy,$$

其中

$$z(y) = \rho(|y|) + iy.$$

我们看到

$$|g(z(y))| \leq C\mathrm{e}^{a\rho(|y|)} \leq C\frac{1}{(1+|y|)^a}.$$

函数 $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ 在 H上有界；函数 $y \mapsto \rho'(y)$趋于零，因为当 y 趋于无穷大时，ρ是次线性的，所以 $z'(y)$也有界。因此，当 $a \geq 2$时，该积分确实收敛。

接下来注意到，S_R 包含在半平面 $\{\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z(y))\}$ 中，其中 $z(y)$是半径为 R 的圆 C_R 与 $\mathscr{C}$的交点。该点的坐标$z(y) = x + iy$ 满足以下方程

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \rho(y) \leq -\log(1+|y|). \end{cases}$$

由于 ρ 是次线性的，我们有 $y \sim R$，因此对于某个常数 c，$\mathrm{Re}(z(y)) \leq c - \log(1+R)$。路径 S_R 的长度至多为 πR，被积函数再次有以下界

$$\frac{|g(z)|}{|z-w|} \leq C\frac{c^a}{(1+R)^a},$$

由此可知，每当 $a \geq 2$ 时，沿着 S_R 的积分就趋于零。

这证明了该积分的简单收敛；要获得一致收敛，我们只需对函数 $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ 给出一个一致上界，而在 $w \in H_{\rho-\varepsilon}$ 的情况下，这很容易做到。□

引理 10. 假设 $g \in E_0(H)$ 关于 H 指数衰减：$|g(w)| \leq C\mathrm{e}^{a\mathrm{Re}(w)}$，其中 $C > 0$ 且 $a \geq 2$。考虑如上所述的函数 ρ 及其对应的邻域 H_ρ。

逆拉普拉斯变换 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g$ 在 $H_{\rho-1}$ 中有定义且有界，并且对每个 $w \in H_{\rho-1}$，有

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w) = g(w).$$

证明。 由命题 1 和 3 可知，$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g$ 在 $H_{\rho-1}$ 中有定义且有界；我们只需证明该公式。

由引理 9 的积分公式可知，可以将 $2i\pi g(w)$视为黎曼和的极限

$$2i\pi g_n(w) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(z_{n,k})}{z_{n,k}-w},$$

且在 $H_{\rho-\varepsilon}$ 中一致收敛。根据反函数的拉普拉斯变换（引理 7 和 8）以及 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^{-1}$ 的线性性，对于每个 $w \in H_\rho$，都有 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g_n(w) = g_n(w)$。根据命题 1 和 3 中的估计，变换 $g \mapsto \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g$ 是从 $E_0(H_{\rho-\varepsilon})$ 到 $E_0(H_{\rho-1-\varepsilon})$ 的连续算子。由于

当 $n \to \infty$ 属于空间 $E_0(H_{\rho-\varepsilon})$ 时，$g_n \to g$，由连续性可得 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w) = g(w)$，其中 $w \in H_{\rho-1-\varepsilon}$。这对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立，因此对每个 $w \in H_{\rho-1}$ 也成立。□

拉普拉斯变换与逆拉普拉斯变换实现了 $-\infty$ 的邻域上的有界全纯函数与沿 $\mathbb{R}^+$ 的邻域中射线指数增长的超函数之间的对应。

定理 1. 若 g 在某个邻域 $H \in \mathcal{N}(-\infty)$ 内有界，连续延拓至边界，且 H 由函数 Θ_H 描述，则 $\mathcal{L}g$ 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 上有明确定义，且超函数 $[\mathcal{L}g]$ 属于类 $\mathscr{H}_\mu$，其中 $\mu(\theta) = -\Theta^{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta)$。在邻域 $-1 + H$ 中，我们有 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g = g$。

若 $[h]$ 是关于某个函数 μ 的类 $\mathscr{H}_\mu$ 中的超函数，则 $\mathcal{L}^{-1}[h]$ 是邻域 H_Θ 中的有界全纯函数，该邻域由函数 Θ 描述，而 Θ 由 $\Theta^{-1}(\theta) = -\mu(\frac{\pi}{2} - \theta) - 1$ 给出。作为超函数，我们有 $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}[h] = [h]$。

证明。我们只需将一般情形归约到引理 10。给定某个邻域 H内的有界函数 g，我们可以考虑 $\tilde{g}(w) = \mathrm{e}^{-2w}g(w)$，它具有 2 阶指数衰减，并取某个函数 ρ，以便应用引理 10。于是我们得到 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\tilde{g} = \tilde{g}$ 在 $H_{\rho-1}$中。

由引理 1，得 $\mathcal{L}\tilde{g}(p) = \mathcal{L}g(p-2)$；由引理 2，得 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\tilde{g}(w) = \mathrm{e}^{-2w}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w)$。因此，对每个 $w \in H_{\rho-1}$，都有 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w) = g(w)$。然而，根据命题 1 和 3，$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g$ 在 $-1 + H$ 中有定义；并且我们从一开始就假设，$-\infty$ 的所有邻域都是连通的。由解析延拓可知，$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g = g$ 在 $-1 + H$上成立。

现在，如果 $[h] \in \mathscr{H}_\mu$ 是一个超函数，根据命题 3，我们知道 $\mathcal{L}^{-1}h$ 是邻域 H_Θ 内的有界全纯函数。由第一部分可知，在 $-\infty$ 的某个邻域内有 $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}h = \mathcal{L}^{-1}h$。这意味着，$h_0 := \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}h - h$ 属于 $\mathcal{L}^{-1}$ 的核。

请记住，$\mathcal{L}^{-1}h_0$ 被定义为一个差

$$2i\pi\mathcal{L}^{-1}h_0(w) = \int_{R(-\varepsilon,\bar{v})} h_0(p)\mathrm{e}^{pw}dp - \int_{R(-\varepsilon,v)} h_0(p)\mathrm{e}^{pw}dp.$$

称 $\mathcal{L}^{-1}h_0 = 0$ 意味着两个积分相等。实际上，这些积分是以点 $-\varepsilon$ 为基点的拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_{-\varepsilon}h_0(-w)$，按照通常的方法改变积分路径后，我们看到这定义了一个良定义的全纯函数 $\mathcal{L}_{-\varepsilon}h_0$，其定义域为紧集 K 的补集 $\mathbb{C} \setminus K$。根据经典的傅里叶—拉普拉斯对应关系 [3, 定理 2.5，h_0 是一个具有指数增长的全纯函数。特别地，$h_0 \in E(V)$，且 $[h_0] = 0$ 是 $H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathscr{E})$ 的一个元素。□

2.6. **示例：对数半平面**。对于 $-\infty$的对数邻域，我们有集合 $H = \{x+iy \in \mathbb{C} | x \le \rho(|y|)\}$，其中当 y 足够大时，$\rho(y) = w_0 - k\log(y)$。我们可以显式计算增长函数 $\mu(\cdot)$。

事实上，我们可以用 $\mathscr{C}$ 表示 H的边界，用 $R = R(w,\ -\mathrm{e}^{i\theta})$表示从 $w \in H$ 出发且与 $\mathscr{C}$相切的射线，并用 $x + iy$ 表示$\mathscr{C}$ 与 R的交点。根据定义，我们有 $x = \rho(y)$，并且

$$\rho'(y) = \frac{x - w}{y} = -\mathrm{cotan}(\theta).$$

在 $\rho(y) = w_0 - k\log(y)$ 的情况下，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{-k}{y} &= \frac{w_0 - w - k\log(y)}{y}\\ &\Leftrightarrow w = w_0 + k - k\log(y),\end{aligned}$$

and

$$\tan(\theta) = \frac{y}{k}.$$

特别是

$$\Theta^{-1}(\theta) = w_0 + k - k\log(y) = (w_0 + k - k\log(k)) - k\log(\tan\theta)$$

于是，函数 μ 由下式给出

$$\mu(\theta) = -\Theta^{-1}(\frac{\pi}{2} - \theta) = -w_0 - k + k\log(k) + k\log(\mathrm{cotan}(\theta)).$$

给定一点 $p = p_1 + ip_2$ （其中 $p_1,\ p_2 > 0$）以及 $\theta = \mathrm{Arctan}(p_2/p_1)$，我们得到函数 $h \in \mathscr{E}_\mu(V^-)$ 的如下估计：

$$\begin{aligned}|h(p)| &\leq \|h\|_\mu \frac{\mathrm{e}^{\mu(\theta)p_1}}{p_2}\\ &\leq \|h\|_\mu \frac{\mathrm{e}^{k'p_1}}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{kp_1}\\ &\leq \|h\|_\mu \frac{\mathrm{e}^{k'p_1}p_1^{kp_1}}{p_2^{kp_1+1}}.\end{aligned}$$

综上：

命题 4。 对数邻域 $\mathscr{LN}(-\infty)$ 中的函数在拉普拉斯变换下对应于 $\mathscr{H}_{a,k}$ 类中的超函数。

这些超函数的一个重要特征是，当趋近有限实数点时，它们呈多项式增长。

2.7. 示例：直半平面。 这一情形是经典的，我们只需检查一切是否如预期般成立。

若 $H = \{x + iy \mid x < a\}$，函数 Θ_H^{-1} 为常数 $\Theta_H^{-1}(\theta) = a$，于是我们得到$\mu(\theta) = a$。注意，我们实际上处于一种退化情形：邻域 H 的边界定义函数 ρ并非严格凸： Θ_H 和 Θ_H^{-1} 都是常数。事实上，我们可以固定 $w_0 \in H$，并计算拉普拉斯变换 $\mathcal{L}g(p)$

在竖直线 $w_0 \pm i\mathbb{R}^+$ 上的 g，当 $\mathrm{Re}(p) \geq 0$ 时（或在 $w_0 + \mathbb{R}^-$ 上，当 $\mathrm{Re}(p) < 0$ 时）：我们立即得到

$$|\mathcal{L}_{w_0} g(p)| \leq \|g\|_H \frac{\mathrm{e}^{-w_0 \mathrm{Re}(p)}}{N(p)}.$$

沿边界积分即可得到最优界，即对于 $w_0 = a$。例如，在 $\{\mathrm{Re}(w) < 0\}$ 上连续延拓到边界的有界全纯函数给出超函数 h，其满足 $|h(p)| \leq C/N(p)$。

3. 拉普拉斯变换的连续性

回忆一下，超函数 $[h]$（由h表示）的支集 $\mathrm{supp}([h]) \subset \mathbb{R}^+$ 是这样定义的：若 h可以延拓为 β 邻域内的全纯函数，则 β 不属于 $\mathrm{supp}([h])$。

我们希望说超函数的支集连续地依赖于超函数，但实际情况更为复杂。例如，我们可以利用龙格逼近，得到一列 (h_n) 定义在 $\mathbb{C} \setminus \{\beta_0\}$ 上、且极点仅位于 $\beta_0 \in \mathbb{R}^+$ 的函数，使其在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ 的每个紧子集上一致逼近函数 $h(p) = \frac{1}{p-\beta_1}$，其中 $\beta_1 > \beta_0$。 ——

然而，对于属于类 $\mathscr{H}_{a,\,k}$（对应于一个对数半平面）的超函数，超函数在有限点处的阶必须有界；这足以证明这种行为不会发生。

3.1. 局部有限阶超函数。本节中，$V \subset \mathbb{C}$是 $\mathbb{R}^+$的一个角邻域。

定义 13。设 $[h] \in H^1_{\mathbb{R}^+}(V, \mathcal{E})$ 是一个超函数；若存在 $\mathbb{C}$ 中包含点 β 的邻域 U，以及 $[h]$ 的一个代表元 $h \in \mathcal{O}(V \setminus \mathbb{R}^+)$ 满足估计式，则称 $[h]$ 在点 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 附近的阶至多为 $N \in \mathbb{N}$

$$|h(p)| \leq C \frac{1}{|\mathrm{Im}(p)|^{N+1}}$$

对某个常数 $C > 0$ 以及任意 $p \in U \setminus \mathbb{R}^+$。

若超函数 $[h]$ 在任意点 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 附近的阶都有限，则称其为局部有限阶。

引理 11 (积分技巧). 设点 $\beta \in \mathbb{R}^+$、β的一个邻域 $U \subset V$、包含 $[0, \beta] \cup U$ 的一个凸开集 $D \subset V$，以及 $\mathbb{R}^+ \cap D$的一个邻域 $W \subset D$。对于任意整数 $N \geq 0$ 和任意紧子集 $K \subset U$，存在常数 $b_{K,N}$ 满足以下条件。对于满足以下估计的任意函数 $h \in \mathcal{O}((V \setminus \mathbb{R}^+) \cup U)$

$$|h(p)| \leq C_W \quad \forall p \in D \setminus W,$$
$$|h(p)| \leq C_U \frac{1}{|\mathrm{Im}(p)|^N} \quad \forall p \in U \setminus \mathbb{R}^+,$$

我们还有

$$|h(p)| \leq b_{K,N} \max(C_W, C_U) \quad \forall p \in K.$$

关于明确的上估计，请参见证明。

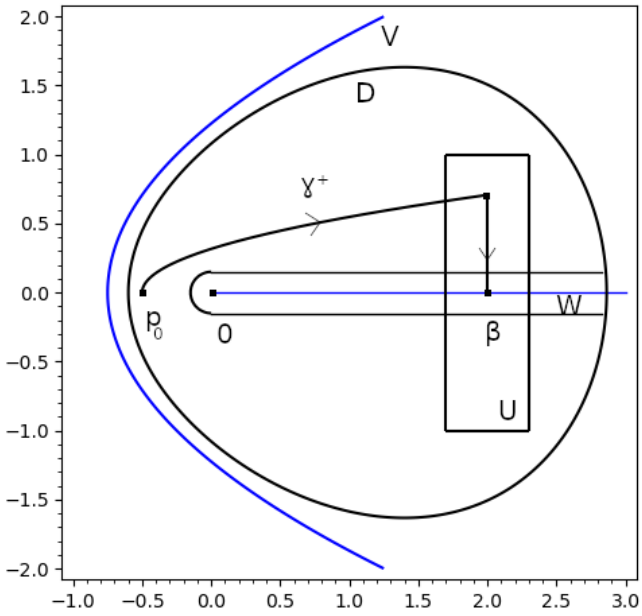


图4. 积分技巧的设置

证明. 固定一个基点 $p_0 \in D \setminus W$，并考虑由 $H(p_0)$ 给出的 h 的原函数 $H(p)$（为简单起见，假设 $D \setminus W$ 是单连通的）。集合 $(D \setminus W) \cup U$ 不再是单连通的，因此将 H 延拓到 U 有两种选择：可以从上方延拓（将这种选择记为 H^+），也可以从下方延拓（将这种延拓记为 H^-）。

为了估计 H^+ 在 $U \cap \{\mathrm{Im}(p) > 0\}$ 上的取值，我们可以固定一条从 p_0 出发并穿过 $(D \setminus W) \cap U$ 的路径 γ^+。为了到达某个 $p \in U \cap \{\mathrm{Im}(p) > 0\}$，从 p_0 前往 γ^+ 上位于 p正上方的点 p_1，然后沿着竖直线从 p_1 积分到 p。我们可以估计 $|\int_{p_0}^{p_1} h(x)dx| \leq C_W L$，其中 L 是 γ^+ 的长度，并且

$$|\int_p^{p_1} h(x)dx| \leq \int_{t=\mathrm{Im}(p)}^{\mathrm{Im}(p_1)} \frac{C_U}{t^N} dt = \frac{C_U}{N-1} \left(\frac{1}{\mathrm{Im}(p_1)^{N-1}} - \frac{1}{\mathrm{Im}(p)^{N-1}} \right).$$

我们看到，函数 H 满足与 h 相同类型的一致估计，但阶数为 $N-1$。通过归纳法，我们可以为 h 的迭代原函数 $H^{(k)}$ 获得类似的估计（其中 $H^{(0)} = h$，且 $H^{(k+1)}$ 是 $H^{(k)}$ 的一个原函数）。特别地，对于 $p \in U \setminus \mathbb{R}^+$，$|H^{(N)}(p)| \leq C_1 + C_2 |\log(\mathrm{Im}(p))|$，而 $|H^{(N+1)}|$ 在 $U \setminus \mathbb{R}^+$ 中有界。

考虑函数 $H^{(N+1)}$ 在点 p_1 处的泰勒多项式 $T_{p_1}(p)$:

$$T_{p_1}(p) = H^{(N+1)}(p_1) + (p-p_1)H^{(N)}(p_1) + \ldots + \frac{(p-p_1)^N}{N!}H^{(1)}(p_1).$$

由带积分余项的泰勒公式可得，对于满足 $p = \mathrm{Re}(p_1) + ti$ 且 $t > 0$ 的点 p，有如下估计:

$$\begin{aligned}
|H^{(N+1)}(p) - T_{p_1}(p)| &\leq \int_t^{\mathrm{Im}(p_1)} |h(\mathrm{Re}(p_1) + si)| \frac{|t-s|^N}{N!} ds \\
&\leq \frac{C_U}{N!} \int_t^{\mathrm{Im}(p_1)} \frac{(s-t)^N}{s^N} ds \\
&\leq \frac{C_U}{N!} \int_t^{\mathrm{Im}(p_1)} 1.ds \\
&\leq \frac{C_U \mathrm{Im}(p_1)}{N!}
\end{aligned}$$

我们可以根据 γ^+ 的长度 L 来估计 $|H^{(k)}(p_1)|$，进而估计 $|T_{p_1}(p)|$：

$$|H^{(k)}(p_1)| \leq \frac{C_W L^k}{k!},$$

$$\begin{aligned}
|T_{p_1}(p)| &\leq \sum_{k=1}^{N+1} \frac{|p-p_1|^{N+1-k}}{(N+1-k)!} \frac{C_W L^k}{k!} \\
&\leq \frac{C_W}{(N+1)!} \left(L + |p-p_1|\right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

现在回想一下，h 实际上定义在整个 U 上，因此其在 $\mathbb{R}^+$ 上下方的原函数 H^+ 和 H^- 实际上只相差一个常数。更一般地，$H^{(N+1)+}$ 和 $H^{(N+1)-}$ 实际上定义在整个 U 上，且只相差一个次数为 N 的多项式:

$$H^{(N+1)+}(p) - H^{(N+1)-}(p) = P(p).$$

限制在实区间 $I := U \cap \mathbb{R}$ 上时，我们可以使用后面的估计:

$$\begin{aligned}
|P(p)| &\leq |H^{(N+1)+}(p)| + |H^{(N+1)-}(p)| \\
&\leq \frac{C_U(\mathrm{Im}(p_1^+) - \mathrm{Im}(p_1^-))}{N!} + \frac{C_W}{(N+1)!}\left((L + |p-p_1^+|)^{N+1} + (L + |p-p_1^-|)^{N+1}\right) \\
&\leq \frac{2C_U B}{N!} + \frac{2C_W}{(N+1)!}(L+B)^{N+1},
\end{aligned}$$

如果 U 是一个宽为 A、高为 $2B$的矩形。利用随后陈述的引理 12，我们可以得到整个 U上的一个估计:

$$\|P\|_U \leq \frac{2C_U B k^N}{N!} + \frac{2C_W k^N (L+B)^{N+1}}{(N+1)!},$$

其中 $k = 2e\sqrt{1+(B/A)^2}$。利用等式 $H^{(N+1)+} = H^{(N+1)-} + P$，我们可以在 $\mathrm{Im}(p) < 0$ 的区域内得到 $H^{(N+1)+}(p)$的一个估计：

$$|H^{(N+1)+}(p)| \leq \frac{C_U B(1+2k^N)}{N!} + \frac{C_W(1+2k^N)}{(N+1)!}(L+B)^{N+1}.$$

为了得到 $|h|$ 在 U中的估计，我们对 $H^{(N+1)+}$的第 $(n+1)$ 阶导数使用柯西公式：取一点 $p \in U$，它到 U边界的距离为 $d(p, \partial U) > \ell$，并取以 p为圆心、半径为 ℓ 的圆 S。于是

$$\begin{aligned}\frac{|h(p)|}{(N+1)!} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{z\in S}\frac{|H^{(N+1)+}(z)|}{|z-p|^{N+2}}|dz| \\ &\leq \frac{C_U B(1+2k^N)}{\ell^{N+2}N!} + \frac{C_W(1+2k^N)(L+B)^{N+1}}{\ell^{N+2}(N+1)!}.\end{aligned}$$

□

引理 12。设有一个关于 $\mathbb{R}$对称的矩形区域 U。假设$I := U \cap \mathbb{R}$ 的长度为 A，U 的高度为 $2B$，并令 $k := 2e\sqrt{1+(B/A)^2}$。那么，对于任意次数至多为 N 的多项式 P，有

$$\sup_{x\in U}|P(x)| \leq k^N \sup_{x\in I}|P(x)|.$$

证明。写出 $I = [a,b]$，并对 $k = 0, \ldots, N$引入以下各点

$$x_k = a + k\frac{b-a}{N}.$$

我们将在点 x_k 处进行插值，以写出多项式 P：引入

$$Q_n(x) = \frac{\prod_{k\neq n}(x-x_k)}{\prod_{k\neq n}(x_n-x_k)},$$

因此，对于每个次数至多为 N的多项式 P，有

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} P(x_n)Q_n(x).$$

要估计 P 在 U 上的范数，只需估计 Q_n的范数。注意，对于 $k \neq n$，我们有

$$|x_n - x_k| \leq |n-k|\frac{A}{N},$$

并且，对于每个 $x \in U$，x 与某个 x_n 之间的距离至多为半个矩形的对角线：$|x - x_n| \leq D := \sqrt{A^2+B^2}$。由此可得，对于每个$x \in U$，

$$|Q_n(x)| \leq D^N \left(\frac{N}{A}\right)^N \frac{1}{n!(N-n)!},$$

$$
\begin{aligned}
|P(x)| &\le \|P\|_I \cdot \sum_{n=0}^{N} D^N \left(\frac{N}{A}\right)^N \frac{1}{n!(N-n)!} \\
&\le \|P\|_I \cdot \frac{D^N}{N!}\frac{N^N}{A^N}2^N \\
&\le \|P\|_I \cdot (2e\sqrt{1+(B/A)^2})^N,
\end{aligned}
$$

这里我们用到了不等式 $N! \ge (N/e)^N$，根据 Robbins公式 [4]，该不等式对每个 $N > 0$都成立。□

作为积分技巧引理的一个直接推论，我们可以得出以下结论:

推论1. 在引理 *11* 的相同背景下，考虑函数序列 (h_n) $h_n \in \mathcal{O}((V \setminus \mathbb{R}^+) \cup U)$，满足一致估计

$$
\begin{aligned}
|h_n(p)| &\le C_W \quad \forall p \in D \setminus W, \\
|h_n(p)| &\le C_U \frac{1}{|\mathrm{Im}(p)|^N} \quad \forall p \in U \setminus \mathbb{R}^+.
\end{aligned}
$$

假设存在一个函数 $h \in \mathcal{O}(V \setminus \mathbb{R}^+)$，使得 $h_n \to h$ 在 $D \setminus \mathbb{R}^+$ 的每个紧子集上都一致成立。那么， h 可以解析延拓到 U，并且

$$
|h(p)| \le b_{K,N}\max(C_W, C_U) \quad \forall p \in U.
$$

3.2. **部分和的连续性**。对于每个开子集 $I \subset \mathbb{R}$ 和每个邻域 $H \subset \mathscr{N}(-\infty)$，考虑有界全纯函数$g$ 在 H 上构成的子集 $E_0^{(I)}(H)$，其中拉普拉斯变换 $\mathcal{L}g$ 的支集与 I 不相交。如果 H 是一个对数邻域，那么根据推论1，该子集在 $E_0(H)$ 中是闭的。

若 β_1, β_2 属于 I，我们可以考虑一条简单闭曲线 γ，它位于 $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+) \cup I$ 内，沿正向绕 $[\beta_1, \beta_2]$ 一周，并且恰好在 β_1 和 β_2处与 $\mathbb{R}$ 相交。因此，我们可以将 g 的部分和定义为

$$
S_{[\beta_1,\beta_2]}g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{pw}dp.
$$

取 β_1 为负数，即得到通常的部分和。

类似地，我们可以沿着路径定义余项 $S_{[\beta_3,\infty[}g,$；该路径是 $C_+(0,\theta) \cap \{\mathrm{Re}(p) \ge \beta_3\}$ 的边界，其中 θ为某个数。

定理2。设对数邻域 $H \in \mathscr{LN}(-\infty)$ 包含于$\{\mathrm{Re}(w) \le 0\}$中，取两点 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$、一个数 $r > 0$ 以及 $I =]\beta_1 - r, \beta_1 + r[\cup]\beta_2 - r, \beta_2 + r[$。映射 $S_{[\beta_1,\beta_2]} : E_0^{(I)}(H) \to E_0^{(I)}(-1+H)$ 是连续的。

同样，如果 $\beta_3 \in \mathbb{R}^+$和 $I =]\beta_3 - r, \beta_3 + r[$，则映射 $S_{[\beta_3,+\infty[} : E_0^{(I)}(H) \to E_0^{(I)}(-1+H)$ 是连续的。

证明。用 $J=[\beta_1,\beta_2]$ 或 $J=[\beta_3,+\infty[$ 表示定义 S_J 的区间。只需考虑 $J=[\beta_3,+\infty[$ 且 $\beta_3>0$ 的情形。事实上，当 $0<\beta_1<\beta_2$ 时，我们可以写成 $S_{[\beta_1,\beta_2]}=S_{[\beta_1,+\infty[}-S_{[\beta_2,+\infty[}$；当 $\beta_1<0<\beta_2$ 时，则可以写成 $S_{[\beta_1,\beta_2]}=id-S_{[\beta_2,+\infty[}$。

考虑一点 $w_0\in\mathbb{R}^-\cap H$，并令 $h=\mathcal{L}_{w_0}g$。根据积分技巧引理 11，存在 β_3 在 $\mathbb{C}$ 中的一个邻域 U 以及一个常数 C，使得 $|h(p)|\leq C\|g\|_H$ 对任意 $p\in U$ 均成立（常数 C 与 g 无关）。现在，对每个 $w\in -1+H$，考虑一个包含 w 的锥 $C_-(w_1,\ \frac{\pi}{2}-\theta)\subset -1+H$，以及由 $C_+(0,\ \theta)\cap\{\mathrm{Re}(p)\geq\beta_3\}$ 的边界给出的积分路径 γ。我们有

$$S_{[\beta_3,+\infty[}g(w)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma h(p)\mathrm{e}^{pw}dp.$$

注意，若 $w=w_1+w_{12}$，则在整个路径 γ 上，$\mathrm{Re}(wp)=w_1\mathrm{Re}(p)+\mathrm{Re}(w_{12}p)\leq w_1\mathrm{Re}(p)$。我们可以像往常一样估计沿 γ 无穷部分的积分；在竖直部分，可考虑 $w_1<-1$，从而得到 $|h(p)\mathrm{e}^{wp}|\leq C\|g\|_H\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(p)}$。这段线段的长度与 $\mathrm{Re}(p)$ 成线性关系，因此，只要对 $\mathrm{Re}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(p)}$ 作任何上估计，就足以得出结论。□

推论 2. 考虑子集 R_n、$R\subset\mathbb{R}^+$，它们分别由递增序列 $(\beta_{n,k})_k$、$(\beta_k)_k$ 枚举。设对数半平面 H 以及有界函数 $g_n, g\in E_0(H)$。

假设 $g_n\to g$ 一致成立，且对每个 k 都有 $\beta_{n,k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\beta_k$，并且超函数 $\mathcal{L}g_n$ 的支集对每个 n 都包含于 R_n。那么 $\mathcal{L}g$ 的支集包含于 R。

此外，对每个 $\beta_1,\beta_2\notin R$，当 n 足够大时，部分和 $S_{[\beta_1,\beta_2]}g_n$ 均有定义，并且在 $-1+H$ 上一致成立 $S_{[\beta_1,\beta_2]}g_n\to S_{[\beta_1,\beta_2]}g$。

4. 对数半平面上的求和公式

如引言中所述，本节的目标是给出求和公式：当 $g(w)$ 是指数函数 $g(w)=\sum_{\beta\in R}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w}$ 的离散求和时，我们如何根据其系数 a_β 计算 g？

4.1. 沿对数曲线的拉普拉斯变换。

我们先给出拉普拉斯变换的一个替代公式，它将便于我们估计其原函数。我们将使用一条“对数曲线” $\mathscr{C}\subset H$：

$$\mathscr{C}=\{x+iy\in\mathbb{C}\mid x=\rho(|y|)\},$$

对于 $\rho(y)=-a-k\log(1+y)$。我们可以将其视为一个对数半平面的边界（我们对数半平面的定义略有不同，但在渐近意义下等价）。

我们将记 $\mathscr{C}^+=\mathscr{C}\cap\{\mathrm{Im}(w)\geq 0\}$ 以及 $\mathscr{C}^-=\mathscr{C}\cap\{\mathrm{Im}(w)\leq 0\}$。

引理 13. 考虑如上所述的曲线 $\mathscr{C}\subset H$，以及 $\mathscr{C}$ 与 $\mathbb{R}$ 的交点 w_0。对于每个满足 $\mathrm{Im}(p)\leq 0$（分别为 $\mathrm{Im}(p)\geq 0$）的 $p\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$，我们

have

$$\mathcal{L}_{w_0}g(p)=\int_{\mathscr{C}^+}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw\quad(resp.\ =\int_{\mathscr{C}^-}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw).$$

证明。考虑一个满足 $\mathrm{Im}(p)\le 0$ 的点 $p\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$，以及一个满足 $\mathrm{Im}(v)>0$ 且 $\mathrm{Re}(pv)>0$ 的向量 v。对于每个距离 w_0 足够远的点 $w_1\in\mathscr{C}^+$，半直线 $w_1+\mathbb{R}^+v$ 不会在远离 w_1 处与 $\mathscr{C}$ 相交，并且我们可以在 Γ_{w_0}、w_1、v 上计算 $\mathcal{L}_{w_0}g(p)$。为方便起见，将 $\mathscr{C}^+(w_0,w_1)$ 记作曲线在 $\mathscr{C}^+$ 上介于 w_0 与 w_1 之间的那段，将 $\mathscr{C}^+(w_1,\infty)$ 记作曲线在 $\mathscr{C}^+$ 上从w_1开始的半无限段。曲线$\Gamma_{w_0,w_1,v}$ 可以选取为使连接 w_0 与 w_1 的曲线恰好是 $\mathscr{C}^+(w_0,w_1)$，由此得到 $\mathcal{L}_{w_0}g(p)$ 的如下表达式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{w_0}g(p)&=\int_{w\in\mathscr{C}^+(w_0,w_1)}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw+\int_{w\in w_1+\mathbb{R}^+v}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw\\&=:I_1(w_1)+I_2(w_1).\end{aligned}$$

我们要证明，当 w_1 在 $\mathscr{C}^+$ 上趋于无穷大时，积分 $I_2(w_1)$ 趋于零，并且 $I_1(w_1)$ 趋于 $\int_{\mathscr{C}^+}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw$，这相当于说

$$I_3(w_1):=\int_{w\in\mathscr{C}^+(w_1,\infty)}g(w)\mathrm{e}^{-pw}dw$$

趋于零。

我们照常估计积分 I_2

$$\begin{aligned}|I_2|&\le\int_{t=0}^{\infty}\|g\|_H\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(pw_1+ptv)}|v|dt\\&\le\|g\|_H\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(pw_1)}|v|}{\mathrm{Re}(pv)}.\end{aligned}$$

将 $p=p_1+ip_2$ 和 $w_1=x+iy$ 分别写成 $p_2,x\le 0$ 和 $y>0$，得到 $\mathrm{Re}(pw_1)=p_1x-p_2y$。由于当 $w_1\in\mathscr{C}^+$ 时 $x\sim -k\log(1+y)$，我们已经得到当 $p_2\ne 0$ 时 $\mathrm{Re}(pw_1)\to+\infty$。若 $p_2=0$，则当 $w\to\infty$ 在 $\mathscr{C}^+$ 上时，$p\in\mathbb{R}^{-*}$ 和 $p_1x\to+\infty$。无论如何，当 $w_1\to\infty$ 时，我们得到 $I_2(w_1)\to 0$。

为了估计积分 I_3，我们需要将其明确写出：

$$I_3(w_1)=\int_{y=y_1}^{\infty}g(w)\mathrm{e}^{-p(-a-k\log(1+y))-ipy}\left(-\frac{kdy}{1+y}+idy\right).$$

当 y_1 足够大时，直接估计可得：

$$|I_3(w_1)|\le\|g\|_\infty\int_{y=y_1}^{\infty}\mathrm{e}^{ap_1}(1+y)^{kp_1}\mathrm{e}^{p_2y}(k+1)dy;$$

由于 $p_2<0$，该积分有限，并且当 y_1 趋于无穷大时趋于零，从而完成引理的证明。□

引理 14. 设 $H \subset \{\mathrm{Re}(w) \leq -1\}$，且 $\mathscr{C} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x = -a - k\log(1+|y|)\} \subset H$。令 $w_0 = \mathscr{C} \cap \mathbb{R}$。对于定义在 H 上的任意有界全纯函数g、满足 $\mathrm{Re}(p) > 0$ 的任意 $p \in \mathbb{C}$，以及满足 $n \geq k\mathrm{Re}(p)$ 的任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有如下估计

$$|I^n \mathcal{L}_{w_0} g(p)| \leq \frac{(k+1)\mathrm{e}^{an/k} 2^n \|g\|_\infty}{|\mathrm{Im}(p)|}.$$

此外，函数 $I^n\mathcal{L}_{w_0}g$ 可以从上方和下方连续延拓到实区间 $[0,(n-1)/k[$，从而得到两个连续函数$(I^n\mathcal{L}_{w_0}g)^+(\beta)$，$(I^n\mathcal{L}_{w_0}g)^-(\beta)$。对于 $k\mathrm{Re}(p) \leq n-2$，下述界对到 $[0,(n-2)/k]$的延拓同样成立：

$$|(I^n \mathcal{L}_{w_0} g)^{\pm}(p)| \leq (k+1)\mathrm{e}^{a\frac{n-2}{k}} 2^{\frac{n-2}{k}+1} \|g\|_\infty.$$

这两个延拓之差由下列方程给出

$$(I^n \mathcal{L}_{w_0} g)^+(\beta) - (I^n \mathcal{L}_{w_0} g)^-(\beta) = \int_{w \in \mathscr{C}} \frac{g(w)}{w^n} \mathrm{e}^{-\beta w} dw.$$

证明。 记 $p = p_1 + ip_2$。由引理 6，我们有

$$I^n \mathcal{L}_{w_0} g = (-1)^n \mathcal{L}_{w_0} \left(\frac{g(w)}{w^n} \right),$$

特别地，注意对于 $w \in H$，我们有 $|w| \geq 1$。设 $p_2 < 0$ （情形$p_2 > 0$ 可类似处理），我们可以使用引理 13：

$$\begin{aligned}
|I^n \mathcal{L}_{w_0} g(p)| &= \left| \int_{\mathscr{C}^+} \frac{g(w)}{w^n} \mathrm{e}^{-pw} dw \right| \\
&\leq \int_{t=0}^{\infty} \|g\|_\infty \mathrm{e}^{ap_1} \frac{(1+t)^{kp_1}}{|\rho(t)+it|^n} \mathrm{e}^{p_2 t} \left| \frac{k}{1+t} + i \right| dt \\
&\leq \int_{t=0}^{\infty} (k+1)\mathrm{e}^{ap_1} \|g\|_\infty \frac{(1+t)^{kp_1}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{p_2 t} dt \\
&\leq (k+1)\mathrm{e}^{ap_1} \frac{\|g\|_\infty 2^{kp_1}}{|p_2|}.
\end{aligned}$$

我们利用了$(1+t)^2 \leq 2(1+t^2)$以及 $n \geq kp_1$ 这些事实来得出结论。由此得到所求的关于 $kp_1 \leq n$的估计。当 $n - kp_1 > 1$时，函数

$$t \mapsto \frac{(1+t)^{kp_1}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$$

可积，并且当 p_2 趋于零时，$I^n\mathcal{L}g(p)$ 的极限由控制收敛定理给出：

$$I^n \mathcal{L} g(p) \underset{p_2 \to 0}{\longrightarrow} \int_{w \in \mathscr{C}^+} \frac{g(w)}{w^n} \mathrm{e}^{-p_1 w} dw.$$

用 $(I^n\mathcal{L}g)^-$ 表示该引理陈述中的极限；我们看到，这个函数在 $[0,(n-1)/k[$ 上连续。我们还得到关于$p_1 \le (n-2)/k$的以下估计：

$$|I^n\mathcal{L}g(p)| \le (k+1)\mathrm{e}^{ap_1}2^{kp_1}\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

对 $p_2 > 0$，同样的证明给出以下表达式

$$(I^n\mathcal{L}g)^+(\beta) = \int_{w\in\mathscr{C}^-} \frac{g(w)}{w^n}\mathrm{e}^{-\beta w}dw,$$

因此

$$(I^n\mathcal{L}g)^+(\beta) - (I^n\mathcal{L}g)^-(\beta) = \int_{w\in\mathscr{C}} \frac{g(w)}{w^n}\mathrm{e}^{-\beta w}dw.$$

□

4.2.对角分部积分。 取一个对数邻域 $H \in \mathscr{LN}_{a,\,k}(-\infty)$，以及一点 w_0 来定义拉普拉斯变换（为简化记号，本节中我们将省略对此的提及）。

考虑定义逆拉普拉斯变换的路径 $\gamma_v = R(-\varepsilon, v)$ 和 $\gamma_{\bar v} = R(-\varepsilon, \bar v)$（参数 $\varepsilon > 0$ 无关紧要，为方便起见，我们可以认为 $-\varepsilon = -0.5/k$）。对 $n \ge 1$，引入路径 γ_v 在带状区域 $\{\frac{n-0.5}{k} \le \mathrm{Re}(p) \le \frac{n+0.5}{k}\}$内的部分 $\gamma_{v,n}$，以及在带状区域 $\{-\varepsilon \le \mathrm{Re}(p) \le \frac{1}{2k}\}$内的部分 $\gamma_{v,0}$。还要引入路径 $\gamma_{v,n}$ 的边界点 p_n, p_{n+1}（起初我们将省略它们对 p_n 的依赖，但当这种依赖变得相关时，将其写作 $p_{v,n}$）。路径 $\gamma_{\bar v,n}$ 的边界点就是 p_n。进行 $n+3$ 分部积分后，对于 $n \ge 0$，得到：

$$\begin{aligned}
\int_{p\in\gamma_{v,n}} \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp &= (I\mathcal{L}g)(p_{n+1})\mathrm{e}^{wp_{n+1}} - (I\mathcal{L}g)(p_n)\mathrm{e}^{wp_n} - \int_{p\in\gamma_{v,n}} (I\mathcal{L}g)(p)w\mathrm{e}^{wp}dp \\
&= \dots \\
&= \sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r\left[(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_{n+1})w^r\mathrm{e}^{wp_{n+1}} - (I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_n)w^r\mathrm{e}^{wp_n}\right] \\
&\quad + (-1)^{n+3}\int_{p\in\gamma_{v,n}} (I^{n+3}\mathcal{L}g)(p)w^{n+3}\mathrm{e}^{wp}dp.
\end{aligned} \tag{3}$$

我们将边界项记为

$$BT_n^+(w) := \sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_{n+1})w^r\mathrm{e}^{wp_{n+1}}$$

$$BT_n^-(w) := \sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_n)w^r\mathrm{e}^{wp_n},$$

使得

$$\int_{p\in\gamma_{v,n}} \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp = BT_n^+(w) - BT_n^-(w) + (-1)^{n+3}\int_{p\in\gamma_{v,n}} (I^{n+3}\mathcal{L}g)(p)w^{n+3}\mathrm{e}^{wp}dp.$$

只要积分 $\int_{p\in\gamma_v}\mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp$ 收敛，我们就有

$$\int_{p\in\gamma_v} \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{p\in\gamma_{v,n}} \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp.$$

注意，在求和 $\int_{\gamma_{v,n}}\mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp + \int_{\gamma_{v,n+1}}\mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp$ 中，点 p_{n+1} 处有一些抵消：

$$\begin{aligned} BT_n^+(w) - BT_{n+1}^-(w) &= \sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_{n+1})w^r\mathrm{e}^{wp_{n+1}} \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n+3}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_{n+1})w^r\mathrm{e}^{wp_{n+1}} \\ &= (-1)^{n+4}(I^{n+4}\mathcal{L}g)(p_{n+1})w^{n+3}\mathrm{e}^{wp_{n+1}}. \end{aligned}$$

我们将这些预消去边界项记作 $BT_{n+1}^0(w) = BT_n^+(w) - BT_{n+1}^-(w)$。

根据这些计算，我们引入积分分部的对角提取法，简称“对角分部积分”

$$\begin{aligned} I_v^{\Delta'}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp}) &:= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\int_{p\in\gamma_{v,n}}(I^{n+3}\mathcal{L}g)(p)w^{n+3}\mathrm{e}^{wp}dp \\ &\quad - BT_0^-(w) + \sum_{n=1}^{\infty}BT_n^0(w), \end{aligned}$$

and

$$I_v^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp}) = I_{\bar{v}}^{\Delta'}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp}) - I_v^{\Delta'}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp}).$$

注意，边界项 $BT_0^-(w)$ 在差中相互抵消。

引理 15。对于每个角 θ_0 和每个 $\theta < \frac{\pi}{2}-\theta_0$，存在一个锥 $C = C_-(w_0,\theta)$，使得定义对角分部积分 $I_v^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp})$ 的级数对每个 $w\in C$ 以及满足 $\mathrm{Re}(v) > 0$ 且 $0 < |\mathrm{Arg}(v)| < \theta_0$ 的任意向量 v 都正规收敛。

证明。</style>沿 $\gamma_{v,0}$ 的积分很容易得到一个与参数无关的界；注意，在其他各项中，唯一考虑的点 p 满足 $\mathrm{Re}(p) \geq k/2$，且出现在指数项中或 $I^n\mathcal{L}g(p)$ 中，其中 $n \geq k\mathrm{Re}(p) + 2$。我们可以使用引理 14 的估计：

$$\begin{aligned} |I^n\mathcal{L}g(p)| &\leq 2(k+1)\mathrm{e}^{(a+\log(2))\frac{n-2}{k}}\|g\|_H \\ &\leq C\mathrm{e}^{\tilde{a}\frac{n-2}{k}}\|g\|_H. \end{aligned}$$

若记 $t = \tan(\mathrm{Arg}(v))$，则可得积分 $\gamma_{v,n}$ 内的如下界：

$$\begin{aligned}|(I^{n+3}\mathcal{L}g)(p)w^{n+3}\mathrm{e}^{wp}| &\le C\|g\|_H \mathrm{e}^{\tilde{a}\frac{n+1}{k}}|w|^{n+3}\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(wp)}\\ &\le C\|g\|_H \mathrm{e}^{\tilde{a}\frac{n+1}{k}}|w|^{n+3}\mathrm{e}^{-0.5\mathrm{Re}(w)/k}\mathrm{e}^{(p_1+0.5/k)(\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w))}\\ &\le C\|g\|_H \mathrm{e}^{\tilde{a}\frac{n+1}{k}}|w|^{n+3}\mathrm{e}^{-0.5\mathrm{Re}(w)/k}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}(\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w))}\\ &\le C\|g\|_H \mathrm{e}^{\tilde{a}/k}|w|^{3}\mathrm{e}^{-0.5\mathrm{Re}(w)/k}\\ &\quad\times\exp\left[\frac{n}{k}\left(\tilde{a}+k\log(|w|)+\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w)\right)\right].\end{aligned}$$

（在这些不等式中，我们使用了 $\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w) < 0$ 。）我们得到级数收敛时关于 w 的以下必要条件：

$$\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w)+k\log(|w|)+\tilde{a}<0. \tag{4}$$

注意，在锥 $C = C_{-}(w_0, \mathrm{Arctan}(c))$ 中，对每个 $w = w_0 + w_{01} \in C$，都有

$$\mathrm{Re}(w)-t\mathrm{Im}(w) \le w_0 + \mathrm{Re}(w_{01}) + |t||\mathrm{Im}\, w_{01}| \le w_0 + (1-c|t|)\mathrm{Re}(w_{01}),$$

and

$$|w_{01}| \le \sqrt{1+c^2}|\mathrm{Re}\, w_{01}|.$$

引入 $\tilde{c} = \dfrac{1-c|t|}{\sqrt{1+c^2}}$ 和 $\hat{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$，在 $\tilde{c} > 0$ 的情形下，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w)-t\,\mathrm{Im}(w)+k\log|w| &\le w_0 - \frac{1-c|t|}{\sqrt{1+c^2}}|w_{01}| + k\log|w|\\ &\le (1-\tilde{c})w_0 - \tilde{c}(|w_0|+|w_{01}|) + k\log|w|\\ &\le (1-\hat{c})w_0 + \sup_{|w|>1}(k\log|w| - \tilde{c}|w|).\end{aligned}$$

因此，对每个 $t > 0$，我们可以任选 $c < t^{-1}$；记

$$s = \sup_{|w|>1}(k\log|w| - \tilde{c}|w|) = k\log(k) - k - k\log(\tilde{c}),$$

我们便对任意 $w_0 < \frac{-\tilde{a}-s}{1-c}$，得到了所求结果。注意，函数 $\tilde{c}(t)$ 随着 t 减小而增大（c 保持常数），因此函数 $s(t)$ 递减，且方程 (4) 在锥 C 中对每个 $t' < t$ 都一致成立。□

引理16. 对于任意方向 v，我们有

$$\int_{\gamma_v}\mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp = I_v^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wp})$$

只要两者都有定义。

证明。根据分部积分公式 (3) 以及 $I_v^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wp})$ 的收敛性（引理 15），我们只需证明边界项级数 $\sum|BT_n^{+}(w)|$ 和 $\sum|BT_n^{-}(w)|$ 收敛。我们将估计

沿路径 γ_v 的第一个求和项；其余各项可以类似地估计。为方便起见，我们考虑 $v = \mathrm{e}^{i\theta}/\cos(\theta)$，使得 $p_n = (nv - 0.5)/k$。

我们可以写成 $I^n\mathcal{L}g = \mathcal{L}(\frac{g(w)}{w^n})$，并使用 $|w| \geq 1$ 进行估计（完全不考虑细节）

$$|I^n\mathcal{L}g(p)| \leq \|g\|_H \frac{\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Re}(p)}}{N(p)}$$

对于路径 γ_v 上任意的 p，以及某个常数 $\mu > 0$。沿着不拘细节的思路再往下，我们得到估计 $\mathrm{Im}(p_n) \geq k\tan(\theta)/2$，由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} |BT_n^+(w)| &= \sum_{n\geq 1}\sum_{r=0}^{n+2} |(I^{r+1}\mathcal{L}g)(p_{n+1})||w|^r|\mathrm{e}^{wp_{n+1}}| \\ &\leq \sum_{n\geq 1}\sum_{r=0}^{n+2} \frac{2\|g\|_H}{k\tan(\theta)}|w|^r \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(wv)(n+1)/k - 0.5\mathrm{Re}(w)/k}\mathrm{e}^{\mu(n+0.5)/k} \\ &\leq \frac{2\|g\|_H}{k\tan(\theta)}\mathrm{e}^{\mu/(2k)}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Re}(w)}{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{|w|^{n+3}-1}{|w|-1}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}(\mathrm{Re}(wv)-\mu)}.\end{aligned}$$

我们再次发现，在假设条件下该级数收敛

$$\mathrm{Re}(wv) - \mu + k\log(w) < 0;$$

仿照引理 15，我们推得该求和在某个锥内对 w 收敛。

通过解析延拓即可得出结论。 □

特别地，对角分部积分 $I_v^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wp})$ 不依赖于向量 v。但是，定义它的公式在 v 趋近实数点 1 时存在极限。

引入连续函数

$$\varphi_n(t) = (I^n\mathcal{L}g)^-(t) - (I^n\mathcal{L}g)^+(t)$$

由引理 14 定义于 $t \in [0, (n-2)/k]$。引入对角分部积分的极限

$$I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wt}) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\int_{t=t_n}^{t_{n+1}} \varphi_{n+3}(t)w^{n+3}\mathrm{e}^{wt}dt + \sum_{n=1}^{\infty} BT_n^1(w),$$

其中截断点为 $t_n = \frac{n-0.5}{k}$，边界项为

$$BT_n^1(w) = (-1)^{n+3}\varphi_{n+3}(t_n)w^{n+2}\mathrm{e}^{wt_n}.$$

定理 3. 定义 $I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wt})$ 的级数在对数邻域 H' 内正规收敛，并且对于每个 $w \in H'$，我们都有

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(w) = \frac{1}{2i\pi} I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g, \mathrm{e}^{wt}).$$

证明。 如前所述，我们只需在引理 15 中令 v 趋于 1。更明确地，根据引理 14，对于每个 $t \le (n-2)/k$

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)| &\le 2(k+1)\mathrm{e}^{(a+\log(2))\frac{n-2}{k}}\|g\|_H \\ &\le C\mathrm{e}^{\tilde{a}n/k}\|g\|_H.\end{aligned}$$

于是我们可以估计

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+3}(t)w^{n+3}\mathrm{e}^{wt}| &\le C\|g\|_H\mathrm{e}^{\tilde{a}n/k}|w|^{n+3}\mathrm{e}^{t\,\mathrm{Re}(w)} \\ &\le C\|g\|_H\mathrm{e}^{\tilde{a}n/k}|w|^{n+3}\mathrm{e}^{\frac{n-2}{k}\mathrm{Re}(w)} \\ &\le C\|g\|_H|w|^3\mathrm{e}^{-2\mathrm{Re}(w)/k}\exp\left[\frac{n}{k}(\tilde{a}+k\log|w|+\mathrm{Re}(w))\right].\end{aligned}$$

只要满足

$$\tilde{a}+k\log|w|+\mathrm{Re}(w)<0.$$

如附录 A 所述，这是一个对数邻域。 □

由于积分 $I_1^{\Delta}(\mathcal{L}g,\mathrm{e}^{wt})$ 关于函数 g 连续，我们便得到一种显式方法，可根据其形式展开 $\hat{}g$ 计算 g ：若 $\hat{}g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 对某个离散子集 $R\subset\mathbb{R}^+$ 成立，则可得

$$\varphi_n(t)=\sum_{\beta\le t} a_\beta \frac{(t-\beta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

对角分部积分 I_1^{Δ} 给出了一个以形式展开 $\hat{}g(w)$ 表示的显式求和公式。一般而言，若形式级数 $\hat{}g$ 满足： I_1^{Δ} 对 w 在 $-\infty$ 的某个邻域内收敛，则称它可以通过对角分部积分重新求和。

推论 3. 如果有界函数 $g\in\mathcal{O}(H)$ 是正规收敛级数 $g_n=\sum_{\beta\in R_n} a_{\beta,n}\mathrm{e}^{\beta w}$ 的一致极限，并且 g 在 $-\infty$ $\hat{}g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 处的形式展开具有闭离散指标集 R，那么形式级数 $\hat{}g$ 可以通过对角分部积分重新求和。此外，只要两者都有定义，$I_1^{\Delta}(\mathcal{L}\hat{}g,\mathrm{e}^{wt}) = g(w)$ 。

4.3. 渐隐求和。 在本节中，我们阐明函数 $g\in E_0(H)$ 在何种意义下是其部分和的极限。我们将采用第 3.2 节和第 4.2 节中的记号。以第 4.2 节的点 t_n 作为部分和的截断点，我们得到一些有界函数 $S_{[t_0,t_n]}g\in E_0(-1+H)$。我们在此还假设每个点 t_n 均不在 g 的支集中，以使部分和表现正常。为简化记号，我们将记 $S_ng = S_{[t_0,t_n]}g$ 和 $H' = -1+H$。

我们可以将 $S_n g$ 写成沿围绕线段$[-1,t_n]$的闭路径 γ 的积分，并在点 t_n 处截断 γ，以便对 $n+3$ 进行分部积分：

$$\int_\gamma \mathcal{L}g(p)\mathrm{e}^{wp}dp = (-1)^{n+3}\int_{\gamma\setminus\{t_n\}}(I^{n+3}\mathcal{L}g)(p)w^{n+3}\mathrm{e}^{wp}dp$$
$$-\sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)^+(t_n)w^r\mathrm{e}^{wt_n}+\sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r(I^{r+1}\mathcal{L}g)^-(t_n)w^r\mathrm{e}^{wt_n}.$$

再一次， $I^{n+3}\mathcal{L}g$ 从上方和下方均连续延拓到线段 $[t_0,t_n]$，当 γ 向该线段收缩时，我们得到公式

$$2i\pi S_n g(w) = (-1)^{n+3}\int_{t=t_0}^{t_n}\varphi_{n+3}(t)w^{n+3}\mathrm{e}^{wt}dt + BT_n^2(w),$$

其中边界项为

$$BT_n^2(w)=\sum_{r=0}^{n+2}(-1)^r\varphi_{n+3}^{(n-r+2)}(t_n)w^r\mathrm{e}^{wt_n}.$$

注意， $\mathcal{L}g$ 在 t_n 的某个邻域内全纯，因此 φ_{n+3} 在 t_n附近是 $n+2$ 阶多项式；项 $\varphi_{n+3}^{(n-r+2)}$ 是该多项式的导数。

定义 14. 我们将 g 的第 n 个渐消部分和定义为

$$\tilde{S}_n g(w) = S_n g(w) - \frac{1}{2i\pi}BT_n^2(w).$$

这些渐消部分和实际上就是与对角分部积分相对应的部分和：

引理 17. 对每个 $n\geq 1$，我们有

$$2i\pi\tilde{S}_{n+1}g(w)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r+3}\int_{t=t_r}^{t_{r+1}}\varphi_{r+3}(t)w^{r+3}\mathrm{e}^{wt}dt+\sum_{r=1}^{n}BT_r^1(w).$$

本引理是经典分部积分的一个简单应用。由此我们立即得到：

定理 4. 渐消部分和序列 $S_n g$ 在 $-\infty$ 的一个对数邻域上一致趋于 g。

注意，若函数 g 对某个离散子集 $R\subset\mathbb{R}^+$具有形式展开 $\hat{g}(w)=\sum_{\beta\in R}a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，则

$$\tilde{S}_n g(w)=\sum_{\beta\leq t_n}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w}+\sum_{r=0}^{n+2}b_r w^r\mathrm{e}^{wt_n}$$

对于常数 $b_r=(-1)^{r+1}\varphi_{n+3}^{(n-r+2)}(t_n)\in\mathbb{C}$，特别是 $S_n g$ 的形式展开与 g 的形式展开在 t_n 阶之前一致。事实上，两者之差

$\tilde{S}_n g$ 和 $S_n g$ 支集于 $t = t_n$：超函数 $\mathcal{L}(BT_n^2)$ 是一个支集于 $\{t_n\}$ 的 $n+2$ 阶超函数。

附录 A. 对数邻域的方程

考虑以下 $-\infty$ 的邻域：

$$H_{a,k} = \{w = x + iy \in \mathbb{C} \mid x < a - k\log(1 + |y|)\},$$

$$\widetilde{H}_{a,k} = \{w = x + iy \in \mathbb{C} \mid x + \frac{k}{2}\log(x^2 + y^2) < a\}.$$

这两族邻域在以下引理的意义下是等价的。特别是，它们都可以用作对数邻域的定义。

引理 18. 若 $a \le \min(-1, -k)$，则 $H_{a,k}$ 可表示为 $\{x < \rho(|y|)\}$，其中 ρ 为某个函数。此外，$H_{a,k} \subset H_{a+1,k}$ 且存在一个可显式表示的函数 $(a, k) \mapsto M_{a,k}$ 使得 $H_{a,k} \subset H_{a+M_{a,k},k}$。

证明。记 $F(x, y)$ 为 $= x + k\log(1 + |y|)$，记 $\tilde{F}(x, y)$ 为 $= x + \frac{k}{2}\log(x^2 + y^2)$。首先注意到

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{k}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + kx + y^2}{x^2 + y^2};$$

由此可知，对于 $x < -k$，若 $x + iy \in H_{a,k}$ 则整个区间 $]-\infty, x] + iy$ 包含于 $H_{a,k}$。

考虑一点 $x+iy \in H_{a,k}$。由于 $x < -1$，我们有 $\log(x^2+y^2) \ge \log(1+y^2) \ge 2\log(1 + |y|) - \log(2)$（由柯西–施瓦茨不等式，我们有 $(1 + y)^2 \le 2(1 + y^2)$）。因此，

$$x + k\log(1 + |y|) \le x + \frac{k}{2}\log(x^2 + y^2) + \frac{\log(2)}{2},$$

且点 $x + iy$ 属于 $H_{a', k}$，其中 $a' = a + \log(2)\,2$。 ——

为研究另一个包含关系，只需研究 F 在曲线 $C_a = \partial H_{a,k} = \{x = a - k\log(1 + |y|)\}$ 上的限制。由对称性，只需研究其在上半部分 $\{y > 0\}$ 上的限制。对于 $y > 0$ 和 $x = a - k\log(1 + y)$，我们有

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-k}{1 + y},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{F}|_{C_a}}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{k}{2}\frac{2x\frac{\partial x}{\partial y}}{x^2 + y^2} + \frac{k}{2}\frac{2y}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{-k}{1 + y} + \frac{ky}{x^2 + y^2} - k^2\frac{a - k\log(1 + y)}{(1 + y)(x^2 + y^2)} \\
&= k\frac{y - x^2}{(1 + y)(x^2 + y^2)} - \frac{ak^2}{(1 + y)(x^2 + y^2)} + k^3\frac{\log(1 + y)}{1 + y}\frac{1}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

˜这三项中的每一项都可积，因此 $F|_{C_a}$ 有界。更精确地说，由于 $x > 1$，我们有

$$\int_0^\infty \frac{ak^2}{(1+y)(x^2+y^2)}dy \leq ak^2 \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \leq \frac{\pi a k^2}{2},$$
$$\int_0^\infty k^3 \frac{\log(1+y)}{1+y}\frac{dy}{x^2+y^2} \leq k^3 \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \leq \frac{\pi k^3}{2};$$

为了估计第一项，我们可以使用 $x^2 = a^2 - 2ak\log(1+y) + k^2\log(1+y)^2$，并估计 $\frac{1}{1+y} \leq 1$，$\frac{\log(1+y)}{1+y} \leq 1$ 和 $\frac{\log(1+y)^2}{1+y} \leq 1$（后一函数的最大值为 $4/e^2$）。因此

$$\int_0^\infty k\frac{y-x^2}{(1+y)(x^2+y^2)}dy \leq k(1+a^2+2ak+k^2)\frac{\pi}{2}.$$

˜由于 $F(a,0) = a + k\log(|a|)$，我们得到

$$\max_{C_a}|\tilde{F} - a - k\log(|a|)| \leq k\frac{\pi}{2}(1+a^2+3ak+2k^2)$$

从而得到引理中的常数 $M_{a,k}$。 □

参考文献

[1] 埃卡莱，J. 小除数补偿与局部对象的分歧线性化。载于动力系统中的复解析方法。*1992*年*1*月在里约热内卢巴西纯数学与应用数学研究所（*IMPA*）举行的会议论文集。巴黎：法国数学会，1994年，第135–199页。[2] Ilyashenko，Y. 希尔伯特第十六问题百年史。《美国数学会通报》，新系列，第*39*卷，第3期（2002年），301–354。[3] 森本，M.《佐藤超函数导论》。日文译本由森本光夫翻译，第129卷《数学译丛》。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1993年。[4] 罗宾斯，H. 关于斯特林公式的一则注记。《美国数学月刊》第*62*卷（1955年），26–29。[5] 佐藤，M. 超函数理论 I。《东京大学理学部纪要》第一辑第*8*卷（1959年），139–193。[6] 佐藤，M. 超函数理论 II。《东京大学理学部纪要》第一辑第*8*卷（1960年），387–437。[7] 约科兹，J.-C. 一维小除数，第231卷《Astérisque》。巴黎：法国数学会，1995年。

弗卢米嫩塞联邦大学 - 数学与统计研究所，尼泰罗伊，巴西电子邮箱：olivier thom@id.uff.br_