arXiv:2603.07350v1 [math.CV] 7 Mar 2026

无理级数 II 按包求和

OLIVIER THOM

摘要。带有正指数的指数离散和 $g(w) = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 在不包含半平面 H 的 $-\infty$ 邻域中可能不正规收敛。我们研究这些级数的不同收敛概念，尤其是直观的按包求和概念。

实际上，将和式 $g(w)$中指数彼此接近的项归入同一个包，并先对每个包求和，可能会产生大量抵消。我们证明，在我们称为对数邻域的区域内有界的离散和 $g(w)$ 总能按包求和。

目录

1. 引言 3 1.1. 背景 3 1.2. 结果 4 1.3. 与超渐近级数的关系 5 1.4. Écalle 著作中的无理级数 7 1.5. 结论 8 2. 定义 9 2.1. 无理级数 9 2.2. 作为超函数的收敛 10 2.3. 消逝求和 11 2.4. 按包求和 11 2.5. 对角分部积分 12 3. 离散分布 15 3.1. 范德蒙德分布 15 3.2. 分布的范数 17 3.3. 其他观点 18 3.4. 在范德蒙基上分解分布 20 3.5. 退化离散分布 20 3.6. 能否获得更好的分解？ 22 4. 无理级数的分组求和 22 附录 A. $-\infty$ 24 的一些邻域 A.1. 对数邻域 24 A.2. 直半平面 25

A.3. 二次域 参考文献 25
26

1. 引言

1.1. 背景。 本文是 [9]的续篇。在这些文章中，我们要研究可以写成 $g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$的全纯函数类，其中$R$ 是 $\mathbb{R}^+$的一个闭离散子集，主要是对某些 $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}^+$ 而言的 $R = R_\alpha = \mathbb{N}+\alpha^{-1}\mathbb{N}$；我们将这些称为无理级数。注意，若 $z = \mathrm{e}^w$，则此函数可写成$\tilde{g}(z) = \sum_{\beta\in R} a_\beta z^\beta$；后一函数是多值的，我们更倾向于将其视为变量 w的函数。

这些级数自然出现在若干情形中，例如在涉及小除数的问题中。若 $\tilde{f}(z) = \mathrm{e}^{2i\pi\alpha}z+\sum b_n z^n$ 是具有无理旋转数 α的微分同胚芽，我们可以像前面一样考虑变量替换 $z =\mathrm{e}^w$，从而在 $w = -\infty$处得到一个芽 $f(w) = w + 2i\pi\alpha + \sum c_n \mathrm{e}^{nw}$。方程 $g \circ f = g$ 的解 $g(w)$对 $R_\alpha = \mathbb{N} + \alpha^{-1}\mathbb{N}$可写成 $g(w) = \sum_{\beta\in R_\alpha} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$。这是Écalle在 [1] 中所述结果的一个推论；第一篇文章 [9] 可用于给出这一事实的另一种证明，正如其引言中所说明的那样。

对于这些级数而言，正规收敛的要求过于严格。例如，

$$\frac{\mathrm{e}^{(\beta+h)w} - \mathrm{e}^{\beta w}}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{tw})|_{t=\beta} = w\mathrm{e}^{\beta w},$$

因此，系数可以任意大，而函数仍然保持有界。寻找并比较这些级数的其他收敛概念，正是本文的目的。

形式级数 $\hat{g} = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 最弱的收敛概念，是存在 $-\infty$ 的一个邻域 H 以及一个全纯函数 $g \in \mathcal{O}(H)$，使其在 $-\infty$ 处的渐近展开为 $\hat{g}$。一般而言，不能保证这样的函数 g 是唯一的，而且这一概念取决于邻域 H 的形状。

另一种收敛概念是 Borel 重求和：$\hat{g}$的 Borel变换为 $\mathcal{B}\hat{g} = D = \sum a_\beta \delta_\beta$（它先验上只是狄拉克δ的形式和）。如果我们能够定义形式分布 $\hat{D}$ 作用于函数 $e_w(t) = \mathrm{e}^{t\hat{w}}\hat{}\hat{}\hat{}$ 的取值，那么 D 的拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}D(w) = \langle D,\ e_w\rangle$，而函数 $\mathcal{L}D$ 按定义就是 $\hat{g}$ 的 Borel 重求和，只要它收敛。

事实证明，当 $\hat{g}$ 是某个函数 $g \in\mathcal{O}(H)$ 的渐近展开（对于足够宽的 H），那么 $\mathcal{B}\hat{g}$ 就由拉普拉斯变换 $\mathcal{L}g$ 给出，将其解释为支撑在 $\mathbb{R}^+$ 上的超函数；并且，正如我们在 [9] 中所说明的，g 确实是其 Borel变换的拉普拉斯变换。

注意，对于 $g(w) = \frac{1}{h}(\mathrm{e}^{(\beta+h)w} - \mathrm{e}^{\beta w})$，那么 $\mathcal{B}g = \frac{1}{h}(\delta_{\beta+h} - \delta_\beta)$ 可以看作离散导数（ $-\delta'_\beta$ 的近似）。我们可以得到高阶离散导数，例如考虑函数

$$\frac{\mathrm{e}^{(\beta+h)w} - 2\mathrm{e}^{\beta w} + \mathrm{e}^{(\beta-h)w}}{h^2} \underset{h\to 0}{\to} w^2\mathrm{e}^{\beta w};$$

该函数的 Borel变换$\frac{1}{h^2}(\delta_{\beta+h}-2\delta_\beta+\delta_{\beta-h})$ 可以解释为二阶离散导数。

对于一个支撑在 $R_\alpha=\mathbb{N}+\alpha^{-1}\mathbb{N}$上的级数 g，在 R_α 中靠近点 $\beta\in\mathbb{R}^+$ 的点密度会随 β线性增长。当 n 个点彼此靠近时，我们可以构造出一个 n阶导数的近似，因此可以合理地预期，点 $\beta\in\mathbb{R}^+$ 附近分布 $\mathcal{B}g$ 的阶会线性增长。在 [9], 中，我们证明了分布 $\mathcal{B}g$ 的增长条件与邻域 H 的形状相对应，其中 g 有界。$\mathcal{B}g$ 的阶线性增长这一条件，对应于邻域 H 是一个对数邻域（定义见正文）。

我应该指出，离散导数在数值分析中早已得到应用和研究，但我没有在这些研究中找到与本文所处理问题相关的内容。

关于记号说明：我们将用 $\langle D,\ \varphi\rangle = D(\varphi)$表示分布 D （狄拉克δ之和或超函数）作用于测试函数 φ的结果。当 φ 明确表示为变量 t 或 p的函数时，我们会姑且采用不严谨的记号 $\langle D,\ \varphi(t)\rangle$：例如，$\langle D,\ \mathrm{e}^{tw}\rangle$ 等于 $D(e_w)$，其中$e_w(t)=\mathrm{e}^{tw}$。测试函数的变量为实数时始终记作 t，为复数时记作 p。

1.2. 结果。 本文将从第 2 节开始，介绍无理级数及其各种收敛概念。对于无理级数而言，这些收敛概念彼此等价，但为了简化可能的推广，我们尽可能独立地定义并研究它们。在无理级数的语境下，本部分最复杂的结果已在 [9] 中证明。

本文研究的收敛概念包括消逝求和、按包求和以及分部积分的对角提取（简称 DIPP）。DIPP 的性质最为良好（事实上，我们先证明这一种，其他概念则由此推出），但它也是最不实用的。按包求和最为直观，但会引出一些不可忽视的考量。我们将介绍两种形式：强按包求和与弱按包求和；二者并非先验等价（尽管人们不禁会认为它们理应等价，至少对于无理级数而言）。消逝求和可以看作是 DIPP 一种更实用的改写，并且很容易证明它与弱按包求和等价。

在本文的其余部分中，我们尝试为按包求和找到一种更明确的形式，即使用简单的包。我们希望考虑的包是范德蒙德包，它们与范德蒙德分布相关联。与有限集 R_n（其基数为 N_n+1）相关联的范德蒙德分布 Δ_{R_n} 是唯一能够逼近 N_n 阶导数的狄拉克δ之和 $\Delta_{R_n}=\sum_{\beta\in R_n}b_\beta\delta_\beta$（这相当于求解一个范德蒙德方程组，因此得名；定义见本文）。相应的范德蒙德包为 $\langle\Delta_{R_n},\ \mathrm{e}^{tw}\rangle=\sum_{\beta\in R_n}b_\beta\mathrm{e}^{\beta w}$。

本文的主定理是

定理 3. 考虑一个无理级数 $g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，其支撑于闭离散集 $R \subset \mathbb{R}^+$ 上，并在对数半平面 $H_{a,k}$ 中定义且有界。我们假设 R 具有线性密度：存在常数 μ、ν，使得对于任意长度为 L 的区间 I，$\#(R\cap I) \le \mu\, L\sup(I) + \nu\, L$。

存在有限集 R_n，满足 $\inf(R_n) = \beta_n$、$\#R_n = N_n + 1$，系数 $b_n \in \mathbb{C}$、半径 $r \in]0, 1[$ 以及常数 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$g(w) = \sum_n b_n \langle \Delta_{R_n}, \mathrm{e}^{tw}\rangle,$$
$$\sum_n |b_n| r^{\beta_n} < \infty,$$
$$N_n \le (\mu + 2k)\beta_n + c.$$

这些条件意味着级数 $g(w) = \sum b_n\langle \Delta_{R_n}, \mathrm{e}^{tw}\rangle$ 在对数邻域 $H_{a',\,k'}$ 内按包收敛，其中 $k' = \mu + 2k$。由于 $k' > k$，该邻域小于 $H_{a,\,k}$。关于如何获得在$H_{a,\,k}$ 内收敛、而非仅在某个更小的$H_{a',\,k'}$内收敛的和的困难，参见第 3.6 节。

我们在第 3 节研究离散分布，特别是分解 $D = \sum b_n \Delta_{R_n}$。第 4 节给出定理 3 的证明及一些应用。

附录 A.1 证明了对数邻域不同定义之间的等价性。

1.3. 与超渐近级数的关系。 无理级数是超渐近级数（有时称为广义幂级数）的一种特殊情形，它们是超单项式的和（例如，$(\log(z))^\alpha z^\beta \mathrm{e}^{\gamma z}$ 就是这样的超单项式）。超渐近级数似乎因 Dulac 定理而受到关注；该定理发现，某些向量场的多环的单值化$f\colon (\mathbb{R}^+, 0) \to (\mathbb{R}^+, 0)$ 是超渐近级数。更确切地说，当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的渐近展开 f 是一个超渐近级数；这一细节很重要，因为超渐近级数的收敛问题绝非易事，而且关于形式级数 f 的信息并不能轻易转化为关于函数 f的信息。事实上，Dulac 最初的工作忽略了这些困难，我们需要等到 Ilyashenko [5] 以及 Écalle、Martinet、Moussu、Ramis [3] 的工作，证明才得以完成。关于这一历程的更多详情，请参见 [4] 。

关于超渐近级数的研究似乎主要聚焦于形式超渐近级数，而非其在某个复域中的收敛性。即使是最简单的超渐近级数 $\hat{f}(z) = \sum_{\beta\in R} a_\beta z^\beta = \sum_\beta a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，其收敛问题也并非显而易见，其中 R 是 $\mathbb{R}^+$ 的闭离散子集。我们感兴趣的问题可以非正式地表述为：

- $\hat{f}$ 是否是函数f 的形式展开（或渐近展开）？
- 应用 $f \mapsto \hat{f}$ 是单射吗？

ˆ - 我们能否计算出 f （如果可能的话，给出明确表达式）？或者换个稍有不同的ˆ问题：是否存在一个重求和过程 $f \mapsto f$，其中 f 是形式展开为 f 的某个ˆ函数?

当然，这些问题取决于我们考虑的是哪类函数 f （实函数芽、原点邻域内的全纯函数，也可能是多值函数.....）。

关于超渐近级数收敛性的问题主要由 Écalle 研究，参见[2]。重求和过程采用 Borel 重求和（对于更复杂的超渐近级数，则辅以加速求和）；下面用一个简单例子来说明。

例子。考虑形式和ˆ $f(x) = \sum_{n\geq 0} n!x^{n+1}$。为方便起见，我们将在变量 $p = 1/x$ 趋于无穷远点时考察它：ˆ$h(p) = \sum {}^{n}_{!}\ p^{n+1}$，并将 p 视为 *Borel*平面中的变量。由于空间变量 w 与 *Borel*平面的变量 p起对称作用，因此观察方式不会改变ˆ计算。将其视为超函数的形式和时， h 对应于分布之和 $\sum_n (-1)^n \delta_0^{(n)}$ 。将这个和作用于在p中解析的任意测试函数 φ 时，它并不收敛；但作用于指数ˆ增长的函数时则收敛。对 h 的拉普拉斯变换，可通过将该分布作用于 $\varphi(p) = \mathrm{e}^{pw}$得到；由此得到一个收敛函数

$$g(w) := \langle \hat{h}, \mathrm{e}^{pw} \rangle = \sum_{n\geq 0} w^n = \frac{1}{1-w}.$$

原则上， g 仅在 $\{|w| < 1\}$ 上有定义，但我们可以考察它的解析延拓，将其视为无穷远处的芽，记作

$$g(w) = \frac{-w^{-1}}{1-w^{-1}} = -\sum_{n\geq 1} w^{-n}.$$

对于任意 $a > 1$，此和在集合 $\{\mathrm{Re}(w) < -a\}$ 中正规收敛，因此我们可以ˆ考察其拉普拉斯变换 $h = \mathcal{L}g$。如果 h 收敛（具有指数ˆ增长），那么 g 将在整个 $\mathbb{C}$ 上有定义，并且我们有 $h = h$。 $f(x)$ 的ˆ*Borel* 重求和按定义为 $h(1/x)$ （在其有定义之处）。

...将 f 视为超函数的形式和，并将每个超函数考察 $\hat{h}$ 对于测试函数 $\varphi(p) = \mathrm{e}^{pw}$，即可得到。 h 的 *Borel*ˆ重求和可通过考察 ˆg 的解析延拓 g （当ˆg 收敛时），并取其拉普拉斯变换 $h = \mathcal{L}g$ （当 g 具有指数增长时）来获得。

这是通常的重求和过程，并且我们可以证明，对于某些类别的超渐近级数，所得结果确实收敛。 $f \mapsto f$的单射性问题很大程度上取决于定义 f 的子集 $U \subset \mathbb{C}$ 。处理这一问题的一种经典论证是考虑单射映射 Φ ： $\mathbb{H} \to U$，使得

$f \circ \Phi$ 定义在 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Re}(w) < 0\}$上，并对$f \circ \Phi$ 应用 Phragmén–Lindelöf 原理（见 [4]），或在 $\mathbb{H}$ 上应用经典的 Borel–Laplace 变换（见 [1, 命题 3.11 和 3.15]）。

1.4. Écalle 著作中的无理级数。超渐近级数 $\hat{f}(z) = \sum_{\beta \in R} a_\beta z^\beta$（或者说，$\hat{g}(w) = \sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$）这一特例，早已出现在 Écalle 的著作中，即 [1]。尽管他只考虑了以半群R为指标的级数，但他的大多数结果应该很容易推广到具有线性密度的任意闭离散 R。下面我们先介绍他的定义，再将他的结果与本文所述内容进行比较，以便更好地了解哪些内容他当时已经知道（或可能知道），以及哪些内容确实是新的。

在这一框架下，他引入了补偿项 $z^{\beta_0,\dots,\beta_n}$，这与我们定义的范德蒙德包相同

$$z^{\beta_0,\dots,\beta_n} = \langle \Delta_{\{\beta_0,\dots,\beta_n\}}, z^t \rangle = \langle \Delta_{\{\beta_0,\dots,\beta_n\}}, \mathrm{e}^{tw} \rangle.$$

用他的话来说，对数邻域 H 会变成原点的螺旋邻域（他倾向于将函数 $g(w)$ 视为定义在原点附近的多值函数 $f(z)$）。Écalle 将对数邻域 H 中的可序列函数 $\mathrm{Ser}(R, H)$ 定义为有限和 $\sum_{\beta \in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 在 H 中按一致收敛所得的闭包，其中闭包取自 $\mathcal{O}(H)$；并且 $\mathrm{Ser}(H) = \cup_R \mathrm{Ser}(R, H)$。他还引入了可补偿函数 $\mathrm{Comp}(R, H)$，它们是补偿项 $z^{\beta_0,\dots,\beta_n}$ 的正规收敛和，其中 $\beta_i \in R$，且 $\mathrm{Comp}(H) = \cup_R \mathrm{Comp}(R, H)$。用我们的术语来说，$\mathrm{Comp}(H)$ 对应于可按范德蒙德包求和的函数。在本文中，我们只处理级数 $\sum a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，而 Écalle 处理更一般的级数 $\sum a_{k,\beta} z^k \mathrm{e}^{\beta w}$；我们这样选择是为了避免不必要的复杂性。正如我们在第 3.5 节中所解释的，研究这两类级数完全等价，但从一开始就使用多重集，可能会模糊我们希望传达的直观认识。

Écalle 关于这一问题的结果是命题 3.11 和 3.15（仍在 [1] 中）。这些结果表明，形式展开 $g \mapsto \hat{g}$ 在 $\mathrm{Ser}(H)$ 上是单射，并且在这种情况下，Borel 重求和的一种变体可以从 $\hat{g}$恢复 g。

这些命题的证明究竟适用多大范围，我仍不清楚。论证中“通过变量替换得到一个定义在 $\mathbb{H}$上的函数，并使用经典的 Borel–Laplace 变换”这一思路总体而言似乎是不错的策略，但证明中缺少细节，因而难以理解哪些结论可以轻易地由此推出（拉普拉斯变换对坐标变换的依赖并非平凡）。

一些未在文中明确陈述的结果，Écalle 或许早已理解，但它们是我们 [9] 和 [这篇文章] 的结果：

(1) $\mathrm{Ser}(H)$ 恰好是 H 中有界全纯函数的集合，其形式展开是形式和 $\sum a_{k,\beta} w^k \mathrm{e}^{\beta w}$。当单项式只有指数函数时，这些就是此处定义的无理级数。

(2) 当 R 不是半群而是 $\mathbb{R}^+$ 的闭离散子集时，Écalle 的结果也适用。

确实新颖的是：

（1）引入新的求和法，并将补偿推广为按包求和。（2） $\cup_H \mathsf{Ser}(H) = \cup_H \mathsf{Comp}(H)$：这是我们的定理 3 的一个推论。

1.5. **结论**。本文尚未回答的一个问题是：是否确实有必要引入一个新名称（“无理级数”）来指代所研究的对象；毕竟，我们已经看到，在这一语境下，它们恰好就是可序列函数。让我们退一步，看看目前的研究成果如何帮助我们理解超渐近级数。

关于超渐近级数收敛性的问题相当复杂，涉及发散、按包收敛和重求和。在本文中，我希望传达的观点是，这里引入的按包收敛概念与 Borel 重求和有着根本区别。通过 Borel 重求和，我们为一个发散级数赋予一个值（见例 1.3）；而按包收敛的级数则应被视为收敛级数（这应当从定理 3 中看得很清楚）。研究最简单的超渐近级数似乎是值得的，它们具有$g(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$的形式，其中 R 是 $\mathbb{R}^+$的一个闭离散子集，并且在某种意义下已经是收敛的。

最简单的是由 $R = \mathbb{N}$ 索引的级数，也就是通常的幂级数（也称为整级数）：它们在直线半平面上正规收敛。由任意子集 R 索引、且同样在直线半平面上正规收敛的级数，也可以用类似的方法研究（除了整级数具有 $2i\pi$-周期性这一事实）：它们对应于在某个半平面上有界、且形式展开由 R 索引的全纯函数。由 $R = \mathbb{N} + \alpha^{-1}\mathbb{N}$ 索引的级数，其中某个有理数 α，是 Puiseux 级数；通过对变量 w 作变换，可以将它们化为整级数。

接下来是由带有无理数 α 的 $R = \mathbb{N} + \alpha^{-1}\mathbb{N}$ 索引的级数，它们无疑配得上“无理级数”这一名称。这类函数自然出现在小分母问题中，通过拉普拉斯变换或按包求和很容易研究，因此我认为它们值得拥有一个专属名称。由任意子集 R 索引、且在对数半平面上有界的级数，研究起来并不更困难，因此本文没有为它们另取名称。

更一般的级数 $g(w)$ 也可以用类似的方法研究。其中一个关键性质是，拉普拉斯变换 $\mathcal{L}g$ （视为超函数）具有局部有限阶。正如 [9], 中所解释的， $\mathcal{L}g$ 的任何增长性质实际上都是关于邻域 H 的形状的性质；在这个邻域上， $-\infty$有界。如果 $\mathcal{L}g$ 具有局部有限阶，我们应该能够进行 DIPP，而超函数 $\mathcal{L}g$ 在点 $t \in \mathbb{R}^+$ 处的“值”只取决于

系数 a_β （其中 $\beta \le t$ ）：这就是 Écalle 术语中“可级数化性”的定义。我认为，对于这类级数，我们可以更广泛地使用“可级数化性”一词。

于是我们可以追问：由闭离散子集标号的级数是否总是可求和的（即在某个满足局部有限阶性质的邻域 H 上有界）。事实上，若一个级数在某个邻域上有界，要找出它有界的最大邻域 H 并非易事。请注意，即便对于由 $\mathbb{N}+\alpha^{-1}\mathbb{N}$ 标号的级数，我们也并未证明：若它在某个邻域内收敛，则它在某个对数邻域内收敛。实际上，即便对于由 $\mathbb{N}$标号的级数，我们也必须利用 $2i\pi$周期性才能得出它们正规收敛的结论。这里所发展的工具或许还需要进一步打磨，才能解决这类问题。

2. 定义

ˆ 2.1. 无理级数。 单变量 z 的形式无理级数是和式 $f(z) = \sum_{\beta\in R} a_\beta z^\beta$ ，其中 R 是 $\mathbb{R}^+$的闭离散子集， $a_\beta \in \mathbb{C}$ 为复系数。

项 z^β 在 z 绕原点转动时具有非平凡的单值化，因此我们通过将这些级数提升到 $\mathbb{D}^*$的万有覆盖上来研究它们。按照 [9],的说法，若子集 $H \subset \mathbb{C}$ 对每个 $\theta < \pi/2$都包含一个以 $\mathbb{R}^-$为对称轴、张角为 2θ 的左向圆锥，则称它是 $-\infty$ 的邻域。若邻域H 具有（或包含）如下形式，则称其为对数邻域:

$$H_{a,k} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid x + \frac{k}{2}\log(x^2+y^2) < a\}$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 $k > 0$。我们在 [9, 附录 A] 中给出了对数邻域的几种定义，这只是其中之一。

覆盖映射 $H \to \mathbb{D}^*$ 就是 $w \in H \mapsto z = \mathrm{e}^w$，因此形式无理级数对应于和 $\hat{g}(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$。若全纯函数$g \in \mathcal{O}(H)$对每个 $\beta_0 \in R$都满足以下条件，则称其具有形式展开 $\hat{g}$:

$$g(w) - \sum_{\beta<\beta_0} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w} = O(\mathrm{e}^{\beta_0 w})$$

作为 $\mathrm{Re}(w) \to -\infty$。

定义 1。 我们称形式无理级数 $\hat{g}(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 在邻域 H 上正规收敛，当且仅当 $\sum_{\beta\in R} |a_\beta| \mathrm{e}^{\beta r} < \infty$，其中 $r = \sup_{w\in H} \mathrm{Re}(w)$。

例。 我们主要关注的指数集 R 为 $R = R_\alpha = \mathbb{N} + \alpha^{-1}\mathbb{N}$，由点 $\beta = p + \frac{q}{\alpha}$ 组成。注意，如果 $\mathrm{Re}(w) < 0$，

$$\begin{aligned}\sum_{\beta \in R_\alpha} \mathrm{e}^{\beta w} &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{q}{\alpha} w} \mathrm{e}^{pw} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{q}{\alpha} w}}{1 - \mathrm{e}^{w}} \\ &= \frac{1}{(1 - \mathrm{e}^{\frac{w}{\alpha}})(1 - \mathrm{e}^{w})}.\end{aligned}$$

由此可知，级数 $\sum_{\beta \in R_\alpha} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 的正规收敛域是半平面

$$\left\{ \mathrm{Re}(w) < \liminf \frac{-1}{\beta} \log |a_\beta| \right\},$$

其中我们约定 $\log(0)$ 为 $-\infty$。

定义 2. 我们称形式无理级数 $\hat{g}$ 在对数邻域 H 中收敛，如果存在定义在 H 上的有界全纯函数 g，其形式展开为 $\hat{g}$。

我们将定义在对数半平面 H 上的有界全纯函数 g 称为无理级数，若其形式展开是一个形式无理级数。

2.2. 作为超函数的收敛。 注意，我们可以形式地写成 $\sum_{\beta \in R} a_\beta \mathbf{e}^{\beta w} = \langle D, \mathbf{e}^{tw} \rangle$，其中 $D = \sum_{\beta \in R} a_\beta \delta_\beta$ 应非正式地理解为变量 t的一个分布。

这一观点的恰当背景是 Sato 意义下的超函数（参见 [7], [8]）（入门读物另见 [6] ）：分布 δ_β对应于超函数 $\frac{1}{p-\beta} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)/\mathcal{O}(\mathbb{C})$。这一观点已在 [9], 中得到研究，我们证明了拉普拉斯变换实现了对数半平面 H中的有界全纯函数与 $\mathscr{H}$中由 $\mathbb{R}^+$支撑的某类超函数之间的等价关系。

根据这一等价关系，若形式无理级数 $\hat{g}(w) = \sum_{\beta \in R} a_\beta \mathbf{e}^{\beta w}$ 在 H 中收敛（其和记为 g），则超函数 $D(p) = \sum_{\beta \in R} \frac{a_\beta}{p-\beta}$ 作为 $\mathscr{H}$中的超函数收敛，并且等于 g 的拉普拉斯变换：我们有$D = \mathcal{L}g$。

反之，若存在一个以 R 为支撑的超函数 $D \in \mathscr{H}$，且它在每个 $\beta \in R$ 附近都等于 $\frac{a_\beta}{p-\beta}$，则逆拉普拉斯变换 $g = \mathcal{L}^{-1} D$ 是对数半平面 H 中的一个函数，其形式展开为 $\sum_{\beta \in R} a_\beta \mathbf{e}^{\beta w}$。

和 $\sum_{\beta \in R} \frac{a_\beta}{p-\beta}$ 并不正规收敛，但我们有一些求和公式，将在随后的段落中加以说明（更多内容见 [9] ）。

2.3. **消逝求和**。 我们称有限和 $\tilde{S}_n g = \sum b_i \mathrm{e}^{\beta_i w}$ 为形式无理级数$\hat{}g$ 的第 n~消逝部分和，若形式上$\hat{}g - S_n g = o(\mathrm{e}^{nw})$成立。我们称对数邻域 H中的有界全纯函数 g 为形式级数$\hat{}g$ 的消逝求和，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都存在一个~ ~消逝部分和 $S_n g$ ，使得序列$(S_n g)_n$ 在 H中一致地收敛到g 。

在 [9], 中，我们证明了每个无理级数 g 都容许一种消逝求和；尤为重要的是，我们所找到的求和可以显式地写成 g的形式展开的函数。

定理 1. 存在一种显式方法，可将每个形式无理~级数$\hat{}g$ 与一列渐消部分和 $S_n\hat{}g$ 相关联，使得只要 g 是形式展开为$\hat{}g$的无理~级数，序列 $S_n\hat{}g$ 便在 $-\infty$的一个邻域内一致地收敛到g 。

这是 [9, 定理 4]。这一构造的一个重要推论是形式展开的单射性。正如引言中所说明的，这一点也可以用更经典的工具加以证明。

推论 1. 具有相同形式展开的两个无理级数 g_1、 g_2 相等。

~证明。 每个 g_i 都是其渐消部分和 $S_n g_i$的极限，而这些部分和仅取决于形式展开 $\hat{}g_1 = \hat{}g_2$。我们得到g_1 和 g_2 在 $-\infty$ 的某个邻域内相等，并由解析延拓得出结论。□

2.4. **按包求和**。 固定一个闭离散子集 $R \subset \mathbb{R}^+$ 以及一个支撑在 R上的形式无理级数 $\hat{}g$ 。

将一个支撑在 R 上的包系统定义为族 $\mathscr{P} = \{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ ，其中每个 P_n 都是 R 的有限子集，且 $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ （某些包可以重叠）。

如果对每个 $\beta \in R$， $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,\ \beta} = a_\beta$，则称形式和 $\hat{}g_{\mathscr{P}}(w) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\beta\in P_n} a_{n,\ \beta}\, \mathrm{e}^{\beta w}$ 是沿着 $\mathscr{P}$ 对$\hat{}g$的分解。如果这样的形式和在子集 $H \subset \mathbb{C}$ 上按包正规收敛，则称其

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{w\in H} \left| \sum_{\beta\in P_n} a_{n,\beta} \mathrm{e}^{\beta w} \right| < \infty.$$

如果存在 $\hat{}g$ 沿 $\mathscr{P}$ 的一个分解，使其在 H上按包收敛，那么称形式级数 $\hat{}g$ 在 H 上按包正规收敛（简称“按包收敛”）。如果 $\hat{}g$ 在某个对数邻域 H 上按包正规收敛，则称其按包（强）收敛（或称 $\hat{}g$ 可按包求和）。

下面引入一种较弱的按包收敛形式：如果存在闭离散子集 $R \supset R$、支撑于 R 的包系统 $\mathscr{P}$ ，使得支撑于 R 的形式无理级数 $\hat{}g$ 按包弱收敛，并且

~ ~

$\hat{g}$ 沿 $\mathscr{P}$ 的分解 $\hat{g}_{\mathscr{P}}$ 在一个对数邻域上按包正规收敛。

消逝求和的概念等价于弱按包求和的概念。

命题 1. 形式无理级数 $\hat{g}$ 存在弱按包求和，当且仅当它存在消逝求和。

证明。 如果 $\hat{g}$ 存在弱按包求和 $\hat{g}_{\mathscr{P}}$，那么有限和 $S_m g = \sum_{i\leq n}\sum_{\beta\in P_i} a_{i,\beta}\mathrm{e}^{\beta w}$ 便构成 $\hat{g}$ 的消逝部分和，并一致地收敛到 $\hat{g}_{\mathscr{P}}$（$\hat{g}$ 与 $S_m g$ 相同的阶 m 不等于 n，但我们只需要它在 $n\to\infty$时趋于无穷远点）。

反过来，如果 $(S_n g)_n$ 是一个消逝部分和序列，并在某个对数半平面 H内收敛到函数 g，我们可以定义 $A_n(w) = S_n g(w) - S_{n-1}g(w)$，其中 $n\geq 1$, $A_0(w) = S_0(w)$ 且 $P_n = \mathrm{supp}(\mathcal{L}A_n)$。根据柯西准则，总和 $\sum_n A_n$ 正规收敛，其和为 $\sum_n A_n(w) = g(w)$。这就是说，形式级数 $\hat{g}$ 沿包系统 $\mathscr{P} = \{P_n\}_n$ 弱收敛，其和为 $\hat{g}_{\mathscr{P}}(w) = g(w)$。□

特别地，定理 1 可改述为：

定理 2. 无理级数可以按包弱求和。

2.5. **对角分部积分**。 对于任意形式级数 $\hat{g}(w) = \sum_{\beta\in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$，我们可以再次引入分布 $D = \sum_{\beta\in R} a_\beta \delta_\beta$。当该级数正规收敛到函数 g 时，有

$$g(w) = \langle D(t), \mathrm{e}^{tw}\rangle = \int_{t\in\mathbb{R}^+} D(t)\mathrm{e}^{tw}dt.$$

对于任意支撑于 $\mathbb{R}^+$ 的分布，引入算子 I，它计算支撑于 $\mathbb{R}^+$ 的原函数：若 φ 是支撑于 $\mathbb{R}^+$ 的函数，则 $I\varphi(t) = \int_{s=0}^t \varphi(s)ds$。对于任意 $t_1\in\mathbb{R}^+$，在 $[t_1,\infty[$ 上作分部积分，形式上得到

$$\int_{t\in\mathbb{R}^+} D(t)\mathrm{e}^{tw}dt = \int_{t=0}^{t_1} D(t)\mathrm{e}^{tw}dt - (ID)(t_1)\mathrm{e}^{t_1 w} - \int_{t=t_1}^{\infty}(ID)(t)w\mathrm{e}^{tw}dt.$$

对于任意弱递增序列（t_n），只要满足 $t_0 = 0$ 和 $t_n\to\infty$，我们就可以引入分部积分的对角提取（简称对角分部积分或 DIPP）

$$I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{tw}) := \sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_{t=t_n}^{t_{n+1}}(I^n D)(t)w^n\mathrm{e}^{tw}dt + \sum_{n\geq 1}(-1)^n(I^n D)(t_n)w^{n-1}\mathrm{e}^{t_n w}.$$

为避免不必要的复杂情况，我们始终假设，对于每个 n，都有 $t_n \notin R$。在此定义中，我们允许出现以下情形：某些 n 对应 $t_n = t_{n+1}$ （同时进行多次分部积分），或 $t_n = t_{n+1} = \ldots = \infty$（有限次分部积分）。

定义 3. 我们称对角分部积分 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{tw})$ 在点 w 处收敛，如果

$$\sum_{n\geq 0}\int_{t=t_n}^{t_{n+1}} |(I^n D)(t)||w^n \mathrm{e}^{tw}|dt + \sum_{n\geq 1}|(I^n D)(t_n)||w^{n-1}\mathrm{e}^{t_n w}| < \infty.$$

我们称它在某个子集 $H \subset \mathbb{C}$ 上收敛，如果它在每一点$w \in H$处都收敛。

如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sum_{n\geq 0}\int_{t=t_n}^{t_{n+1}} |(I^n D)(t)|\mathrm{e}^{at}dt + \sum_{n\geq 1}|(I^n D)(t_n)|\mathrm{e}^{at_n} < \infty,$$

我们称 *DIPP* $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$ 以 a为界。

定义 4. 若一个序列 (t_n) 单调不减、满足$t_0 = 0$, $t_n \to \infty$，且以超线性速度增长，即 $\liminf \frac{t_n}{n} > 0.n$，则称其为可容许序列。

先对这些定义作几点说明：

- 原函数 ID 是局部有界函数；定义中的模 $|(I^n D)(t)|$是该函数及其原函数的模。- DIPP 只取决于序列 (t_n) 的渐近行为：若对每个 $n \geq N$ 都有 $t_n = s_n$，则 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D, \mathrm{e}^{wt})$ 和 $I^{\Delta}_{(s_n)}(D, \mathrm{e}^{wt})$ 在相同的点 w 处收敛，且取值相同。- 若序列 (t_n) 超线性增长 $\frac{t_n}{n} \geq \frac{1}{k}$ （对 $n > 0$），我们可以使用附录中的引理 4：$|w^n \mathrm{e}^{wt}| \leq \mathrm{e}^{at}$ （对 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ 和$w \in H_{a,k}$）。- 若 $\frac{t_n}{n} \geq \frac{1}{k}$，且 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$ 有界于 a，则它在 $H_{a,k}$ 上收敛，其和是一个有界全纯函数。

命题 2. 假设(t_n) 是一个可容许序列，使得$I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$在某点 w 收敛，且 $|w| \geq 1$。则$I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$ 被某个数 a所界。

特别地，若DIPP如上在某点收敛，则它在 $-\infty$的一个邻域内收敛，并在该处定义一个有界全纯函数。

证明。 令 $a =$Re(w)，我们有 $|w^n \mathrm{e}^{wt}| \geq \mathrm{e}^{at}$，而 DIPP 在点 w 处的收敛意味着

$$\sum_{n\geq 0}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |(I^n D)(t)|\mathrm{e}^{at}dt + \sum_{n\geq 1}|(I^n D)(t_n)|\mathrm{e}^{at_n} < \infty$$

□

让我们写出 DIPP 的详细过程，以证明 $\hat{}g$ 确实是 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{tw})$ 的形式展开。

命题 3. 设(t_n) 是一个可容许序列，使得 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$在邻域 H中收敛。记

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_n\hat{g}(w) &= (-1)^n\int_{t_n}^{t_{n+1}}(I^nD)(t)w^n\mathrm{e}^{tw}dt + (-1)^{n+1}(I^{n+1}D)(t_{n+1})w^n\mathrm{e}^{t_{n+1}w}\\ &= \langle D_n,\mathrm{e}^{tw}\rangle,\end{aligned}$$

其中， $D_n - \sum_{\beta\in R\cap[t_n,t_{n+1}]}a_\beta\delta_\beta$ 由分部积分的边界项给出：它是一个阶至多为 n 、支撑在 $\{t_n,t_{n+1}\}$上的分布。

则 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{tw}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n\hat{}g(w)$ 是$\hat{}g$的弱按包求和。

~证明。和 $\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n\hat{}g$ 收敛是 DIPP $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\mathrm{e}^{wt})$收敛的结果。记 $g(w)$ 为该和。我们需要验证 $\widetilde{A}_n\hat{}g(w)$ 确实是一个有限和 $\langle D_n,\mathrm{e}^{tw}\rangle$，并且 g 的形式展开等于~ ~$\hat{}g$。引入 $S_ng(w) = \sum_{k\le n}A_n\hat{}g(w)$（这些将是消失的部分和）。余项 $g - S_ng$ 显然是一个 $O(\mathrm{e}^{t_{n+1}w})$，我们首先验证 $\widetilde{S}_ng(w) = \sum_{\beta\le t_{n+1}}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w} + BT_{n+1}$，其中 BT_{n+1} 是一个边界项 $BT_{n+1} = \sum_{k\le n+1}b_{n+1,k}w^{k-1}\mathrm{e}^{t_{n+1}w}$。

如果对每个 $k\,\beta$ 都有 $t_k\neq\beta$，，我们可以进行分部积分：

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\le t_{n+1}}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w} &= \sum_{\beta\le t_1}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w} - \int_{t_1}^{t_{n+1}}(ID)(t)w\mathrm{e}^{tw}dt + (ID)(t_{n+1})\mathrm{e}^{t_{n+1}w} - (ID)(t_1)\mathrm{e}^{t_1w}\\ &= \widetilde{A}_0\hat{g}(w) - \int_{t_1}^{t_{n+1}}(ID)(t)w\mathrm{e}^{tw}dt + (ID)(t_{n+1})\mathrm{e}^{t_{n+1}w}\\ &= \widetilde{A}_0\hat{g}(w) - \int_{t_1}^{t_2}(ID)(t)w\mathrm{e}^{tw}dt + \int_{t_2}^{t_{n+1}}(I^2D)(t)w^2\mathrm{e}^{tw}dt\\ &\quad + (ID)(t_{n+1})\mathrm{e}^{t_{n+1}w} - (I^2D)(t_{n+1})w\mathrm{e}^{t_{n+1}w} + (I^2D)(t_2)w\mathrm{e}^{t_2w}\\ &= \widetilde{A}_0\hat{g}(w) + \widetilde{A}_1\hat{g}(w) + \int_{t_2}^{t_{n+1}}(I^2D)(t)w^2\mathrm{e}^{tw}dt\\ &\quad + (ID)(t_{n+1})\mathrm{e}^{t_{n+1}w} - (I^2D)(t_{n+1})w\mathrm{e}^{t_{n+1}w}\\ &= \ldots\\ &= \widetilde{A}_0\hat{g}(w) + \ldots + \widetilde{A}_{n-1}\hat{g}(w) + (-1)^n\int_{t_n}^{t_{n+1}}(I^nD)(t)w^n\mathrm{e}^{tw}dt\\ &\quad + (ID)(t_{n+1})\mathrm{e}^{t_{n+1}w} + \ldots + (-1)^{n+1}(I^nD)(t_{n+1})w^{n-1}\mathrm{e}^{t_{n+1}w}\\ &= \widetilde{S}_ng(w) + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}(I^kD)(t_{n+1})w^{k-1}\mathrm{e}^{t_{n+1}w}.\end{aligned}$$

˜因此， $S_n g$ 确实是 ˆg 的消逝部分和。最后请注意，

$$\widetilde{A}_n \hat{g}(w) = \widetilde{S}_n g(w) - \widetilde{S}_{n-1} g(w) = \sum_{t_n < \beta \le t_{n+1}} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w} + BT_{n+1} - BT_n.$$

项 $BT_{n+1} = \sum_{k \le n+1} b_{n+1,k} w^{k-1} \mathrm{e}^{t_{n+1} w}$ 可以解释为一个阶数至多为 n 、支撑于 $t = t_{n+1}$ 的导数，因为 $\langle \delta_\beta^{(k)}, \mathrm{e}^{tw} \rangle = (-1)^k w^k \mathrm{e}^{\beta w}$. □

特别是（这一点并不显而易见），DIPP 的过程并不依赖于序列(t_n)，如下述命题所述。

命题 4. 设 (t_n),(s_n) 是可容许序列。若 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D, \mathrm{e}^{wt})$ 和 $I^{\Delta}_{(s_n}$ D ^{wt} H_t H_s $H =$)(,e) 在某些邻域，，中收敛，$H_t \cap H_s$ 那么它们在 中相等。

证明。 根据命题 2，函数 $g_1(w) = I^{\Delta}_{(t_n)}(D, \mathrm{e}^{wt})$ $g_2(w) = I^{\Delta}_{(s_n)}(D, \mathrm{e}^{wt})$ 是某个邻域 $H' \subset H$ 中的两个有界全纯函数。它们展开所得的形式无理级数相同（恰好就是 D）；由形式展开的单射性（推论 1）， g_1 和 g_2 必定在 H上重合。□

命题 5。 设 g 是在对数半平面 $\widetilde{H}_{a\,k}$ $I^{\Delta}_{(t_n}$ D ^{tw} $t_0 = t_1 = t_2 =$,中 $t_3 = 0$ $t_n = \frac{n-3.5}{k}$ $n > 3$ 定义的无理级数。那么，当时，)(,e) 对于可容许序列 收敛。

这个结果是 [9, 定理 3]。如果其中一个点 t_n 落在 g的支撑中，我们可以毫无问题地另选一个与它接近的点 t_n 。

3. 离散分布

3.1. 范德蒙德分布。 考虑一个有限子集 $R = \{\beta_0, \dots, \beta_n\} \subset \mathbb{R}^+$。我们关注的是阶为 0、支撑在 R上的分布 $D = \sum_{\beta \in R} a_\beta \delta_\beta$ 。对于任何这样的 R，我们都可以通过以下方程定义阶为 n 的离散分布 D_R

$$\begin{cases} D_R(1) = 0 \\ D_R(t) = 0 \\ \vdots \\ D_R(t^n) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum a_\beta = 0 \\ \sum \beta a_\beta = 0 \\ \vdots \\ \sum \beta^n a_\beta = 1. \end{cases}$$

注意， D_R 是范德蒙德方程组的解，因此得名“范德蒙德分布”。我们还引入了归一化范德蒙德分布$\Delta_R = n! D_R$， 它是 n 阶导数的离散版本。我们可以在下面的命题中总结这些解的组合性质。

命题 6. 与有限集 $R=\{\beta_0,\dots,\beta_n\}$ 相关联的范德蒙德分布 $D_R=\sum_{\beta\in R}a_\beta\delta_\beta$ 具有以下性质:

(1) $a_{\beta_i}=\prod_{p\neq i}\frac{1}{\beta_i-\beta_p}$,

(2) *for* $k>n$, $D_r(t^k)=\sum_{p_0+\ldots+p_n=k-n}\beta_0^{p_0}\ldots\beta_n^{p_n}$.

证明。 将 $a_{\beta_n}=-\sum_{i=0}^{n-1}a_{\beta_i}$ 代入表达式 $\sum\beta^k a_\beta$，我们得到:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\beta_i^k a_{\beta_i}&=\sum_{i=0}^{n-1}a_{\beta_i}(\beta_i-\beta_n)(\beta_i^{k-1}+\beta_i^{k-2}\beta_n+\ldots+\beta_n^{k-1})\\&=\sum_{p=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_{\beta_i}(\beta_i-\beta_n)\beta_i^{k-p-1}\right)\beta_n^p\end{aligned}$$

对于 $k=1$，……，$n-1$，我们递归地得到 $\sum a_{\beta_i}(\beta_i-\beta_n)\beta_i^{k-1}=0$，而对于 $k=n$，我们得到 $\sum a_{\beta_i}(\beta_i-\beta_n)\beta_i^{n-1}=1$。因此我们看到，如果 $R_{n-1}=R\setminus\{\beta_n\}$，

$$D_{R_{n-1}}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{\beta_i}(\beta_i-\beta_n)\delta_{\beta_i},$$

系数 a_{β_i} 的表达式可由一个简单的递归得出。

如果 $k>n$，上面的方程写作

$$D_R(t^k)=\sum_{p=0}^{k-1}D_{R_{n-1}}(t^{k-p-1})\beta_n^p=\sum_{p=0}^{k-n}D_{R_{n-1}}(t^{k-p-1})\beta_n^p.$$

由于当 $R_0=\{\beta_0\}$ 时，我们有 $D_{R_0}=\delta_{\beta_1}$，因此根据归纳法可知

$$D_R(t^k)=\sum_{p_0+\ldots+p_n=k-n}\beta_0^{p_0}\ldots\beta_n^{p_n},$$

其中求和以所有满足 $p_i\geq 0$ 且 $\sum p_i=k-n$ 的族 (p_i) 为指标。 □

下列命题说明， Δ_R 是某点 β_*处 n阶导数 $\delta_{\beta_*}^{(n)}$ 的离散版本。

命题 7. 对于每一个实值测试函数 $\varphi\in\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$，存在一点$\beta_*\in[\min(R),\ \max(R)]$ 使得

$$\Delta_R(\varphi)=\varphi^{(n)}(\beta_*).$$

证明。 我们可以对这些数排序 β_i，使得 $\beta_0<\ldots<\beta_n$。考虑次数为 n 的多项式 P，满足对每个 $i=0,\ldots,n$， $P(\beta_i)=\varphi(\beta_i)$。当然，$\Delta_R(\varphi)=\Delta_R(P)$，但由于当 $k<n$ 时， $\Delta_R(t^k)=0$，且 $\Delta_R(t^n)=n!$，我们还可得，对于每个 $t\in I$，$\Delta_R(P)=P_{(n)}(t)$。因此我们可以考虑 $\psi=\varphi-P$: 这个函数满足对每个 i， $\psi(\beta_i)=0$，我们需要证明 $\psi^{(n)}(t)=0$ 对

某个 $t \in [\beta_0, \beta_n]$。但我们可以通过反复应用罗尔定理得到这一结果： ψ 有 $n+1$ 个零点，因此 ψ' 有 n 个零点，.....因此 $\psi^{(n)}$ 有一个零点。□

对于复值测试函数，我们可以将后一个命题分别应用于其实部和虚部，得到以下不等式。

推论 2. 对于每个测试函数 $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ 以及每个点 $\beta_* \in I$，如果 L是 I的长度，

$$|\Delta_R(\varphi) - \varphi^{(n)}(\beta_*)| \leq 2L \sup_I |\varphi^{(n+1)}|.$$

类似地，如果 R_1, R_2 是 I 的两个基数为 $n+1$的子集，

$$|\Delta_{R_1}(\varphi) - \Delta_{R_2}(\varphi)| \leq 2L \sup_I |\varphi^{(n+1)}|.$$

如果 $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$，我们有

$$|\Delta_R(\varphi)| \leq \sqrt{2} \sup_I |\varphi^{(n)}|.$$

尝试将集合 R 分解为更小的集合时，以下引理会很有用。

引理 1. 假设 $R = R' \cup \{\beta_1, \beta_2\}$。记 $R_1 = R' \cup \{\beta_1\}$ 和 $R_2 = R' \cup \{\beta_2\}$。那么

$$D_R = \frac{D_{R_1} - D_{R_2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

证明。我们只需验证范德蒙德方程组。记分布 $D = \frac{D_{R_1} - D_{R_2}}{\beta_1 - \beta_2}$为 D，并记 R'的基数为 $n+1$。~~我们已有~~ $D(t^k) = 0$，其中 $k = 0, \ldots, n$；根据定义， $D(t^{n+1}) = (1-1)/(\beta_1 - \beta_2) = 0$。最后，

$$D(t^{n+2}) = \left(\sum_{\beta \in R_1} \beta - \sum_{\beta \in R_2} \beta \right) / (\beta_1 - \beta_2) = 1.$$

□

3.2. 分布的范数。 支撑在 $R = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\}$ 上的离散分布 $D = \sum_{\beta \in R} a_\beta \delta_\beta$ 称为 k 阶，如果对每个 $p < k$，都有 $D(t^p) = 0$。k 阶分布构成的集合由归一化范德蒙德分布Δ_S张成，其中 $S \subset R$的基数为 $k+1$。事实上，若 $S_p = \{\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{p+k}\}$，则族$(\Delta_{S_p})_{p=0,\ldots,n-k}$ 是 k阶分布的一组基。

为了得到其他分解，我们还将考虑 D 在族（Δ_S）上的分解，其中 $S \subset R$ 的基数为# $S \geq k+1$。

定义 5. 设 D 是支撑于 R 上的 k 阶离散分布，且 I是包含 R的区间。D 在 I 上的第 k 泛函范数为

$$N_k^{fun}(D) := \sup_\varphi \frac{|D(\varphi)|}{\|\varphi^{(k)}\|_I},$$

其中，上确界取遍所有满足 $\varphi^{(k)} \not\equiv 0$ 的测试函数 $\varphi \in C^k(I)$.

这个定义取决于 I，但这种依赖不应产生实质影响。也可以考虑定义在区间 $\mathrm{Conv}(R)$ 上的测试函数，其导数在该区间端点处存在极限。

为了反映分布 D 在某些子集 $S \subset R$上的生成族 (Δ_S) 上的分解，我们引入组合范数：

定义 6。设 D 是一个由 R 支撑、阶为 k 的离散分布，且$\rho > 0$ 是正比率。我们将 D 的 k阶组合范数定义为

$$N_k^{comb}(D) := \inf_{D=\sum_S b_S \Delta_S} \sum_S |b_S|,$$

$$N_{\geq k}^{comb}(D) := \inf_{D=\sum_S b_S \Delta_S} \sum_S \rho^{k-|S|} |b_S|,$$

其中，下确界取遍 D 的所有分解 $D = \sum_S b_S \Delta_S$，它们分别满足 $\# S = k+1$ 和 $\# S \geq k+1$。

考虑以 $(e_S)_S$ 为基的向量空间 E（将 e_S 视为无意义符号），我们可以考虑线性映射 $A : E \to \mathbb{C}^R$，其定义为$A(e_S) = \Delta_S$，对每个 S均成立。空间 E可以赋予范数 $\| \sum b_S e_S \|_1 = \sum \rho^{k-|S|} |b_S|$；组合范数是 $E/\ker(A)$ 中的商范数。

参数 ρ 可以任意选取，但选择$\rho = L$（即 I 的长度）会比较方便（下文我们将采用这一选择）。

对于每个阶为 k的分布 D，我们有 $N_k^{fun}(D) \leq N_k^{comb}(D)$；这由推论 2 得出。我们还有 $N_{\geq k}^{comb}(D) \leq N_k^{comb}(D)$。我们希望找到良好的不等式 $N_{\geq k}^{comb}(D) \leq C N_k^{fun}(D)$，以体现良好的分解 $D = \sum b_S \Delta_S$。这些范数之间的确切关系尚不清楚；特别是，满足 $N_k^{comb}(D) \leq c N_k^{fun}(D)$ 的常数 c以非平凡的方式依赖于 k 和 $\#R$，参见第 3.6 节中的讨论。

3.3. 其他观点。

我们再次考虑分布 $D = \sum a_\beta \delta_\beta$ 的原函数 $I^k D$，它们支撑在 $\mathbb{R}^+$上。具体来说，$I_\beta^k D(t) = \sum_{\beta \leq t} a_\beta \frac{(t-\beta)^{k-1}}{(k-1)!}$ for $k \geq 1$.

命题 8。如果 D 是一个 k 阶分布，那么 $I^k D$ 是一个 $\mathcal{C}^{k-1}$ 函数，其支撑包含于 $[\beta_0, \beta_n]$ 中。D 在测试函数 $\varphi \in \mathcal{C}^k$（$I$）上的值为

$$\langle D, \varphi \rangle = (-1)^k \int_I (I^k D)(t) \varphi^{(k)}(t) dt.$$

D 的泛函范数为

$$N_k^{fun}(D) = \int_I |I^k D(t)| dt.$$

证明。 假设 $R \subset [a,b] \subset I$。对 $[a,b]$ 关于 $p \le k$进行 p 次分部积分，得到

$$\langle D, \varphi \rangle = (-1)^p \int_{t=a}^{b} (I^p D)(t) \varphi^{(p)}(t) dt + \sum_{q=1}^{p} (-1)^{q+1} (I^q D)(b) \varphi^{(q-1)}(b).$$

取 $p = 1$与 $\varphi = 1$，我们得到 $(ID)(b) = 0$；对于 $p = 2$ 与 $\varphi = t$，我们得到 $(I^2 D)(b) = 0$，等等.....事实上，对所有 $p \le k$ 都有 $I^p D(b) = 0$，由此得到第一个结果。$N_k^{fun}(D)$ 的表达式照例通过对 $\varphi^{(k)}$ 取 $|I^k D|/I^k D$ 在其不为零处的连续逼近而得到。□

推论 3. 若 $\#R = n + 1$ 且 Δ_R 是支撑于 R 上的归一化范德蒙德分布，则 $I^n \Delta_R$ 是类 $\mathcal{C}^{n-1}$ 的正函数，由$\mathrm{Conv}(R)$支撑。特别地，$N_n^{fun}(\Delta_R) = 1$。

证明。 由于 Δ_R 是实的，由命题 7 与命题 8 可知 $\int_I |I^k \Delta_R(t)| dt \le 1$。另一方面，

$$\int_I (I^n \Delta_R)(t) dt = \langle \Delta_R, t^n/n! \rangle = 1 \ge \int_I |I^n \Delta_R(t)| dt.$$

只有当 $I^n \Delta_R$ 为正且 $N_n^{fun}(\Delta_R) = 1$时，这才有可能。 □

我们还可以研究离散分布及其对应的超函数。与 $D = \sum_{\beta \in R} a_\beta \delta_\beta$ 对应的超函数为

$$h(p) = \sum_{\beta \in R} \frac{a_\beta}{p - \beta}.$$

如果 φ 是定义在 I上的解析测试函数，可以将其延拓到 $\mathbb{C}$中 I 的邻域 U，并且 γ 是 U 中的一条路径，绕 I一周，

$$\langle D, \varphi \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{p \in \gamma} h(p) \varphi(p) dp.$$

命题 9. 与范德蒙德分布D_R 对应的超函数 h_R 为

$$h_R(p) = \prod_{\beta \in R} \frac{1}{p - \beta}.$$

证明。 我们知道，对于某个次数为~~$\deg(P) \le n$~~的多项式 P，有 $h_R(p) = {}^{P_{(p)}}\!/_{\prod(p-\beta)}$。如果测试函数 φ 是多项式，则积分 $\int_\gamma h_R(p)\varphi(p)dp$ 的值可以通过计算无穷远处的留数得到。

陈述中的表达式 $h(p)$ 在无穷远点附近可以写成

$$h(p) = \prod_{\beta \in R} \frac{(p^{-1})^{n+1}}{1 - \beta p^{-1}}.$$

$p^k h(p)dp$ 在无穷远点处的留数与 $\langle D_R,\ t^k\rangle$ 当 $k \leq n$ 时的取值相同，这表明 $h = h_R$。□

3.4. **将分布分解到范德蒙基上。**

引理 2. 考虑一个支撑在区间 I 内有限集 $R = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\}$ 上的分布 D，其长度为 L，记为 $\Delta_i = \Delta_{\{\beta_0,\ldots,\beta_i\}}$，并写作

$$D = b_0\Delta_0 + \ldots + b_n\Delta_n.$$

假设 D 的阶为 k，且 $N_k^{fun}(D) \leq C$。那么 $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ 且 $|b_i| \leq CL^{i-k}/(i-k)!$ 对所有 $i \geq k$ 均成立。

特别地，若在组合范数的定义中取参数 $\rho = L$，则有 $N_{\geq k}^{comb}(D) \leq \mathrm{e} N_k^{fun}(D)$。

证明。考虑多项式 $P_{i+1}(t) = (t-\beta_0)\ldots(t-\beta_i)$。由于 P_i 的次数为 i，对于 $j > i$，我们有 $\Delta_j(P_i) = 0$；根据其定义，对于 $j < i$，我们有 $\Delta_j(P_i) = 0$。因此，对于所有 $i = 0,\ldots,n$，均有 $D(P_i) = i!b_i$。现在，对于每个 $i \geq k$，我们可以计算 k 阶导数

$$P_i^{(k)} = \sum_{0\leq j_0<\ldots<j_{i-k-1}\leq i-1} k!(t-\beta_{j_0})\ldots(t-\beta_{j_{i-k-1}}).$$

由于 L 是区间 I的长度，因此对所有 j都有 $|t-\beta_j| \leq L$，于是

$$\|P_i^{(k)}\|_I \leq k!C_i^k L^{i-k} = i!\frac{L^{i-k}}{(i-k)!}.$$

我们推得 $|b_i| \leq N_k^{fun}(D)\|P_{(k)_i}\ \|_I/i! \leq C\ L^{i-k}/(i-k)!$ □

也可以尝试将 D 按基 Δ_{R_j} 分解，其中 $R_j = \{\beta_j, \ldots, \beta_{j+k}\}$。一种简单的方法是结合引理 1，使用后一个引理，将每个Δ_i（其中 $i > k$）按基 Δ_{R_j} 分解。我们将得到一个分解 $D = \sum c_j\Delta_{R_j}$，但系数 c_j 会含有因子 $\prod(\beta_q - \beta_p)^{-1}$，其中涉及某些配对 $(\beta_p,\ \beta_q)$，满足β_p 位于 R_j 左侧，而 β_q 位于右侧。对于这些 $\beta_p - \beta_q$，我们没有足够好的下界估计，无法沿此方向开展有用的工作。

3.5. 退化离散分布。 考虑某个有限多重集 $R = \{(\beta_0, m_0)\ldots,(\beta_n, m_n)\}$，其中 $m_k > 0$是 β_k的重数。支撑在 R 上的分布将具有以下形式

$$D = \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{m_k-1}(-1)^r a_{(\beta_k,r)}\delta_{\beta_k}^{(r)}.$$

R的基数为 $\#R = N+1 = m_0 + \ldots + m_n$，因此我们可以再次将范德蒙德分布 D_R 定义为以下方程组的解

$$\begin{cases} D_R(1) = 0 \\ D_R(t) = 0 \\ \vdots \\ D_R(t^N) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_{(\beta_k,0)} = 0 \\ \sum_{k=0}^{n} \beta_k a_{(\beta_k,0)} + a_{(\beta_k,1)} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{m_k-1} \beta_k^{N-r} \frac{N!}{(N-r)!} a_{(\beta_k,r)} = 1. \end{cases}$$

引理 3。 考虑一个连续多重集族 $R(\lambda) = \{\beta_0(\lambda) \ldots\ldots, \beta_N(\lambda)\}$。则 $\lambda \mapsto D_{R(\lambda)}$ 关于范数 N_N^{fun} 是连续的。

证明。选取区间 $I \supset [a,b] \supset R$ 和一条绕 I转一周的路径 γ，我们可以设想它是开集 $U \subset \mathbb{C}$的边界。

命题 8 和 9 对退化分布仍然成立，这一点很容易验证。根据命题 8，我们希望证明 $\lambda \mapsto I^N D_{R(\lambda)}$ 关于 L^1 范数是连续的。利用命题 9，我们看到 $\lambda \mapsto h_{R(\lambda)}$ 关于范数 $\sup_{p\in\gamma}|h(p)|$ 是连续的（其中 $h_{R(\lambda)}$ 是与 $D_{R(\lambda)}$相关联的超函数）。

然而，与函数 $I^N D_{R(\lambda)}$ 对应的超函数为 $I^N h_{R(\lambda)}$，其中 $Ih(p)$ 可取为 h 的任意原函数（它们都给出相同的超函数）。我们将选取 $I^k h$ 为由柯西积分公式在 γ上给出的原函数，例如

$$Ih(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma h(p) \log(p-z) dp,$$

对于 $z \in U \setminus [a, +\infty[$。这里 $\log(p-z)$ 表示在 p 和z 中，对定义于 $p \in \gamma \setminus [a, +\infty[$ 和 $z \in I \setminus [a, +\infty[$的对数的标准分支所作的解析延拓。积分总是沿路径 $\gamma \setminus [a, +\infty[$ 进行。

利用此公式，我们得到依赖于 λ 的原函数 $I^N h_{R(\lambda)}$；它们从上方和下方连续延拓至 $[a,b]$，并且如果 $t \in [a,b]$,

$$I^N D_{R(\lambda)}(t) = \lim_{z \to t+0^+ i} I^N h_{R(\lambda)}(z) - \lim_{z \to t+0^- i} I^N h_{R(\lambda)}(z).$$

我们看到，$\lambda \mapsto I^N D_{R(\lambda)}$ 对一致范数而言实际上是连续的。 □

本引理说明，任何退化分布都可以按前述小节所述，以任意精度由离散分布逼近。特别地，分部积分的边界项可以取为非退化分布。

3.6. **能否得到更好的分解?** 为证明定理 3，我们将利用引理 2，把阶为 k 的一般分布分解为范德蒙分布之和。这种分解并非最优，因为它涉及阶为 $p > k$ 的分布，从而会改变按包求和收敛所在邻域的形状。

在此讨论如何获得更好的分解可能会有所帮助（理想情况下，将 D 分解为若干个与 D同阶的范德蒙德分布之和）。在本节的讨论中，我们沿用本节一直使用的记号。

为简单起见，我们可以考虑经$D(t^k/k!) = 1$归一化的 D 阶实分布。此类分布构成一个由满足 $\#S = k+1$ 的分布 Δ_S 张成的仿射子空间 A 。满足 $N_k^{comb}(D) = 1$的分布 D 构成 Δ_S的凸包 A^1_{comb} ；我们希望将其与满足 $N_k^{fun}(D) = 1$ 的分布 D 所构成的凸集A^1_{fun} 进行比较。这两个集合之间的差异将反映范数之间的差异：当然， $A^1_{comb} \subset A^1_{fun}$。注意， A^1_{fun} 中的所有分布都可视为狄拉克的k阶导数的离散近似；它们所起的作用都与某个 Δ_S相同。

根据命题 8，我们看到在实数情形下， A^1_{fun} 是满足 $I^k D$ 为正的分布$D \in A$ 的集合。我们立即推导出一种生成 $A^1_{fun} \setminus A^1_{comb}$ 中元素的一般构造：取三个基数为 $k+1$的集合 S_1， S_2， $S_3 \subset R$ ，使得凸包 $\mathrm{conv}(S_3)$包含于并集 $\mathrm{conv}(S_1) \cup \mathrm{conv}(S_2)$中。由此可得相应分布的支撑之间的包含关系 $\mathrm{supp}(I^k\Delta_{S_3}) \subset \mathrm{supp}(I^k\Delta_{S_1} + I^k\Delta_{S_2})$。组合$a_1\Delta_{S_1} + a_2\Delta_{S_2} - a_3\Delta_{S_3}$ （其中 $a_i > 0$ 和 a_3都不能太大）仍为正；经过重新归一化后，我们得到 $A^1_{fun} \setminus A^1_{comb}$中的一个分布。

这些例子表明，分布并非自然地应在族(Δ_S)上进行分解：自然的族应当是 A^1_{fun}的极端元集合。然而，上述构造有很大的自由度， A^1_{fun} 的极端元集合似乎甚至不是有限的。我们当然可以通过在极端分布集合上分解分布来得到一个理论结果，但若要在一个我们尚不了解的族上陈述一般的分解，其效果不会比一般性的定理 2更好。要得到更好的分解，另一个可能的方向是直接估计一个极端分布如何在族(Δ_S)上分解（这似乎并不显而易见）。

4. 无理级数的分组求和

我们现在可以证明主定理了。

定理 3。 考虑一个无理级数 $g(w) = \sum_{\beta \in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ ，其支撑位于闭离散集 $R \subset \mathbb{R}^+$ 上，并在对数半平面 $H_{a,k}$ 内有定义且有界。假设 R 具有线性密度：存在常数 μ, ν ，使得对于任意长度为 L 的区间 I ，$\#(R \cap I) \leq \mu\, L \sup(I) + \nu\, L$。

存在有限集 R_n，满足 $\inf(R_n)=\beta_n$、$\#R_n=N_n+1$，以及系数 $b_n\in\mathbb{C}$、半径 $r\in]0,1[$ 和常数 $c\in\mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned}&g(w)=\sum_n b_n\langle\Delta_{R_n},\mathrm{e}^{tw}\rangle,\\&\sum_n|b_n|r^{\beta_n}<\infty,\\&N_n\le(\mu+2k)\beta_n+c.\end{aligned}$$

回顾一下，根据推论 2，$|\langle\Delta_{R_n},\ \varphi\rangle|\le\sqrt{2}\sup_I|\varphi^{(N_n)}|$ 若 $I=\mathsf{Conv}(R_n)$。特别地，当 $\mathsf{Re}(w)<0$ 时，

$$|\langle\Delta_{R_n},\mathrm{e}^{tw}\rangle|\le\sqrt{2}\,|w^{N_n}\mathrm{e}^{\beta_n w}|.$$

利用引理 4 的估计，和式 $\sum b_n\langle\Delta_{R_n},\ \mathsf{e}^{tw}\rangle$ 在 $-\infty$ 的某个对数邻域内按包收敛。

证明。出于技术上的原因，我们将在证明中假设 $k\ge1$：由于当 k 较大时，集合$H_{a,k}$ 会更陡，因此这一假设并不构成限制。

我们先利用命题 5，得到一个可容许序列 $t_n=\frac{n-3.5}{k}$，对于足够大的~~n~~，使得 $I^{\Delta}_{(t_n)}(D,\ \mathsf{e}^{tw})$ 收敛。利用命题 3，这一收敛性给出一个退化分布序列 D_n，其支撑在 $[t_n,t_{n+1}]$ 上，阶为 n；其支撑是一个基数为 $\#M_n=\#(R\cap[t_n,t_{n+1}])+2n$ 的多重集 M_n。根据命题 2，DIPP 有界于某个 $a\in\mathbb{R}$（我们可以假设其为负的 $a\le0$），由此可得 $C:=\sum_n N_n^{fun}(D_n)\mathsf{e}^{at_{n+1}}<\infty$。特别地，我们有 $N_n^{fun}(D_n)\le C\mathsf{e}^{-at_{n+1}}$。

由于 R 具有线性密度，因此我们有界 $\#M_n\le(\mu/k+2)\,n+\nu$。将分布 D_n 用引理 2 分解，我们得到

$$D_n=\sum_{p\ge n}b_{n,p}\Delta_{n,p},$$

其中$\Delta_{n,\ p}$ 是定义在多重集$M_{n,\ p}\subset M_n$ 上的归一化范德蒙德分布，该多重集的基数为 $\#M_{n,\ p}=p$，并且

$$\begin{aligned}|b_{n,p}|&\le C\mathrm{e}^{-at_{n+1}}\frac{(1/k)^{p-n}}{(p-n)!}\\&\le C\frac{\mathrm{e}^{-at_{n+1}}}{(p-n)!}.\end{aligned}$$

按照题述引入 $\beta_{n,\ p}=\inf(M_{n,\ p})$，我们有 $\beta_{n,\ p}\geq t_n$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq n\geq 0}|b_{n,p}|\mathrm{e}^{(a-1)\beta_{n,p}} &\leq \sum_{p\geq n\geq 0} C\frac{\mathrm{e}^{a(t_n-t_{n+1})}\mathrm{e}^{-t_n}}{(p-n)!}\\ &\leq \sum_{n\geq 0} C\mathrm{e}\mathrm{e}^{-a/k}\mathrm{e}^{-t_n}\\ &<\infty.\end{aligned}$$

$M_{n,p}$ 的基数有界于

$$\begin{aligned}\#M_{n,p} &\leq \#M_n\\ &\leq \left(\frac{\mu}{k}+2\right)n+\nu\\ &\leq \left(\frac{\mu}{k}+2\right)(kt_n+3.5)+\nu\\ &\leq (\mu+2k)\beta_{n,p}+3.5\left(\frac{\mu}{k}+2\right)+\nu.\end{aligned}$$

如果我们接受多重集$R_{n,p}$和退化离散分布$\Delta_{R_{n,p}}$，就能得到这一结果。狄拉克δ的导数只在切割点处作为边界项出现 t_n（在 D_n 中出现一次，之后在 D_{n+1} 中带负号出现：求和时边界项需要相互抵消）。我们可以使用引理 3，以任意精度用狄拉克δ之和逼近这些边界项，从而得到定理的结论（涉及通常的集合$R'_{n,p}$和非退化离散分布$\Delta_{R'_{n,p}}$）。□

该定理可应用于无理级数 $g(w)=\sum_{\beta\in R_\alpha}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w}$，其中$R_\alpha=\mathbb{N}+\alpha^{-1}\mathbb{N}$。事实上，$\#(R\cap]\beta-1,\beta])=1+\lfloor\alpha\beta\rfloor$：用定理 3 的术语来说，集合 R_α 具有线性密度 $\mu=\alpha$。

该定理也可应用于通常的幂级数 $g(w)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}}a_\beta\mathrm{e}^{\beta w}$。这些估计不允许直接证明这样的级数正规收敛，但我们可以用另一种方式加以证明。设 g 定义在对数半平面 H上，并引入平移 $\tau(w)=w+2i\pi$。我们看到 $g\circ\tau$是一个具有相同形式展开的无理级数，从而 $g\circ\tau=g$，这证明了 $g(w)=f(\mathrm{e}^w)$，其中 f 是定义在商空间 H/τ上的某个全纯函数，也就是一个正规收敛的幂级数 $f(z)=\sum a_nz^n$。

附录 A. $-\infty$的一些邻域

A.1. 对数邻域。 回顾对数邻域$H_{a,\ k}$ 定义为

$$H_{a,k}=\left\{x+iy\in\mathbb{C}\mid x+\frac{k}{2}\log(x^2+y^2)<a\right\}.$$

以下引理贯穿全文使用。

引理 4。 对于任意 $w \in H_{a,\ k}$、任意 $\beta > 0$ 和 $p \leq k\beta$，我们有

$$|w^p \mathrm{e}^{\beta w}| \leq \mathrm{e}^{a\beta}.$$

证明。 只需注意，$\log\left(|w^p \mathrm{e}^{\beta w}|\right) = \frac{p}{2}\log(x^2+y^2)+\beta x \leq \beta\left(x + \frac{k}{2}\log(x^2+y^2)\right)$。

□

A.2.直半平面。 考虑一个半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Re}(w) < a\}$ 以及一个有界函数 $g \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$，其形式展开为 $\hat{g}(w) = \sum_{\beta \in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$。

在 [9, 第 2 节中，7], 我们证明了超函数 $h = \mathcal{L}g$ 满足一个估计式

$$|h(p)| \leq C \frac{\mathrm{e}^{-w_0 \mathrm{Re}(p)}}{|\mathrm{Im}(p)|}$$

对于 $\mathrm{Re}(p) > 0$。由于系数 a_β 是 h 在 $p = \beta$处的留数，我们得到估计式 $|a_\beta| \leq C\mathrm{e}^{-w_0\beta}$。如果指标集 R 不是过于稠密（例如具有多项式密度），这就证明级数 $g(w) = \sum_{\beta \in R} a_\beta \mathrm{e}^{\beta w}$ 在某个半平面内正规收敛。如果 R 具有超过指数密度的密度，我们可能需要另一种收敛概念，也许是某种按包收敛。

A.3. 二次域。 在关于杜拉克芽的经典著作中，所考虑的邻域是标准二次域（参见 [4]）。再次记 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Re}(w) < a\}$ 为某个 $a \leq 0$，令 $\Phi_C(w) = w - C\sqrt{1+w^2}$ 为$C > 0$（我们采用平方根的通常取值：当 $\mathrm{Re}(w) < 0$时，我们有 $\sqrt{1+w^2} \sim -w$；当 $|w| \to \infty$时）。二次域 Ω_C 定义为 $\Omega_C = \Phi_C(\mathbb{H})$（为与本文其余部分保持一致，我们调整了定义，将 Ω_C 视为 $-\infty$的一个邻域；我们还引入了参数 a 以提高灵活性）。出于好奇，我们可以尝试了解这些邻域对应于何种收敛概念。

Ω_C 的形状可以根据其边界 $\partial\Omega_C = \Phi_C(a + i\mathbb{R})$的渐近行为推知。注意，

$$\begin{aligned} |(1+C)w - \Phi_C(w)| &= C|w + \sqrt{1+w^2}| \\ &\leq \frac{C}{|w - \sqrt{1+w^2}|}. \end{aligned}$$

当 $t \to \pm\infty$ 时，$(a+it) - \sqrt{1} + (a+it)^2 \sim 2(a+it)$，因此我们看到，对于 $w \in a + i\mathbb{R}$，$|(1+C)w - \Phi_C(w)|$ 有界，且 Ω_C 包含一个直线半平面。因此，二次域上有界函数的自然收敛概念是正规收敛。

参考文献

[1] Ecalle, J. 小分母的补偿与局部对象的分枝线性化。载于动力系统中的复解析方法。*1992*年*1*月于巴西里约热内卢应用数学纯粹研究所（*IMPA*）举行的大会论文集。巴黎：法国数学会，1994，第135–199页。[2] Ecalle, J. 自然增长尺度。载于代数组合学、复活、模具及其应用（*CARMA*）。第*1*卷。柏林：欧洲数学会（EMS），2020，第93–223页。[3] Ecalle, J., Martinet, J., Moussu, R., and Ramis, J.-P. 极限环的不累积性。I. II.（极限环的不累积性。I. II.）。法国科学院院报，巴黎，*I*辑 *304*(1987)，375–377，431–434。[4] Ilyashenko, Y. 希尔伯特第十六问题百年史。美国数学会通报，新系列 *39*，第3期（2002），301–354。[5] Il' yashenko, Y. S. 极限环有限性定理。美国数学会译丛，第*2*辑，第*148*卷(1991)，55–64。[6] Morimoto, M.佐藤超函数导论。由 *Mitsuo Morimoto* 从日文译出，数学专著译丛第129卷。数学专著译丛普罗维登斯，罗得岛：美国数学会，1993。[7] Sato, M. 超函数理论。I. 东京大学理学部纪要，*I*辑 *8*(1959)，139–193。[8] Sato, M. 超函数理论。II. 东京大学理学部纪要，*I*辑 *8*(1960)，387–437。[9] Thom, O. 无理级数 I，$-\infty$ 邻域中的拉普拉斯变换。可在 Arxiv 上获取。

弗鲁米嫩塞联邦大学 - 数学与统计研究所，巴西尼泰罗伊电子邮件：olivier thom@id.uff.br_