arXiv:2603.07377v1 [math.LO] 7 Mar 2026

秩强迫与广义博雷尔层级的长度

NICK CHAPMAN

摘要。我们将 A. Miller 的 α强迫框架扩展到正则不可数基数 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的情形，并将其用于研究广义贝尔空间 ${}^{\kappa}\kappa$的子空间上的 κ-博雷尔层级结构。我们确定了一类 α强迫迭代，并证明它满足某种组合性质，即存在一个足够丰富的秩函数族；随后利用这一事实构造若干模型，在其中多个子空间 ${}^{\kappa}\kappa$ 上的 κ-博雷尔层级长度呈现非平凡的星座。最后，我们给出 Steel 的标记树强迫的高阶变体，并推广 Stern 的论证，从而得出某些良基树类的精确 κ-博雷尔复杂度。

1. 引言

博雷尔集是描述集合论中研究最为深入的对象之一。根据从基本既开又闭集逐步构造时其结构的复杂程度，贝尔空间的每个博雷尔集 $B \subseteq {}^{\omega}\omega$都位于博雷尔层级的某个特定层级——使得$B$ 属于 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$的最小序数 α 。描述集合论中的一个基本事实是，实数上的博雷尔层级不会坍缩，也就是说，对于每个序数 $\alpha < \omega_1$ ，都存在一个博雷尔集 $B \subseteq {}^{\omega}\omega$，它属于 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ ，但对于任何 $\alpha' < \alpha$都不属于 $\mathbf{\Pi}^0_{\alpha'}$。然而，当我们将讨论相对化到实数的某个特定子空间 $X \subseteq {}^{\omega}\omega$时，情况可能不再如此。例如，当我们关注任意可数子空间 $X \subseteq {}^{\omega}\omega$时，显然 X 的任何子集（无论是否为博雷尔集）都是 $\mathbf{\Sigma}^0_2$（X），因此 X 上的博雷尔层级非常短。 X上的博雷尔层级的长度 或序 ord(X)，即使得 X 的每个博雷尔子集都是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$（X）的最小序数 α ，可以视为空间拓扑复杂度的一种测度。与贝尔空间一样，康托尔空间 ${}^{\omega}2$也满足 ord(${}^{\omega}2$) $= \omega_1$，而且任何包含 ${}^{\omega}2$的嵌入的 X 也同样如此。

除去这些平凡的观察之外，关于序数 ord(X) 的其他陈述似乎并不多。事实上，对于不可数 X 而言，这个序数的值被证明在 ZFC 中具有高度独立性。A. Miller 在其著作《博雷尔层级的长度》中，开启了对实数子空间的 ord(X) 可能取值的系统研究。 [Mil79]Miller 在 [Mil79] 和 [Mil95]中给出了一系列关于修改博雷尔层级的相容性结果，以说明除了一些次要限制外，我们几乎可以完全自由地将 ord(X) 设定为某个序数，使其出现在一个链条件迫使扩张中。这里采用的基本构件是 Miller 的 α-强迫，它允许我们向宇宙中添加一个“全新”的 $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ 元素，或者反过来，为特定的 $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$-子集添加一个 X编码。经过一些工作可以证明，这种强迫相对温和，对博雷尔层级只施加预期程度的影响，因此对这些强迫进行迭代便能得到所需的相容性结果。

日期：2026年3月10日。2020 数学主题分类。主要分类：03E15；次要分类：03E35、54H05。关键词与短语。广义描述集合论、博雷尔层级、 α-强迫、可定义性。

这项研究可以继续推进的一个方向，是考察广义描述集合论领域中出现的其他Borel层级的行为。该研究领域的核心理念，是将拓扑学、描述集合论或力迫论中的熟悉概念提升到不可数情形，通常是用不可数基数 ω 替代 κ的作用。因此，研究的核心拓扑空间便成为广义康托尔空间 ${}^{\kappa}2$和广义贝尔空间 ${}^{\kappa}\kappa$，二者都配备了相应的有界拓扑。尽管近期奇异 κ 的广义描述集合论日益受到重视（例如参见 [DR25] 或 [Ago+25]），但在本文中我们将始终专门采用更为普遍确立的正则不可数 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$假设。在这一背景下，自然的研究对象是子空间 κ上的 ${}^{\kappa}\kappa$-博雷尔层级；该层级从有界拓扑中的基本既开又闭集出发，通过取补集以及大小为 $\leq\kappa$的并集生成。这引出了一个问题：该层级的行为是否类似于子空间 ${}^{\omega}\omega$上的经典博雷尔层级。

作者最近与 Claudio Agostini、Luca Motto Ros 和 Beatrice Pitton 合作，开始全面研究众多拓扑空间上的 κ-博雷尔层级及相关层级的性质 [Ago+25]。在同一项工作中，他们对α-强迫作了部分推广，从而得以推广 Miller 的一个定理。

定理。 假设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$的大小为 $|X| > \kappa$，且 $1 < \alpha < \omega$ 是一个有限序数。那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^{+}-链条件的强迫扩张 $V[G]$，使得

$$V[G] \models \mathrm{ord}_{\kappa}(X) = \alpha.$$

这里我们用 ord_{κ} 表示 κ-博雷尔层级的长度。在不可数情形下将序数限制为有限序数，是 α-强迫定义中的一个技术性限制；本文将解决这一问题。

本文旨在将 Miller 的工作拓展到不可数情形，并系统化对 α-强迫迭代的研究。为此，我们将他的若干论证归纳为一个“黑箱”（参见引理 5.30），借此运用他所提出的秩强迫技术，自动推出迭代的保持性质，从而得到关于博雷尔层级长度的拓扑一致性结果。本文结构如下。

第 2 至 4 节介绍预备知识和记号约定，并引入本文的核心概念与定义。我们将介绍 Miller 的秩强迫框架，并以此作为推导关于 α-强迫的结论的工具。

第 5 节将 α-强迫推广到正则不可数 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$的情形。在极限序数处需要特别谨慎，但总体而言，推广后的强迫与经典情形具有类似性质，包括足够的正则性性质，例如策略性 $<\kappa$-闭包，以及 κ^{+}-链条件的强版本。借助一个专门构造的可迭代性定理，我们证明这一链条件的加强形式可在 $<\kappa$-支撑强迫迭代中保持，从而能够通过迭代 α-强迫使用强迫扩张。关键的是，第 5.2 节在围绕 α-强迫的秩论证与迭代强迫扩张中空间的拓扑性质之间架起了桥梁。

第 6 节的引言概述了此前关于 α-强迫迭代的一些已知结果，这些结果来自 [Mil79], [Mil95] 和 [Ago+25]。本节其余部分介绍本文的主要贡献：我们确定了一类迭代，根据引理5.30，这类迭代可以配备足够丰富的秩函数族。在第 7 节中，我们运用第 6 节的成果，构造了若干模型，使得非平凡的星座具有不同的博雷尔层级长度。我们证明，固定空间 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$几乎可以达到任意的序数值$\kappa$。

定理。假设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$的大小为 $|X| > \kappa$，且 $1 < \alpha < \kappa^+$ 是一个后继序数。那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的强迫扩张 $V[G]$，使得

$$V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \alpha.$$

$\alpha = \kappa^+$也同样如此。

我们所研究的迭代具有一般性，因此也能部分地得到将 ord_κ 设为极限序数的结果。本文还讨论了该定理的若干变体。例如，我们还构造了这样的模型：同时在若干空间 X 上设定 ord_κ，甚至根据这些空间的大小，使它们上的 ord_κ 取不同的值。由此得到以下结果：

定理。设 f 是一个函数，它为每个满足 $\kappa < \lambda \leq 2^\kappa$ 的基数 λ 指定一个序数 $1 < f(\lambda) \leq \kappa^+$，使得

(1) f 是非严格递增的；(2) 若 λ是后继基数，则 $f(\lambda)$ 是后继序数，或者 $f(\lambda) = \kappa^+$；(3) 若 λ是极限基数，则 $f(\lambda) = \sup_{\lambda' < \lambda} f(\lambda')$。

T那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的泛型扩张 $V[G]$ 的宇宙，使得

$$V[G] \models \forall X \subseteq {}^{\kappa}\kappa, X \in V, |X| > \kappa : \mathrm{ord}_\kappa(X) = f(|X|).$$

最后，本节以一种广义情形独有的现象作结——基模型对象的可定义性得以保留。这种现象不可能发生在 ω，这表明在研究不可数情形时，它与经典情形有所不同。我们已在 [Ago+25]中研究过这一现象，并在此通过构造 ${}^{\kappa}\kappa$的一个具有任意可能序 $\leq \kappa^+$的闭子集来应用它。

最后的第 8 节探讨了将 J. R. Steel 的带标记树强迫推广到不可数情形的一种可能性。我们证明，涉及这种强迫的标准论证可以置于秩强迫框架下进行，并进而利用这一事实，为某些良基树类的博雷尔复杂度推导出精确界限。若令 WF_α 表示秩小于 α的良基树类，则有：

定理。集合 WF_α 作为 $\mathcal{P}({}^{<\omega}\kappa)$ 的 κ-博雷尔子集，具有如下复杂度：

- 对每一个 $\alpha < \kappa^+$，集合$WF_{\kappa\cdot\alpha}$ 是 κ-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha}$，但不是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha}$。
- 对每一个 $\alpha < \kappa^+$ 和 $0 < \beta < \kappa$，集合$WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta}$ 是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha+1}$，但不是 κ-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha+1}$。

本定理与可数情形中的已知结果一致，尽管鉴于如下事实这或许令人惊讶：集合 WF（即所有良基树的集合）在广义情形下从复杂度的角度来看表现非常不同；我们在第8.1节中对此加以评述。

1.1. **致谢**。我感谢 Claudio Agostini 与我进行的多次交谈，以及他帮助我在 α-强迫的定义中表述临界性约束。此外，我要感谢我的导师 Martin Goldstern 给予的支持，并阅读了本文的先行版本。

2. 预备知识与符号约定

我们先回顾（广义）描述集合论和强迫中的一些概念，为后文奠定基础；我们采用的记号大多是标准的。对于有经验的读者，粗略浏览本节即可。

2.1. **拓扑**。 在本文中，我们只考虑满足 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的正则不可数基数 κ。按照广义描述集合论中的惯例，我们赋予广义Baire空间 ${}^{\kappa}\kappa$由形如 $[\eta] = \{x \in {}^{\kappa}\kappa\colon \eta \subseteq x\}$ 的基本闭开子集生成的<有界拓扑 />，其中 $\eta \in {}^{<\kappa}\kappa$。本文只讨论广义Baire空间的拓扑空间$X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$及其子空间拓扑。

2.2. 树。设 λ 是一个基数。树 $T \subseteq {}^{<\lambda}\lambda$ 是一个对初始段封闭的集合。对于节点 $\eta \in T$，我们用 $\mathrm{succ}_T(\eta)$ 表示 T 中 η 的直接后继所构成的集合。同样，我们用 $\mathrm{succ}^2_T(\eta)$ 表示 $\bigcup_{\eta' \in \mathrm{succ}_T(\eta)} \mathrm{succ}_T(\eta')$，而 $\mathrm{succ}^n_T(\eta)$ 的定义类似。若 $|\eta|$ 是一个后继序数，则我们用 $\mathrm{pred}_T(\eta)$ 表示树中 η 的直接前驱节点。本文主要考察良基树，即没有无穷枝的树 $T \subseteq {}^{<\omega}\lambda$。若 T 是这样一棵良基树，则它自然带有一个秩函数 $\mathrm{rk}_T\colon T \to \mathtt{Ord}$，其定义为：若 $\mathrm{succ}_T(\eta) = \emptyset$，则 $\mathrm{rk}_T(\eta) = 0$；否则，$\mathrm{rk}_T(\eta) = \sup\{\mathrm{rk}_T(\nu) + 1\colon \nu \in \mathrm{succ}_T(\eta)\}$。如果上下文清楚，我们会在所有这些函数中省略指标 T。没有后继节点的节点称为叶节点。用 $\mathrm{leaf}(T)$ 表示 T 中叶节点的集合，并令 $\mathrm{nonleaf}(T) = T \setminus \mathrm{leaf}(T)$。 ${}^{\kappa}\kappa$ 的闭子集 C 可以与穿过树 $T \subseteq {}^{<\kappa}\kappa$ 的枝集合 $[T]$ 对应起来。

2.3. **强迫**。 我们采用向下强迫的约定，因此若 $q \leq p$，则 q 比 p 更强。关系 $p \parallel q$表示相容性，而 $p \perp q$表示不相容性。若 $\mathbb{P}$是一个强迫概念，则若对每个 $p \in \mathbb{P}$ 都存在一个 $q \leq p$，使得 $q \in D$，那么$D \subseteq \mathbb{P}$ 就是稠密 的。若它向下封闭，则称为开 的。最后，若对每个 $p \in \mathbb{P}$ 都存在一个 $q \in D$ 满足 $q \parallel p$，则称 D 为准稠密 的。我们将名称记作 $\underset{\sim}{\tau}$，而基模型对象的规范（check）名称记作 $\check{\ }\tau$。强迫概念添加的泛型滤子的标准名称记作 $\underset{\sim}{G}$。我们称$\langle \mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma\colon \gamma < \gamma^*\rangle$为一个支集大小为 $<\lambda$ 的强迫迭代，若对每个 $p \in \mathbb{P}_{\gamma^*}$， p 中除至多 $<\lambda$个项之外的所有项都是（标准名称所表示的）平凡条件 $\mathbb{1}$。我们用 $\mathbb{P}_{\gamma^*}$ 表示这种迭代的极限。每个 $\mathbb{P}_{\gamma^*}$- 泛型滤子 G 都会自然地为每个 $\gamma < \gamma^*$ 诱导出一个 $\mathbb{P}_\gamma$- 泛型滤子；我们将该滤子记作 $G{\restriction}\gamma$。

3. 博雷尔集

设 λ 是一个基数， $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$是一个空间。则 X 上的 λ-博雷尔集 是 X 的子集中包含每一个（相对）开子集 $O \subseteq X$ 、且对补集以及大小为 λ的并集封闭的最小类；将该类记为 λ-$\mathbf{Bor}(X)$。照例，λ-博雷尔集可以自然地分层为 λ-博雷尔层级，方法是令 λ-$\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$为 X 的开子集类，并且

$$\lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left\{ \bigcup_{i<\lambda} B_i : \{B_i : i < \lambda\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \lambda\text{-}\mathbf{\Pi}^0_\beta(X) \right\}$$
$$\lambda\text{-}\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \left\{ X \setminus B : B \in \lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \right\}.$$

在本文中，我们几乎只关注 κ-博雷尔层级在 ${}^{\kappa}\kappa$的子空间上的标准形式，此处仅简要概述相关性质。关于博雷尔层级的全面研究，请参阅 [Ago+25]；不过需要提醒读者的是，在上述著作中采用了更一般的方法，将 λ-博雷尔集定义为对长度**小于** λ的并集封闭的类。因此，该著作将标准层级称为（$<$）κ^+-博雷尔层级，而（$<$）κ-博雷尔层级则是奇异基数 κ情形下出现的一种相关现象。本文采用更为普遍的约定，将λ-博雷尔理解为（$\leq\lambda$）-博雷尔。

3.1. 博雷尔集的编码。 每个 λ-博雷尔集 $B \subseteq X$ 都可以通过一棵良基树$T \subseteq {}^{<\omega}\lambda$以及一个函数 $f\colon \mathrm{leaf}(T) \to {}^{<\kappa}\kappa$ 来编码，方法是令 $\mathcal{I}^f_T(\eta) = [f(\eta)] \cap X$，当且仅当 $\eta \in \mathrm{leaf}(T)$，并且

$$\mathcal{I}^f_T(\eta) = \bigcap_{\eta' \in \mathrm{succ}_T(\eta)} X \setminus \mathcal{I}^f_T(\eta').$$

若上下文清楚，我们通常省略指标 T。

集合 $B \subseteq X$ 是 λ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$，当且仅当存在一棵树 $T \subseteq {}^{<\omega}\lambda$ 和 $f\colon$ 叶节点$(T) \to {}^{<\kappa}\kappa$，使得 $B = \mathcal{I}^f_T(\emptyset)$。

注 3.1. 事实上，对每个序数 $\alpha < \lambda^+$ 都存在一个通用的 T；也就是说，存在一个 $T \subseteq {}^{<\omega}\lambda$，使得对每个 $B \in \lambda$-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$，都存在一个 $f\colon$ 叶节点$(T) \to {}^{<\kappa}\kappa$，且满足 $B = \mathcal{I}^f_T(\emptyset)$；另见引理5.1。

3.2. 序。 对于空间 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$ 和基数 λ （通常为 $\lambda = \kappa$），我们可以讨论 X 上 λ-博雷尔层级的复杂度。衡量这一复杂度的一个好概念是空间的长度或序：

定义 3.2. 定义

$$\mathrm{ord}_\lambda(X) := \min\left\{\alpha : \lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \lambda\text{-}\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \lambda\text{-}\mathbf{Bor}(X)\right\}.$$

容易看出，$\mathrm{ord}_\lambda(X)$ 至多为 λ^+。若 $\mathrm{ord}_\lambda(X) < \lambda^+$，则称 λ-博雷尔层级 在 X上坍缩$_\lambda(X)$。关于 ord $\leq \alpha$ ( ]) +25的若干等价判据见 15]Ago，命题 3.。

从完美集性质可以推出 κ-博雷尔层级不坍缩的一个判据：利用一个标准论证，考察层级每一层都存在通用集，可以证明 $\mathrm{ord}_\kappa({}^{\kappa}\kappa) = \mathrm{ord}_\kappa({}^{\kappa}2) = \kappa^+$ ([Ago+25，推论 4.8])；事实上，任何一个 ${}^{\kappa}2$ 能通过 κ-博雷尔可测嵌入映入的空间X，都必须满足 $\mathrm{ord}_\kappa(X) = \kappa^+$ ([Ago+25，定理 4.9])。后一性质可视为 κ-完美集性质的弱变体。我们将关于 ord_λ 的一些简单观察总结为以下命题：

命题 3.3。 设 λ是一个基数且 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$。则

- $\mathrm{ord}_\lambda(X) = 1$ 等价于 X 是离散的。
- 如果 $|X| \leq \lambda$，那么 $\mathrm{ord}_\lambda(X) \leq 2$。
- 对于 $\lambda = \kappa$，如果 X 包含 ${}^{\kappa}2$的一个副本（如上所述），那么 $\mathrm{ord}_\kappa(X) = \kappa^+$。

证明。 $\mathrm{ord}_\lambda(X) = 1$ 这一事实意味着对于每个 $x \in X$，每个单元素集$\{x\}$ 都是开的，因此 X 是离散的。另一方面，如果 X 是离散的，那么 X 的每个子集都是开的。对于第二个断言，注意如果 $|X| \leq \lambda$，那么 X 的每个子集都是单元素集的 $\leq\lambda$-并，因此 λ-$\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$。

最后一个断言已在上文讨论。 □

尽管还有少数其他会直接影响 ord 值的折衷性拓扑条件，但它们极为罕见。对于 $\kappa = \omega$，实数直线上的 Sierpi´nski 子集总是满足 $\mathrm{ord}_\omega(X) = 2$，而卢津集满足 $\mathrm{ord}_\omega(X) = 3$ （见 [Szp30]）。在广义情形下，很容易定义 κ-卢津集 X：它是一个大小为 $>\kappa$ 的空间，其中不存在大小为 $>\kappa$ 的 κ-贫乏子空间；这里，κ-贫乏集的理想通过对无处稠密集施加 $\leq\kappa$-闭包生成。由广义Baire空间满足 κ-贝尔范畴定理，同样的证明表明，$\mathrm{ord}_\kappa(X) = 3$ 仍然成立。Sierpi´nski 集的问题则更加微妙，因为似乎没有明显的方法能将测度的概念推广到不可数情形；事实上，Agostini、Barrera 和 Dimonte 的一项近期成果 [ABD26] 已使这些设想无法继续。不过，人们仍可尝试构造一个 “ 人为的”理想 I，使其满足以下某些或全部

经典零测理想的理想性质[1]。即使只对零理想作很弱的相似性假设，任何这样的理想 $\mathcal{I}$ 都将满足如下事实：每个 κ-博雷尔集 B 都可以写成一个 $B = F \cup I$ κ-$\mathbf{\Sigma}^0_2$-集 F 与一个集合 $I \in \mathcal{I}$ 的并，这意味着对于由任何此类理想 $\kappa(X) = 2$ 所导出的 κ-Sierpi´nski 集，均有 $\mathcal{I}$。

除了引理3.3中的轻微限制外，$\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 的取值事实证明与 ZFC 有很大程度的独立性。本文继续开展 A. Miller 开创的工作 [Mil79] [Mil95]，并构造了若干模型，使得 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 对一个固定空间可取任意序数值$X \subseteq {}^\kappa\kappa$，也可同时对多个这样的空间取任意序数值；为此，我们将采用他建立的分秩强迫框架，并研究其 α-强迫概念的推广。

4. 秩强迫

沿用 Miller [Mil95 第 7], 章的做法，我们以分级强迫概念的形式介绍本文的主要辅助框架。

定义 4.1。设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念。若存在一个在序数上严格递增的函数 h_{rk}，满足以下性质，则称 $\mathbf{rk}: \mathbb{P} \to \mathtt{Ord} \cup \{\infty\}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的秩函数：

对于每个 $p \in \mathbb{P}$ 和序数 β，存在一个 $q \in \mathbb{P}$，使得 $q \parallel p$ 且 $\mathbf{rk}(q) < h_{\mathrm{rk}}(\beta)$，并且对于每个 $r \in \mathbb{P}$, $\mathbf{rk}(r) < \beta$，我们有

$$r \parallel q \implies r \parallel p.$$

如果上述性质对所有 $\beta < \beta^*$都成立，我们就称 $\mathbf{rk}$ 是序数 $<\beta^*$ 的秩函数。按照惯例，∞严格大于每个序数。

给定一个原子集合 A，我们考虑无穷命题语言 $\mathcal{L}_\infty(A)$ 中的公式。这些公式由原子集合出发，通过反复应用否定以及构造任意大的析取和合取得到。我们将假设集合 A 由 $\mathbb{P}$ 的强迫语言中的公式构成，或者至少假设陈述“$p \Vdash \phi$”对于 $\phi \in A$ 有自然的解释；因此，每个公式 $\varphi \in \mathcal{L}_\infty(A)$ 都可以视为 $\mathbb{P}$ 的强迫语言中的一个陈述。令 $\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}$ 为 $\mathcal{L}_\infty(A)$ 关于强迫等价关系的因子化，即

$$\varphi \sim_{\mathbb{P}} \psi \Leftrightarrow (\mathbb{P} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \psi)$$

并用 $[\varphi]$ 表示 φ 在 $\sim_{\mathbb{P}}$ 下的等价类。

通过设定，公式 $[\varphi] \in \mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}$ 可以划分为通常的层级

$$\Sigma_0(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}) = \{[\neg a] : a \in A\}, \Pi_0(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}) = \{[a] : a \in A\},$$

$$\Sigma_\alpha(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}) = \left\{ \left[\bigvee_{i \in I} \phi_i \right] : \{[\phi_i] : i \in I\} \subseteq \bigcup_{\alpha' < \alpha} \Pi_{\alpha'}(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}) \right\} \text{ and}$$

$$\Pi_\alpha(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}}) = \{[\neg\phi] : \phi \in \Sigma_\alpha(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}})\}.$$

若 f 是一个将序数映射到序数的函数，则归纳地定义 f 的幂为

$$f^0(x) = x, f^{\beta+1}(x) = f(f^\beta(x)) \text{ and } f^\lambda(x) = \sup_{\delta<\lambda} f^\delta(x).$$

定理 4.2 ([Mil95, 引理 7.5]). 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，β, β_0 为序数，且 $\mathbf{rk}$ 是定义在 $\mathbb{P}$ 上、取值为序数 $<h^\beta$ 的秩函数$\mathrm{rk}(\beta_0)$。假设对于所有 $p \in \mathbb{P}$ 和 $a \in A$，若 $p \Vdash a$，则存在一个 $q \parallel p$,$\mathbf{rk}(q) < \beta_0$，使得 $q \Vdash a$。

[1]Shelah 提出了这样一种“广义零理想” [She17]。

那么，对于所有 $p \in \mathbb{P}$ 和 $[\varphi] \in \Sigma_{1+\beta}(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}})$，若 $p \Vdash \varphi$，则存在一个 $q \parallel p$,$\mathbf{rk}(q) < h^{\beta}{}_{\mathrm{rk}}(\beta_0)$，满足 $q \Vdash \varphi$。

证明。由归纳法。对于 $\beta = 0$，我们有 $\mathbb{P} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i\in I} a_i$，其中 $a_i \in A$。因此，如果 $p \Vdash \varphi$，我们可以加强 p，从而找到一个 $p' \leq p$ 和一个 $i \in I$，使得 $p' \Vdash a_i$。根据假设，存在一个 $q \parallel p'$，满足 $\mathbf{rk}(q) < \beta_0$ 且 $q \Vdash a_i$，因此证明完成。

现在假设该命题对所有序数 $<\beta$都成立。如果 $[\varphi] \in \Sigma_{1+\beta}(\mathrm{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}})$，那么 $\mathbb{P} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i\in I} \neg\varphi_i$，其中 $[\varphi_i] \in \Sigma_{1+\beta_i}(\mathrm{L}_\infty(A)/_{\mathbb{P}})$ $\beta_i < \beta$。找到一个 $p' \leq p$ 和 $i \in I$，使得 $p' \Vdash \neg\varphi_i$。由于 rk 是一个秩函数，我们可以找到一个 $q \parallel p'$，使得 $\mathbf{rk}(q) < h^{\beta_i+1}\,\mathbf{rk}\,(\beta_0) \leq h^{\beta}\,\mathbf{rk}(\beta_0)$，并且对于所有满足 $\mathbf{rk}(r) < h^{\beta_i}\mathbf{rk}(\beta_0)$ 的 r，都有 $r \parallel q \Rightarrow r \parallel p$。我们断言 $q \Vdash \neg\varphi_i$。如果并非如此，我们就可以找到一个 $q' \leq q$，使得 $q' \Vdash \varphi_i$；根据归纳假设，存在一个 $r \parallel q'$，满足 $r \Vdash \varphi_i$ 且 $\mathbf{rk}(r) < h^{\beta_i}\mathbf{rk}(\beta_0)$。但现在 $r \parallel q$，这意味着 $r \parallel p'$，矛盾。□

通常 $\beta_0 = 1$。

5. α-强迫

我们介绍一种主要的强迫论工具，用于控制空间$X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$上的 κ-博雷尔层级。整个本节中，这个空间将保持固定。

我们先对每个 $\alpha < \kappa^+$ 归纳构造一棵良基树 $T_\alpha \subseteq {}^{<\omega}\kappa$。从现在起，这棵树$T_\alpha$ 将作为一个 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ 集的 κ-博雷尔编码的典范模板。

定义 5.1。对于 $\alpha < \kappa^+$ 定义

- $T_0 := \{\emptyset\}$,
- $T_{\alpha+1} := \{\emptyset\} \cup \{i \frown \eta : i < \kappa, \eta \in T_\alpha\}$ 且
- $T_\delta := \{\emptyset\} \cup \{i \frown \eta : i < \mathrm{cf}(\delta)\eta \in T_{c_\delta(i)+4}\}$ 当 δ 是一个极限序数且 $c_\delta : \mathrm{cf}(\delta) \to \delta$ 是任意但固定的共尾映射时。

注 5.2. 树 T_α 是以下意义上的通用树： α-级 κ-博雷尔层级（见引理 3.1）。其形式与后续论证相关；并非任意通用树都足以满足要求。要使引理 $+4$上述定义在极限情形中的整数取值是最优的5.8 成立。

在不可数情形下，会出现秩为共尾性小于 κ的极限序数的节点。这类节点需要特殊处理；定义5.4中的临界性约束旨在避免条件中过度确定的潜在问题。

为方便表述，我们引入一些行话。

定义 5.3。如果序数 α 是共尾性 $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa$的极限序数，则称其为小极限（序数）。如果节点 $\eta \in T_\alpha$ 在 T_α 中的秩是小极限序数，则称其为小极限节点。

定义 5.4。对于 A, B中互不相交的子集 X和 $1 < \alpha < \kappa^+$，将 $\mathbb{BM}_\alpha(A, B, X)$定义为由所有满足以下条件的有序对 $p = \langle f_p, R_p\rangle$ 构成的偏序集：

a) $f_p : \mathrm{leaf}(T_\alpha) \to {}^{<\kappa}\kappa$是一个偏函数，且满足 $|f_p| < \kappa$。 b) $R_p \subseteq$ 非叶节点$(T_\alpha) \times X$, $|R_p| < \kappa$。 c) 如果 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$且$\langle\eta, x\rangle \in R_p$，那么

- $\nu \in$ 非叶节点(T_α)意味着$\langle\nu, x\rangle \notin R_p$。
- $\nu \in$ 叶节点$(T_\alpha) \cap \mathrm{dom}(f_p)$ 意味着 $x \notin [f_p(\nu)]$。

我们还有两个涉及参数 A, B 的约束。

d) $\{x : \langle\emptyset, x\rangle \in R_p\} \cap B = \emptyset$.

e) $\{x:\ \exists \eta \in \mathrm{succ}^{T_\alpha}(\emptyset) : \langle \eta, x\rangle \in R_p\} \cap A = \emptyset$.

在继续之前，我们先定义一个额外的概念。如果满足以下三个条件，则称节点 $\eta \in T_\alpha$ 是 x-临界的（在 p 中）。

- η 是一个小极限节点，
- $\langle \mathrm{pred}(\eta)\ x\rangle \in R_p$ 或（$\mathrm{pred}(\eta) = \emptyset \wedge x \in A$）或（$\eta = \emptyset \wedge x \in B$）
- 存在一个 $\eta' \in \mathrm{succ}^2(\eta)$，使得 $\langle \eta' x\rangle \in R_p$。

如果 η 对某个 $x \in X$ 是 x-临界的，我们就简单地称其为临界的。现在我们已经准备好表述条件定义中的最后一个约束，即所谓的临界性约束：

f) 若 η 在 p 中是 x-临界的，则存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得对于每个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，都有 $\langle \nu',\ x\rangle \notin R_p$。当且仅当 $f_p \subseteq f_q$ 且 $R_p \subseteq R_q$ 时，序由 $q \leq p$ 给出。偏序的最大元 $\mathbb{1}$ 由有序对 $\langle \emptyset,\ \emptyset\rangle$ 给出。

我们还定义这个偏序集的严格版本。

定义 5.5。严格 α-强迫是偏序 $\mathbb{BM}'_\alpha(A,\ B,\ X)$，包含所有满足上述性质以及以下严格临界性约束的条件 $p = \langle f_p,\ R_p:$

f') 若 η 在 p 中是 x-临界的，则存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得 $\langle \nu,\ x\rangle \in R_p$。

若按与 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$ 相同的关系排序，则集合 $\mathbb{BM}'_\alpha(A,\ B,\ X)$ 构成一个强迫序。由于每个条件 $p \in \mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$ 显然都可以加强为严格条件 $p' \leq p$，因此强迫 $\mathbb{BM}'_\alpha(A,\ B,\ X)$ 是 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$ 的稠密子强迫，所以从强迫论视角来看，两者几乎可以互换。尽管 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$ 最终会被证明仅仅是战略性$<\kappa$-闭的，但出于技术原因，我们不得不使用它，而不是由严格条件构成的 $<\kappa$-闭序。

注记 5.6。对于 $\kappa = \omega$，我们的定义与 [Mil79]中的定义相同。不存在小极限节点，因此条件与严格条件的概念一致。对于不可数的 κ 和$\alpha < \omega$，情况也一样；此时，该定义扩展了 [Ago+25]中给出的定义。

定义 5.7。若 G 是 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$-泛型，则定义 $f_G = \bigcup\{f_p:\ p \in G\}$ 以及 $R_G = \bigcup\{R_p:\ p \in G\}$。

通过稠密性论证，f_G 是一个全函数 $f_G : \mathrm{leaf}(T_\alpha) \to {}^{<\kappa}\kappa$，因此我们能够将每个 $\eta \in T_\alpha$ 解释为 X的一个 κ-博雷尔子集 $G_\eta = \mathbf{I}^{f_G}_{T_\alpha}(\eta)$。有序对 $\eta, x \in R_p$ 应理解为如下承诺：x 将成为 G_η的一个元素。我们对条件施加的约束旨在确保关系 R_p的语义一致性。关键的引理 5.9 直接推出定理 5.11，揭示了句法关系 R_G 与语义解释函数 $\eta \to G_\eta$之间的关系。κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ 集 $G_\emptyset$ 是我们关注的泛型滤子中唯一相关的部分。

在继续之前，先指出一个简单但重要的观察。

注 5.8. x-临界性是 η 的一种局部性质，只与 η的直接邻域有关，即 $\{\mathrm{pred}(\eta)\} \cup \{\eta\} \cup \mathrm{succ}(\eta) \cup \mathrm{succ}^2(\eta)$。定义 T_λ 在极限序数λ上的取值时，选择 $c_\lambda(i) + 4$ 是为了确保不同的小极限节点彼此相距足够远，从而其邻域不会发生非平凡重叠。事实上，对于两个小极限节点 $\eta_1 \neq \eta_2$，这十一个集合

$$\{\mathrm{pred}(\eta_i)\}, \{\eta_i\}, \mathrm{succ}(\eta_i), \mathrm{succ}^2(\eta_i), \mathrm{succ}^3(\eta_i), \mathrm{leaf}(T_\alpha)$$

对于 $i = 1,2$，它们两两不相交，唯一的例外是 $\mathrm{pred}(\eta_1) = \mathrm{pred}(\eta_2)$ 可能成立（其后继为小极限节点的任何节点，都有 κ个小极限节点作为后继）。我们

在证明中，我们将经常隐含地利用这一事实，以确保情形划分是穷尽的；例如，默认为小极限节点的后继不可能同时是另一个小极限节点的前驱。

引理 5.9。设 $x \in X$ 和 $\eta \in$ 是 T_α 的非叶节点。那么集合

$$D_{\eta,x} = \begin{cases} \{p \in \mathbb{BM}_\alpha(A,B,X) : \langle \eta, x\rangle \in R_p \vee \exists \nu \in \mathrm{succ}(\eta) : \nu \in \mathrm{dom}(f_p) \wedge x \in [f_p(\nu)]\} & \mathrm{rk}(\eta) = 1, \\ \{p \in \mathbb{BM}_\alpha(A,B,X) : \langle \eta, x\rangle \in R_p \vee \exists \nu \in \mathrm{succ}(\eta) : \langle \nu, x\rangle \in R_p\} & \mathrm{rk}(\eta) > 1 \end{cases}$$

在 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$ 中是开稠密的。

证明。显然，集合 $D_{\eta,\ x}$ 是开集（即向下封闭）。

为证明稠密性，设给定一个条件 $p \in \mathbb{BM}_\alpha(A,B,X)$。我们要找到一个加强$p' \leq p$，使得 $p' \in D_{\eta,x}$。若 $p \in D_{\eta,x}$，则结论成立；因此不妨设 $p \notin D_{\eta,x}$，这尤其蕴含$\langle \eta, x\rangle \notin R_p$。此外，不失一般性地假设 $p \in \mathbb{BM}'_\alpha(A,B,X)$ 是一个严格条件。需要区分几种情况。

- 若 $\eta = \emptyset$ 且 $x \in A$，则令 $p\prime = \langle f_p, R_p \cup \langle \emptyset, x\rangle\rangle$。
- 若 η 是一个小极限节点，且在 p 中不是 x-临界的，则有三种情况：– $\eta = \emptyset$ 且 $x \in B$: 这意味着对每个 $\eta' \in \mathrm{succ}^2(\eta)$，都有 $\eta' x \notin R_p$，因此我们可以任取一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，并令 $p' = f_p, R_p \cup \nu, x$。– $\eta \in \mathrm{succ}(\emptyset)$ 且 $x \in A$: 根据同样的论证，我们可以任取一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，并令$p' = f_p, R_p \cup \nu, x$。– 否则，可以令 $p' = f_p, R_p \cup \eta, x$，因为我们也假设 $p \notin D_{\eta,x}$。
- 若 η 是 p中的 x-临界小极限节点，则严格临界性约束确保$p \in D_{\eta,x}$。
- 假设 η 既不是小极限节点，也不是小极限节点的后继。由于 κ是正则的，$|f_p| < \kappa$，且 $|R_p| < \kappa$，而 η 有 κ个后继节点，我们可以找到一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得 ν 以及 ν 之上的任何节点都不出现在 f_p 或 R_p中。此外，找到一个 $s \in {}^{<\kappa}\kappa$，使得 $x \in [s]$ 且 $[s] \cap \{y \mid \langle \eta, y\rangle \in R_p\} = \emptyset$。但这意味着

$$p' = \begin{cases} \langle f_p \cup \langle \nu, s\rangle, R_p\rangle & \mathrm{rk}(\eta) = 1, \\ \langle f_p, R_p \cup \langle \nu, x\rangle\rangle & \mathrm{rk}(\nu) > 1. \end{cases}$$

  即为所求。
- 在最后一种情形中，我们假设 η 是小极限节点$\hat{}\eta$的后继。我们额外做一步预备，并假设 $p \in D_{\hat{\eta},x}$，因为我们已经证明 $D_{\hat{\eta},x}$ 是稠密的。我们如前进行，并找到一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得 ν 以及ν之上的任何节点都不出现在 f_p或 R_p中，最后令[2] $p' = f_p, R_p \cup \nu, x$。在此情形下，我们必须注意这样一种可能性：$\hat{}\eta$ 在 p 中并非 x-临界，但在 p'中却是 x-临界的（因为$\nu \in \mathrm{succ}^2(\eta)$）。然而这并非问题，因为我们已注意确保$p \in D_{\hat{\eta},x}$，从而临界性约束得到满足。□

注释 5.10. 为使引理 5.9 成立，必须防止某种被禁止的构型出现在条件 $p = f_p, R_p$ 中，具体如下：对某个小极限节点 $\eta \in T_\alpha$，我们有 $\mathrm{pred}(\eta)$ $x \in R_p$，并且对每个 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta')$，使得 $\nu, x \in R_p$。显然，若这样的构型出现在 p中，则在$D_{\eta,x}$内部不可能存在 p 的加强，因此该集合不是稠密的。进而，引理 5.11 也必然不成立。临界性

[2]在这种情况下，我们可以确定 $\mathrm{rk}(\nu) > 1$。

$\mathbb{BM}_\alpha(A,B,X)$ 中的条件是专门设计的，以便在强迫中避免这种构型，同时又不损害 $<\kappa$-闭包。

现在我们能够证明引理 5.11 和引理 5.12，方法与 [Mil95] 中证明 $\kappa=\omega$ 以及 [Ago+25] 中证明 $\alpha<\omega$的方法相同。我们在此重述后一篇著作中的证明。

定理 5.11. 设 G 是 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ B,\ X)$-泛型。那么对于每个 $\eta\in$非叶节点(T_α) 和 $x\in X$，都有 $x\in G_\eta\Leftrightarrow\langle\eta,\ x\rangle\in R_G$。

证明。 该定理直接由引理 5.9 推出。注意，根据定义，关于叶节点 $\eta\in$叶节点(T_α)也有类似的结论，即

$$x\in G_\eta\Leftrightarrow x\in[f_G(\eta)].$$

我们先考虑特殊情形 $\mathrm{rk}(\eta)=1$； η 的所有后继节点都是 T_α中的叶节点。如果 $x\in G_\eta$，那么根据解释函数 $x\notin G_\nu=[f_G(\nu)]$ 的语义，对于每个 $\nu\in\mathrm{succ}(\eta)$ 都成立。由于$D_{\eta,\ x}$ 由引理 5.9 可知是稠密的，因此 G 必与 $D_{\eta,\ x}$相交，从而可得 $\langle\eta,\ x\rangle\in R_G$。

另一方面，若 $\langle\eta,x\rangle\in R_G$，则对每个 $p\in G$ 和 $\nu\in\mathrm{succ}(\eta)\cap\mathrm{dom}(f_p)$，都有$x\notin[f_p(\nu)],$，因此 $x\in G_\eta=\bigcap_{\nu\in\mathrm{succ}(\eta)}X\setminus[f_G(\nu)]$。

现在设 $\eta\in T_\alpha$ 是一个秩大于 1 的节点，且引理的结论对 η的所有后继节点都成立。由于集合 $D_{\eta,x}$ 由引理 5.9可知是稠密的，因此有

$$\langle\eta,x\rangle\in R_G\Leftrightarrow\forall\nu\in\mathrm{succ}(\eta):\langle\nu,x\rangle\notin R_G.$$

但利用归纳假设，这意味着

$$\langle\eta,x\rangle\in R_G\Leftrightarrow(\forall\nu\in\mathrm{succ}(\eta):\langle\nu,x\rangle\notin R_G)\Leftrightarrow(\forall\nu\in\mathrm{succ}(\eta):x\notin G_\nu)\Leftrightarrow x\in G_\eta.\qquad\square$$

推论 5.12。 设 G 是 $\mathbb{BM}_\alpha(A,B,X)$-泛型。则 $A\subseteq G_\emptyset\subseteq X\setminus B$。

证明。 引理 A 5.4 中关于 的约束告诉我们，$\{x:\exists\eta\in\mathrm{succ}_{T_\alpha}(\emptyset):\langle\eta,x\rangle\in R_p\}\cap A$ 对所有 $p\in G$都为空；根据定理 5.11 ，这立即意味着对所有 $G_\eta\cap A=\emptyset$ 都有 $\eta\in\mathrm{succ}(\emptyset)$。但这意味着 $V[G]\models A\subseteq G_\emptyset$。事实 $V[G]\models G_\emptyset\cap B=\emptyset$ 也可类似证明。$\square$

换言之，使用 $\mathbb{BM}_\alpha(A,X\setminus A,X)$ 进行强迫，会为 A 添加一个 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$-编码。实际上，我们只会关注两类 α-强迫：第一类是 $\mathbb{BM}_\alpha(A,X\setminus A,X)$，另一类则是强迫 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$，它对泛型集 $G_\emptyset$ 没有任何限制。虽然在这种情况下无法应用引理 5.12，但我们希望这种强迫所添加的 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$-集 $G_\emptyset$ 足够“泛型”，从而成为 X的子集。

注记 5.13。 我们将偏序 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$ 看作是向“上”推进，因为它会添加一个处于层级第 α层的新博雷尔集；在某些条件下，这可以为 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 提供一个下界。反过来，强迫 $\mathbb{BM}_\alpha(A,X\setminus A,X)$ 则向“下”推进，因为它可用于在 X上的博雷尔层级第 α层为 A 添加一个编码，进而为 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 提供一个上界。为了将 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 固定为一个具体值 α，可以通过迭代这些强迫，同时向“上”和向“下”推进。

注5.14。 α-强迫的偏序可与另一种广为人知的编码强迫进行比较，即 Solovay 提出的几乎不交强迫（参见 [JS70], ，另见 [L¨uc12] ，其中给出了对κ的一般化）。他的强迫添加一个实数 r_A ，使其与基模型中的集合 $A\subseteq X\subseteq{}^\kappa\kappa$几乎不交，因此以 A方式编码集合 κ-$\mathbf{\Pi}^0_2(X)$。强迫 $\mathbb{BM}_2(A,X\setminus X,X)$ 在结构上非常相似。若加入附加条件

g) 将 T_α 中所有秩为 1 的节点枚举为 $\langle \eta_i : i < \kappa\rangle$。然后我们要求，对于所有 $i, j, k < \kappa$， $f_p(\eta_{i+j} \frown k) = f_p(\eta_i \frown (k + j))$。
已添加至引理5.4。感谢 Lyubomyr Zdomskyy 指出这一点。

备注 5.15。可以将 α-强迫理解为并排添加 κ多个 κ-科恩实数，其中第i个 κ-科恩实数 c_i：$\kappa \to {}^{<\kappa}\kappa$由 $\nu \frown i$的取值给出，其中 ν 遍历 T_α中所有秩为 1 的节点。不同于 $<\kappa$-支集的 κ-科恩强迫乘积， α-强迫允许通过关系 R同时对全部 κ多个泛型实数施加非平凡约束； α 的取值编码在 T_α 的树结构中。注意，不同于 α-强迫， κ-科恩扩张无法改变基模型空间 [Ago+25的 ord_κ ，引理 6.14]。

5.1. **正则性与可迭代性**。本节验证 α-强迫及其迭代下的基数保持。

下面我们汇总一些强迫的标准且广泛使用的性质。

定义 5.16。 对于正则基数 λ，强迫概念 $\mathbb{P}$是

- $<\lambda$-闭合的，如果 $\mathbb{P}$ 中每个长度为 $\delta < \lambda$ 的递减序列 $\langle p_i : i < \delta\rangle$ 都有一个下界$p_\delta \le p_i$。
- 策略性地 $<\lambda$-闭合的，如果玩家 I 在闭合博弈 $\Im(\mathbb{P}, <\lambda)$ 中有获胜策略，该博弈按如下方式进行：– 玩家 I 通过选择条件 $p_0^I = \mathbb{1}_\mathbb{P} \in \mathbb{P}$开始博弈。– 在每一轮 $i < \lambda$ 中，玩家 I 首先选择一个条件 p_i^I，该条件具有如下性质：$p_i^I \le p_j^{II}$对每个 $j < i$ 均成立。然后玩家 II 选择一个 $p_i^{II} \le p_i^I$ 作为回应。– 当且仅当存在某个 $i < \lambda$，使得玩家 I 无法选择合适的 p_i^I 时，玩家 II 才赢得这一局。
- λ-可数链条件。如果 $\mathbb{P}$ 中的每个反链大小都是 $<\lambda$。
- λ-相连，如果 $\mathbb{P} = \bigcup_{i<\lambda} \mathbb{P}_i$，其中对于每个 $i < \lambda$ 和 $p, q \in \mathbb{P}_i$，都有 $p \parallel q$。

事实 5.17。 集合 $P \subseteq \mathbb{BM}_\alpha(A, B, X)$ 有公共下界（即存在一个条件 r，使得对所有 $p \in P$ 都有 $r \le p$）当且仅当 $\bigcup P = \langle \bigcup_{p\in P} f_p, \bigcup_{p\in P} R_p\rangle$ 是一个条件。在这种情况下， $\bigcup P$ 是 P 的最大下界。

引理 5.18。 由严格条件构成的集合 $\mathbb{BM}'_\alpha(A, B, X)$ 是 $<\kappa$-闭的。

证明。 设 $\langle p_i : i < \delta\rangle$ 是 $\delta < \kappa$ 中严格条件的递减序列。我们证明 $p = \bigcup_{i<\delta} p_i$ 是一个严格条件。由于序列中的任意两个条件都相容，只需检验严格临界性约束。为此，设 η 在 p 中是 x-临界的，并设 $j < \delta$ 是使得 η 在 p_j 中为 x-临界的最小序数。由于 p_j 是一个严格条件，存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得 $\langle \nu, x\rangle \in R_{p_j} \subseteq R_p$。 □

事实 5.19. $\mathbb{BM}_\alpha(A, B, X)$ 是策略性 $<\kappa$-闭的。

证明。 *</style>*很容易看出，这也是民间常识：对于任何拥有一个稠密子强迫且该子强迫是 -闭的强迫，这一结论都成立；在 $(, <\kappa)$ 中，玩家 I 的获胜策略 $\mathbb{Q}$就是始终选择一个条件。□

我们还注意到， α-强迫是 κ-可链接的；容易看出， κ-可链接性蕴含 κ^+-链条件。

引理 5.20. $\mathbb{BM}_\alpha(A, B, X)$ 是 κ-可链接的。

证明。 该证明与 [Ago+25，引理 7 相同。7]在证明中， T_α^0指 $\mathrm{leaf}(T_\alpha)$，而 $T_\alpha^{>0}$指 $\mathrm{nonleaf}(T_\alpha)$，依次如此。□

事实 5.21。 由 $<\kappa$ 支集的（策略性） $<\kappa$-闭强迫组成的迭代是（策略性） $<\kappa$-闭的。

我们也希望确保该强迫的迭代不会坍缩基数。尽管有限支撑迭代中可数链条件的保持总是成立，但在广义情形中，类似的陈述却不能作同样的断言——例如参见 [Ros18]。

我们引入手头偏序集所满足的 κ-链接性的一种温和的特设加强，它足以在策略性 $<\kappa$-闭强迫的迭代中保持 κ^+-链条件。类似性质可见于 [Kun13，引理V.5.14] 或 [Bre+16，引理 55]。引理 5.23是将此类论证改编到策略性 $<\kappa$-闭情形。我们留给感兴趣的读者去验证：在 κ-链接性下，来自 [Kun13，引理V.5.14] 的 $<\kappa$-闭 + 良好相遇与来自 [Bre+16，引理 55] 的 $<\kappa$-闭 + 典范下界这两者的组合都蕴含(♡)。

定义 5.22。强迫概念 $\mathbb{P}$ 满足（♡），如果

$$\mathbb{P}=\bigcup_{i<\kappa}\mathbb{P}_i$$

是 κ-相连的，并且玩家 I 在闭合博弈 $\Game(\mathbb{P},\ {<}\omega)$ 中存在一个策略 σ，具有以下性质：每当 $\langle p^I_n,\ p^{II}_n\colon\ n<\omega\rangle$ 和 $\langle q^I_n,\ q^{II}_n\colon\ n<\omega\rangle$ 是闭合博弈的两局，且玩家 I 均按照 σ 行动，并且存在 $\langle i_n:\ n<\omega\rangle$，使得对每个 $n<\omega$ 都有 $\{p^I_n,\ q^I_n\}\subseteq\mathbb{P}_{i_n}$，那么存在一个条件 $r\in\mathbb{P}$，使得对每个 $n<\omega$ 都有 $r\le p^{II}_n,\ q^{II}_n$。

命题 5.23。设 $\langle\mathbb{P}_\gamma,\ \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma\colon\ \gamma<\gamma^*\rangle$ 是一个 $<\kappa$-支集迭代，由满足 (♡) 的策略性 $<\kappa$-闭强迫概念组成。那么其极限 $\mathbb{P}_{\gamma^*}$ 满足 κ^+-链条件。

证明。 由于每个 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$ 都被强迫为 κ-有链的，我们可以选取名称 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma,i}$，使得

$$\mathbb{P}_\gamma\Vdash\bigcup_{i<\kappa}\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma.i}\text{ is a }\kappa\text{-linked partition of }\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma.$$

同样，令 $\underset{\sim}{\sigma}^\heartsuit_\gamma$ 为由 $\Game(\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma,{<}\omega)$ 中的 (♡) 给出的策略的一个名称。

利用这些强迫的策略性 $<\kappa$-闭性，对任意 $p\in\mathbb{P}_{\gamma^*}$，我们可以找到一个 $p^*\le p$ 和一个序列$\langle i(p,\gamma):\ \gamma\in\operatorname{supp}(p)\rangle$，使得对每个 $\gamma\in\operatorname{supp}(p)$,

$$p^*\Vdash p(\gamma)\in\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma,i(p,\gamma)}.$$

因此，对于任意 $p=p^{II}_0$，我们都可以为其指定 $\Game(\mathbb{P}_{\gamma^*},{<}\omega)$ 的一段运行 $\vec{p}=\langle p^I_n,p^{II}_n\colon\ n<\omega\rangle$，使得

- $p^I_0=\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\gamma^*}}$ 和 $p^{II}_0=p$。
- 对于每个 $0<n<\omega$，$p^{II}_n=\overset{*}{(p^I_n)}$。
- 对于每个 $0<n<\omega$ 和 $\gamma<\gamma^*$，$p^I_n(\gamma)=\mathbb{1}_{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma}$ 当 $\gamma\notin\operatorname{supp}(p^{II}_{n-1})$时；否则，$p^I_n(\gamma)$要根据 $\underset{\sim}{\sigma}^\heartsuit_\gamma$，利用 $\Game(\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma,\ {<}\omega)$ 的部分对局 $\langle p^I_j(\gamma)\ p^{II}_j(\gamma):\ j<n\rangle$ 构造。由于根据归纳法，$p^I_n{\restriction}\gamma\le p^I_j{\restriction}\gamma$，$p^{II}_j{\restriction}\gamma$对于 $j<n$成立，因此我们有 $p^I_n{\restriction}\gamma\Vdash p^I_n(\gamma)\in\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$。

我们也将 $\bigcup_{n<\omega}\operatorname{supp}(p^{II}_n)$记作 $\Sigma(\vec{p})$；注意 $|\Sigma(\vec{p})|<\kappa$。此外，我们用 $\vec{p}(\gamma)$表示$\langle p^I_n(\gamma)\ p^{II}_n(\gamma):\ n<\omega\rangle$。最后，将 $i(\vec{p},\ \gamma,\ n)$ 对于 $\gamma\in\Sigma(\vec{p})$ 所对应的 $i(p^I_n,\ \gamma)$ 记作通过.....找到的

$$p^{II}_n=\overset{*}{(p^I_n)}.$$

现在我们可以固定一个大小为 $|A|=\kappa^+$ 的集合 $A\subseteq\mathbb{P}_{\gamma^*}$。根据广义 Δ-系统引理（参见 [Jec03，定理 9.19]），我们可以假设，对于 $p\in A$，集合 $\Sigma(\vec{p})$ 构成一个以 S 为根的 Δ-系统，即 $\vec{p}\cap\Sigma\,\vec{q}$，对于 $p\neq q$。现在考虑族 $i(\vec{p},\gamma,n):\ \gamma\in S,n<\omega$，其中 $p\in A$；这样的族只有

至多 $\kappa^{<\kappa}=\kappa$ 个，因此我们可以从 A 中固定 $p\neq q$，使得对于所有 $\gamma\in S$、$n<\omega$，$i(\vec{p},\ \gamma,\ n)=i(\vec{q},\ \gamma,\ n)$。

为证明 明 A 不是反链，接下来我们将通过归纳法构造一个条件 r，使得 at

$$r\restriction\gamma\Vdash\forall n<\omega: r(\gamma)\leq p_n^I,q_n^I,$$

因此，特别有 $r\leq p,\ q$。假设 $r\restriction\gamma$已按要求构造完成。如果 $\gamma\notin\Sigma(\vec{p})\cup\Sigma(\vec{q})$，只需令 $r(\gamma)=\mathbb{1}_{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma}$。如果 $\gamma\in S$，注意到

$$r\restriction\gamma\Vdash\vec{p}(\gamma)\text{ and }\vec{q}(\gamma)\text{ are runs of }\Game(\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma,{<}\omega)\text{ played according to }\underset{\sim}{\sigma}_\gamma^\heartsuit.$$

此外，对于每个 $n<\omega$，$r\restriction\gamma\leq p_n^{II}\restriction\gamma$和 $p_n^{II}\restriction\gamma\Vdash p_n^I(\gamma)\in\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma,\ i(\vec{p},\gamma,n)}=\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma,\ i(\vec{q},\ \gamma,\ n)}$，对 q也同样如此。因此，$r\restriction\gamma$ 强迫我们可以应用（♡）来找到 $r(\gamma)$。

如果 $\gamma\in\Sigma(\vec{p})\setminus\Sigma(\vec{q})$（反之亦然），证明类似但更简单；我们改为将（♡）应用于$\vec{p}(\gamma)$和 $\vec{p}(\gamma)$。□

引理 5.24. 强迫 $\mathbb{BM}_\alpha(A,B,X)$ 满足 (♡)。

证明。 我们知道该强迫是 κ-链式的，因此只需描述策略 σ：设$\langle p_n^I,p_n^{II}:\ j<n\rangle$ 是 $\Game(\mathbb{BM}_\alpha(A,B,X)\ {<}\omega)$ 的一个部分对局。记作 $q:=p_{n-1}^{II}$。接着我们构造$r:=p_n^I\leq q=p_{n-1}^{II}$，使得

(1) $r\in\mathbb{BM}'_\alpha(A,B,X)$ 是严格偏序中的一个条件

(2) 每当 $\eta\in T_\alpha$ 是一个小极限节点，且存在一个 $x\in X$, $\nu\in\mathrm{succ}^2(\eta)$，使得$\langle\nu,x\rangle\in R_q$，而对于所有 $\eta'\in\mathrm{succ}(\eta)$ 都有 $\langle\eta',x\rangle\notin R_q$，那么要么 $\langle\eta,x\rangle\in R_r$，要么 $\langle\mathrm{pred}(\eta)\ x\rangle\in R_r$.[3]

为了看出 σ 见证 (♡)，令 $\langle p_n^I,p_n^{II}:\ n<\omega\rangle$ 与 $\langle q_n^I,q_n^{II}:\ n<\omega\rangle$ 为闭合博弈的两次运行，如 (♡) 的定义中所述。令 $t:=\langle f_t,R_t\rangle$，其中

$$f_t:=\bigcup_{n<\omega}f_{p_n^I}\cup f_{q_n^I},R_t:=\bigcup_{n<\omega}R_{p_n^I}\cup R_{q_n^I}.$$

若我们证明 $t\in\mathbb{BM}(A,B,X)$ 是一个条件，则证明完成。除临界性约束外，其余各项的检验都是常规的，留给读者；我们仅指出，这些约束中任何一项的违反都会向下反映，从而对某个 $n<\omega$ 蕴含 $p_n^I\perp q_n^I$。为验证临界性约束，假设 η 在 t 中是 x-临界的，并令 $n<\omega$ 为第一个指标，使得任一 $\nu\in\mathrm{succ}^2(\eta)$ 以 $\nu,x\in R_{p_n^I}\cup R_{q_n^I}$ 的形式出现；不失一般性，它出现在 $R_{p_n^I}$ 中。若存在某个 $\eta'\in\mathrm{succ}(\eta)$ 满足 $\eta',x\in R_{p_n^I}$，则临界性约束的这一实例在 t 中成立。否则，我们已确保 $\eta,x\in R_{p_n^I}$或 $\mathrm{pred}(\eta)\ x\in R_{p_n^I}$。若 $\mathrm{pred}(\eta)\ x\in R_{p_n^I}$，则在 p_n^I 中应用（严格）临界性。最后，若 $\eta,x\in R_{p_n^I}\subseteq R_t$，则 η 一开始实际上并非 x-临界的。□

推论 5.25。 </style}所有 $<\kappa$支集的 α强迫迭代在策略意义下都是 $<\kappa$-闭的，并满足 κ^+-链条件，因此不会坍缩基数。

虽然我们使用策略意义下 $<\kappa$-闭的 α-强迫表示，但根据引理 5.18，它与一个 $<\kappa$-闭偏序强迫等价。迭代中也同样如此。

事实 5.26 （民间常识。 假设$\langle\mathbb{P}_\gamma,\ \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma:\ \gamma<\gamma^*\rangle$是一个 $<\kappa$-支集强迫迭代，其中对于每个 $\gamma<\gamma^*$，$\mathbb{P}_\gamma\Vdash$“$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$是策略性 $<\kappa$-闭的”。进一步假设，$\underset{\sim}{\mathbb{Q}}'_\gamma$是一个 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，表示某个强迫，使得

$$\mathbb{P}_\gamma\Vdash\underset{\sim}{\mathbb{Q}}'_\gamma\text{ is a strategically }{<}\kappa\text{-closed dense subforcing of }\underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma.$$

[3]留给读者验证，即使在情形 $\eta\in\{\emptyset\}\cup\mathrm{succ}(\emptyset)$ 和 $x\in A\cup B$ 中，也能满足这一条件，因为 r 是一个严格条件。

那么 l imit $\mathbb{P}'_{\gamma^*}$ 的 $<\kappa$<style id='7'}-支集迭代[4] $\langle \mathbb{P}'_\gamma,\ \underset{\sim}{\mathbb{Q}}'_\gamma :\ \gamma < \gamma^* \rangle$ 是 $\mathbb{P}_{\gamma^*}$ 的一个稠密子强迫 .

推论 5.27。 每个 $<\kappa$-支集的 α-强迫迭代都与一个由 $<\kappa$-闭偏序集组成的迭代强迫等价，即由 α-强迫的相应严格版本组成的迭代。

5.2. **保持泛型 Π-集**。 我们构造满足各种 ord_κ 组合的模型的策略，是采用 α-强迫的迭代。在该迭代中，通过加入足够多形如$\mathbb{BM}_\alpha(A,\ X\setminus A,\ X)$的迭代因子，可以直接建立 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 的上界，从而为 X的子集添加 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ 编码。建立 $\mathrm{ord}_\kappa(X) \geq \alpha$的下界要困难得多；我们的策略是先用 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\ \emptyset)$进行强迫，以向 X中添加一个泛型 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ 子集，然后利用秩强迫的工具来保证该集合在整个迭代过程中不会降低其复杂度。

首先，我们来证明，单个 α-强迫是一个分秩强迫概念。这是一个更一般证明的特例；该证明将在第 6 节中展开。此处引入的具体秩函数所具有的内在重要性，也体现在定理 5.30 中。其次，这也能让我们初步了解下一节中更复杂证明所围绕的核心论证，同时暂且不必处理迭代所需的技术细节。

定义 5.28。 对于 $1 < \alpha < \kappa^+$, $H \subseteq X$和 $p \in \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$，定义

$$\mathrm{rk}_H(p) := \sup\{\mathrm{rk}_{T_\alpha}(\eta) : \exists x \in X\setminus H : \langle \eta, x\rangle \in R_p\}.$$

我们将证明，rk_H是 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$ 上的一个秩函数，且满足 $h_{\mathrm{rk}_H}(\beta) = \beta+1$。具体而言，这意味着：对于每个 $p \in \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$ 和序数 β，都存在一个$q \in \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$，使得 $q \parallel p$ 且 $\mathrm{rk}(q) \leq \beta$，并且对于每个满足 $\mathrm{rk}(r) < \beta$ 的 $r \in \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$，我们有

$$r \parallel q \Rightarrow r \parallel p.$$

注意，由于 $\mathrm{rk}_H(p) \leq \alpha$，只需验证序数 $\beta \leq \alpha$ 的情形。

定理 5.29。 对于每个 $1 < \alpha < \kappa^+$ 和 $H \subseteq X$ ，函数 rk_H 是$\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\ \emptyset,\ X)$ 上的秩函数，且 $h_{\mathrm{rk}_H}(\beta) = \beta+1$。

证明。设给定 $p \in \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset,\emptyset,X)$ 和 $\beta \leq \alpha$；我们要定义一个如上所述的合适 q。首先，我们加强 p ，使其满足以下条件：对每个有序对 $\eta, x \in R_p$ ，若 $\mathrm{rk}(\eta) = \lambda > \beta$ 是一个极限序数，且 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，其中 $\mathrm{rk}(\nu) < \beta$ ，则存在一个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得 $\nu', x \in R_p$。这是可行的，因为根据 T_α 的构造，这样的 η、 x 和 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$ 有 $<\kappa$ 个。此外，每个这样的 ν 在 T_α中自身都有 κ 个后继节点，因为它不是小极限节点，所以选取一个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得 ν' 以上没有节点出现在 R_p 中。最后，将 ν', x 加入 R_p 不会使任何节点变成 x-临界；另见注 5.8。

现在我们定义 $q = \langle f_q,\ R_q\rangle$ ，其中 $f_q := f_p$ 且

$$R_q := \{\langle \eta, x\rangle \in R_p : x \in H \vee \mathrm{rk}_{T_\alpha}(\eta) \leq \beta\}.$$

我们断言 q 符合要求。首先，显然 $q \in \mathbb{BM}(\emptyset,\ \emptyset,\ X)$ 是一个条件；此外，根据定义有 $q \geq p$ ，且 $\mathrm{rk}(q) \leq \beta$ 。

现在假设 $r \in \mathbb{BM}(\emptyset,\ \emptyset,\ X)$ 且 $\mathrm{rk}(r) < \beta$与 q 相容。为导出矛盾，我们还假设它与 p 不相容。这意味着 $p \cup r$ 不是一个条件，这可能由多种原因造成。我们将逐一排除这些可能性。

[4]注意，此迭代定义良好，因为根据归纳法，$\mathbb{P}'_\gamma$ 是 $\mathbb{P}_\gamma$ 的一个稠密子强迫，因此存在一个与 $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}'$等价的$\mathbb{P}'_\gamma$-名称。

• $f_p \cup f_r$ 不是一个函数。这是不可能的，因为 $f_p = f_q$。
• 存在一个 $\eta \in T_\alpha$、$\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，以及一个 $x \in X$，使得 $\langle \eta, x\rangle \in R_r$ 且 $x \in [f_p(\eta)]$。由于 $f_p = f_q$，这也不可能发生。
• 存在一个 $\eta \in T_\alpha$、$\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，以及一个 $x \in X$，使得 $\langle \eta, x\rangle \in R_r$ 且 $\langle \nu, x\rangle \in R_p$。若 $x \in H$，则可立即得到 $\langle \nu, x\rangle \in R_q$，这与 $q \parallel r$ 矛盾。若 $x \notin H$，则 $\mathrm{rk}(\nu) < \mathrm{rk}(\eta) < \beta$，因此我们也有 $\langle \nu, x\rangle \in R_q$。

• 存在一个 $\eta \in T_\alpha$、$\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，以及一个 $x \in X$，使得 $\langle \eta, x\rangle \in R_p$ 且 $x \in [f_r(\eta)]$。由于通常可以假设 $\beta > 0$（否则便无事可证），而且这种情形特别蕴含 $\mathrm{rk}(\eta) = 1$，因此我们有 $\langle \eta, x\rangle \in R_q$。这是不可能的。

• 存在一个 $\eta \in T_\alpha$, $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，以及一个 $x \in X$，使得 $\eta, x \in R_p$，且 $\nu, x \in R_r$。如果 $x \in H$，则无需采取任何操作，矛盾立即显现。否则，分两种情况：– 如果 $\mathrm{rk}(\eta)$ 是后继序数，那么 $\mathrm{rk}(\eta) = \mathrm{rk}(\nu) + 1$。因此，如果 $x \notin H$，则 $\beta > \mathrm{rk}(\nu)$，所以 $\beta \geq \mathrm{rk}(\eta)$，从而 $\eta, x \in R_q$。– 如果 $\mathrm{rk}(\eta)$ 是极限序数，那么证明开头对 p 所作的预备便派上用场了。由于 $\beta > \mathrm{rk}(\nu)$，我们已确保存在一个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得 $\nu' x$ 属于 R_p，因此也属于 R_q。

• 唯一剩下的情形是：存在一个 $x \in X$、一个 $\eta \in T_\alpha$，使得 $\mathrm{pred}(\eta)\ x \in R_p \cup R_r$，并且对于每个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，都存在一个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得 $\nu' x \in R_p \cup R_r$。然而，如果 $x \in H$ 或 $\mathrm{pred}(\eta)\ x \in R_r$（这意味着 β 足够大），那么 q 与 r之间也会出现同样的不相容性。因此，只有在 $x \notin H$ 且 $\mathrm{pred}(\eta)\ x \in R_p$时，这种情形才值得关注。同样地，如果对于某个 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，存在一个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得 $\nu' x \in R_p$，那么根据 p 的临界性条件，必然存在一个 $\bar{\nu} \in \mathrm{succ}(\eta)$，使得 $\bar{\nu}, x \in R_p$。但根据前面的情形，我们已经知道，这意味着对于所有 $\bar{\nu}' \in \mathrm{succ}(\bar{\nu})$，都有 $\bar{\nu}' x \notin R_p \cup R_r$，所以这是不可能的。因此，唯一剩下的情形是：我们在开始时找到的所有 ν' 都必须满足 $\nu' x \in R_r$。由于 $x \notin H$，每个这样的 ν' 与其对应前驱 ν 之间的秩差为 1，而 $\mathrm{rk}(\eta)$ 是一个极限，这意味着 $\beta > \sup\{\mathrm{rk}(\nu) : \nu \in \mathrm{succ}(\eta)\} = \mathrm{rk}(\eta)$。于是 $\beta \geq \mathrm{rk}(\mathrm{pred}(\eta)) = \mathrm{rk}(\eta) + 1$ 且 $\mathrm{pred}(\eta)\ x \in R_q$。矛盾。□

下一个定理构建了秩强迫抽象理论与博雷尔层级结构之间的桥梁。它概括了 [Mil79]中若干类似证明的核心思想。鉴于 y^* 在证明中发挥的作用，Miller 也将核心论证称为“老把戏”。请注意，我们对其进行表述，以表明由第一个泛型添加的集合 $G_\emptyset(0)$不仅无法在 κ-博雷尔层级的较低层级上得到简单定义，而且对于任意 λ，也无法在 $\lambda \geq \kappa$-博雷尔层级的较低层级上得到简单定义。这一点与未来的研究有关。

定理 5.30。设 $\lambda \geq \kappa$ 是一个基数，α 是一个序数，且 $1 < \alpha < \kappa^+$。此外，令$X \subseteq {}^{\kappa}2$和 $\mathcal{P}_\sim$ 为一个 λ^+-链条件强迫概念的 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X)$-名称。记

$$\mathbb{P} = \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X) \star \mathcal{P}_\sim.$$

S进一步假设 $\langle \mathrm{rk}_i : i \in I\rangle$ 是一个函数族，并且满足以下条件：

(1) 对每个 $i \in I$，rk_i 是定义在 $\mathbb{P}$ 上、取值为序数 $<\alpha$ 的秩函数，且 $h_{\mathrm{rk}_i}(\beta) = \beta + 1$。(2) 对每个大小为 $|S| \leq \lambda$ 的集合 $S \subseteq \mathbb{P}$，都存在一个 $i \in I$，使得对所有 $p \in S$，$\mathrm{rk}_i(p) = 0$。

(3) 对每个 $i \in I$，都存在一个 $H \subseteq X$，其大小为 $|H| \leq \lambda$，使得 $\mathrm{rk}_i(p) \geq \mathrm{rk}_H(p(\emptyset))$ 对所有 $p \in \mathbb{P}$均成立。此处 rk_H 是定义 5.28 中定义在 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X)$ 上的秩函数。5.28。

那么，对于每个 $Y \subseteq X$ 且满足 $|Y| > \lambda$,

$$\mathbb{P} \Vdash G_\emptyset(0) \cap Y \notin \lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y),$$

其中， $G_\emptyset(0)$ 是由第一个 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X)$-泛型滤子添加的 X 的泛型 $\kappa\text{-}\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ 子集。

证明。假设情况并非如此。设 $p \in \mathbb{P}$ 是一个条件， $\underset{\sim}{J}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，它是某个 $\lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ 集合的名称，且满足 $p \Vdash G_\emptyset(0) \cap Y = \underset{\sim}{J}$。此外，设 T 是一个通用良基树 $T_\alpha \subseteq {}^{<\omega}\lambda$，如引理 3.1 中所述，它对应于 ${}^{\kappa}\kappa$ 上的 λ-博雷尔层级；也就是说，对于每个 $\lambda\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ 集合 $B \subseteq {}^{\kappa}\kappa$，都存在一个 $f\colon \mathrm{leaf}(T) \to {}^{<\kappa}\kappa$，使得 $B = \mathrm{I}^f_T(\emptyset)$。因此，我们可以找到一个名称 $\underset{\sim}{f}$，表示一个赋值$f\colon \mathrm{leaf}(T) \to {}^{<\kappa}\kappa$，使得$_\sim$

$$\mathbb{P} \Vdash \underset{\sim}{J} = Y \setminus \mathcal{I}^{\underset{\sim}{f}}_T(\emptyset).$$

由 λ^+-链条件，存在一个大小为 $\leq\lambda$ 的集合 $S \subseteq \mathbb{P}$，使得对于每个 $q \in \mathbb{P}$ 和 $j < \lambda$，都有一个与 q 相容的 $s \in S$，它能同时决定 $\underset{\sim}{\tau}\restriction j$ 和陈述“$G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J}$”。由 (2)，存在一个 $i^* \in I$，使得对所有 $s \in S$，$\mathrm{rk}_{i^*}(s) = 0$。最后，由 (3)，我们可以找到一个大小为$|H^*| \leq \lambda$、对应于 i^*的 $H^* \subseteq X$。由于 $|Y| > \lambda$，从现在起我们固定一个 $y^* \in Y \setminus H^*$ 并记作

$$\bar{A} := \left\{\text{“}y^* \in [\underset{\sim}{f}(\eta)]\text{”} : \eta \in \mathrm{leaf}(T)\right\} \cup \{\text{“}G_\emptyset(0) \neq \underset{\sim}{J}\text{”}\}.$$

C ¯**断言 5.31.** 对于每个 $\eta \in T$，存在一个句子 $\varphi_\eta \in \Sigma_{\mathrm{rk}_T(\eta)}(\mathcal{L}_\infty(A)/_\mathbb{P})$，使得

$$\mathbb{P} \Vdash \varphi_\eta \Leftrightarrow y^* \notin \mathcal{I}^{\underset{\sim}{f}}_T(\eta)$$

断言的证明。 对 T 的结构进行归纳。对于每个 $\eta \in$ 叶节点(T)，句子“$y^* \notin [f(\eta)]$”属于 $\Sigma_0(\mathcal{L}_\infty(A)/_\mathbb{P})$。其次，若假设该陈述对所有 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$ 都成立，那么$_\sim$¯集合 $\varphi_\eta := \bigvee_{\nu \in \mathrm{succ}(\eta)} \neg\varphi_\nu$。我们知道 $\varphi_\eta \in \Sigma_\beta(\mathcal{L}_\infty(A)/_\mathbb{P})$，其中 $\beta = \sup\{\mathrm{rk}_T(\nu) + 1 \colon \nu \in \mathrm{succ}(\eta)\} = \mathrm{rk}_T(\eta)$。此外，

$$\mathbb{P} \Vdash \varphi_\eta \Leftrightarrow (\exists \nu \in \mathrm{succ}(\eta) : \neg\varphi_\nu) \Leftrightarrow \left(\exists \nu \in \mathrm{succ}(\eta) : y^* \in \mathcal{I}^{\underset{\sim}{f}}_T(\nu)\right) \Leftrightarrow y^* \notin \mathcal{I}^{\underset{\sim}{f}}_T(\eta). \qquad \square$$

现在我们考虑条件 $p' \leq p$，其中 $p'(0) = \langle f_{p(0)}, R_{p(0)} \cup \langle \emptyset, y^* \rangle\rangle$ 且 $p'(1) = p(1)$。我们有

$$p' \Vdash y^* \in G_\emptyset(0) \wedge G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J},$$

并且还有

$$\mathbb{P} \Vdash y^* \in \underset{\sim}{J} \Leftrightarrow y^* \notin \mathcal{I}^{\underset{\sim}{f}}_T(\emptyset) \Leftrightarrow \varphi_\emptyset.$$

¯由于 $\alpha \geq 2$，容易验证“$\varphi_\emptyset \wedge G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J}$” $\in \Sigma_\alpha(\mathcal{L}_\infty(A)/_\mathbb{P})$。这意味着我们可以将定理 4.2 应用于 rk_{i^*}， $\beta_0 = 1$ 以及 $\varphi_\emptyset \wedge G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J}$，从而得知存在一个 $q \in \mathbb{P}$ 满足 $\mathrm{rk}_{i^*}(q) < \alpha$， $q \parallel p'$ 并且

$$q \Vdash y^* \in G_\emptyset(0) \wedge G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J}.$$

由于 $y^* \in Y \setminus H^*$和 H^*, i^* 满足 (3)，我们知道 $\emptyset, y^* \notin R_{q(0)}$。我们声称，存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}_{T_\alpha}(\emptyset)$，使得单从句法层面来看，定义为 $q'_\nu(0) = f_{q(0)}, R_{q(0)} \cup \nu, y^*$和 $q'_\nu(1) = q(1)$ 的 $q'_\nu \leq q$ 是 $\mathbb{P}$ 中的一个条件。如果 α 不是小极限序数，那么 $\emptyset$ 在 T_α 中有 κ 个后继节点，因此存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}_{T_\alpha}(\emptyset)$，使得没有高于 ν 的节点出现在 $R_{q(0)}$ 中；任意这样的 ν 都可以。如果 α 是小极限序数，那么存在一个 $\nu \in \mathrm{succ}_{T_\alpha}(\emptyset)$，使得对每个 $\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，都有 $\nu', y^* \notin R_{q(0)}$。若非如此，那么我们就有 $\mathrm{rk}_H(q(0)) = \alpha$，因为对于这样的

$\nu' \in \mathrm{succ}(\nu)$，我们有 $\mathrm{rk}_{T_\alpha}(\nu) = \mathrm{rk}_{T_\alpha}(\nu') + 1$，并且 $\alpha = \mathrm{rk}_{T_\alpha}(\emptyset) = \sup\{\mathrm{rk}_{T_\alpha}(\nu) : \nu \in \mathrm{succ}(\emptyset)\}$。因此，我们可以选取如上所述的一个 ν，并且由于 $\mathrm{rk}_{T_\alpha}(\nu)$ 的形式为 $\gamma + 4$，其中某个序数为 γ，临界性约束在 $q'_\nu(0)$ 中也得到满足，因此 q'_ν 是一个条件。但这显然荒谬，因为现在

$$q'_\nu \Vdash G_\emptyset(0) = \underset{\sim}{J} \wedge y^* \in \underset{\sim}{J} \wedge y^* \notin G_\emptyset(0). \qquad \square$$

6. 迭代 α-强迫

正如第7节将要说明的，对 $^\kappa\kappa$的子空间上的博雷尔层级进行的若干相容性结果和精细修改，都可以通过恰当应用 α-强迫来实现。在这些应用中，为某些集合的博雷尔复杂度建立下界的核心论证，归根结底在于一个观察：某个 α-强迫的迭代，或至少其中由表现良好的条件组成的稠密子强迫，是定义4.1意义下的分秩强迫概念，其秩函数类允许带有参数（例如，定义6.5），因此引理5.30适用。参数用来排除一组“较小”的条件（一般而言，其大小为 $\leq\kappa$），使其不被分秩；而这必须以一种不过度扰乱迭代结构的方式进行，从而保留关于后续迭代因子的足够相关信息。

本文此后一切讨论的出发点将是 $<\kappa$-支集迭代

$$\langle \mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma : \gamma < \gamma^* \rangle$$

即带有 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{\alpha_\gamma}(\underset{\sim}{A}_\gamma, \underset{\sim}{B}_\gamma, \underset{\sim}{X}_\gamma)$的 α-强迫。第一个强迫具有形式 $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{BM}_{\alpha_0}(\emptyset, \emptyset, X_0)$。我们记 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\gamma^*}$ 为该迭代的 $<\kappa$-极限。该迭代及其参数在本节其余部分保持固定。

注 6.1. 很快就会清楚，在这种一般性水平上为迭代寻找秩函数是徒劳的。这对于两步迭代已经成立；假设给定强迫$\mathbb{P} = \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X) \star \mathbb{BM}_\alpha(X \setminus G_\emptyset(0)\ G_\emptyset(0)\ X)$，其中 $G_\emptyset(0)$照例指泛型 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$集。于是第二个强迫为 $X \setminus G_\emptyset(0)$添加一个 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$-编码，特别地 $\mathbb{P} \Vdash G_\emptyset(0)\ \in\kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$。由引理 5.30 的逆否命题，在 $\mathbb{P}$ 上不可能存在足够丰富的秩函数族。为处理这一问题，人们只考虑形式更为受限的迭代。

我们首先总结一些先前已知的结果，以及已验证为分秩强迫概念的迭代类型（对于适用于定理 5.30 的一类秩函数）：

- 对于 $\kappa = \omega$ 以及
$$\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset, \text{ and } \underset{\sim}{X}_\gamma = {}^\omega 2 \cap V^{\mathbb{P}_\gamma},$$
第一部分的证明 [Mil79，定理 22] 验证了该迭代是一个分秩强迫概念。
- 情形 $\kappa = \omega$ ，
$$\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{X}_\gamma = \check{X}_\gamma$$
其中序列 $\langle X_\gamma : \gamma < \gamma^* \rangle$ 属于 V，并且 $\alpha_\gamma = \alpha_0 + 1$ 对于 $0 < \gamma < \gamma^*$，这就是——经过直接调整后—— [Mil79，定理 34] 的内容。
- 在 [Ago+25，第 7] 节中，我们将上述 [Mil79定理 34] 的证明推广到正则不可数基数 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 以及包含 $\mathbb{P} \Vdash \underset{\sim}{X}_\gamma = \check{}X$ 的迭代，其中一个用于 $X \in V$，另一个用于 $\alpha_\gamma = \alpha_0 + 1$。 $0 < \gamma < \gamma^*$不过，我们还假设 $\alpha_0 < \omega$ 是一个有限序数。

Miller 的两个主要结果提示我们考察两种不同类型的迭代，即

- 那些仅涉及基模型空间 X_γ 的情形，因此在强迫扩张中只能有效地研究基模型空间，而

- 那些涉及空间的（适当）名称 $\underset{\sim}{X}_\gamma$ 的情形。借助簿记，这类迭代能够推导出关于最终模型中出现的所有空间的陈述。

值得注意的是，对于会出现（非基模型）名称的迭代，我们所知甚少。$\underset{\sim}{X}_\gamma$ Mil79 [Mil79，定理 22] 的原始证明只使用形如 $\mathbb{BM}_{\alpha_\gamma}(\emptyset,\ \emptyset,\ {}^{\omega}\omega \cap V^{\mathbb{P}_\gamma})$ 的迭代因子，因此只能给出 ord_ω 的下界——它只能向“上”强迫（参见引理 5.13）。我们指出，该定理还有第二部分，其中对于一个后继序数 $2 \leq \beta_0 < \omega_1$，构造了一个模型，使得 $\mathrm{ord}_\omega(X)$ 的谱具有非平凡值

$$\{\mathrm{ord}_\omega(X) : X \subseteq {}^{\omega}2\} = \{\beta : \beta_0 \leq \beta \leq \omega_1\}.$$

证明中还包含将层级向“下”推移的迭代因子 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ X \setminus A,\ X)$；不过，这仅发生在一列特定的基模型空间 $\langle X_\alpha : \beta_0 \leq \alpha < \omega_1 \rangle \in V$ 上，这些空间由相对于较小模型 $M \subseteq V$ 泛型互异的科恩泛型实数组成。证明充分利用了科恩强迫的性质，以便将迭代作用于基模型空间 X_α 时向下推移层级的一面，与向上推移的一面区分开来；后者通过簿记确保在最终模型中，对于每个不可数 $X \subseteq {}^{\omega}2$，$\mathrm{ord}_\omega(X) \geq \beta_0$ 都成立。

另一方面，只要将注意力限制在基模型空间上，就能得到更强的结果。由于不再需要处理实数的名称 $\underset{\sim}{\tau}$，而是可以在 ${}^{\kappa}\kappa$（参见第6.1节）中将这些名称完全判定为基模型对象，因此秩函数的存在性更容易表述和验证。在这类迭代中，[Mil79，定理 34] 也涵盖了形如 $\mathbb{BM}_\alpha(A,\ X \setminus A,\ X)$ 的向下推动型迭代因子的情形。然而，即便在此处，也必须谨慎，只允许某些类型的参数，以规避引理6.1中的反例。

本文的主要贡献是将 [Mil79，定理 34]的技术完全推广到不可数 $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ 的情形，同时结合 [Mil79，定理 52] 的思想，为基模型空间提供按基数相容分离序$\kappa(X)$的模型。 X

对于 $\kappa = \omega$，我们也开发了一种方法，可将向下推动的迭代因子纳入 α-强迫的迭代中，并控制最终模型中的所有空间；相关成果将发表于后续工作。

6.1. 具有基模型空间的迭代。我们采用上述迭代，其中出现的所有空间 X_γ 都属于基模型。我们直接用 X_γ 代替 $\underset{\sim}{X}_\gamma$。回想一下，$A_0 = B_0 = \emptyset$。

ˇ假设1。对于每个 $\gamma < \gamma^*$，我们都有 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{X}_\gamma = X_\gamma$，其中空间为 $X_\gamma \in V$。

下述技术性假设是某些论证所必需的。

假设2。对于每个 $\gamma < \gamma^*$，若 $\mathbb{P}_\gamma \not\Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，则 α_γ 是后继序数。

Last因此，为避免引理 6.1，我们假设该迭代满足以下条件 :

假设3。对于每个 $0 < \gamma < \gamma^*$，以下至少有一项成立：

- $\alpha_\gamma > \alpha_0$
- $|X_\gamma| < |X_0|$
- $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$。

假设1 使得我们能够转而考察由形式更直观的条件构成的稠密子集，从而更轻松地分析该强迫。在若干关键方面，这种迭代的行为几乎如同强迫的乘积；例如，条件中的条目可以被确定为基模型对象。

然而，由于名称 $\underset{\sim}{A}_\gamma$，$\underset{\sim}{B}_\gamma$并不描述基模型对象，因此不能将这种迭代视为字面乘积。

定义 6.2。如果对每个 $\gamma<\gamma^*$，都存在 $f_{p(\gamma)}, R_{p(\gamma)} \in V$ 使得 $p(\gamma)$ 是有序对 $\langle \check{} f_{p(\gamma)}, \check{} R_{p(\gamma)}\rangle$ 的标准名称，则条件 $p\in\mathbb{P}$ 是良好的。

良好条件可以视为乘积 $\prod_{\gamma<\gamma^*}\mathbb{BM}_{\alpha_\gamma}(\emptyset,\emptyset,X_\gamma)$ 中的条件。反过来，如果乘积中的条件能够正确判定集合 $\underset{\sim}{A}_\gamma, \underset{\sim}{B}_\gamma$ 的隶属关系，那么它们也属于 $\mathbb{P}$。具体而言，对于一个 $p\in\prod_{\gamma<\gamma^*}\mathbb{BM}_{\alpha_\gamma}(\emptyset,\emptyset,X_\gamma)$，当且仅当对每个 $\gamma<\gamma^*$，$p{\restriction}\gamma$（作为 $\mathbb{P}_\gamma$ 中的一个条件）强迫 $x\notin \underset{\sim}{B}_\gamma$ 对于满足 $\langle\emptyset,x\rangle\in R_{p(\gamma)}$ 的 x 成立，并且 $y\notin \underset{\sim}{A}_\gamma$ 对于满足 $\langle\eta,y\rangle\in R_{p(\gamma)}$ 的 y 成立，$,\eta\in\mathrm{succ}(\emptyset)$。

对于 t 两个良好条件 p 和 q，我们可以用 $p\cup q$ 表示二者的逐点并，即 e.

$$(p\cup q)(\gamma):=\langle f_{p(\gamma)}\cup f_{q(\gamma)}, R_{p(\gamma)}\cup R_{q(\gamma)}\rangle.$$

类似地，对于一组良好条件 S，我们定义 $\bigcup S$。需要提醒读者，即使 p，q 相容，它们的逐点并也可能不是一个条件。我们还用 $\mathrm{rang}(R_{p(\gamma)})$ 表示集合 $\{x\in X_\gamma:\exists\eta\in T_{\alpha_\gamma}:\langle\eta,\ x\rangle\in R_{p(\gamma)}\}$。

我们首先指出，尽管引理5.17 对该迭代不再成立，但它的两个变体仍然成立，分别见引理 6.3和引理 6.12 （参见 [Mil79，引理 23]）。

引理 6.3。假设 G 是 $\mathbb{P}$-泛型，且 $\langle p_i:i<\delta\rangle$ $\delta<\kappa$ 是 G中的一个递减良好条件序列。那么 $\hat{}p:=\bigcup_{i<\delta}p_i$ 是一个条件，并且 $\hat{}p\in G$。

证明。根据引理 $\gamma\le\gamma^*$ 和引理 5.17，作直接归纳即可。 □

命题 6.4。良好条件的集合在 $\mathbb{P}$中稠密。

证明。这是标准结果。我们通过归纳法证明，对于每个 $\gamma\le\gamma^*$，良好条件的集合在 $\mathbb{P}_\gamma$ 中稠密。$\gamma=0$ 的基础情形显然。在后继情形 $\gamma\to\gamma+1$中，注意到强迫 $\mathbb{P}_\gamma$ 在策略意义上是 $<\kappa$-闭的，因此不会添加长度为 $<\kappa$的 V 元素新序列。由于 T_{α_γ} 以及至关重要的 X_γ 都在基模型中，对于每个 $p\in\mathbb{P}_{\gamma+1}$，我们都有 $p{\restriction}\gamma\Vdash p(\gamma)\in V$。因此可以找到一个良好条件 $p'\le p{\restriction}\gamma$ 以及一个有序对 $\langle f,\ R\rangle\in V$，使得 $p'\Vdash p(\gamma)=\langle\check{} f,\ \check{} R\rangle$。因此，条件 $(p'\frown\langle\check{} f,\ \check{} R\rangle)\le p$ 是良好的。

现在假设 $\gamma\le\gamma^*$ 是一个极限。如果 $\mathrm{cf}(\gamma)\ge\kappa$，那么我们就完成了，因为该迭代采用大小为 $<\kappa$的支集。因此，假设 $\mathrm{cf}(\gamma)<\kappa$，并令 $\langle\gamma_i:i<\mathrm{cf}(\gamma)\rangle$ 为 γ中的连续共尾序列。对于 $p\in\mathbb{P}_\gamma$，我们现在在泛型扩张中工作，并固定一个包含 p的 $\mathbb{P}_\gamma$-泛型滤子 G；我们构造一个递减序列 $\langle p_i:i<\mathrm{cf}(\gamma)\rangle$，使得对每个 $i<\mathrm{cf}(\gamma)$，都满足以下条件：

- $p_i\in G{\restriction}\gamma_i$,
- p_i 是好的,
- $p_i\le p{\restriction}\gamma_i$,
- $p_{i+1}{\restriction}\gamma_i\le p_i$ 并且
- 如果 $i<\mathrm{cf}(\gamma)$ 是一个极限序数，那么 $p_i=\bigcup_{i'<i}p_{i'}$。

构造 p_i 的后继步使用了归纳假设，而最后一个项目中针对 i 极限的 p_i 定义，根据引理6.3 给出了一个条件。同样，该引理告诉我们，$p^*=\bigcup_{i<\mathrm{cf}(\delta)}p_i$ 是一个条件，而且很容易看出，它既是好的，也强于 p。□

在本节余下部分，除非另有明确说明，所有条件均假定为好条件。

现在我们来定义 $\mathbb{P}$[5]上的候选秩函数族。在强迫的单步情形中，秩函数带有一个参数 $H \subseteq X$；类似地，在迭代情形中，可以找到一组足够丰富的可容许参数。

定义 6.5. 我们称 $H = \langle H(\gamma) : \gamma < \gamma^* \rangle$ 为一个轨迹，如果对每个 $\gamma < \gamma^*$ (1) $H(\gamma) \subseteq X_\gamma$，(2) 若 $\gamma > 0$、$\alpha_\gamma \leq \alpha_0$ 且 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，则 $H(\gamma) = \emptyset$ 或 $H(\gamma) = X_\gamma$，(3) 对所有 $x \in H(\gamma)$，集合

$$D = \left\{ p \in \mathbb{P}_\gamma : \begin{array}{c} \forall \delta < \gamma : \mathrm{rang}(R_{p(\delta)}) \subseteq H(\delta) \text{ and} \\ p \text{ decides } \text{“}x \in \underset{\sim}{A}_\gamma\text{”}, \text{“}x \in \underset{\sim}{B}_\gamma\text{”} \end{array} \right\}$$

在 $\mathbb{P}_\gamma$ 中准稠密，即对每个 $p \in \mathbb{P}_\gamma$，都存在一个 $q \in D$ 满足 $q \parallel p$。

记 $\mathrm{supp}(H) = \{\gamma < \gamma^* : H(\gamma) \neq \emptyset\}$。我们总是假设 $0 \in \mathrm{supp}(H(0))$。

同时，我们引入秩这一候选概念。

定义 6.6。 对于一个 $p \in \mathbb{P}$ 和一个轨迹 H，定义

$$\mathrm{rk}_H(p) := \sup_{\gamma < \gamma^*} \sup \left\{ \mathrm{rk}_{T_{\alpha_\gamma}}(\eta) : \exists x \in X_\gamma \setminus H(\gamma) : \langle \eta, x \rangle \in R_{p(\gamma)} \right\}$$

如果 $\mathrm{supp}(p) \subseteq \mathrm{supp}(H)$ 且 $\mathrm{rk}_H(p) = \infty$，否则。

注 6.7。证明通常会对条件 $p \in \mathbb{P}$ 的支集进行归纳。因此，我们将称相对于 $\mathbb{P}_\gamma$ for $\gamma < \gamma^*$ 的好性、轨迹和秩；它们应相对于部分迭代 $\langle \mathbb{P}_\delta, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\delta : \delta < \gamma \rangle$ 来定义。滥用记号，我们将 $\mathrm{rk}_H(p)$ 写作 $\mathrm{rk}^{H\restriction\gamma}(p)$。

注 6.8。鉴于定义 6.6，要求 $\forall \delta < \gamma :$ $\mathrm{rang}(R_{p(\delta)}) \subseteq H(\delta)$ 在定义 6.5中等价于 $\mathrm{rk}_H(p\restriction\gamma) = 0$。

为了应用定理 5.30，对于给定的一组条件，我们应当能够找到一个不太大的轨迹，使它们在该轨迹上消失。

引理 6.9。 设 $\lambda > \kappa$ 为正则基数，且 $F \subseteq \mathbb{P}$ 为一个大小为 $|F| < \lambda$的集合。若对于所有满足 $\alpha_\gamma \leq \alpha_0$ 和 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$ 的 $0 < \gamma < \gamma^*$ 都有 $\lambda > |X_\gamma|$，则存在一个轨迹 H，使得对于所有 $p \in F$ 和 $|H(0)| < \lambda$，都有 $\mathrm{rk}_H(p) = 0$。

证明。构造一个充分大的宇宙初始段的初等子模型的递增链 $\langle M_j : j \leq \omega \rangle$，使得 $\{\mathbb{P}, F\} \cup F \cup \kappa \subseteq M_0$，并且对于所有 $j < \omega$、$|M_j| < \lambda$和$M_j \cup \{M_j\} \cup$，$\sup(M_j \cap \lambda) \subseteq M_{j+1}$。记作 $M = \bigcup_{j<\omega} M_j$。注意，对于每个满足 $|u| < \lambda$的 $u \in M$，我们都有 $u \in M_j$，其中某个 $j < \omega$满足该式，因此 $|u| \subseteq M_{j+1} \subseteq M$，从而 $u \subseteq M$。

令 $H(\gamma)$：当 $\gamma \in M$ 时为 $= X_\gamma \cap M$，否则为 $H(\gamma) = \emptyset$。显然，$|H(0)| < \lambda$。为说明 H 是一个轨迹，取 $\gamma < \gamma^*$，满足 $H(\gamma) \neq \emptyset$，特别地有 $\gamma \in M$。如果 $\alpha_\gamma \leq \alpha_0$ 且 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，那么 $\lambda > |X_\gamma|$，因此 $X_\gamma \subseteq M$。

为检验第三个要求，取 $x \in H(\gamma)$。则集合

$$\left\{ p \in \mathbb{P}_\gamma : p \text{ decides } \text{“}x \in \underset{\sim}{A}_\gamma\text{”}, \text{“}x \in \underset{\sim}{B}_\gamma\text{”} \right\}$$

是稠密的（并且在 M 中可定义）。在 M 中，于 $\mathbb{P}_\gamma$ 的这一稠密子集中取一个极大反链 A；我们将证明，对所有 $p \in A$，$\mathrm{rk}_H(p) = 0$。由 κ^+-链条件，$A \subseteq M$ 并且对所有 $\delta \in \mathrm{supp}(p)$，$\mathrm{rang}(R_{p(\delta)})$ 在 M 中可定义。由于其大小，它也是 M 的一个子集，因此 $\mathrm{rk}_H(p) = 0$。□

[5]严格来说，是由良好条件组成的 $\mathbb{P}$ 的稠密子集。

注记 6.10. 如果我们能证明 rk_H 是序数 $<\alpha_0$ 的秩函数，则定理5.30适用于该迭代以及任何 λ，只要其满足引理 6.9 的假设。

定义 6.11. 若一个好条件 $p \in \mathbb{P}$ 相对于轨迹 H 是无瑕的，则对于每个$\gamma < \gamma^*$和 $x \in \mathrm{rang}(R_{p(\gamma)}) \cap H(\gamma)$，都存在一个 $t \geq p{\restriction}\gamma$，使得 $\mathrm{rk}_H(t) = 0$，并且 t决定“$x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$”和“$x \in \underset{\sim}{B}_\gamma$”。

接下来的两个引理是在泛型扩张中讨论的。

引理 6.12. 设 G 是 $\mathbb{P}$-泛型，且$\langle p_i : i < \delta\rangle$ 是 G中的 $<\kappa$-多个条件，每个条件的秩 $\mathrm{rk}_H(p_i) \leq \beta < \alpha_0$。那么存在一个 $\hat{}p \in G$，使得对所有 $i < \delta$都有 $\hat{}p \leq p_i$，且 $\mathrm{rk}_H(\hat{}p) \leq \beta$。

证明。我们用归纳法对 γ 证明，对于每个部分迭代 $\mathbb{P}_\gamma, \gamma \leq \gamma^*$，上述结论都成立。

基础情形 $\gamma = 0$ 是平凡的，因为 $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$。若 γ 是极限且 $\mathrm{cf}(\gamma) \geq \kappa$，则对某个 $\delta < \gamma$有 $P \subseteq G{\restriction}\delta$，从而即得。若改为 $\mathrm{cf}(\gamma) < \kappa$，固定一个共尾序列$\langle\gamma_i : j < \mathrm{cf}(\gamma)\rangle$ 以及一个$\mathbb{P}_\gamma$-泛型滤子 G。现在归纳地构造一个序列$\langle q_j : j < \mathrm{cf}(\gamma)\rangle$，使得 $q_j \in G{\restriction}\gamma_j$ 是将本引理应用于 $\mathbb{P}_{\gamma_j}$ 和

$$\{p_i{\restriction}\gamma_j : i < \delta\} \cup \{q_{j'} : j' < j\}.$$

该序列现在对 $j' < j$满足 $q_j{\restriction}\gamma_{j'} \leq q_{j'}$。利用引理6.3 以及该序列递减这一事实，现在可以看出，定义为$\hat{}p := \bigcup_{j<\mathrm{cf}(\gamma)} q_j$ 的$\hat{}p$ 具有我们所寻求的全部性质。

现在我们关注后继情形，并假设该陈述对 γ成立。我们要证明它对 $\gamma+1$成立。于是设 G 为 $\mathbb{P}_{\gamma+1}$-泛型；记 $G = G{\restriction}\gamma \star G(\gamma)$。为记号方便，我们记$f = \bigcup_{i<\delta} f_{p_i(\gamma)}$ 与$R = \bigcup_{i<\delta} R_{p_i(\gamma)}$。

如果 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，那么我们只需令$\hat{}p{\restriction}\gamma \in G{\restriction}\gamma$ 为将此引理应用于$\langle p_i{\restriction}\gamma : i < \delta\rangle$ 和$\hat{}p(\gamma) = \langle f, R\rangle$后通过归纳法构造出的条件。由引理5.17，证明完成。

否则，根据假设 2，我们知道 α_γ 是一个后继序数。现在令 Y 为所有满足以下条件的 $y \in X_\gamma$ 构成的集合：存在一个 $\eta(y) \in \mathrm{succ}^{T_{\alpha_\gamma}}(\emptyset)$，使得对所有 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta(y))$，都存在一个$\nu'(\nu, y) \in \mathrm{succ}(\nu)$，且 $\nu'(\nu, y)\ y \in R$。我们首先注意到，所有这样的 y都必须属于 $H(\gamma)$；否则，我们就会有 $\beta \geq \sup_{i<\delta} \mathrm{rk}_H(p_i) \geq \{\mathrm{rk}(\nu'(\nu, y) + 1 : \nu \in \mathrm{succ}(\eta(y))\} = \mathrm{rk}(\eta(y))$，这意味着 $\beta + 1 \geq \mathrm{rk}(\eta(y)) + 1 = \alpha_\gamma > \alpha_0$。由于 $V[G{\restriction}\gamma] \models \{p_i(\gamma) : i < \delta\} \subseteq G(\gamma)$，特别地，我们有 $V[G{\restriction}\gamma] \models$ “$\eta(y)$ 在某个 p_i 的下界中不是 y-临界的”，因此 $V[G{\restriction}\gamma] \models y \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。既然我们知道 $Y \subseteq H(\gamma)$，由引理 6.5，对于每个 $y \in Y$，我们都能找到一个满足 $q_y \Vdash y \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$的 $q_y \in G{\restriction}\gamma$。通过归纳法，现在我们可以将此引理应用于 G_γ，并

$$\{p_i{\restriction}\gamma : i < \delta\} \cup \{q_y : y \in Y\}$$

得到一个 $q \in G{\restriction}\gamma$满足 $\mathrm{rk}_H(q) \leq \beta$。现在令 $\hat{}p{\restriction}\gamma := q$ 以及 $\hat{}p(\gamma) := \langle f, R\rangle$。再次依据引理 5.17，我们看到 $\hat{}p{\restriction}\gamma \Vdash \hat{}p(\gamma) \in \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$。唯一可能出现的非平凡问题，是 $\emptyset$ 的后继节点处的临界性；我们已在证明中处理了这个问题。□

引理 6.13。设 H 是一个轨迹，G 是一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子，$p \in G$。那么存在一个 $p' \in G, p' \leq p$，它相对于 H 是无瑕的，并且 $\mathrm{rk}_H(p) = \mathrm{rk}_H(p')$。

证明。照例，用 $G{\restriction}\gamma$ 表示由 G投影得到的 $\mathbb{P}_\gamma$-泛型滤子，其中 $\gamma < \gamma^*$。我们将构造一个递减序列 $\langle q_j : j < \omega\rangle$，它由 G 中的条件组成，使得

- $q_0 = p$,
- 对每个 $j < \omega, \gamma < \gamma^*$ 以及 $x \in \mathrm{rang}(R_{q_j(\gamma)}) \cap H(\gamma)$，都存在一个 $t \geq q_{j+1}{\restriction}\gamma$，使得 $\mathrm{rk}_H(t) = 0$，并且 t决定“$x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$”和“$x \in \underset{\sim}{B}_\gamma$”。

要找到这个序列，固定 $j<\omega$，并对每个 $\gamma\in\mathrm{supp}(q_j)$，令 $K_\gamma=H(\gamma)\cap\mathrm{rang}(R_{q_j}(\gamma))$。这是一个大小为 $<\kappa$ 的集合。对于每个 $x\in K_\gamma$，根据定义 6.5，存在一个 $q_j^x\in G\restriction\gamma$，满足 $\mathrm{rk}_H(q_j^x)=0$，使得 q_j^x 决定“$x\in\underset{\sim}{A}_\gamma$”和“$x\in\underset{\sim}{B}_\gamma$”。现在令 q_{j+1} 为引理 6.12 应用于 G和 $\{q_j^x$所得：$x\in K_\gamma,\gamma\in\mathrm{supp}(q_j)\}\cup\{q_j\}$。

现在令 p' 定义为 $p'(\gamma):=\bigcup_{j<\omega}q_j$。由于这些 q_j构成递减序列，根据引理 6.3，我们知道 p' 是一个条件，并且 $p'\in G$。稍加思索便可使读者确信，p' 是无瑕的。□

定理 6.14. 对于任意轨迹 H，rk_H是 $\mathbb{P}$上的一个秩函数，其中序数为 $<\alpha_0$和 $h_{\mathrm{rk}_H}(\beta)=\beta+1$.

证明。固定一个序数 $\beta<\alpha_0$和一个 $p_0\in\mathbb{P}$，我们构造一个条件 $q\in\mathbb{P}$，$q\parallel p_0$，$\mathrm{rk}_H(q)\leq\beta$，使得对于每个 $r\in\mathbb{P}$，$\mathrm{rk}_H(r)<\beta$，都有

$$r\parallel q\Rightarrow r\parallel p_0.$$

然而，我们不会从 p_0构造出 q，而是先找到一个更强的条件 $p\leq p_0$，再以此为基础；如果能验证该性质对 p 和 q成立，那么显然它对p_0 和 q也成立。首先，根据引理 6.13 ，我们可以假设 p_0 是无瑕的。但这并不是我们需要进行的唯一准备工作；我们还要将 p_0 加强为一个 $p\leq p_0$，但只以这样的方式进行：对于所有 $\gamma<\gamma^*$，$\mathrm{supp}(p)=\mathrm{supp}(p_0)$，且 $\mathrm{rang}(R_{p(\gamma)})=\mathrm{rang}(R_{p_0(\gamma)})$。这样，$p$ 仍然是无瑕的。条件 p应当通过向 R_{p_0} 添加 $<\kappa$个有序对，从 p_0 构造出来，从而确保以下三个性质对每个满足 $\mathrm{supp}(p)$ 的 $\gamma\in$都成立：

- 对于所有$\eta\in T_{\alpha_\gamma}$ 和 $x\in X_\gamma$，其中 $\mathrm{rk}(\mathrm{pred}(\eta))>\beta$ 是极限序数，$\mathrm{rk}(\eta)<\beta$ 且 $\mathrm{pred}(\eta)$ $x\in R_p(\gamma)$，应当存在一个 $\nu\in\mathrm{succ}(\eta)$，使得 $\nu,x\in R_p(\gamma)$。这一点可以成立：根据树 T_{α_γ} 在极限节点处的构造，在 $R_{p_0}(\gamma)$ 中有 $<\kappa$个这样的 η,x。由于现在 η 在 T_{α_γ} 中有 κ个后继节点，我们可以找到一个 $\nu\in\mathrm{succ}(\eta)$，从而将元组 ν,x 添加到 $R_p(\gamma)$。
- 对于所有满足 $p\restriction\gamma\Vdash$“$\eta$ 是 x-临界的”且$\langle\mathrm{pred}(\eta)\ x\rangle\in R_{p(\gamma)}$ 的 $\eta\in T_{\alpha_\gamma}$，存在一个$\eta\prime\in\mathrm{succ}(\eta)$，使得$\langle\eta x\rangle\in R_{p(\gamma)}$。这几乎等同于说 p 应当是一个严格条件，例外是因 $\underset{\sim}{A}_\gamma$的隶属关系而在根的后继处出现的临界性约束实例。
- 第三个性质仅与那些 γ 有关，对这些 α_γ 而言，它是小极限序数的后继。在此，我们考虑所有满足 $\eta\in\mathrm{succ}^{T_{\alpha\gamma}}(\emptyset)$ 的 $x\in X_\gamma$，以及满足以下条件的 $x\in X_\gamma$：– $\eta,x\notin R_p(\gamma)$；– 存在一个 $\nu\in\mathrm{succ}^2(\eta)$，使得 $\nu,x\in R_p(\gamma)$；并且 – 还存在一个 $\eta'\in\mathrm{succ}(\eta)$，$\mathrm{rk}(\eta')\leq\beta$，使得对于所有 $\nu'\in\mathrm{succ}(\eta')$，都有 $\nu'x\notin R_p(\gamma)$。

对于每一个这样的 η 和 x，都应存在一个如上所述的 η'，使得 $\langle\eta',\ x\rangle\in R_{p(\gamma)}$。

这里有一点细微之处。根据注记 5.8，所有极限节点在垂直方向上彼此间隔得足够远，因此只需经过 p_0 一次，并将所有必要的见证收集到 R_p中，就不会产生任何需要处理的这些性质的新实例，因此我们也就完成了 $p\leq p_0$的构造。从此以后，我们只需处理 p。

最后，我们将每个坐标 $\gamma\in\mathrm{supp}(p)\cap\mathrm{supp}(H)$ 处的 q 定义为

$$q(\gamma):=\langle f_{p(\gamma)},R_{q(\gamma)}\rangle,$$

其中

$$R_{q(\gamma)}:=\left\{\langle\eta,x\rangle\in R_{p(\gamma)}:x\in H(\gamma)\vee\mathrm{rk}_{T_{\alpha\gamma}}(\eta)\leq\beta\right\}.$$

对于 $\gamma \notin \mathrm{supp}(\bar{p}) \cap \mathrm{supp}(H)$，我们令 $q(\gamma) = \mathbb{1}$。首先，我们必须检查 q 是否确实是一个条件 件。

断言 6.15。 q 是 $\mathbb{P}$中的一个条件。

证明。 若它不是一个条件，则存在一个指标 γ，使得 $q{\restriction}\gamma \in \mathbb{P}_\gamma$ 是一个条件，但$q{\restriction}\gamma \Vdash q(\gamma) \in \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$。考察 α-强迫的定义，以及我们处理的是良好条件、其关系 $R_{\bar{p}}$ 在基模型中已确定这一事实，可设想的情况只有两种。第一种情况是存在一个 $x \in X_\gamma$，使得以下之一成立：

a) $\langle \emptyset, x\rangle \in R_{q(\gamma)}$，但 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{B}_\gamma$；或者 b) $\langle \eta, x\rangle \in R_{q(\gamma)}$ 对于某个 $\eta \in \mathrm{succ}(\emptyset)$ 成立，但 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。

因此，假设 b) 的情形适用于某个 η and x。a) 的情形也可以用类似但更简单的方法加以排除。由于现在必然有 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，我们要么有 $\alpha_\gamma \leq \alpha_0$；在这种情况下，由于$\gamma \in \mathrm{supp}(H)$，可推出 $H(\gamma) = X_\gamma$，因此 $x \in H(\gamma)$。若 $\alpha_\gamma > \alpha_0$，则根据定义， $R_{q(\gamma)}$要么满足 $x \in H(\gamma)$，要么满足 $\mathrm{rk}(\eta) \leq \beta$。但 α_γ 是一个后继序数，因此 $\mathrm{rk}(\eta) + 1 = \alpha_\gamma$。于是我们有$\beta < \alpha_0 \leq \mathrm{rk}(\eta)$。由此可知，$\eta, x$ 属于 $R_{q(\gamma)}$ 的唯一原因只能是 $x \in H(\gamma)$。

因此，无论如何，我们都知道 $x \in H(\gamma)$。此时， p 的无瑕性就起作用了。我们知道存在一个 $t \geq p{\restriction}\gamma$，满足 $\mathrm{rk}_H(t) = 0$，使得 t 判定“$x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$”和“$x \in \underset{\sim}{B}_\gamma$”。由于$\langle \eta, x\rangle \in R_{p(\gamma)}$，而 t 判定“$x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$”且与 $p{\restriction}\gamma$ 相容，这只能意味着 $t \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。但现在 $f_{q{\restriction}\gamma} = f_{p{\restriction}\gamma}$，并且每个来自 $R_{p(\delta)}$、满足 $y \in H(\delta)$ 的$\langle \nu, y\rangle$ 也都出现在 $R_{q(\delta)}$ 中，且 $\delta < \gamma$，所以实际上 $t \geq q{\restriction}\gamma$。这意味着 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$，矛盾。

$q{\restriction}\gamma \Vdash q(\gamma) \in \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$ 的第二种可能性是：存在一个 $\eta \in \mathrm{succ}(\emptyset)$，并且对每个$\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，存在一个 $\nu'(\nu) \in \mathrm{succ}(\nu)$，使得$\nu', x \in R_{q(\gamma)}$ 但 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。注意，关于 $\eta = \emptyset$ 和 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{B}_\gamma$ 的类似陈述是不可能的，因为除非$\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，否则$\alpha_\gamma$ 不可能是极限序数。回到当前情形，我们将再次论证 $x \in H(\gamma)$是被蕴含的。若 $x \notin H(\gamma)$，则 $\beta \geq \mathrm{rk}_H(q) \geq \sup\{\mathrm{rk}(\nu'(\nu)) : \nu \in \mathrm{succ}(\eta)\} = \mathrm{rk}(\eta) = \alpha_\gamma - 1 \geq \alpha_0$。这不可能发生，因此 $x \in H(\gamma)$。但由 p的无瑕性，这意味着存在一个 $t \geq p{\restriction}\gamma$，其$\mathrm{rk}_H(t) = 0$，使得 t决定“$x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$”和“$x \in \underset{\sim}{B}_\gamma$”。由于 $R_{q(\gamma)} \subseteq R_{p(\gamma)}$，必然有 $t \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。此时至关重要的是认识到，由 q的构造， $t \geq p{\restriction}\gamma$ 与$\mathrm{rk}_H(t) = 0$蕴含 $t \geq q{\restriction}\gamma$，因此 $q{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$。这与本段的假设相矛盾。

我们已经验证 $q \geq p$ 是一个条件。 □

断言 6.16. q 具有所需的性质。

证明。设 $r \in \mathbb{P}$ 是一个条件，满足 $\mathrm{rk}_H(r) < \beta$ 且 $r \parallel q$。不失一般性，我们取r 为无瑕的。为说明原因，设给定 r_0，满足 $\mathrm{rk}_H(r) < \beta$ 且 $r_0 \parallel q$。然后在泛型扩张中论证，令 G 为包含 r_0 和 q 的 $\mathbb{P}$-泛型滤子，并应用引理 6.13 得到一个无瑕的 $r \leq r_0$，满足 $\mathrm{rk}_H(r) = \mathrm{rk}_H(r_0)$。此 r仍与 q相容。

我们将证明 $p \cup r$是一个条件。为反证起见，假设并非如此。这意味着存在一个 $\gamma < \gamma^*$，使得 $p{\restriction}\gamma \cup r{\restriction}\gamma \in \mathbb{P}_\gamma$，但 $p{\restriction}\gamma \cup r{\restriction}\gamma \Vdash p(\gamma) \cup r(\gamma) \in \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$。对此需要考虑若干种可能的原因。其中有几种已经出现在定理 5.29 的证明中，排除它们的推理可以原样照搬。根据定理 5.29 相应部分的前五个项目，我们知道 $p(\gamma) \cup r(\gamma)$ 满足定义 5.4 中的条件 c)。此处，我们要求 p满足的第一项性质就派上了用场。此外，条件 d) 和 e) 可由相应条件的初始段强迫出所需陈述这一事实推出；例如，对于每个满足 $\emptyset, x$ 的 x，若 $\emptyset, x \in R_{p(\gamma)}$，则有 $p{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{B}_\gamma$。 $p(\gamma) \cup r(\gamma)$ 不是条件的唯一剩余原因，是未能满足

临界性约束。因此，假设对于一个小极限节点 $\eta \in T_{\alpha_\gamma}$ 以及每个 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，都存在一个 $\nu(\eta') \in \mathrm{succ}(\eta')$，使得 $\langle \nu(\eta')\ x\rangle \in R_{p(\gamma)} \cup R_{r(\gamma)}$，但 $p{\restriction}\gamma \cup r{\restriction}\gamma \nVdash$ “η 不是 x-临界的”。这里，只要可以这样选择，我们总是选择 $\nu(\eta')$ 属于 $R_{p(\gamma)}$。我们分情况讨论：

- $\langle \mathrm{pred}(\eta)\ x\rangle \in R_{p(\gamma)} \cup R_{r(\gamma)}$：根据定理 5.29 第六条中的同一证明，这不可能成立。我们利用了对 p 所要求的第二个性质。
- $\eta = \emptyset$：这不可能发生，因为现在 η 是 x-临界的可能性意味着 $\mathbb{P}_\gamma \nVdash \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，这蕴含着 α_γ 不是极限序数。

- $\eta \in \mathrm{succ}(\emptyset)$ 和 $p{\restriction}\gamma \cup r{\restriction}\gamma \nVdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$：有趣的情形。– $x \in H(\gamma)$：由于 p 和 r 都无瑕，且 x 必定出现在其中之一中，因此存在条件 $t \in \mathbb{P}_\gamma$，使得 $\mathrm{rk}_H(t) = 0$，并且 $t \Vdash x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$，从而 $t \geq p{\restriction}\gamma$ 或 $t \geq r{\restriction}\gamma$。与之前一样，我们注意到，根据 q 的构造，$t \geq p{\restriction}\gamma$ 且 $\mathrm{rk}_H(t) = 0$ 蕴含 $t \geq q{\restriction}\gamma$，总体而言，这意味着任何比 q 和 r 更强的条件 s 都强迫 $s{\restriction}\gamma \Vdash x \in \underset{\sim}{A}_\gamma$。但对于 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，所有有序对 $\nu(\eta')\ x$ 都必须出现在 $R_s(\gamma)$ 中，因此总体而言，这种情形与 s 是一个条件这一事实相矛盾。– $x \notin H(\gamma)$：根据迭代的假设和轨迹的定义，我们可以在这种情况下得出 $\alpha_\gamma > \alpha_0$。由于 $\mathrm{rk}_H(r) < \beta$，$\beta < \alpha_0 < \alpha_\gamma$，且 α_γ 是一个后继序数，我们知道 $\beta < \mathrm{rk}^{T_{\alpha_\gamma}}(\eta)$。由于 $\mathrm{rk}(\eta) = \sup\{\mathrm{rk}(\nu(\eta')) : \eta' \in \mathrm{succ}(\eta)\}$，在假设 $x \notin H(\gamma)$ 下，这意味着对于所有满足 $\mathrm{rk}(\eta') \geq \beta + 1$ 的 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，都有 $\nu(\eta')\ x \in R_p(\gamma)$。如果其余的 $\nu(\eta')\ x$ 也都在 $R_p(\gamma)$ 中，那就意味着 $p{\restriction}\gamma \Vdash x \notin \underset{\sim}{A}_\gamma$，于是我们便得证。因此，对于某个满足 $\mathrm{rk}(\eta') \leq \beta$ 的 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，我们有 $\nu(\eta')\ x \notin R_p(\gamma)$。回想定理开头的准备步骤，这恰好就是我们为 p 所要求的第三个性质而特意准备的情形；由此可知，实际上，对于某个满足 $\mathrm{rk}(\eta') \leq \beta$ 的 $\eta' \in \mathrm{succ}(\eta)$，有 $\eta' x \in R_p(\gamma)$。这就产生了矛盾。□

至此，定理 6.14 的证明结束。 □

7. α-强迫的应用

我们给出若干通过迭代 α-强迫得到的模型。尽管该强迫本身仅是策略性 $<\kappa$-闭的，这些迭代与严格偏序 $\mathbb{BM}'$ 的迭代强迫等价，如引理 5.27 所述。因此，我们可以在诸定理的陈述中写明该强迫扩张是$<\kappa$-闭的。

定理 7.1. 设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$是一个势为 $|X| > \kappa$ 的集合，且 $1 < \alpha < \kappa^+$ 是一个后继序数。则存在宇宙的一个 $<\kappa$-闭、 κ^+-链条件的泛型扩张 $V[G]$，使得

$$V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \alpha.$$

对 $\alpha = \kappa^+$ 同样成立。

证明。我们首先考虑后继 α 的情形，记为 $\alpha = \alpha_0 + 1$。考虑 $<\kappa$-支集强迫迭代 $\mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$：$\gamma < 2^\kappa$，其中 $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{BM}_{\alpha_0}(\emptyset, \emptyset, X)$，且对 $\gamma > 0$，$\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{\alpha_0+1}(\underset{\sim}{A}_\gamma, X \setminus \underset{\sim}{A}_\gamma, X)$。借助记账论证，并注意到每个$\kappa$-博雷尔子集都由 ${}^{\kappa}\kappa$ 的一个元素编码，我们可以确保最终模型中 X 的每个 κ-博雷尔子集最终都作为某个 $\underset{\sim}{A}_\gamma$ 出现。这意味着，对一个 $\mathbb{P}_{2^\kappa}$-泛型滤子 G，每个这样的集合在 $V[G]$ 中都是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$，从而 $V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X) \leq \alpha$。

为了证明 $V[G]$，我们使用定理5.30 得到

$$V[G] \models G_\emptyset(0) \notin \kappa\text{-}\mathbf{\Pi}^0_{\alpha_0}(X).$$

为了看出该定理的假设得到满足，我们考虑这个族

$$\langle \mathrm{rk}_H : H \text{ is a locus with } |H(0)| < \kappa^+ \rangle;$$

由引理 6.14 可知，这些都是序数 $<\alpha_0$ 的秩函数，满足 $h_{\mathrm{rk}_H}(\beta) = \beta + 1$。此外，对于每个 $S \subseteq \mathbb{P}_{2^\kappa}$，由引理 6.9 可知存在轨迹 H，满足 $|H(0)| \leq \kappa$，且对所有 $p \in S$ 都有 $\mathrm{rk}_H(p) = 0$。最后，我们有 $\mathrm{rk}_H(p) \geq \mathrm{rk}^{H(0)}(p(0))$。

因此，引理 5.30 成立，于是我们得到 $V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \alpha$。

对于 $\alpha = \kappa^+$，我们只需使用强迫迭代 $\mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma$：$\gamma < \kappa^+$，其中 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_\gamma(\emptyset, \emptyset, X)$。于是，在每个中间模型中（更详细的说明请参见引理 7.2 的证明），引理 5.30 都成立，这意味着对每个 $\gamma < \kappa^+$，都有 $V^{\mathbb{P}_{\kappa^+}} \models G_\emptyset(\gamma) \notin \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\gamma(X)$。因此，我们有 $V^{\mathbb{P}_{\kappa^+}} \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \kappa^+$。□

人们或许会想，能否将空间的序设为一个不同于 κ^+ 的极限序数。在这方面，我们有一个部分结果。由于看来我们无法直接控制博雷尔层级的极限层级（参见假设 2），因此只能通过将空间分解成更小的部分来间接实现这一点。

定理 7.2。设 $X \subseteq {}^\kappa\kappa$ 是一个大小为 $|X|$ 的空间，其中 $|X|$ 是共尾性为 λ 的极限基数，$|X| > \kappa$。此外，设 $\zeta < \kappa^+$ 是一个共尾性为 λ 的极限序数。那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的泛型扩张 $V[G]$，使得

$$V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \zeta.$$

证明。我们先固定一个在 ζ 中的共尾序列 $\langle \zeta_i : i < \lambda \rangle$，以及一个由在 $\Theta = |X|$ 中共尾的基数组成的严格递增序列$\langle \Theta_i : i < \lambda \rangle$，其中 $\Theta_0 > \kappa$。此外，我们选取一个由 X 的子集构成的递增序列 $\langle \Xi_i : i < \lambda \rangle$，使得 $X = \bigcup_{i<\lambda} \Xi_i$ 且 $|\Xi_i| = \Theta_i^+$。首先通过一个预备偏序进行强迫（对 $\alpha = 2$ 进行 α- 强迫），我们可以假设，对每个 $i < \lambda$，都有 $\Xi_i \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$。

用于构造所需模型的 α-强迫迭代为 $\langle \mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma : \gamma < 2^\kappa \rangle$，其中

- $\mathbb{P}_i \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_i = \mathbb{BM}_{\zeta_i}(\emptyset, \emptyset, \Xi_i)$，适用于 $i < \lambda$
- 对于每个满足 $\lambda \leq \gamma < 2^\kappa$ 的 γ，都存在一个 $j(\gamma) < \lambda$，使得
$$\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{\zeta_{j(\gamma)+1}}(\underset{\sim}{A}_\gamma, \Xi_{j(\gamma)} \setminus \underset{\sim}{A}_\gamma, \Xi_{j(\gamma)})$$
- 通过簿记，我们确保对于每个 $i < \lambda$，最终模型中的每个 κ-博雷尔子集都以如上的 $\underset{\sim}{A}_\gamma$ 的形式出现，其中某个 γ 满足 $j(\gamma) = i$。

最后一个要点确保对于每个 $i < \lambda$，$\mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i) \leq \zeta_i + 1$。为了证明 $\mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i) = \zeta_i + 1$，我们再次运用引理 5.30，它将给出对于每个 $i < \lambda$，$\mathbb{P}_{2^\kappa} \Vdash G_\emptyset(i) \notin \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta_i}(\Xi_i)$。这里，$G_\emptyset(i)$ 是迭代中第 i 个泛型滤子添加的泛型 $\kappa\text{-}\mathbf{\Pi}^0_{\zeta_i}(\Xi_i)$ 集。从技术角度来说，要以这种方式使用该定理，我们是在扩张 $V^{\mathbb{P}_i}$ 中进行论证，并将其应用于尾迭代 $\mathbb{P}_{i,2^\kappa} = \langle \mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma : i \leq \gamma < 2^\kappa \rangle$。

断言 7.3。对于每个 $i < \lambda$，我们都有 $\mathbb{P}_i \Vdash \mathbb{P}_{i,\ 2^\kappa} \Vdash G_\emptyset(i) \notin \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta_i}(\Xi_i)$。

断言的证明。我们在 $V^{\mathbb{P}_i}$ 中进行，并检查引理 5.30 确实适用于基数Θ_i。和之前一样，我们通过断言以下内容来完成这一点：

$$\langle \mathrm{rk}_H : H \text{ is a locus with } |H(0)| \leq \Theta_i \rangle$$

满足定理的假设。我们只证明第2 项成立，其余部分与引理7.1中的证明相同。但若 $\gamma > i$ 且 $\alpha_\gamma \leq \alpha_i$ 并且 $\mathbb{P}_\gamma \not\Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{B}_\gamma = \emptyset$，则 $j(\gamma) \leq i$ 且

因此$|X_\gamma| = \Theta_{j\ (\gamma)}^{+} \leq \Theta_i$。由此，引理6.9（应用于基数 Θ_i^+ ）蕴含引理5.30中的第2项成立。由于 $|\Xi_i| = \Theta_i^+$ ，因此事实上我们甚至有

$$V^{\mathbb{P}_i} \models \mathbb{P}_{i,2^\kappa} \Vdash G_\emptyset(i) \notin \Theta_i\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta_i}(\Xi_i),$$

因此，特别是，这一断言成立。 □

这意味着对于每个 $i < \lambda$ ，我们都有

$$\mathbb{P}_{2^\kappa} \Vdash \mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i) = \zeta_i + 1.$$

由于 $\mathrm{cf}(\zeta) = \lambda$，我们有 $\lambda \leq \kappa_\circ$ 因此，若 $B \subseteq X$ 在最终模型中是 X 的一个 κ-博雷尔子集，那么对于每个 $i < \lambda$，我们都有 $V^{\mathbb{P}_{2^\kappa}} \models B \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{\zeta_i+1}(\Xi_i)$。这立即推出 $V^{\mathbb{P}_{2^\kappa}} \models B \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\zeta(X)$；又由于 $\mathrm{ord}_\kappa(X) \geq \sup_{i<\lambda}\mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i)$，我们得到

$$V^{\mathbb{P}_{2^\kappa}} \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \zeta. \qquad \square$$

注记 7.4。事实上，根据 [Ago+25，命题 4。4], 尤其是 [Ago+25，断言 4.4。1], 每个空间 $X \subseteq {}^\kappa\kappa$其序为一个极限序数 ζ 都具有与引理 7.2中构造的空间类似的形式；存在一个由两两不交的闭子空间组成的序列，其序收敛于 ζ。

引理7.1 还可以通过使用更长的 α-强迫迭代得到其他变体。固定一个正则基数 $\lambda \geq \kappa$ ，并在一次共尾性为 α的 α-强迫迭代中枚举 λ的每个 λ-博雷尔子集 X ，我们便能得到 $\mathrm{ord}_\lambda(X) = \alpha$ 对任意后继序数 α 和 $X \subseteq {}^\kappa\kappa$， $|X| > \lambda$均相容。这是因为引理5.30给出了更强的结论。

如果我们改为迭代至 $\gamma^* = 2^{|X|}$，那么通过记账论证，我们就能涵盖每个 X 的子集，将其作为一个 $\underset{\sim}{A}_\gamma$；这意味着我们不仅能将 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 设为所需的序数，还能得到$\mathcal{P}(X) = \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$。利用引理5.30 以及先前采用的论证，我们可以刻画多个$_\lambda$ 的 ord_λ 同时满足相容赋值的条件。我们将这一观察记录为一个推论。

推论 7.5。假设 $X \subseteq {}^\kappa\kappa$，且 α 是后继序数。那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的泛型扩张 $V[G]$ ，其中 $\mathcal{P}(X) = \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$，并且对于无限基数 λ，

$$\mathrm{ord}_\lambda(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \text{ is discrete} \\ 2 & \text{if } X \text{ is not discrete and } |X| \leq \lambda \\ \alpha & \text{if } X \text{ is not discrete and } \kappa \leq \lambda < |X|. \end{cases}$$

7.1. **同时为多个空间设定** ord_κ 。鉴于第 6.1 节所研究的迭代具有广泛的适用范围，我们甚至可以对 κ-博雷尔结构在 ${}^\kappa\kappa$ 上施加更精细的控制。本节将探讨如何同时为多个空间 X 指定 ord_κ 。尽管我们仍受限于这样一个事实：在所构造过程中被修改的所有空间都必须已包含在基模型中，但事实证明，我们可以一致地按照空间的大小将其区分开来；也就是说，构造一个满足 $\mathrm{ord}_\kappa(X) < \mathrm{ord}_\kappa(Y)$ 当且仅当 $|X| < |Y|$ 的模型。用于这种区分的核心论证已见于引理 7.2。

定理 7.6. 设 f 为一个函数，它将每个满足 $\kappa < \lambda \leq 2^\kappa$ 的基数 λ 映射到一个序数$1 < f(\lambda) \leq \kappa^+$ ，使得

(1) f 是（不一定严格）递增的；(2) 如果 λ是后继基数，那么 $f(\lambda)$ 是后继序数，或者 $f(\lambda) = \kappa^+$；(3) 连续性：如果 λ是极限基数，那么 $f(\lambda) = \sup_{\lambda'<\lambda} f(\lambda')$。

T那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的泛型扩张 $V[G]$，它扩张了宇宙，使得

$$V[G] \models \forall X \subseteq {}^{\kappa}\kappa, X \in V, |X| > \kappa : \mathrm{ord}_\kappa(X) = f(|X|).$$

证明。对于每个满足 $|X|$ 为极限基数且 $f(|X|)$ 为极限序数的 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$，我们先固定一个在 $|X|$ 中由后继基数组成的共尾序列 ζ_i^X: $i <\mathrm{cf}(|X|)$。注意，由于 f 的连续性，现在 $f(\zeta_i^X) : i <\mathrm{cf}(|X|)$ 是一个在 $f(|X|)$ 中共尾的后继序数序列。最后，固定一个 $\subseteq$-递增序列 Ξ_i^X: $i < \mathrm{cf}(|X|)$，其各项都是 X 的子集，且满足 $|\Xi_i^X| = \zeta_i$。构造的第一步将是进行预备强迫，即通过 α-强迫的迭代得到泛型扩张，并具有如下性质：对于每个上述的 X 以及 $i < \mathrm{cf}(|X|)$，强迫$\mathbb{BM}_2(\Xi_i^X, X\setminus\Xi_i^X, X)$ 都会出现。因此，不失一般性，我们可以假设基模型 V 已经满足：对于所有这样的 X, i，都有 $V \models \Xi_i^X \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$。

对于强迫的主要构造，我们取一个足够长的 α-强迫迭代 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\gamma, \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma : \gamma < \gamma^*\rangle$，使得以下强迫且仅有 以下强迫会出现：

(1) 将基模型中 ${}^{\kappa}\kappa$ 的所有子集枚举为 $\langle X_j : j < 2^{2^\kappa}\rangle$。那么， $\mathbb{P}$ 的前 2^{2^κ} 个迭代因子应如下所示：

- 若 $f(|X_j|) = f(|X_j|)^- + 1$ 是一个后继序数，那么存在一个 $\gamma < 2^{2^\kappa}$，使得 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{f(|X_j|)^-}(\emptyset, \emptyset, X_j)$。
- 若 $f(|X_j|) = \kappa^+$，那么对每个 $\alpha < \kappa^+$，都存在一个 $\gamma < 2^{2^\kappa}$，使得 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X_j)$。
- 如果 $f(|X_j|) < \kappa^+$ 是极限序数，那么可知 $|X_j|$ 是极限基数。对于这种情况，我们不对迭代作任何要求。

(2) 对于迭代因子 $\gamma \geq 2^{2^\kappa}$，应存在一个 $Y(\gamma) \subseteq {}^{\kappa}\kappa$，使得 $f(|Y(\gamma)|)$ 是后继序数，并且 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{f(|Y(\gamma)|)}(\underset{\sim}{A}_\gamma,\ Y(\gamma) \setminus \underset{\sim}{A}_\gamma,\ Y(\gamma))$. (3) 通过簿记，确保对于每个 $X \in V$，若 $f(|X|)$ 是后继序数，并且对于最终模型中 X 的每个名称为 $\underset{\sim}{A}$ 的 κ-博雷尔子集，都存在一个 $\gamma < \gamma^*$，使得$Y(\gamma) = X$ 且 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{A}_\gamma = \underset{\sim}{A}$。

首先，让我们验证定理陈述中所声称的上界。于是，设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$给定。若 $f(|X|)$ 是后继序数，那么上面的第三个子句保证，在 $V^{\mathbb{P}}$ 中， X 的每个 κ-博雷尔子集都会作为迭代中某个强迫 $\mathbb{BM}_{f(|X|)}(\underset{\sim}{A}, X\setminus \underset{\sim}{A}, X)$ 的参数出现；因此，在最终模型中，我们有 $V^{\mathbb{P}} \models \forall A \subseteq X, A \in \kappa\text{-}\mathrm{Bor}(X) : A \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{f(|X|)}(X)$，这意味着 $V^{\mathbb{P}} \models \mathrm{ord}_\kappa(X) \leq f(|X|)$。若 $f(|X|) = \kappa^+$，则无需证明。最后，若$f(|X|) < \kappa^+$ 是极限，那么 $|X|$ 是极限基数。由证明的开头可恢复序列 Ξ_i^X: $i < \mathrm{cf}(|X|)$，并注意到由于 $|\Xi_i^X|$ 全都是后继基数，我们有$V^{\mathbb{P}} \models \mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i^X) \leq f(|\Xi_i^X|) = f(\zeta_i^X)$。特别地，对于每个 $A \subseteq X$、 $A \in V^{\mathbb{P}}$ 以及满足 $\mathrm{cf}(|X|)$ 的 $i <$，都有 $V^{\mathbb{P}} \models A \cap \Xi_i^X \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{f(\zeta_i^X)}(\Xi_i^X)$。由于我们还确保了 $V^{\mathbb{P}} \models \Xi_i^X \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_2(X)$，因此我们有

$$V^{\mathbb{P}} \models A = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(|X|)} [A \cap \Xi_i^X] \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{\sup_{i<\mathrm{cf}(|X|)} f(\zeta_i^X)}(X) = \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_{f(|X|)}(X).$$

注意，这里 $\mathrm{cf}(|X|) \leq \kappa$ 必须成立，因为 $\mathrm{cf}(f(|X|)) \leq \kappa$。因此， $V^{\mathbb{P}} \models \mathrm{ord}_\kappa(X) \leq f(|X|)$ 也成立。

现在我们来讨论下界。只需验证X 的下界，其中 $|X|$ 是后继基数。为说明原因，我们首先指出，对于满足$f(|X|) < \kappa^+$为极限的空间 X，命题 $V^{\mathbb{P}} \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = f(|X|)$ 将直接由以下事实推出：

---

[6] $f(|X|)$ c an 可以是后继序数，当且仅当 f 在 $|X|$ 以下最终为常数，且其值为 ue $<\kappa^+$.

$V^{\mathbb{P}} \models \mathrm{ord}_\kappa(\Xi_i^X) = f(\zeta_i^X)$, $i < \mathrm{cf}(|X|)$。类似地，如果最小的基数 Θ 满足 $f(\Theta) = \kappa^+$ 为极限基数，那么 $\mathrm{cf}(\Theta) = \kappa^+$，因此对于任意满足 $|X| = \Theta$ 的 X，存在一个子空间序列 X，其序依连续性 f 收敛到 κ^+，故由 ord_κ 的单调性可得 $\mathrm{ord}_\kappa(X) = \kappa^+$。

因此，设给定的 $X \subseteq {}^{<\kappa}\kappa$ 的大小为后继基数 $|X| = (|X|^-)^+$。如果[7] $f(X) = f(|X|)^- + 1$ 是后继，则存在一个 $\gamma < 2^{2^\kappa}$，使得 $\mathbb{P}_\gamma \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\gamma = \mathbb{BM}_{f(|X|)^-}(\emptyset, \emptyset, X)$。再次在第 γ 个模型中工作，我们声称引理 5.30 可应用于 $\lambda = |X|^-$。要理解其中原因，只需知道引理 6.9 对 $\lambda = |X|$ 成立；但如果在这次迭代中 $\gamma' > \gamma$ 满足 $\alpha_{\gamma'} \leq f(|X|)^-$，那么必然有

$$\mathbb{P}_{\gamma'} \Vdash \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_{\gamma'} = \mathbb{BM}_{f(|Y(\gamma')|)}(\underset{\sim}{A}_{\gamma'}, Y(\gamma') \setminus \underset{\sim}{A}_{\gamma'}, Y(\gamma'))$$

其中 $|Y(\gamma')| < |X|$ 根据 f 的单调性。于是我们就完成了，引理 5.30 适用，并且 $V^{\mathbb{P}} \models$ 序型$_\kappa(X) = f(|X|)$。剩下的情形是，$|X|$ 是后继基数，但 $f(|X|) = \kappa^+$，证明方法相同；此时我们使用以下事实：在迭代的第一部分中，对于每个 $\mathbb{BM}_\alpha(\emptyset, \emptyset, X)$ 都添加了泛型对象 $\alpha < \kappa^+$。

至此，定理的证明结束。 □

注 7.7. 引理 f 中的连续性要求 7.6 是必要的。假设我们有一个基数的递增序列 $\langle \Theta_i : i < \delta \rangle$ $\delta \leq \kappa$、一个相应的序数递增序列 $\langle \zeta_i : i < \delta \rangle$，以及一个（不一定是强迫扩张的）满足以下条件的宇宙外模型 $V' \supseteq V$：

$$V' \models \forall X \subseteq {}^{<\kappa}\kappa, X \in V : |X| = \Theta_i \Rightarrow \mathrm{ord}_\kappa(X) = \zeta_i.$$

那么，考虑任意一个 $\langle X_i : i < \delta \rangle$，其中 $|X_i| = \Theta_i$ 以开闭集分离；也就是说，对于任意 i，都存在一个开闭集 C，使得 $X_i \subseteq C$，且 $X_j \cap C = \emptyset$ 对于 $j \neq i$ 成立。那么对于 $X = \bigcup_{i<\delta} X_i$，我们知道 $X_i \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$，因此根据熟知的论证，$V' \models \mathrm{ord}_\kappa(X) = \sup_{i<\delta} \zeta_i$。

注释 7.8. 要使 $\alpha_1 = \mathrm{ord}_\kappa(X) < \mathrm{ord}_\kappa(Y) = \alpha_2$ 有一个模型，至少必须满足 Y 不能通过连续映射嵌入到 X 中（甚至不能通过低复杂度的 κ-博雷尔可测映射嵌入），此外，这一性质还必须在所采用的强迫下保持。如果 $|X| < |Y|$，那么情况必然如此；但我们并不排除这样的可能性：对 α-强迫的秩强迫性质进行更精细的分析，或许能得出限制较少的要求。目前，唯一一个不依赖基数差异来区分两个空间之序的例子，出现在 [Mil79 的第二部分定理 22], 中，其中专门针对一组彼此 Cohen 泛型的实数完成了这一论证。这些论证似乎无法更广泛地应用。

7.2. **保持可定义性。** 描述集合论中有一个普遍事实：每个实数集的博雷尔子集 B 都满足完美集性质，也就是说，它要么是可数的，要么存在一个连续嵌入 ${}^\omega 2 \hookrightarrow B$。转而研究不可数基数的广义描述集合论时，人们很快会注意到，许多拓扑二分定理不再成立；完美集性质也不例外，而且很容易（相容地）构造出甚至是闭的反例，例如 κ-Kurepa 树。

Silver 的一个论证 [Sil71]表明，给定一棵树 $T \subseteq {}^{<\omega_1}\omega_1$，除非它在基模型中有一棵完美子树，否则这棵树在 σ-闭强迫扩张中不会获得任何新的分支。后来，L¨ucke 将这一结果推广到解析集类 [L¨uc12，引理 7。6]并将其调整为适用于 κ-博雷尔码的情形，见 [Ago+25]。对于一个 κ-博雷尔集 $X \subseteq {}^{<\kappa}\kappa$ 以及一个外部

[7] 这里我们 采用一种非标准但颇为形象的记号：令 θ^- 表示前一个基数（若 θ i s a 后继基 数），若 θ 是后继序数，则表示前一个序数。

宇宙的模型 $V\prime \supseteq V$，记号 $X^{(V')}$ 指的是：在外模型中，将一个[8] κ-博雷尔码重新解释为 X 的一个 κ-博雷尔子集 ${}^{\kappa}\kappa \cap V\prime$。

命题 7.9 ([L¨uc12，引理 7.6], [Ago+25，推论 6.10])。设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$是 κ-博雷尔的。那么以下命题等价：

(1) 每个 $<\kappa$-闭强迫 $\mathbb{P}$ 若添加了一个新的 κ 子集，就会向 X添加一个新元素，即 $\mathbb{P} \Vdash X^{(V)} \subsetneq X^{(V^{\mathbb{P}})}$。(2) 存在一个 $<\kappa$-闭强迫，它向 X添加一个新元素。(3) X 在 V中有一个完美子集：存在从 ${}^{\kappa}2$到$\to X$ 的连续嵌入，且其像是闭集。(4) 存在一个 κ-博雷尔可测的[9]单射，将 ${}^{\kappa}2$嵌入 X。

由于本节中的每个模型都是通过对基模型进行 $<\kappa$-闭强迫扩张构造的，因此都可以附加如下条件：若任何这样的空间 X 是 κ-博雷尔可定义的 ${}^{\kappa}\kappa \cap V$子集，且 X 在 V中不含完美子集，则相应定理的结论成立，并且同一个 κ-博雷尔编码也定义了扩张中作为 X 子集的 ${}^{\kappa}\kappa \cap V^{\mathbb{P}}$。例如，我们得到引理 7.1的一个变体：

推论 7.10。设 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$是一个大小为 $|X| > \kappa$ 的集合，且 $1 < \alpha \leq \kappa^+$ 是一个后继序数或 $\alpha = \kappa^+$。假设 X 是 V中 ${}^{\kappa}\kappa$的一个 κ-博雷尔子集，且没有完美子集。那么存在一个 $<\kappa$-闭、满足 κ^+-链条件的强迫扩张，使其满足

$$V[G] \models \mathrm{ord}_\kappa(X^{(V)}) = \alpha \text{ and } X^{(V)} = X^{(V[G])}.$$

以下结果出自 Hamkins；我们引用的是 [Ago+25，定理 6 中给出的形式。12]。

定理 7.11 ([Ham01，关键引理])。设 $\mathbb{P}$ 是一个大小为 $|\mathbb{P}| < \kappa$的非平凡强迫概念。那么对于基模型中的任意闭集 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$,

$$V^{\mathbb{P}} \models X^{(V)} \text{ is closed with no perfect subset.}$$

考虑 V的泛型扩张：先用一个大小为 $<\kappa$的偏序进行强迫，然后接着进行 $\mathbb{BM}_2(X, ({}^{\kappa}\kappa \cap V) \setminus X, {}^{\kappa}\kappa \cap V)$ 的迭代，其中每个 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa, X \in V$都作为参数出现；这与引理 7.5 中使用的扩张类似。第一次强迫之后，根据引理 7.11，${}^{\kappa}\kappa \cap V$ 是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_1({}^{\kappa}\kappa)$，而根据引理 7.9，这在最终模型中也成立。因此，对于所有 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa, X \in V$，最终模型都满足 $X \in \kappa$-$\mathbf{\Sigma}^0_2({}^{\kappa}\kappa)$。之后，可以应用本节定理中的任意强迫迭代来改变 $\mathrm{ord}_\kappa(X)$ 对于 $X \in V$ 的取值。作为示例，我们给出引理 7.6 的一个变体。

推论 7.12。设 f 是一个满足引理7.6 中所列性质的函数，且 $\mathbb{P}$是一个大小为 $<\kappa$ 的非平凡强迫。那么存在一个 $\mathbb{P}$-名称 $\mathbb{Q}$，对应于一个 $<\kappa$-闭的、 κ^+-链条件强迫，使得$\widetilde{\ }$:

$$V^{\mathbb{P}\star\dot{\mathbb{Q}}} \models \forall X \subseteq {}^{\kappa}\kappa, X \in V, |X| > \kappa : \mathrm{ord}_\kappa(X) = f(|X|) \wedge X \in \kappa\text{-}\mathbf{\Sigma}^0_2({}^{\kappa}\kappa).$$

我们还表述了我们与 Agostini、Motto Ros 和 Pitton 之前共同得到的结果的一个推广。

推论 7.13。对于任意 $0 < \alpha \leq \kappa^+$，一致地存在一个闭子集 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$，使得 $\mathrm{ord}_\kappa(X) = \alpha$。

[8]这主要在以下情况下是合理的：V 是 V'的一个 κ-$\mathbf{\Sigma}^1_1$-初等子模型；在这种情况下，所选编码并不重要。[9]如果每个开集的原像都是 κ-博雷尔集，则称函数为 κ- κ可测。

证明。对于 $\alpha = 1$，取任意满足 $|X| = 1$ 的 X；同样，对于 $\alpha = \kappa^+$，整个空间 $X = {}^{\kappa}\kappa$ 即可。

对于后继 α，先用大小为 $<\kappa$ 的强迫进行强迫，使 ${}^{\kappa}\kappa \cap V$ 变成一个没有完美子集的闭集，然后应用引理 7.1。接着，在扩张中 $\mathrm{ord}_\kappa({}^{\kappa}\kappa \cap V) = \alpha$，根据引理 7.9 它仍然是闭的。

对于 $\alpha < \kappa^+$ 极限，只需构造一个闭集 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$，其中 $|X| > \kappa$ 是一个满足 $\mathrm{cf}(|X|) = \mathrm{cf}(\alpha)$ 的极限基数。随后，我们可以应用引理 7.11 和引理7.2 得到所述结论。因此，任取一个共尾性为 $\mathrm{cf}(\Lambda > \kappa)$ $\Lambda\mathrm{cf}(=)$ 的基数 $\alpha_\circ$ 构造一个大小为 $X \subseteq {}^{\kappa}\kappa$ 的闭集 Λ 模型的一种可能方法如下：采用 Holy 和 L¨ucke 的结果（例如参见 [HL17、定义 2.1、定理 2.3]）可知，存在一个强迫 $\mathbb{K}$，它会添加一棵树 $T \subseteq {}^{<\kappa}\kappa$，使得

$$V^{\mathbb{K}} \models [T] \text{ has no perfect subset}$$

和[10] $V^{\mathbb{K}} \models |[T]| = 2^\kappa = (2^\kappa)^V$。该强迫是 $<\kappa$-闭的，并具有强版本的 κ^+-链条件，特别是它满足 $(\heartsuit)$，且根据引理 5.23，它可以迭代。因此，为了构造我们所需的模型，从一个 $2^\kappa = \kappa^+$ 模型开始，并在一个支集为 $<\kappa$、长度为 $\mathrm{cf}(\Lambda)$ 的迭代中，交替使用强迫 $\mathbb{K}$ 和使 2^κ递增的强迫。由于由 $\mathbb{K}$ 添加的泛型树 T 没有完美子集，这种方法使我们能够添加一个树的序列 $\langle T_i : i < \mathrm{cf}(\Lambda)\rangle$，使得 $\langle |[T_i]| : i < \mathrm{cf}(\Lambda)\rangle$ 是一个严格递增且趋近于 Λ 的基数序列。于是，在最终模型中，$T^* = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\Lambda)} T_i$是一个具有 $|[T^*]| = \Lambda$ 的树。□

8. κ-斯蒂尔强迫

本节中，我们考察 Steel 的标记树迫使的一种可能推广 [Ste78a]，并证明它符合秩强迫的框架。作为应用，我们计算某些良基树类的 κ-博雷尔复杂度。

我们首先定义 κ-斯蒂尔强迫的一个稠密子集。

定义 8.1。令 $\alpha \leq \kappa^+$ 为一个序数。定义强迫 $\mathbb{S}'_\alpha$，它由所有满足下列条件的有序对 $p = \langle t_p, \rho_p\rangle$组成：

- $t_p \subseteq {}^{<\omega}\kappa$是一个大小为 $<\kappa$的良基树，
- $\rho_p : t_p \to \alpha$ 是一个函数，使得对所有 $\eta \subsetneq \nu$，都有 $\rho_p(\eta) > \rho_p(\nu)$。

当且仅当 $t_p \subseteq t_q$ 且 $\rho_p \subseteq \rho_q$时，序关系由 $q \leq p$ 给出。

函数 ρ_p 称为 t_p的标记。每个泛型滤子 $G \subseteq \mathbb{S}'_\alpha$ 定义一个有序对$\langle t_G, \rho_G\rangle : = \bigcup_{p\in G}\langle t_p, \rho_p\rangle$。由稠密性不难看出，$t_G \subseteq {}^{<\omega}\kappa$是一棵良基树，并且 $\rho_G : t_G \to \alpha$把每个节点映成它在 t_G中的良基秩。

该定义与通常对 $\kappa = \omega$ 的 Steel 强迫处理方式一致。不过，为了引入排序函数，使用一种经过调整的偏序会更加方便；该偏序允许部分标记，并包含 $\mathbb{S}'_\alpha$ 作为稠密子集。与可数情形相比，一个变化是引入 $<\kappa$-闭性作为强迫的理想正则性；这与良基性本质上依赖于 ω这一事实产生了张力。因此，鉴于我们的应用涉及对博雷尔码进行编码，我们放弃了使用∞-标签的可能性；经典上，这种标签用于控制泛型树的非良基部分。由非良基树构成的另一种强迫推广见 S. D. Friedman[Fri84] 的工作。

[10]为看出这一点，注意这些树 $\dot{T}^G_\alpha$构造于 [HL17，定理2。3] 对于 $A = {}^{\kappa}\kappa \cap V$除至多$<\kappa$处修改外全都相同，因而大小全都相同。

定义 8.2。 设 $\alpha \leq \kappa^+$ 为一个序数。 κ-*Steel* 强迫 $\mathbb{S}_\alpha$ 由所有满足以下条件的三元组组成： $p = \langle t_p,\ \rho_p,\ \bar{\rho}_p \rangle$

- $t_p \subseteq {}^{<\omega}\kappa$是一个大小为 $<\kappa$ 的良基树，
- $\rho_p,\ \bar{\rho}_p \colon\ t_p \to \alpha$是偏函数，满足 $\mathrm{dom}(\rho_p) \cup \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p) = t_p$且 $\mathrm{dom}(\rho_p) \cap \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p) = \emptyset$,
- 对于每个有序对 $\eta,\ \nu$，若 $\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$，则以下情况之一成立：– $\{\nu,\ \eta\} \subseteq \mathrm{dom}(\rho_p)$，且 $\rho_p(\nu) < \rho_p(\eta)$，– $\{\nu,\ \eta\} \subseteq \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p)$，且 $\bar{\rho}_p(\nu) < \bar{\rho}_p(\eta)$，– $\nu \in \mathrm{dom}(\rho_p)\ \eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p)$，且 $\rho_p(\eta) < \bar{\rho}_p(\eta)$。

当且仅当 $q \leq p$ $t_p \subseteq t_q$、 $\rho_p \subseteq \rho_q$，并且对每个 $\eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p)$，我们有以下两种情况之一：

- $\eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_q)$ 且 $\bar{\rho}_q(\eta) \geq \bar{\rho}_p(\eta)$，或者
- $\eta \in \mathrm{dom}(\rho_q)$ 和 $\rho_q(\eta) \geq \bar{\rho}_p(\eta)$。

根据定义， $\mathbb{S}'_\alpha$ 是 $\mathbb{S}_\alpha$ 的稠密子强迫，因此二者之间的差异对所生成的强迫扩张没有影响。语句 $\bar{\rho}_p(\eta) = \beta$ 被解释为一个承诺： η 在 t_G 中的（最终）标签将大于或等于 β。

引理 8.3. $\mathbb{S}'_\alpha$ 是 $<\kappa$-闭的。

证明。 设 $\langle t_i,\ \rho_i \rangle\ i < \delta < \kappa$ 是 $\mathbb{S}'_\alpha$ 中条件的递减序列。构造$\langle t,\ \rho \rangle = \bigcup_{i<\delta} \langle t_i,\ \rho_i \rangle$ 后，唯一需要检查的是 t 是否良基。但如果$\langle \eta_j \colon\ j < \omega \rangle$ 是 t 的一个分支，那么$\langle \rho(\eta_j) \colon\ j < \omega \rangle$ 将构成一个序数的严格递减序列。□

因此 $\mathbb{S}_\alpha$ 是策略性 $<\kappa$-闭的，参见引理 5.19。

对于条件 $p \in \mathbb{S}_\alpha$，我们定义其秩

$$\mathrm{rk}(p) := \sup \{ \max(\rho_p(\eta), \bar{\rho}_p(\nu)) : \eta \in \mathrm{dom}(\rho_p), \nu \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p) \}.$$

此外，对于 $p \in \mathbb{S}_\alpha$ 和序数 β，定义

$$\pi(p, \beta) := \langle t_p, \rho', \bar{\rho}' \rangle$$

其中 $\rho' \colon = \rho_p \restriction \{\eta \in \mathrm{dom}(\rho_p) \colon\ \rho_p(\eta) < \beta\}$ 且

$$\bar{\rho}'(\eta) := \begin{cases} \bar{\rho}_p(\eta) & \text{if } \eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_p) \text{ and } \bar{\rho}_p(\eta) < \beta \\ \max\left(\beta, \sup \left\{ \begin{array}{c} \max(\rho'(\nu_1) + 1, \bar{\rho}'(\nu_2) + 1) : \\ \nu_1 \in \mathrm{succ}(\eta) \cap \mathrm{dom}(\rho'), \\ \nu_2 \in \mathrm{succ}(\eta) \cap \mathrm{dom}(\bar{\rho}') \end{array} \right\} \right) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $\eta \in t_p \setminus \mathrm{dom}(\rho')$。容易看出，对于 $\beta < \beta'$，我们有

$$p = \pi(p, \mathrm{rk}(p) + 1) \leq \pi(p, \beta') \leq \pi(p, \beta).$$

由于 $|t_p| < \kappa$，我们可以对 t_p 的节点使用归纳法，得到 $\mathrm{rk}(\pi(p,\ \beta)) < \beta + \kappa$。

定理 8.4。 函数 rk 是 $\mathbb{S}_\alpha$ 上的秩函数，且 $h_{\mathrm{rk}}(\beta) = \beta + \kappa$。事实上，若 $\beta < \alpha$，则对每个 $p \in \mathbb{S}_\alpha$ 和 β，我们可以在定义 $q = \pi(p, \beta)$ 中选取 4.1。

证明。 固定一个条件 $p \in \mathbb{S}_\alpha$ 和一个序数 $\beta < \alpha$；令 $q := \pi(p, \beta)$。注意，我们已经指出 $p \leq q$ 且 $\mathrm{rk}(q) < \beta + \kappa$。我们希望证明，对于每个 $r \in \mathbb{S}_\alpha$,，若 $\mathrm{rk}(r) < \beta$，则有

$$r \parallel q \implies r \parallel p.$$

给定这样的一个 r。为证明 $r \parallel p$，我们将构造一个 $\hat{}p \leq r, p$，使得 $\hat{}p \in \mathbb{S}'_\alpha$。定义 $\hat{}p = t_p \cup t_r, \rho', \emptyset$，其中 $\rho'(\eta)$ 简单地定义为 $\rho_p(\eta)$ $\bar{\rho}_p(\eta)$ $\rho_r(\eta)$ $\bar{\rho}_r(\eta)$ 中的最大值，或者仅取这些有定义的值中的最大值。对于每个 η，根据取得该最大值的位置进行分类讨论，我们可以看出 $\hat{}p$ 是一个条件。举例来说，假设$\nu \in \mathrm{succ}(\eta)$ 且 $\rho'(\nu) = \rho_p(\nu)$。那么我们知道，要么 $\rho_p(\eta) > \rho_p(\nu)$，要么 $\bar{\rho}_p(\eta) > \rho_p(\nu)$。无论哪种情况，$\rho'(\nu) < \max(\rho_p(\eta)\ \bar{\rho}_p(\eta)) \leq \rho'(\eta)$。其他情况类似。

困难之处在于证明 $\hat{}p \leq p,\ r$。$\hat{}p \leq p$ 唯一可能不成立的情形是，存在一个 $\eta \in t_p \cap \mathrm{dom}(\rho_p)$，使得 $\rho'(\eta) > \rho_p(\eta)$，因此我们假设情况确实如此。特别地，这意味着$\eta \in t_r$。我们分情况讨论。

- 如果 $\rho_p(\eta) \geq \beta$，那么我们知道 $\eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_q)$ 且 $\bar{\rho}_q(\eta) \geq \beta$。但由于 $r \parallel q$ 且 $\mathrm{rk}(r) < \beta$，这意味着 $\eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_r)$ 且 $\bar{\rho}_r(\eta) < \beta$。综上，$\rho_r(\eta) = \rho_p(\eta)$。
- 如果 $\rho_p(\eta) < \beta$，那么 $\rho_q(\eta) = \rho_p(\eta)$。这立即意味着，要么 $\eta \in \mathrm{dom}(\rho_r)$ 且$\rho_r(\eta) = \rho_p(\eta)$，要么 $\eta \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_r)$ 且 $\bar{\rho}_r(\eta) \leq \rho_p(\eta)$。无论哪种情况，$\rho_r(\eta) = \rho_p(\eta)$。

同样，我们也证明了 $\hat{}p \leq r$。若非如此，则存在一个 $\eta \in t_p \cap t_r$，使得$\rho_p(\eta) > \rho_r(\eta)$ 或 $\bar{\rho}_p(\eta) > \rho_r(\eta)$。

- 若 $\rho_r(\eta) < \rho_p(\eta) < \beta$，则 $\rho_q(\eta) = \rho_p(\eta)$，因此 $q \perp r$。
- 若 $\rho_r(\eta) < \bar{\rho}_p(\eta) < \beta$，则同样有 $\bar{\rho}_q(\eta) = \bar{\rho}_p(\eta)$，从而 $q \perp r$。
- 若 $\rho_p(\eta) \geq \beta$或 $\bar{\rho}_p(\eta) \geq \beta$，则 $\bar{\rho}_q(\eta) \geq \beta$。但 $\mathrm{rk}(r) < \beta$，因此 $q \perp r$。 □

对于某些 β，若只考虑特殊形式的条件 r，我们可以改进先前的结果。

引理 8.5. 设 $p \in \mathbb{S}_\alpha$ 与 $\beta < \alpha$。令

$$\beta' := \sup\{\max(\rho_p(\eta), \bar{\rho}_p(\nu)) : \rho_p(\eta) < \beta + \kappa, \bar{\rho}_p(\nu) < \beta + \kappa\} + 1,$$

定义 $q := \pi(p, \beta')$。则对每个形如 $r = \pi(t, \beta)$ 的条件 r（对某个 $t \in \mathbb{S}_\alpha$），我们有

$$t \parallel q \Rightarrow t \parallel p.$$

证明。 类似于定理 8.4。对给定的条件 p 与 $r = \pi(t, \beta)$，且 $r \parallel q$，让我们再次定义 $\hat{}p$ 如前；我们断言 $\hat{}p \leq p,\ r$。若此不成立，则必存在一个 $\eta \in t_p \cap t_r$ 使得下列情形之一成立：

- $\rho_p(\eta) < \rho_r(\eta)$：由于 $r = \pi(t, \beta)$，我们有 $\rho_r(\eta) < \beta$，这将蕴含 $\rho_p(\eta) < \beta$，从而 $\rho_q(\eta) = \rho_p(\eta)$，故 $q \perp r$。
- $\rho_p(\eta) < \bar{\rho}_r(\eta)$：特别地，$\rho_p(\eta) < \beta + \kappa$。这意味着 $\rho_p(\eta) < \beta\prime$，根据 $\beta\prime$ 的定义，从而 $\rho_q(\eta) = \rho_p(\eta)$。

- $\rho_r(\eta) < \rho_p(\eta) < \beta\prime$：在这种情况下，$\rho_q(\eta) = \rho_p(\eta)$，因此 $q \perp r$。
- $\rho_r(\eta) < \rho_p(\eta)$ 和 $\rho_p(\eta) \geq \beta + \kappa$：我们有 $\bar{\rho}_q(\eta) \geq \beta\prime$ 但 $\rho_r(\eta) < \beta$，这是不可能的。
- $\rho_r(\eta) < \bar{\rho}_p(\eta) < \beta\prime$：再一次，$\bar{\rho}_q(\eta) = \bar{\rho}_p(\eta)$，这意味着 $q \perp r$。
- $\rho_r(\eta) < \bar{\rho}_p(\eta)$ 和 $\bar{\rho}_p(\eta) \geq \beta + \kappa$：我们有 $\bar{\rho}_q \geq \beta\prime$，但 $\rho_r(\eta) < \beta$，矛盾。 □

在文献中，定理 8.4中的 rk 是一个秩函数这一事实，以及定理4.2因而对这种语言成立，通常以重标记引理 [Ste78a，引理 1]的形式表述。强迫的一个重要应用出现在哈林顿关于解析决定性与实数的锐存在性之间联系的工作中 [Har78]。对斯蒂尔所考虑语言中句子复杂度的分析表明，这里得到的界比[Ste78a，引理 1]中的界更为有效。不过，仍有改进空间；下一小节将给出强迫某些句子所需条件的秩的更精确界，并证明这些界的最优性。

8.1. **计算良基树的复杂度**。 本节始终处理 κ-博雷尔子集 $\mathcal{P}(<^\omega\kappa)$。回顾一下，$\mathcal{P}(<^\omega\kappa)$ 携带一个由与 $^\kappa 2$ 的自然同构导出的拓扑。具体而言，该拓扑由一族基本既开又闭集生成，这族集合由所有形如 $\{T \subseteq <^\omega\kappa\colon\ \eta \in T\}$ 和 $\{T \subseteq <^\omega\kappa\colon\ \eta \notin T\}$的 $<\kappa$-大小交集组成，其中 $\eta \in <^\omega\kappa$。

定义 8.6. 对于一个序数 $\alpha \leq \kappa^+$，我们定义

$$WF_\alpha = \{x \subseteq <^\omega\kappa : x \text{ is a well-founded tree of rank } <\alpha\}.$$

与 [Jec03, 引理 25.10], 中相同的论证表明，对于任意 $\alpha < \kappa^+$，$WF_{<\alpha}$ 是 $\mathrm{P}(<^\omega\kappa)$ $\simeq 2^\kappa$ 中的 κ- 博雷尔集。这些集合在经典情形下的确切博雷尔复杂度已由 Stern [Ste78b] 计算得出，并且与关于 Steel 强迫的秩论证密切相关。在本节中，我们将证明，类似的界在广义情形下也成立。这里需要指出，研究良基树是一个广义情形通常会与经典情形产生分歧的问题。$<^\omega\omega$ 的所有良基子树构成一个关于类 ω-$\mathbf{\Pi}^1_1(\mathrm{P}(<^\omega\omega))$ 的完全[11] 集，因此它不是博雷尔集。与此相反，$<^\omega\kappa$ 的所有良基子树组成的类 WF_{κ^+} 在 $\mathrm{P}(<^\omega\kappa)$ 中是闭集，因为存在无穷枝这一事实可由该树的一个初始 $<\kappa$-大小的片段编码。因此，人们或许不会预期有界秩的类仍然表现相似。

F在本节的其余部分，令 $\bar{A} = \{\text{“}t_G \in B\text{”}\colon\ B \text{ 是 } \mathcal{P}(<^\omega\kappa) \text{ 中的一个基本闭开子集}\}$.

引理 8.7。 设 B 是 $\mathcal{P}(<^\omega\kappa)$ 的一个 κ-$\mathbf{\Pi}^0_\beta$ 子集的（编码）。那么对于 $\alpha > \beta$，存在一个¯句子 $[\phi] \in \Pi_\beta(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{S}_\alpha})$，使得

$$\mathbb{S}_\alpha \Vdash \phi \Leftrightarrow t_G \in B.$$

证明。 编码 B 的构造立即给出了句子 ϕ。如果 $\beta = 0$，那么我们稍微滥用记号，令 κ-$\mathbf{\Pi}^0_0(\mathcal{P}(<^\omega\kappa))$ 表示 $\mathcal{P}(<^\omega\kappa)$ 的基本闭开子集类；于是根据定义，存在这样的句子 ϕ。否则，$\beta > 0$ 且 $B = \bigcap_{i<\kappa} B_i$，其中$B_i \in \bigcup_{\beta'<\beta} \kappa$-$\mathbf{\Sigma}^0_{\beta'}(\mathcal{P}(<^\omega\kappa))$。根据归纳法，存在句子 $[\phi_i] \in \bigcup_{\beta'<\beta} \Sigma_{\beta'}(\mathcal{L}_\infty(\bar{A})/_{\mathbb{S}_\alpha})$，使得

$$\mathbb{S}_\alpha \Vdash \phi_i \leftrightarrow t_G \in B_i$$

对每个 $i < \kappa$。因此 $\phi := \bigwedge_{i<\kappa} \phi_i$ 成立。 □

¯**引理 8.8**。 设 $p \in \mathbb{S}_\alpha$ 和 $a \in A$ 满足 $p \Vdash a$。那么，令

$$\beta = \sup\{\max(\rho_p(\eta_1), \bar{\rho}_p(\eta_2)) : \rho_p(\eta_1) < \omega, \bar{\rho}_p(\eta_2) < \omega\} + 1,$$

我们有 $\pi(p,\ \beta) \Vdash a$。

证明。 只需考虑某个 $\eta \in <^\omega\kappa$对应的 $a =$ “$\eta \in t_G$”和 $a =$ “$\eta \notin t_G$”。

注意，$p \Vdash \eta \in t_G$ 当且仅当 $\mathrm{pred}(\eta) \in t_p$ 且 $\rho(\mathrm{pred}(\eta)) > 0 \vee \bar{\rho}(\mathrm{pred}(\eta)) > 0$。无论哪种情况，$p \Vdash \eta \in t_G$ 都蕴含 $\pi(p,\ 1) \Vdash \eta \in t_G$。另一方面，$p \Vdash \eta \notin t_G$ 当且仅当存在一个 $i < n = \mathrm{dom}(\eta)$，使得 $\eta{\restriction}i \in t_p$ 且 $\rho_p(\eta{\restriction}i) < n - i$。因此，若 $p \Vdash \eta \notin t_G$，则$\pi(p,\ \beta) \Vdash \eta \notin t_G$。□

值得注意的是，前述引理中条件 $\pi(p,\ \beta)$ 的选取并不依赖于 a。我们利用这一额外结构证明引理8.9，改进定理 4.2 给出的界。对于 $\kappa = \omega$，[Ste78b，引理 1。3] 断言了一个类似的结论；遗憾的是，我们未能找到

[11]一个集合 X 对于一个类 $\mathbf{\Gamma}$ 是完备的，如果 $X \in \mathbf{\Gamma}$，并且每个集合 $Y \in \mathbf{\Gamma}$ 都是 X的连续原像。

Stern 文章中这一主要辅助结果的现存证明。它似乎在出版版本中被遗漏了。 [Zaf89] 和 [Mil83] 将更强形式的定理8.10 归功于 Garland 的一项未发表工作 [Gar]，该工作通过构造连续归约来证明这一结果，而不使用强迫。最后，Zafrany [Zaf89] 将引理8.10 关于 $\kappa = \omega$的原始证明归于卢津，同时发展出一个框架，用以研究一系列与树相关的类的复杂度。我们不知道 Zafrany 的方法能否推广到不可数情形。

引理 8.9. 设 α 足够大，$\beta \geq 1$ 且 $[\phi] \in \Pi_{2\cdot\beta}(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{S}_\alpha})$。若 $p \Vdash \phi$，则已有$\pi(p,\ \kappa\cdot\beta) \Vdash \phi$。

证明。 我们对 β 作归纳。基础情形可由后继情形 $\beta \to \beta+1$ 中的论证 $\beta = 0$ 轻易推出，再结合如下观察：无论 $\kappa = \omega$ 还是 $\kappa > \omega$，引理 8.8 得到的条件的秩均为 $<\kappa$。

现在来证明归纳法的后继步 $\beta \to \beta+1$。因此，我们有一个 $p,\ \phi$，满足$[\phi] \in \Pi_{2\cdot(\beta+1)}(\mathcal{L}_\infty(\bar{A})/_{\mathbb{S}_\alpha})$ 且 $p \Vdash \phi$。现在 $\mathbb{S}_\alpha \Vdash \phi \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i}\phi^i_j$，其中 $[\phi^i_j] \in \Pi_{2\cdot\beta}(\mathcal{L}_\infty(\bar{A})/_{\mathbb{S}_\alpha})$。若能证明对每个 $i \in I$，都有 $\pi(p,\ \kappa\cdot(\beta+1)) \Vdash \bigvee_{j\in J_i}\phi^i_j$，则结论成立。因此，固定 $i \in I$，并从现在起记作 $\psi = \bigvee_{j\in J_i}\phi^i_j$。若 $\pi(\beta,\ \kappa\cdot\beta+\kappa) \nVdash \psi$，则可找到一个 $s \leq \pi(\beta,\ \kappa\cdot\beta+\kappa)$，使得 $s \Vdash \neg\psi$。令

$$s' := \pi(s, \sup\{\max(\rho_s(\eta), \bar{\rho}_s(\nu)) : \rho_s(\eta) < \kappa\cdot\beta+\kappa, \bar{\rho}_s(\nu) < \kappa\cdot\beta+\kappa\}+1).$$

我们知道 $\mathrm{rk}(s') < \kappa\cdot\beta+\kappa$ 且 $s' \parallel \pi(p,\kappa\cdot\beta+\kappa)$，因此由定理 8.4 得 $s' \parallel p$。令 $t \leq s', p$ 满足存在一个 $j \in J_i$ 使得 $t \Vdash \phi^i_j$。由于 $[\phi^i_j] \in \Pi_{2\cdot\beta}(\mathrm{L}_\infty(\bar{A})/_{\mathbb{S}_\alpha})$，归纳假设给出 $\pi(t,\kappa\cdot\beta) \Vdash \phi^i_j$。但是，$t$ 见证了 $s' \parallel \pi(t,\kappa\cdot\beta)$，所以引理 8.9 蕴含 $s \parallel \pi(t,\kappa\cdot\beta)$，这显然荒谬。在基础情形 $\beta = 0$中，此处使用引理 8.8，而非归纳假设。

现在令$\mathbb{S}_\alpha$为一个极限，并令 $[\phi_i \in \Pi^0_{2\cdot\gamma}(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{S}_\alpha})$那么$\mathbb{S}_\alpha \Vdash \phi \Leftrightarrow \bigwedge_{i<\kappa}\phi_i$ 满足 $[\phi_i] \in \bigcup_{\beta<\gamma}\Pi^0_{2\cdot\beta}(\mathcal{L}_\infty(A)/_{\mathbb{S}_\alpha})$。此外，假设 $p \Vdash \phi$。但由于对所有$\beta < \gamma$，$\pi(p,\kappa\cdot\gamma) \leq \pi(p,\kappa\cdot\beta)$，所需结果立即成立。□

定理 引理 8.10. 这些集合作为 $\mathcal{P}(<^\omega\kappa)$ 的 κ-博雷尔子集具有如下复杂度：

- 对于每个 $\alpha < \kappa^+$，集合 $WF_{\kappa\cdot\alpha}$ 是 κ-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha}$，但不是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha}$。
- 对于每个 $\alpha < \kappa^+$ 和 $0 < \beta < \kappa$，集合 $WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta}$ 是 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha+1}$，但不是 κ-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha+1}$。

证明。 首先，我们引入一些记号，并将所有满足$\eta \in T$ 且 $WF_\alpha(\eta)$的 $T \subseteq {}^{<\omega}\kappa$ 所成的集合记为

$$\{\nu \in {}^{<\omega}\kappa : \eta^\frown\nu \in T\} \in WF_\alpha.$$

我们有 $WF_\alpha = WF_\alpha(\emptyset)$。

那么，对于任意序数 $\alpha < \kappa^+$ 和 $\eta \in {}^{<\omega}\kappa$，等价关系

$$T \in WF_\alpha(\eta) \Leftrightarrow \eta \in T \wedge \exists\beta < \alpha\ \forall i < \kappa : \eta^\frown i \notin T \vee T \in WF_\beta(\eta^\frown i) \tag{1}$$

成立。注意到 $\mathrm{cf}(\kappa\cdot\alpha+\beta) < \kappa$ 对于 $\beta < \kappa$ 成立，并利用类 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha+1}$ 在大小为 $<\kappa$的并集下封闭这一事实，定理中的正向断言现在可由（1）通过直接的归纳论证得到，从而证明 $WF_{\kappa\cdot\alpha}(\eta) \in \kappa$-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha}$ 以及 $WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta} \in \kappa$-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha+1}$对所有 $\alpha < \kappa^*,\ 0 < \beta < \kappa$以及 $\eta \in {}^{<\omega}\kappa$。

现在让我们证明这些否定断言。首先，我们将证明 $WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta} \notin \kappa$-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha+1}$。假设这不成立，并令 B 是它的一个 κ-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha+1}$ 编码；因此，存在 κ-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha}$ 编码 $\langle B_i : i < \kappa\rangle$，使得

$$B = \bigcup_{i<\kappa} B_i,$$

对于这些编码所解释的 κ-博雷尔集成立。根据 $<\kappa$-闭强迫概念的 κ-$\mathbf{\Pi}^1_1$-绝对性，我们有 $\mathbb{S}_{\kappa\cdot\alpha+\beta+1} \Vdash WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta} = B$。现在考虑条件 $p \in \mathbb{S}_{\kappa\cdot\alpha+\beta+1}$，其中有 $t_p = \emptyset$ 和 $\rho_p(\emptyset) = \kappa\cdot\alpha$。由于 $p \Vdash t_G \in WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta} = B$，存在一个 $p' \leq p$，使得 $p' \Vdash t_G \in \dot{B}_{i^*}$ 对某个 $i^* < \kappa$ 成立。令 ϕ 为引理 8.7 中关于 B_{i^*} 的 $\Pi_{2\cdot\alpha}(\mathrm{L}_\infty(A)/_{\mathbb{S}_{\kappa\cdot\alpha+\beta+1}})$ 公式。引理 8.9 得出 $q := \pi(p', \kappa\cdot\alpha) \Vdash \phi$。但我们知道 $\emptyset \in \mathrm{dom}(\bar{\rho}_q)$ 且 $\bar{\rho}_q(\emptyset) < \kappa\cdot\alpha$，因此条件$q' = t_q, \rho_{q'}, \bar{\rho}_{q'}$ 满足 $\rho_{q'}(\emptyset) = \kappa\cdot\alpha+\beta$，并且

$$\rho_{q'}\restriction(t_q \setminus \{\emptyset\}) = \rho_q\restriction(t_q \setminus \{\emptyset\}), \bar{\rho}_{q'}\restriction(t_q \setminus \{\emptyset\}) = \bar{\rho}_q\restriction(t_q \setminus \{\emptyset\})$$

满足 $q' \leq q$。但这是不可能的，因为一方面我们立即得到 $q' \Vdash t_G \notin WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta}$，另一方面我们有 $q' \Vdash \phi$，因此 $q' \Vdash t_G \in \dot{B}_{i^*}$，而

$$\mathbb{S}_{\kappa\cdot\alpha+\beta+1} \Vdash WF_{\kappa\cdot\alpha+\beta} = B = \bigcup_{i<\kappa} B_i.$$

现在我们转向否定断言的另一部分，即 $WF_{\kappa\cdot\alpha} \notin \kappa$-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha}$。如果对于某个 α情况确实如此，那么（1）将给出 $WF_{\kappa\cdot\alpha+1} \in \kappa$-$\mathbf{\Pi}^0_{2\cdot\alpha} \subseteq \kappa$-$\mathbf{\Sigma}^0_{2\cdot\alpha+1}$，这是错误的。□

参考文献

[ABD26] Claudio Agostini、Fernando Barrera 和 Vincenzo Dimonte。《关于广义测度问题：不可能性结果》。2026年1月19日。doi：10.48550/arXiv.2601.13321。arXiv：2601.13321 [math]。网址：http://arxiv.org/abs/2601.13321。预发表（引文见第5页）。[Ago+25] Claudio Agostini、Nick Chapman、Luca Motto Ros 和 Beatrice Pitton。《广义博雷尔集》。2025年。arXiv：2511.15663 [math.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/2511.15663（引文见第2–5、8、10、11、17、26、28、29页）。[Bre+16] J¨org Brendle、Andrew Brooke-Taylor、Sy-David Friedman 和 Diana Montoya。《不可数基数的 Cichon 图》。2016年。doi：10.48550/arXiv.1611.08140。网址：http://arxiv.org/abs/1611.08140（引文见第12页）。[DR25] Vincenzo Dimonte 和 Luca Motto Ros。《可数共尾性奇异基数上的广义描述集合论》。2025年11月20日。doi：10.48550/arXiv.2511.16188。arXiv：2511.16188 [math]。网址：http://arxiv.org/abs/2511.16188。预发表（引文见第2页）。[Fri84] Sy D. Friedman。《L_∞的模型论》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》26.2（1984年4月），第103–122页。issn：01680072。doi：10.1016/0168-0072(84)90012-5。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0168007284900125（引文见第30页）。[Gar] S Garland。《博雷尔秩与导集序》。未发表（引文见第34页）。[Ham01] Joel David Hamkins。《间隙力迫》。载于：《以色列数学杂志》125.1（2001年12月），第237–252页。issn：0021-2172, 1565-8511。doi：10.1007/BF02773382。网址：http://link.springer.com/10.1007/BF02773382（引文见第29页）。[Har78] Leo Harrington。《解析决定性与 $0^\#$》。载于：《符号逻辑杂志》43.4（1978年），第685–693页。issn：0022-4812。doi：10.2307/2273508。网址：https://www.jstor.org/stable/2273508（引文见第32页）。[HL17] Peter Holy 和 Philipp L¨ucke。《最简单的局部可定义良序》。载于：Fundamenta Mathematicae 236.2（2017年），第101–139页。issn：0016-2736，1730-6329。doi：10.4064/fm281-7-2016。网址：http://www.impan.pl/get/doi/10.4064/fm281-7-2016（引文见第30页）。[Jec03] Thomas Jech。《集合论》。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003年。xiv+769。isbn：3-540-44085-2（引文见第12、33页）。[JS70] R. B. Jensen 和 R. M. Solovay。《几乎不交集合的一些应用》。载于：《逻辑与数学基础研究》。Yehoshua Bar-Hillel 编。第59卷。《数理逻辑与集合论基础》。爱思唯尔，1970年，第84–104页。doi：10.1016/S0049-237X(08)71932-3。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X08719323（引文见第10页）。[Kun13] Kenneth Kunen。《集合论》。修订版。Studies in logic 34。伦敦：College Publications，2013年。isbn：978-1-84890-050-9（引文见第12页）。[L¨uc12] Philipp L¨ucke。《在不可数正则基数上的Σ^1_1-可定义性》。载于：《符号逻辑杂志》77.3（2012年），第1011–1046页。issn：0022-4812。doi：10.2178/jsl/1344862172（引文见第10、28、29页）。[Mil79] Arnold W. Miller。《博雷尔层级的长度》。载于：《数学逻辑年刊》16.3（1979年），第233–267页。issn：00034843。doi：10.1016/0003-4843(79)90003-2。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0003484379900032（引文见第1、2、6、8、15、17–19、28页）。

[Mil83] Arnold W. Miller。“可数模型同构类的博雷尔分类”。载于：《圣母大学形式逻辑杂志》24（1983）（引用于第34页）。[Mil95] Arnold W. Miller。描述集合论与强迫：如何以艰难的方式证明关于博雷尔集的定理。《逻辑讲义》4。柏林海德堡：施普林格，1995。isbn：978- 3-540-60059-6 978-0-387-60059-8（引用于第1、2、6、10页）。[Ros18] Andrzej Roslanowski。坍缩 κ^+ 在 κ-真强迫迭代中的显式例子。2018。doi：10.48550/ARXIV.1808.01636。url：https://arxiv.org/abs/1808.01636（引用于第12页）。[She17] Saharon Shelah。不可达Lambda上与零理想平行的构造。第一部分。2017年1月18日。doi：10.48550/arXiv.1202.5799。arXiv：1202.5799 [math]。url：http://arxiv.org/abs/1202.5799。预发表（引用于第6页）。[Sil71] Jack Silver。“库雷帕猜想与模型论中双基数猜想的独立性”。载于：《纯数学专题讨论会论文集》。Dana Scott编。第13.1卷。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学会，1971，第383–390页。isbn：978-0-8218-0245-8 978-0-8218-9297-8。doi：10.1090/pspum/013.1/0277379。url：http://www.ams.org/pspum/013.1（引用于第28页）。[Ste78a] John R. Steel。“用带标记的树进行强迫”。载于：《数学逻辑年刊》15.1（1978年10月），第55–74页。issn：00034843。doi：10.1016/0003-4843(78)90026-8。url：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0003484378900268（引用于第30、32页）。[Ste78b] Jacques Stern。“´某些集合的博雷尔秩评估”。载于：C. R. Acad. Sc. 巴黎（1978）（引用于第33页）。[Szp30] Edward Szpilrajn。“论M. Banach的Probl`eme”。载于：Fundamenta Mathematicae 15（1930），第212–214页。issn：0016-2736, 1730-6329。doi：10.4064/fm-15-1-212-214。url：http://www.impan.pl/get/doi/10.4064/fm-15-1-212-214（引用于第5页）。[Zaf89] Samy Zafrany。“博雷尔理想与可数关系及树的博雷尔集”。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》43.2（1989），第161–195页。issn：0168-0072。doi：10.1016/0168-0072(80)90003-2（引用于第34页）。

(Nick Chapman)维也纳工业大学离散数学与几何研究所，Wiedner Hauptstraße 8-10/104，1040 维也纳，奥地利
电子邮件地址：nick.steven.chapman@gmail.com