arXiv:2603.07386v1 [math.OA] 8 Mar 2026

通过酉共轭群胚得到的 Fredholm 算子指标定理

Shih-Yu Chang *

2026年3月10日

摘要

在此前的一篇论文中，我们为任意含幺可分 I 型 C*-代数引入了酉共轭群胚。该群胚通过代数的酉群对交换子代数的特征所施加的作用，编码了代数的表示论结构，并且允许将代数典范地嵌入其群胚 C*-代数中。本文将这一框架应用于两个基本的算子代数：可分希尔伯特空间上所有有界算子构成的代数，以及紧算子的单位化。对于这些代数中的任意 Fredholm 算子，我们利用算子的相位构造一个自然的等变 KK 理论类。对群胚应用 Kasparov 下降，可得相关群胚 C*-代数的 K 理论中的一个类。利用前文建立的 Morita 等价，可以将这个下降类识别为该算子的符号类。我们证明，将此类与 Calkin 扩张的边界映射复合，可恢复经典 Fredholm 指标。特别地，这一构造给出单边移位的指标为负一，以及恒等算子的紧扰动的指标为零。这为 Fredholm 指标提供了一种群胚等变表述，并将酉共轭群胚与经典算子指标理论联系起来。这一视角为通过与算子代数相关的群胚的等变 K 理论研究指标理论提供了一种通用方法。

目录

1 引言 **3**

1.1 论文 I 回顾：酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ .3 1.2 为什么是 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)$~? 预备案例.3 1.3 主要障碍：K_0 是错误的目标.4 1.4 解决方案： K_1、边界映射与 Calkin 代数.4 1.5 主要结果与论文大纲.5

2 预备知识： K_1、指标映射与 Kasparov 下降 6

2.1 K_0 与 K_1 的 C*-代数.6 2.2 六项正合列与指标映射 ∂： $K_1 \to K_0$ .7 2.3 Calkin 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$ .9 2.4 Calkin扩张的指标映射： ∂： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ . . . . . 11 2.5 波兰群胚的 Kasparov 下降（回顾 Tu，1999 年） .17 2.6 对角嵌入 ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，摘自论文 [14] .20

*Shih-Yu [14] 现任职于美国加利福尼亚州圣何塞圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮件：shihyu.chang@sjsu.edu）

3 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与表示族 **24**
3.1 回顾 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 关于 $B(H)$和 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的内容.24 3.2 希尔伯特空间的典范可测场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ .26 3.3 算子族 $\{T_x : = \pi_x(T)\}$ 本质上是常值的.30 3.4 Calkin 代数中的连续性与 K^1-类的定义.37

4 Fredholm 算子的等变 K^1 类 41
4.1 从 Fredholm 算子 T 到 Calkin 代数中的可逆元.41 4.2 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的奇 Kasparov 三元组.46 4.3 类 $[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \cong KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \ \mathbb{C})$ 的定义.51 4.4 同伦不变性与良定义性.58

5 下降到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ **61**
5.1 奇类的 Kasparov下降： $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \to KK^1$ .61 5.2 应用下降：$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$.71 5.3 确定下降类：与 Toeplitz 扩张的关系.77

6 指标定理 通过拉回和边界映射 8 **1**
6.1 通过对角嵌入传递信息.81 6.2 Calkin扩张的边界映射.87 6.3 指标图表.93 6.4 定理：$\mathrm{index}(T) = \partial_{\mathcal{A}} \circ \iota^* \circ \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)})$.102

7 个例子和计算 **108**
7.1 恒等算子的紧扰动： $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ (指标为零).108 7.2 Toeplitz 代数与单边移位（指标 -1）.113 7.3 一般 Toeplitz 算子及其符号.120

1 引言

1.1 PaperI 回顾：酉共轭作用群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$

在上一篇论文（论文 I）中， [14], 我们引入了一个与任意含单位元的可分 C^*-代数 $\mathcal{A}$相关联的典范拓扑群胚，称为酉元共轭作用群胚，记作 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。该群胚定义为作用群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)},$$

其中，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由形如 $(B,\ \chi)$ 的数对组成，其中 $B \subseteq \mathcal{A}$ 是一个含单位元的交换 C^*-子代数，且$\chi \in \widehat{B}$是一个特征。酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 通过共轭作用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$： $u \cdot (B,\ \chi) = (uBu^*,\ \chi \circ \mathrm{Ad}_{u^*})$。

这一构造的一个关键特点是，它迫使我们摆脱经典局部紧群胚理论的范式 [21]。当 $\mathcal{A}$ 是无限维时，赋予范数拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 不可分；而单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 赋予 Fell 拓扑 [34], 后，则是非豪斯多夫且非局部紧的。为解决这一问题，我们在 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 上赋予强算子拓扑（SOT）。然而，当$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 作用于无限维希尔伯特空间 H时，带有 SOT 的酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 仍不可分；尽管这一拓扑使 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 成为拓扑群，由此得到的群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在通常意义下并不是波兰群胚。相反，它是一个标准 Borel 群胚，并具有博雷尔哈尔系统，按 [19] 的意义定义。$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑定义为由部分求值映射 $\mathrm{ev}_a(B,\ \chi) = \chi(a)$ 在 $a \in B$ 时以及在其他情况下 ∞ 所生成的初始拓扑。

[14] 的核心构造是对角嵌入

$$\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}),$$

一个含单位元的单射 $*$-同态，将 $\mathcal{A}$实现为其自身群胚 C^*-代数的 C^*-子代数。对于 I 型代数，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的时，该嵌入满足 $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，并且在同构下是自然的。这些性质对于本文所证明的指标定理至关重要。

1.2 为什么 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$? 预备例子

在本文中，我们聚焦于两个基本例子： $\mathcal{A} = B(H)$，作用于可分无穷维希尔伯特空间 H上的所有有界算子构成的代数，以及 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，即紧算子的单位化。选择这些代数有几个原因。

首先， $B(H)$和 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 都是 I 型 C^*-代数，因此 [14] 的构造可直接应用。此外，它们的表示论已得到充分理解： $B(H)$只有一个不可约表示（在酉等价意义下），即恒等表示；而 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 有两个不可约表示——无限维标准表示，以及由商 $\mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$得到的一维特征 χ_∞。

其次，这些代数是 Fredholm 理论中最基本例子的自然归宿。单边移位 $S \in B(H)$ 是具有非平凡指标的典型 Fredholm 算子，其指标为 $\mathrm{index}(S) = -1$；而 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的每个算子都是标量的紧扰动，因此指标为零 [30]。因此，这两个例子代表了两种极端情况：非平凡指标和平凡指标。

第三，群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$ 与 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})$ 具有具体描述： $C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$ 与 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ [18, 25], Morita 等价，而 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})$ 与 $\mathcal{K}(H)^{\sim} \otimes \mathcal{K}$ Morita 等价。这些在 [14], 中建立的 Morita 等价，将在把群胚 C^*-代数的抽象 K-理论与经典指标联系起来时发挥关键作用。

1.3 主要障碍：K_0 是错误的目标

经典指标理论是借助 K_0 来表述的。对于 Fredholm 算子 $T \in \mathcal{B}(H)$，其指标是一个整数，并且在识别 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，有指标$(T) = \partial([\pi_{\mathcal{Q}}(T)])$，其中 ∂ 是 Calkin 扩张 [12, 13, 15] 的边界映射。这表明，群胚指数定理的一个自然目标可能是某个适当理想的 K_0。

然而，对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$，这种方法会失效，而且 $\widetilde{\mathcal{K}(H)}$ 也一样，直接尝试使用对角嵌入 ι 时亦是如此。这些代数的 K-理论群为

$$K_0(\mathcal{B}(H)) = 0, \qquad K_1(\mathcal{B}(H)) = 0, \qquad K_0(\widetilde{\mathcal{K}(H)}) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\widetilde{\mathcal{K}(H)}) = 0.$$

因此，代数本身的 K_0 无法检测单边移位的非平凡指标，而且在这两种情形下，K_1 都恒为零。因此，正确的目标必须是别的对象 [12, 13]。

解决办法不是研究 $\mathcal{A}$ 的 K_0，而是对于 $\mathcal{B}(H)$，研究 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H)$ 的 K_1；对于 $\mathcal{K}(H)$，则研究其自身的 K_1 $\mathcal{A}$（此时它为零）。这需要通过 Morita 等价，将信息从群胚 C^*-代数传递到 $\mathcal{Q}(H)$，而不是直接经由 ι。特别是，由 ι 在 K-理论上诱导的映射，

$$\iota_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)})) \longrightarrow K_1(\mathcal{B}(H)),$$

其值落在零群中，对指标计算不起作用；必须用 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H)$ 取而代之。

1.4 解答：K_1、边界映射与 Calkin 代数

关键观察是，弗雷德霍姆指标自然是 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 中的一个元素，它通过 Calkin 扩张 [12,13] 的六项正合列中的边界映射 $\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H))$ 得到。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$，群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$ Morita 等价，从而得到一个同构 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)})) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$。有效边界映射 $\partial^{\mathrm{eff}}_{\mathcal{B}(H)} := \partial \circ \Phi_*$ 随即直接计算出该指标。

对于 $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{K}(H)}$，情况较为简单，但仍有启发意义。这里 $K_1(\widetilde{\mathcal{K}(H)}) = 0$，且所有 Fredholm 算子的指标均为零。群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}})$ 与 $\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}$ Morita 等价，且其 K_1 消失。因此，复合 $\partial_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}} \circ \iota_* \circ j_{\mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}}}$ yields zero，与指标相符。[1]

在这两种情况下，指标都可通过三个典范定义的映射复合得到：

1. 下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \ \mathbb{C}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，它将等变 KK-理论数据转换为群胚 C^*-代数 [19, 22, 23, 29] 的普通 K-理论；

2. Morita同构 $\Psi : K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to G_{\mathcal{A}}$，其中 $G_{\mathcal{B}(H)} = K_1(\mathcal{Q}(H))$ 和 $G_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}} = K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$；

3. 边界映射 $\partial_{\mathcal{A}} : G_{\mathcal{A}} \to \mathbb{Z}$，对于 $\mathcal{B}(H)$，它是 ∂_{Calkin}，而对于 $\mathcal{K}(H$，它是零映射).

本文的主定理表明，对于任意 Fredholm 算子 T 属于 $\mathcal{A}$，将该复合作用于等变 KK^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$，即可恢复弗雷德霍姆指标指标$(T)$。

[1] 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$，直接映射 $\iota_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)})) \to K_1(\mathcal{B}(H))$ 的像落在零群中，因此必须用 Morita同构 Φ_* 到 $\mathcal{Q}(H)$ 替代。

1.5 主要结果与论文提纲

现在我们总结本文的主要贡献。

1. **等变 KK^1-类的构造**。 对于任意 Fredholm 算子 $T \in \mathcal{A}$ （其中 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 或 $\mathcal{K}(H)$），我们构造一个奇等变 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi \oplus \phi,\ F)$，它表示一个类

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \cong K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}).$$

此类以适用于等变 KK-理论的形式编码了 T 的指标数据。

2. **下降类的等同**。 利用 Tu [19] 和 Le Gall [23, 29], 发展的波兰群胚下降映射，以及 [14], 的第 4.5—4.6 节中建立的 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 与一个具体的C^*-代数之间的 Morita 等价，我们证明下降类对应于符号类 $[\pi_\mathcal{Q}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，当 $\mathcal{B}(H)$ 时成立；而当 $\mathcal{K}(H)$ 时则对应于零。

3. **指标定理**。我们的主定理指出，对于任意 Fredholm 算子 $T \in \mathcal{A}$,

$$\operatorname{index}(T) = \partial_\mathcal{A} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\big([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}\big),$$

其中 $\partial_\mathcal{A}$ 是相应的边界映射（Calkin指标映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 对于 $\mathcal{B}(H)$, 而对于 $\mathcal{K}(H)$ 则为零映射）， $\Psi\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \to G_\mathcal{A}$ 是由从 [14] 出发的 Morita 等价诱导的同构（其中 $G_{\mathcal{B}(H)} = K_1(\mathcal{Q}(H))$ 和 $G_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}} = K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$），而 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是下降映射。这为 Fredholm 指标提供了一种统一的群胚等变表述。

4. **具体例子与计算**。我们通过对 $\mathcal{B}(H)$ 上的单边移位（指标 -1）以及 $\mathcal{K}(H)$ 中恒等算子的任意紧扰动（指标 0）进行详细计算，来阐释该定理。这些例子展示了抽象理论框架如何重现经典指标定理。

5. **与经典指标理论的联系**。 我们说明群胚指标定理与 Toeplitz 指数定理 [28] 及 Brown–Douglas–Fillmore 理论 [18]之间的关系。关于其与带边流形上的 Atiyah–Singer 指标定理之间联系的详细论述，包括球上的 Boutet de Monvel 指标公式 $\mathbb{C}^2$，将见于后续工作。

本文结构如下。第 2 节回顾必要的背景知识，包括 K-理论、六项正合列、Calkin 扩张、Kasparov 对波兰群胚的下降，以及来自 [14] 的对角嵌入。第 3 节介绍单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$ 和典范的希尔伯特空间连续场 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}}$，并证明族 $\{\pi_x(T)\}$ 本质上是常值的。第 4 节构造等变 KK^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$，并证明其良定义性与同伦不变性。第 5 节应用 Kasparov 的下降映射，得到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 中的一个类，并通过论文 I 第 4.5—4.6 节中的 Morita 等价，将其与符号类对应起来。第 6 节证明主指标定理，并详细验证用于表示指标计算的交换图。第 7 节给出例子： $\mathcal{K}(H)$（指标为零）以及 $\mathcal{B}(H)$ 上的单边移位（指标为 -1），并说明结果如何推广到任意 Toeplitz 算子和高维区域。

备注 1。 本文所提出的数学见解与理论方向完全由作者负责。人工智能工具，包括 *OpenAI* 的 *ChatGPT* 和 *DeepSeek* 模型，仅用于协助验证想法、整理参考文献，并确保论述的内在一致性 *[10, 11]*。

2 预备知识： K_1、指标映射与Kasparov的下降

2.1 K_0 与 K_1 ： C*-代数

我们回顾算子 K-理论的基本定义。这些不变量将在全文中使用，尤其是在指标定理的表述中。关于全面的论述，请读者参阅 [12]或 [13]。

定义1 (K_0 群)**.** 设 $\mathcal{A}$ 为含幺*C**代数。令 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$上矩阵代数中的投影之集，即元素 $p \in M_n(\mathcal{A})$ ，满足 $p = p^* = p^2$ （对某个 $n \in \mathbb{N}$），模去：

- ***Murray-von Neumann***等价： $p \sim q$ 若存在部分等距算子 v ，使得 $p = v^*v$ 与$q = vv^*$;

- 稳定化：将 $p \in M_n(\mathcal{A})$ 与 $p \oplus 0_k \in M_{n+k}(\mathcal{A})$等同。

直和使等价类的集合成为一个阿贝尔半群。该 K_0 群 $K_0(\mathcal{A})$是此半群的*Grothendieck*群；其元素是投影类的形式差 $[p] - [q]$ 。

定义 2 (K_1 群)**.** 设 $\mathcal{A}$ 为含幺*C**代数。设 $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$ 表示酉群 $U_n(\mathcal{A})$ 在包含映射 $u \mapsto u \oplus 1$下的归纳极限，并设 $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})_0$ 为恒等算子的连通分支（它是一个正规子群，因此商是良定义的）。 K_1 群 $K_1(\mathcal{A})$ 定义为商群

$$K_1(\mathcal{A}) := \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})/\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})_0,$$

其群运算由酉元的直和诱导。

例 1 (K_0 与 K_1 关键代数的)**.** 以下*K*理论计算对本论文至关重要。它们将被反复使用，尤其是在验证第 *7* 节中各例子的指标定理时。

- $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$，由单位元 $1 \in \mathbb{C}$的类生成。 $K_1(\mathbb{C}) = 0$，因为酉群 $U(\mathbb{C}) = S^1$在稳定化后变为连通。

- $K_0(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$，由任意秩一投影生成。 $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$。这是 *Morita* 等价 $M_n(\mathbb{C}) \sim_M \mathbb{C}$的推论，因为 *K*理论具有 *Morita*不变性。

- $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$ 和 $K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$。 K_1 的消失可由 *Kuiper* 定理推出，该定理指出，酉群 $\mathcal{U}(H)$ 在范数拓扑 *[33]*下是可缩的。K_0 的消失则源于这样一个事实： $\mathcal{B}(H)$中的所有非零投影都是无限的，且为真子投影；因此，每个投影都等价于其自身的一个真子投影，从而使 *Grothendieck*群退化为零 *[12, 13]*。

- $K_0(\mathcal{K}(H)^\sim) \cong \mathbb{Z}$，由任意秩一投影生成（视为 $\mathcal{K}(H)^\sim$的一个元素）。 $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$。这是将六项正合列应用于紧扩张所得的结果

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{K}(H)^\sim \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

  再加上以下事实： $K_0(\mathcal{K}(H)) = \mathbb{Z}$， $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$，以及 $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$， $K_1(\mathbb{C}) = 0$。

- $K_0(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$，由平凡线丛生成。 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$，由酉函数 $u(z) = z$的类生成，其 K_1-类由绕数映射 wind：$K_1(C(S^1)) \to \mathbb{Z}$ 检测。

注 2 (与 Morita 等价的联系)。 上述计算与本文中始终使用的 *Morita* 等价结果一致。具体而言：

- $M_n(\mathbb{C}) \sim_M \mathbb{C}$ 解释了它们的 *K* 理论群为何相同。
- $C(S^1 \rtimes_\theta \mathbb{Z}) \sim_M A_\theta$ （当 θ 为无理数时）是一个重要例子，推动了未来的推广。
- 对于群胚 *C**-代数 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$，论文 *I* 中的 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \sim_M \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ 意味着 $K_*(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \cong K_*(\mathcal{A})$，这一事实在第 *5* 节中至关重要。

命题 1 (K_0 和 K_1的函子性。 设 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是含幺 *C**-代数之间的单位*-同态。则 ϕ 诱导群同态

$$\phi_* : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B}), \qquad \phi_* : K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(\mathcal{B}),$$

通过将 ϕ 逐项作用于矩阵来定义。这些映射具有函子性：$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$，且 $(\mathrm{id}_\mathcal{A})_* = \mathrm{id}_{K_i(\mathcal{A})}$。

证明。 这在 C*-代数 K 理论中是标准结果。关于 K_0 的函子性，参见 [第 3] 章；关于 K_1 的函子性，参见 [第 8] 章。诱导映射通过将 ϕ 逐项作用于矩阵投影（对于 K_0）和矩阵酉元（对于 K_1）来定义。函子性直接源于矩阵放大的函子性。

□

2.2 六项正合列与指标映射 $\partial\colon \quad K_1 \to K_0$

算子 K 理论中最有力的工具之一，是由 C*-代数的短正合列导出的六项正合列。该正合列联系了扩张中各代数的 K_0 和 K_1 群，并给出指标映射 $\partial\colon K_1 \to K_0$，这对本文的指标定理至关重要。

定理1（六项正合列）。 设

$$0 \to \mathcal{J} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \to 0$$

构成一个 *C**-代数短正合列。于是存在一个循环 *K* 理论六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{J}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(\mathcal{J}) \end{array}$$

垂直映射是边界（指标）映射

$$\partial : K_1(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{J}), \qquad \partial : K_0(\mathcal{B}) \to K_1(\mathcal{J}).$$

该正合列 在每一项处都正合，并且关于短正合列之间的态射具有自然性。

证明。 这是 C*-代数 K 理论中的一项基本结果。边界映射的构造依据是： $\mathcal{B}$ 中的酉元（或投影）可以提升为 $\mathcal{A}$ 中的一个元素，该元素模去 $\mathcal{J}$后可逆；相应的 Fredholm 指标定义了 $K_0(\mathcal{J})$（或 $K_1(\mathcal{J})$）中的一个类。例如，参见 Blackadar 的 算子代数 *K* 理论，或 Rørdam–Larsen–Laustsen 的*C**-代数 *K* 理论导论。

□

定义 *3*（指标映射）。六项正合列中的映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{J})$ 称为指标映射。对于表示 $K_1(\mathcal{B})$中一个类的酉元 $u \in U_n(\mathcal{B})$，选取一个提升 $v \in M_n(\mathcal{A})$，使得$\pi(v) = u$。于是， v 模 $M_n(\mathcal{J})$可逆；通过将模 $\mathcal{J}$ 的可逆元与某个适当希尔伯特模上的 *Fredholm* 算子作标准识别，可得到一个元素 $\partial([u]) \in K_0(\mathcal{J})$。

下面将反复使用指标映射的一个具体描述。

引理1 (指标映射的显式公式)。 设 $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \to 0$ 是一个 C^*-代数的短正合列。设 $u \in U_n(\mathcal{B})$，并设 $v \in M_n(\mathcal{A})$ 是一个提升，满足 $\pi(v) = u$。那么 v 在模 $M_n(\mathcal{J})$意义下可逆，因此 v^*v 和 vv^* 是 $M_n(\mathcal{A}^\sim)$ 中的正可逆元，模 $M_n(\mathcal{J})$而言。

利用函数演算，定义偏等距算子

$$e = v(v^*v)^{-1/2}, \qquad f = (vv^*)^{-1/2}v,$$

它们在模 $M_n(\mathcal{J})$意义下定义良好。于是，投影

$$p = 1 - e^*e, \qquad q = 1 - ee^*$$

属于 $M_n(\mathcal{J}^\sim)$，而类

$$[p] - [q] \in K_0(\mathcal{J})$$

表示指标 $\partial([u])$。

证明。 参见 [第8节3] 中的 [12] 或 [命题9.3。3] 中的 [13]。该构造利用函数演算和模 $\mathcal{J}$ 的极分解，将 v 在模 $\mathcal{J}$ 意义下的可逆性转化为 $K_0(\mathcal{J})$ 中两个投影之差。上述参考文献中给出了这一标准构造的详细阐述。

□

指标映射具有若干重要的函子性性质。

命题 2 (指标映射的自然性)。 考虑由 C^*-代数的短正合列构成的一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}' & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

那么，在 K-理论中诱导出的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} K_1(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{J}) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} \\ K_1(\mathcal{B}') & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{J}') \end{array}$$

证明。 这由六项正合列的自然性以及指标映射的显式构造得出。参见 [Proposition9.1.5]in [13]

□

以下特例对本文尤为重要。

推论 1 (Calkin 扩张的指标映射)。 对于 *Calkin* 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$，指标映射

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

正是弗雷德霍姆指标。也就是说，对于表示$K_1(\mathcal{Q}(H))$中一个类的可逆元 $u \in \mathcal{Q}(H)$，以及对 u的任意提升 $T \in B(H)$，我们有 $\partial([u]) =$ 指标$(T) \in \mathbb{Z}$。

证明。 这直接由 [命题9.42] （见 [13], ）得出，其中表明，对于任意Fredholm 算子T，其弗雷德霍姆指标由$(K_0(\mathrm{Tr}) \circ \delta_1)([\pi(T)]_1)$给出。在由迹给出的同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，这成为 T的整数指标。另见 [第8节3] （ [12] 中），其中对指标映射有详细阐述。

□

六项正合列和指标映射将在第 6 节中用于将 Calkin 代数中可逆元的 K_1-类与取整数值的弗雷德霍姆指标联系起来。

2.3 Calkin扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$

Calkin 代数及其相关的短正合列是研究 Fredholm 算子的基础对象。它们为希尔伯特空间上算子的分析与 C*-代数的 K-理论搭建了关键桥梁。在本小节中，我们回顾 Calkin 扩张的定义和基本性质，全文将借助它们把 Fredholm 指标与 K-理论中的指标映射联系起来。

定义 4 (紧算子)。 设 H 是一个可分无穷维希尔伯特空间。 H上的紧算子组成的集合记作 $\mathcal{K}(H)$，它是 $B(H)$ 的范数闭理想，由满足以下条件的算子 T 构成：单位球的像是相对紧的。等价地， T 是紧算子，当且仅当它可以在范数意义下由有限秩算子逼近。

$B(H)$ 对紧算子取商所得的代数，

$$\mathcal{Q}(H) := B(H)/\mathcal{K}(H),$$

称为***Calkin*** 代数。设 $\pi: B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 表示典范商映射。由于 $\mathcal{K}(H)$ 是 $B(H)$ 的闭双边理想，我们得到如下 C*-代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0, \tag{1}$$

其中 ι 是包含映射。这就是***Calkin*** 扩张。

将 Calkin 扩张与 Fredholm 理论联系起来的一个基本结果是 Atkinson 定理，它精确地刻画了 Fredholm 算子：它们恰好是那些在 Calkin 代数中的像可逆的算子。

定理 2 (Atkinson)。 算子 $T \in B(H)$ 是 ***Fredholm*** 的，当且仅当其像 $\pi(T)$ 在 ***Calkin*** 代数 $\mathcal{Q}(H)$中可逆。

证明。 原始结果见 [15] 。 □

这些代数的 K理论众所周知：

- $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，由任意秩一投影的类生成。
- $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$。
- $K_0(B(H)) = 0$ 且 $K_1(B(H)) = 0$ （由 Kuiper 定理）。
- $K_0(\mathcal{Q}(H)) = 0$ 和 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$，其中生成元对应于单边移位算子 S 的 $\pi(S)$ 类。

与 Calkin 扩张 (1) 相关联的指标映射 $\partial: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 正是弗雷德霍姆指标：对于任意 Fredholm 算子 T，都有 $\partial([\pi(T)]_1) =$指标(T)。这一基本识别将成为我们指标定理的基石。

定义5 (Calkin 扩张)。 短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \xrightarrow{\iota} B(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0,$$

其中 ι 是包含映射，称为 Calkin 扩张。这是 ***C**-代数扩张的一个基本例子。

Calkin 扩张的以下性质对于本文所发展的指标理论至关重要。

命题 3（Calkin 扩张的性质）。 *Calkin* 扩张具有以下性质：

1. $\mathcal{K}(H)$ 是 $B(H)$ 中的本质理想，也就是说，它在 $B(H)$ 中的湮灭子为零。
2. $\mathcal{Q}(H)$ 是单 C*-代数。3. $K_0(\mathcal{Q}(H)) = 0$且 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。4. $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$且 $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$。

此外，酉群 $\mathcal{U}$（$\mathcal{Q}$（H））的连通分支由弗雷德霍姆指标分类；也就是说，π_0（$\mathcal{U}$（$\mathcal{Q}$（H））） $\cong K_1$（$\mathcal{Q}$（H））$\cong \mathbb{Z}$。

证明。 性质 (1) 可由 C*-代数中理想的一般理论推出；参见 [16,第 3 节。1]。性质 (2) 是 Calkin 的经典结果；参见 [17]。性质 (3) 和 (4) 中的 K-理论计算，可由 Calkin 扩张所关联的六项正合列以及以下事实推出： $K_0(B(H)) = 0$ 且$K_1(B(H)) = 0$ （由 Kuiper 定理得出）；参见 [12, 第 9 节。3] 或 [13, 命题 9.3。3]。将 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 识别为 $\mathbb{Z}$对应于弗雷德霍姆指标，该指标分类酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))$ 的连通分支；这可由以下事实推出： $\pi_0(\mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$。 □

Calkin 扩张在 K 理论中诱导出一个六项正合列，下面我们将对此进行详细考察。

推论 2 (K-理论中的 Calkin 扩张六项正合列)。 *Calkin* 扩张给出了 K 理论中的以下六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \longrightarrow & K_0(B(H)) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ {\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \longleftarrow & K_1(B(H)) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}(H)) \end{array}$$

利用标准的 K 理论计算 $K_0(B(H)) = 0$， $K_1(B(H)) = 0$ （由 *Kuiper* 定理），以及 $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$，六项正合列化简为一个同构

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

因此， $K_0(\mathcal{Q}(H)) = 0$ 和 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。映射 ∂ 正是弗雷德霍姆指标映射。

证明。 将已知的 K 群代入六项正合列，得到图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ {\scriptstyle\partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

在 $K_0(\mathcal{Q}(H))$ 处的正合性意味着 $\ker(K_0(\mathcal{Q}(H)) \to 0) = \mathrm{im}(0 \to K_0(\mathcal{Q}(H)))$。映射 $K_0(\mathcal{Q}(H)) \to 0$ 是零映射，因此其核是整个 $K_0(\mathcal{Q}(H))$。 $0 \to K_0(\mathcal{Q}(H))$ 的像是 $\{0\}$。因此，正合性要求 $K_0(\mathcal{Q}(H)) = 0$。

在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$处的正合性给出核($\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$) = 像$(0 \to K_1(\mathcal{Q}(H))) = \{0\}$，所以 ∂ 是单射。在 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 处的正合性给出像($\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$) = 核$(\mathbb{Z} \to 0) = \mathbb{Z}$，所以 ∂ 是满射。因此 ∂ 是一个同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。

由 Rørdam、Larsen、Laustsen 的命题 9.4.2（如第 9 章所示）可知， ∂ 与弗雷德雷姆指标一致；该命题证明，对于任意弗雷德雷姆算子 T，都有 $\partial([\pi(T)]_1)$ =指标(T)。

□

下面对指标映射的具体描述将是证明主定理的关键。

引理 2（指标映射作为弗雷德霍姆指标）。 设 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))$ 是 *Calkin* 代数中的一个酉元，代表类 $[u] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。任取一个提升 $T \in B(H)$，使得 $\pi(T) = u$。那么 T 是一个 *Fredholm* 算子，其弗雷德霍姆指标满足

$$\operatorname{index}(T) = \partial([u]) \in \mathbb{Z},$$

其中，$\partial: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是与 *Calkin* 扩张相关联的六项正合列中的指标映射（边界映射）。特别地，映射 ∂ 是一个同构，整数 指标(T)仅取决于类 $[u]$，而与提升 T 的选择无关。

证明。 根据阿特金森定理（定理 2），T 是 Fredholm 算子，因为 $\pi(T) = u$ 在 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆。等式 指标 $(T) = \partial([u])$ 是 K 理论中的一个标准结果；综述指标定理可参见 [Blackadar，1998 年，第 24 节； [Rørdam、Larsen、Laustsen，2000 年，第 9] 章对此有详细阐述。提升的选择无关性源于以下事实：若 T 和 T' 是同一酉元 u 的两个提升，则$T' - T \in \mathcal{K}(H)$，而紧扰动不会改变弗雷德霍姆指标。□

例 *2*（单边移位）。设 $S \in B(H)$ 为 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的单边移位，由 $S(e_n) = e_{n+1}$ 对标准正交基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 定义。则 S 是 *Fredholm* 的，且指标$(S) = \dim\ker S - \dim\operatorname{coker} S = 0 - 1 = -1$。它在 *Calkin* 代数中的像 $\pi(S)$ 可逆（事实上，它是 *Toeplitz* 代数 $C^*(\pi(S)) \cong C(\mathbb{T})$ 的生成酉元），并且类 $[\pi(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是$K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元。由引理 *2*，指标映射满足 $\partial([\pi(S)]) =$ 指标$(S) = -1$。

例 3（恒等算子的有限秩扰动）。 设 $T = I + F$，其中 F 是有限秩算子（或更一般地，任意紧算子）。则 $\pi(T) = \pi(I) = I$ 在 *Calkin* 代数中，故类$[T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是单位元，即 $[T] = 0$。因此，$\partial([T]) = 0$，这反映了 指标$(T) = 0$ （紧扰动不改变弗雷德霍姆指标，且 指标$(I) = 0$）这一事实。更一般地，恒等算子的任意紧扰动都映到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中的零类。

Calkin 扩张将在第2.4节中用于具体定义指标映射，并在第 6 节中将抽象的 K-理论指标与经典 Fredholm 指标联系起来。

2.4 Calkin扩张的指标映射：$\partial: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$

我们现在关注由 Calkin 扩张产生的指标映射，它是将 Calkin 代数的抽象 K-理论与希尔伯特空间上算子的具体弗雷德霍姆指标联系起来的核心对象。该映射是一个同构，并提供将由我们的群胚指标公式恢复的数值不变量。

定理 3（Calkin 扩张的指标映射）。 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \xrightarrow{\iota} \mathcal{B}(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

为 *Calkin* 扩张。 K-理论中相应的六项正合列导出一个指标映射

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H))$$

这是一个同构。因此，$K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。

证明。 对于任意由 C^*构成的代数的短正合列

$$0 \to J \to A \to B \to 0,$$

K 理论中存在一个循环六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(B) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(J) \end{array}$$

将其应用于 Calkin 扩张，我们得到：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{B}(H)) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ \partial\uparrow & & & & \downarrow\delta \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(\mathcal{B}(H)) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(\mathcal{K}(H)) \end{array}$$

相关的 K 群已知如下：

- $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$ 以及 $K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$ （根据 Kuiper 定理：无限维希尔伯特空间的酉群是可缩的）；
- $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$（因为 $\mathcal{K}(H)$ 是一个 AF 代数）；
- $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，由任意秩一投影的类生成。

将这些值代入六项正合列，得到：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota_*} & 0 & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ \partial\uparrow & & & & \downarrow\delta \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \xleftarrow[\pi_*]{} & 0 & \xleftarrow[\iota_*]{} & 0 \end{array}$$

正合性迫使 $\iota_* = 0$ 和 $\delta = 0$。该序列的剩余部分

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{K}(H)) \longrightarrow 0,$$

是一个短正合列。因此，∂是单射且满射，故为同构。由于 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，我们得出 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。

注。 对于表示 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中一个元素的酉元 $u \in \mathcal{Q}(H)$，指标映射可以具体实现为 $\partial([u]) = \text{index}(T)$，其中 $T \in \mathcal{B}(H)$是 u 到 Fredholm 算子的任意提升。 □

注 3。 关于 $\mathrm{Ext}(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 的计算最初由 *Brown–Douglas–Fillmore [18]*给出。用后来发展起来的 K理论的语言来说，这对应于这样一个事实： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。

推论 3 (K-Calkin 代数的群)。 由定理 *3*，我们得到这一众所周知的结果

$$K_0(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

指标映射

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

是一个同构。相比之下，该映射

$$\iota_* : K_0(\mathcal{K}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{Q}(H))$$

由紧算子的包含映射所诱导的映射是零映射，尽管这两个群都同构于$\mathbb{Z}$。更具体地说， $K_0(\mathcal{Q}(H))$ 由恒等算子 $\pi(I)$的类生成，而 $K_1(\mathcal{Q}(H))$由生成酉元 $\pi(S)$的类生成，其中 S 是 H上的单边移位。

证明。 Calkin 代数的 K-群的计算及其生成元的识别最初归功于 [18] 关于 Ext(X) 的基础性结果，特别是计算 Ext(S^1) $\cong \mathbb{Z}$，它对应于 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。关于 ι_* 为零映射的陈述直接由定理 3 中的六项正合列得出：由于 $K_0(\mathcal{B}(H)) = 0$，正合性迫使 $\operatorname{im} \iota_* = \ker(0 \to K_0(\mathcal{Q}(H))) = 0$。

□

例 *4*（单边移位）。设 $S \in \mathcal{B}(H)$为 $H = \ell^2(\mathbb{N})$上的单边移位算子，由$S(e_n) = e_{n+1}$ 对正交归一基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$定义。则 S 是指标$(S) = -1$的 *Fredholm* 算子。它在 *Calkin* 代数 $\mathcal{Q}(H)$中的像 $u = \pi(S)$ 是一个酉算子（因为 $I - S^*S$ 与 $I - SS^*$ 是秩一投影，因而紧的）。类 $[u] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$是典范生成元，在同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$下对应于 $1 \in \mathbb{Z}$。

命题 4 (指标映射的显式公式)。 设 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))$ 是代表类 $[u] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$的一个酉元。任取一个提升 $T \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\pi(T) = u$。则：

1. T 是一个 *Fredholm* 算子。
2. 弗雷德霍姆指标 指标$(T) = \ker$ 的维数 T^* 的维数是一个整数，且与提升 T 的选择无关。
3. 在同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ （由投影的秩给出）下，定理 *3* 的指标映射满足

$$\partial([u]) = [\ker T] - [\ker T^*] \longleftrightarrow \operatorname{index}(T) \in \mathbb{Z}.$$

特别地， ∂ 是一个自然映射，它将 *Calkin* 代数中酉元的 K_1-类映射为任意提升的弗雷德霍姆指标。

证明。 (1) 根据阿特金森定理（定理 2），算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是 Fredholm 算子，当且仅当其像 $\pi(T)$ 在 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆。根据假设， $u = \pi(T)$ 是酉元，因此可逆，故 T 是 Fredholm 算子。

(2) 若 T_1 和 T_2 是同一个酉元 u的两个提升，则 $\pi(T_1 - T_2) = 0$，因此 $T_1 - T_2 \in \mathcal{K}(H)$。弗雷德霍姆指标在紧扰动下保持不变，这是弗雷德霍姆理论中的一项基本结果，因此 index(T_1) $=$ index(T_2)。

(3) 这是算子 K-理论中的标准结果。六项正合列中的连接映射 ∂ 正是通过将酉元 $u \in \mathcal{Q}(H)$ 映射到类 $[\ker T] - [\ker T^*] \in K_0(\mathcal{K}(H))$ 来定义的，其中 T是任意一个提升。在典范同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$下，该同构将投影的类映射到其秩；形式差 $[\ker T] - [\ker T^*]$ 对应于整数 $\dim \ker T - \dim \ker T^* = \operatorname{index}(T)$。

□

注释 4. 根据例 *4*，移位算子 S 的类满足 $\partial([\pi(S)]) = -1 \in \mathbb{Z}$，这证实了 $[\pi(S)]$ 生成 $K_1(\mathcal{Q}(H))$。反过来，任意酉元 $u \in \mathcal{Q}(H)$ 都可以提升为一个 *Fredholm* 算子，其指标通过指标映射确定其 K_1-类。

定义 6（Fredholm 指标作为 K-理论映射）。 根据命题 *4*，我们可以将指标映射∂ 与 *Fredholm* 指标等同。因此，我们得到一个算子 K-理论中的典范同构:

$$\mathrm{index} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{index}([u]) = \mathrm{index}(T)$$

对任意 u的提升 T。这正是复合

$$K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{K}(H)) \xrightarrow{\mathrm{rank}} \mathbb{Z},$$

其中第二个映射将投影的类映为其秩。

引理*3*（经由指数映射的指标映射）。设 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{Q}(H))$为酉元。选取酉提升$U \in \mathcal{U}(\mathcal{B}(H))$，使得 $\pi(U) = u$，并设 $A \in \mathcal{B}(H)_{sa}$为自伴算子，使得 $e^{2\pi i A} = U$且$\|A\| \leq 1$。设$p = \chi_{[0,1)}(A)$为 A 对应于区间 $[0, 1)$的谱投影。则 p 是 $\mathcal{B}(H)$中的投影，且模紧算子为有限秩（即 p 与一个紧投影相差一个紧算子）。因此， p 定义了一个类 $[p] \in K_0(\mathcal{K}(H))$，而指标映射由下式给出

$$\partial([u]) = [p] \in K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

等价地，按照定义*6*中的识别，我们有

$$\mathrm{index}([u]) = \mathrm{rank}(p) \in \mathbb{Z},$$

其中，$\mathrm{rank}(p)$ 是算子 p 作为从$\mathrm{ran}(p)$ 到其自身的映射时的弗雷德霍姆指标。

证明。 自伴提升 A 的存在性来自酉元的标准提升定理：由于$\pi(U) = u$ 是酉元，我们可以选取 A，使得 $\|A\| \leq 1$，且 $U = e^{2\pi i A}$。谱投影$p = \chi_{[0,1)}(A)$满足 $p - UpU^* \in \mathcal{K}(H)$，这意味着 $\pi(p)$与 $\pi(A)$对易，因而也与u对易。此外， p 与一个紧投影相差一个紧算子，因为 A模去紧算子后，其谱位于圆周上，所以对应于弧的谱投影是投影的紧扰动。等式 $\partial([u]) = [p]$ 是 K理论中的一个标准结果。在由投影的秩给出的同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$下，类 $[p]$ 对应于$\mathrm{rank}(p)$，根据定义 6 中的识别，它等于u 的弗雷德霍姆指标。

□

引理4（符号上的指标映射）。 对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，指标映射 $\partial_{\mathrm{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$满足

$$\partial_{\mathrm{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \mathrm{index}(T).$$

证明。 回顾 C^*-代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0,$$

其中， $\mathcal{K}(H)$ 表示紧算子，而 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ 是 Calkin 代数（见定义5）。该扩张在 K-理论中诱导出六项正合列（定理1）：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \longrightarrow & K_0(B(H)) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ {\scriptstyle \partial_{\mathrm{Calkin}}}\uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \longleftarrow & K_1(B(H)) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}(H)). \end{array}$$

由于 $B(H)$ 在 K-理论中是稳定且可缩的（Kuiper 定理），因此有

$$K_0(B(H)) = K_1(B(H)) = 0,$$

并且由于 $\mathcal{K}(H)$ 与 $\mathbb{C}$ Morita 等价，

$$K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$$

（见例 1）。因此边界映射

$$\partial_{\text{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

是一个同构（推论 2）。

现在设 $T \in B(H)$ 是一个 Fredholm 算子。根据阿特金森定理（定理 2），当且仅当其像 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 在 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆时，T 才是 Fredholm 的。因此，$\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 定义了一个类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$.

选取一个拟逆 $S \in B(H)$，使得

$$ST - 1,\ TS - 1 \in \mathcal{K}(H).$$

由于 T 是 Fredholm 的，这样的拟逆存在。于是，缺陷投影

$$P = 1 - TS, \qquad Q = 1 - ST$$

是有限秩（因而是紧的）投影，它们表示 $K_0(\mathcal{K}(H))$ 中的类。在 K-理论中，对连接映射的标准计算表明

$$\partial_{\text{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = [Q] - [P] \in K_0(\mathcal{K}(H)).$$

通过秩映射识别 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，$[Q] - [P]$ 对应于

$$\operatorname{rank}(Q) - \operatorname{rank}(P) = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*) = \operatorname{index}(T).$$

因此，

$$\partial_{\text{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \operatorname{index}(T),$$

这就证明了该引理。 □

Calkin 扩张的指标映射将是本文主定理中的关键要素；在主定理中，我们证明下降映射与沿对角嵌入的拉回的复合恢复了这个指标。

例 5 (单边移位的指标**).** 设 $S \in \mathcal{B}(H)$ 是 $\ell^2(\mathbb{N})$上的单边移位，定义为$S(e_n) = e_{n+1}$，其中 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是一组正交归一基。于是，$\pi(S) \in \mathcal{Q}(H)$ 是一个酉算子，因为 $S^*S = I$且 $SS^* = I - P_0$，其中 P_0 是到 $\mathbb{C}e_1$上的秩一投影。类 $[\pi(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是生成元，根据命题 *4*，我们有

$$\partial([\pi(S)]) = \operatorname{index}(S) = \dim\ker S - \dim\ker S^* = 0 - 1 = -1 \in \mathbb{Z}.$$

因此，在同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$下，类 $[\pi(S)]$对应于 -1 （它也是 $\mathbb{Z}$的一个生成元）。

例 6 （有限秩扰动的指标）。设 $T = I + F$ 其中 $F \in \mathcal{B}$（H）是一个有限秩算子。那么 π（T）$= \pi$（I）$+ \pi$（F）$= I$在 *Calkin* 代数中，因此 $[\pi$（T）$] = [I] = 0$在 K_1（$\mathcal{Q}$（H）。由此，根据命题 *4*，

$$\partial([\pi(T)]) = \operatorname{index}(T) = 0,$$

这反映了有限秩（更一般地说，紧的）扰动不会改变弗雷德霍姆指标这一事实。

注 5（与 Toeplitz 扩张的关系）。 *Calkin* 扩张与 *Toeplitz* 扩张密切相关

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\ell^2) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{T}$ 是 *Toeplitz* 代数。此扩张的指标映射给出了经典 *Toeplitz* 指标定理：对于连续符号 $f \in C(S^1)$，*Toeplitz* 算子 T_f 的指标是 f 的绕数的相反数。我们将在第 7 节进一步探讨这一点。

定理 4（Calkin 指标同构）。与 *Calkin* 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$ 相关联的指标映射 $\partial_{\text{Calkin}}: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是一个同构。

证明。考虑 Calkin 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

（见定义5）。这个短正合列的 C^*-代数诱导出 K-理论中的六项正合列（定理1）：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \longrightarrow & K_0(B(H)) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ {\scriptstyle \partial_{\text{Calkin}}}\uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \longleftarrow & K_1(B(H)) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}(H)). \end{array}$$

我们计算所涉及代数的 K-群。

步骤 1： K**-理论** $B(H)$。代数 $B(H)$ 是稳定且适当无限的；特别地，根据 Kuiper 定理，其酉元群是可缩的，这意味着它在 K-理论中也是可缩的。因此

$$K_0(B(H)) = 0, \qquad K_1(B(H)) = 0$$

（参见例 1）。

步骤 2： K**的理论** $\mathcal{K}(H)$。</style}代数 $\mathcal{K}(H)$ 与 $\mathbb{C}$ Morita 等价。因此 e

$$K_0(\mathcal{K}(H)) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$$

（参见例 1）。

步骤 3：正合性。将这些计算代入六项正合序列，得到

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K_0(\mathcal{Q}(H)) \\ {\scriptstyle \partial_{\text{Calkin}}}\uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0. \end{array}$$

正合性现在意味着：

- 映射 $K_0(\mathcal{K}(H)) \to K_0(B(H))$ 必然为零（因为其目标为零）；
- 在 $K_0(\mathcal{Q}(H))$ 处的正合性迫使 $K_0(\mathcal{Q}(H)) = 0$;
- 在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 处的正合性：由于 $K_1(B(H)) = 0$，我们有$\ker(\partial_{\text{Calkin}}) = \text{im}(K_1(B(H)) \to K_1(\mathcal{Q}(H))) = 0$，因此 ∂_{Calkin} 是单射;
- 在 $K_0(\mathcal{K}(H))$处的正合性：由于 $K_0(B(H)) = 0$，我们有$\text{im}(\partial_{\text{Calkin}}) = \ker(K_0(\mathcal{K}(H)) \to K_0(B(H))) = \ker(\mathbb{Z} \to 0) = \mathbb{Z}$，因此 ∂_{Calkin} 是满射。

因此边界映射

$$\partial_{\mathrm{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

既是单射又是满射，因此是同构。

备注。 证明仅使用六项正合列、已知的 K-群 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)$，以及该正合列的正合性。特别地，我们并未假设 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的取值；相反，我们证明了根据正合列，它必定与 $\mathbb{Z}$ 同构。

□

在下一小节中，我们将回顾 Kasparov 针对波兰群胚的下降映射。该映射提供了将等变 K-理论类转化为群胚 C*-代数的 K-理论类的工具。随后，Calkin 扩张的指标映射将作为复合中的最后一步出现，从而得到弗雷德霍姆指标。

2.5 Kasparov针对波兰群胚的下降（Tu，1999年综述）

下降映射是等变 KK-理论中的一项基本工具，它将群胚 $\mathcal{G}$ 上的等变循环变换为约化或最大群胚 C*-代数上的循环。对于局部紧豪斯多夫群胚，该映射由 Kasparov [1988] 发展，并在 Baum–Connes 猜想中发挥核心作用。然而，我们在上一篇论文 [14] 中构造的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 并非局部紧；它是一个波兰群胚。幸运的是，Tu [1999] 将 Kasparov 的下降映射扩展到了配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚情形。在本小节中，我们将回顾 Tu 构造中本指标定理所需的关键内容。

定义 7 (波兰群胚的 Kasparov 下降映射)。 设 $\mathcal{G}$ 是配备博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$的波兰群胚。尽管 $\mathcal{G}$ 是波兰拓扑群胚，但其拓扑一般并非局部紧，因此下降构造依赖于底层的博雷尔结构和博雷尔哈尔系统，而非拓扑本身 *[19]*。

沿用 *Kasparov* 针对局部紧群胚的构造 *[22]* 以及 *Tu* 对其在波兰群胚情形下的推广 *[19,* 第 *2],* 节，存在一个下降同态

$$j_{\mathcal{G}} : KK_{\mathcal{G}}(A, B) \longrightarrow KK(A \rtimes_r \mathcal{G},\, B \rtimes_r \mathcal{G}),$$

其中 A 和 B 是可分的 $\mathcal{G}$-C^*-代数，并配备博雷尔 $\mathcal{G}$-作用，而 $\rtimes_r$ 表示由 $\mathcal{G}$得到的约化交叉积。此映射具有自然性和函子性，并且与 *Kasparov* 积相容。对于最大交叉积，在附加正则性条件下也存在类似的构造；不过，对我们的目的而言，约化版本已足够。

注 6. 下降映射是 *Tu* 证明可和群胚的 *Baum–Connes* 猜想时所用的一项基本工具（参见 *[Tu, 1999*年，定理 *´9.`3]*）。它将 $\mathcal{G}$ 上的等变循环变换为约化群胚 C^*-代数上的循环，并在 *Dirac* 元和对偶 *Dirac* 元的构造中发挥着核心作用。

就本文而言，我们只需要考虑 $A = C_0(\mathcal{G}^{(0)})$（带平凡的 $\mathcal{G}$ 作用）以及 $B = \mathbb{C}$（带平凡的 $\mathcal{G}$ 作用）的情形。设 $\mathcal{G}$ 是一个配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚。在这种情况下，Tu 的下降构造 [Tu, 1999] 给出一个映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}} : K^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow K_0(C^*_r(\mathcal{G})),$$

其中，$K^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) \cong KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 是单位空间的等变 K-同调，而 $C^*_r(\mathcal{G})$ 表示约化群胚 C*-代数。（当最大群胚 C*-代数有定义时，存在一个类似的映射到 $K_0(C^*_{\max}(\mathcal{G}))$，但约化版本已足以满足我们的目的。）

命题 5（下降映射的性质）**：** 下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}$： $K_{\mathcal{G}}^{0}\left(\mathcal{G}^{(0)}\right) \to K_{0}\left(C_{r}^{*}\left(\mathcal{G}\right)\right)$ 在相关映射有定义时满足以下性质：

1. 自然性： 若 ϕ： $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 是一个与博雷尔哈尔系统相容的博雷尔群胚同态，则图表

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^{0}(\mathcal{G}^{(0)}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & K_{0}(C_{r}^{*}(\mathcal{G})) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{*}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{*}} \\ K_{\mathcal{H}}^{0}(\mathcal{H}^{(0)}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{H}}} & K_{0}(C_{r}^{*}(\mathcal{H})) \end{array}$$

可交换。

2. 与悬挂的相容性： 下降映射与KK理论中的悬挂同构相容。更准确地说，对于任意 $n \geq 0$，都有一个可交换图表

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^{n}(\mathcal{G}^{(0)}) & \xrightarrow{\cong} & K_{\mathcal{G}}^{0}(\mathcal{G}^{(0)} \times \mathbb{R}^{n}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{desc}_{\mathcal{G}}} \\ K_{n}(C_{r}^{*}(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\cong} & K_{0}(C_{r}^{*}(\mathcal{G})) \end{array}$$

其中水平同构是 K理论中的悬挂同构，前提是 $\mathbb{R}^{n}$ 带有适当的可测 $\mathcal{G}$作用。

3. 函子性： 若 $f\colon A \to B$ 是一个 $\mathcal{G}$-等变的 $\mathcal{G}$-**C***-代数之间的*-同态，则诱导的 KK理论映射与下降映射相交换，即

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(f_{*}(x)) = f_{*}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}(x))$$

对于任意 $x \in KK_{\mathcal{G}}(C_{0}(\mathcal{G}^{(0)})\ A)$。

证明。 这些性质源于 Kasparov积的函子性和下降构造的自然性；参见 [第 5] [19]节，其中在 Baum–Connes 猜想的证明中用到了这些性质；关于群情形下最初的构造，参见 [22] 。与悬挂的相容性依赖于等变 KK-理论中的 Bott 周期性定理。 □

本文将把下降映射应用于 [14]中构造的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$。我们回顾 [14]中关于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的相关性质。

命题 6 （关于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的性质，见论文 I）。 设 $\mathcal{A}$是一个含幺可分 I 型 **C***-代数。那么 *：*

1. $\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$ 是一个标准博雷尔空间（它继承了论文 I 中所述波兰拓扑的博雷尔结构，尽管该拓扑本身是非豪斯多夫的且非局部紧）。

2. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}\left(\mathcal{A}\right) \ltimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，配备强算子拓扑的 $\mathcal{U}\left(\mathcal{A}\right)$ 是一个带有博雷尔哈尔系统的标准博雷尔群胚。

3. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 容许一个博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^{x}\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$（构造于论文 I，第 *4.5* 节 *）.*

4. 最大群胚 **C***-代数 $C^{*}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 存在且良定义。

5. 存在一个典范对角嵌入 ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^{*}\left(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}\right)$。

注 7. 虽然论文 *I* 证明了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 存在一个波兰拓扑（由部分求值映射生成的初始拓扑），但该拓扑是非豪斯多夫的，且并非局部紧的。对于下降映射（定义 *23*），我们只需要底层的标准博雷尔结构以及博雷尔哈尔系统的存在性。遵循 *Tu [19],*，我们始终在博雷尔范畴中进行讨论；除非另有明确说明，所有关于场的"连续性"的表述都应理解为相对于该博雷尔结构的可测性。

例 7 ($\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)}$ 和 $\mathcal{G}_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}}$)。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 由数对 (B, χ) 组成，其中 $B \subseteq \mathcal{B}(H)$是含单位元的交换 C^*子代数（极大阿贝尔自伴子代数），而 $\chi \in B$ 是一个特征。对于K-理论和指标计算，只需将范围限制在原子型 极大阿贝尔自伴子代数——即与 ℓ^∞同构的那些——因为连续极大交换自伴代数（例如由 L^∞上的乘法算子生成的代数）不会影响群胚 C^*-代数的 K-理论群；详细讨论见 *[14,*第 *5]* 节。

在这一原子型限制下，$\mathcal{B}(H)$的所有不可约表示都酉等价，且单位空间缩减为单个等价类。要得到一个具体模型，必须选取一个可测的代表元场。固定 H的一组正交归一基后，得到的群胚在博雷尔意义下等价于如下形式的变换群胚：$\mathcal{U}(H) \ltimes X$，其中 X 可识别为相对于固定基、模去对角酉算子后的正交归一基空间。这一识别体现了这样一个事实：不同的基之间通过酉共轭作用彼此关联。

For $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$（带有附加单位元的紧算子），单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 可以通过 *GNS* 构造自然地识别为射影空间 $\mathbb{P}(H)$：$\mathcal{K}(H)$ 上的每个纯态都对应于一个秩一投影，因而对应于 $\mathbb{P}(H)$ 中的一个点。于是，该群胚同构于变换群胚 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathbb{P}(H)$，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 通过共轭作用于秩一投影。

当赋予自然拓扑（例如，酉群上的强算子拓扑以及单位空间上的商拓扑）时，这两个群胚都是波兰空间。然而，它们既不是局部紧的（因为酉群是无限维的），也不是 *´étale*（因为源映射与域映射都不是局部同胚）。

$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的下降映射将应用于第 4 节中构造的等变 K^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。其结果将是 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的一个类；沿 ι 拉回并应用边界映射后，即可得到弗雷德霍姆指标。

注 8（奇数情形）。 本文研究奇数 K-理论类（K^1），而非偶数类（K^0）。*Tu* 的下降映射也可通过悬挂涵盖奇数情形：

$$K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) \cong K^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)} \times \mathbb{R}),$$

其中，$\mathbb{R}$ 配备了平凡的$\mathcal{G}$作用。随后，通过对悬挂循环应用下降映射，并利用 *Bott* 周期性将目标识别为 $K_1(C^*(\mathcal{G})$，即可定义 K^1 上的下降映射。具体而言，我们有

$$\mathrm{desc}^{(1)}_{\mathcal{G}} : K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G})).$$

下降映射是连接群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 所编码的几何数据与 Fredholm 指标的解析数据的关键纽带。在第 5 节中，我们将把它应用于等变 K^1类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$；在第 6 节中，我们将把它与沿 ι 的拉回及边界映射结合起来，从而得到整数值的弗雷德霍姆指标。

注 9（Tu 关于具有博雷尔哈尔系统的群胚的下降）。 *Tu* 在第 *4]* 节构造的下降映射*[19,* 适用于配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚 ——这一框架在博雷尔群胚文献中有时称为"测度群胚"。不过需要注意，这与 *Connes–Renault* 的用法不同；后者会在单位空间上固定一个准不变测度类。

这正是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的情形，前提是验证以下几点：

- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是波兰的（由 $\mathcal{A}$ 是可分*I*型可得）；
- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 具有一个博雷尔哈尔系统（在第 *X* 节中构造）；
- 对角嵌入 ι 在适当意义下是可测的。

Tu 的扩展中的关键技术创新，是将希尔伯特空间的连续场 （用于局部紧 *Kasparov* 理论）替换为可测场和可测表示。只要存在可供积分使用的博雷尔哈尔系统，即使群胚缺少局部紧结构，也可以据此定义下降映射。

对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$而言，这一框架尤为自然：*I*型条件确保表示论具有良好的性质，而 *Renault* 的分解理论 *[21]*则为可测表述与 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的 *C**-代数结构搭建了桥梁。

2.6 论文 [14]中的对角嵌入 $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$

论文 I 的主要成果之一，是构造了一个典范嵌入，将原始 C*-代数 $\mathcal{A}$ 嵌入其自身酉共轭群胚的群胚 C*-代数中。这个嵌入称为对角嵌入，记作

$$\iota : \mathcal{A} \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}),$$

是 $\mathcal{A}$ 的解析结构与 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的几何结构之间的关键联系。在本小节中，我们回顾 ι 的定义和主要性质，这些内容见于 [14]。

定义（回顾自论文 I，第 4.9 节）。对于每个 $a \in \mathcal{A}$，元素 $\iota(a) \in C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 定义在态射 $(u, (B, \chi)) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上，定义如下

$$\iota(a)(u,(B,\chi)) := \begin{cases} \chi(u^*au) & \text{if } u^*au \in B, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

可以验证，这定义了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(1)}$ 上的一个有界连续函数，且具有纤维紧支撑，因此是卷积代数的一个元素。映射 ι 线性且连续地延拓为一个 $*$-同态$\mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

关键性质（论文 I，第 4.10 节和第 4.13 节）。对角嵌入满足以下性质：

- ι 是一个保单位的单射 $*$-同态（定理 7）。
- ι 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变的：对于 $g \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $a \in \mathcal{A}$，有 $\iota(g \cdot a) = g \cdot \iota(a)$，其中作用分别是在 $\mathcal{A}$ 上通过共轭作用，以及在 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$上通过左平移给出的。
- 条件期望 $E: C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}})$ 满足 $E(\iota(a))(B,\chi) = \chi(\mathbb{E}_B(a))$，其中$\mathbb{E}_B: \mathcal{A} \to B$ 是到交换子代数 B 上的条件期望（若其存在）。特别地，对于 $a \in B$，这化简为 $\chi(a)$。
- $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}})$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的（定理 8）。
- 对于任意 $*$-同构 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{A}}} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \\ \downarrow \phi & & \downarrow (\mathcal{G}_{\phi})_* \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{B}}} & C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}}) \end{array}$$

可交换，其中 $\mathcal{G}_{\phi}$ 是诱导的群胚同构（命题 41）。

在本文中的作用。 嵌入 ι 在我们的指标定理中发挥着两个关键作用。首先，它诱导出拉回映射 $\iota^*: K_*(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \to K_*(\mathcal{A})$，该映射将在第 6 节中使用。其次，更为根本的是，相关的 Kasparov 模 $[\iota] \in KK(\mathcal{A}, C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 出现在引理 12 的相容性结果中，该结果将下降构造与遗忘映射联系起来。这种相容性是证明主定理的技术核心。

定义 8 (对角嵌入)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含单位元的可分 *I* 型 *C**-代数，$\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是其在论文 *I* 中构造的酉共轭群胚。对角嵌入 $\iota: \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 是唯一的含单位元单射 $*$-同态，其特征由以下性质刻画：

对于每个 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$，设 $\pi_x: \mathcal{A} \to B(H_x)$ 是与 B 上的特征 χ 相关联的 *GNS* 表示。那么对于任意 $a \in \mathcal{A}$ 以及 $\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$ 上的任意准不变测度 μ，直积分 $\mathcal{H} = \int^\oplus H_x \, d\mu(x)$ 上的算子 $\Pi(a) = \int^\oplus \pi_x(a) \, d\mu(x)$ 满足

$$\Pi(a) = \Lambda_{\text{univ}}(\iota(a)),$$

其中，$\Lambda_{\text{univ}}: C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H}_{\text{univ}})$ 是 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 的泛表示。

ι 的存在性、唯一性和单射性已在论文 *I* 的定理 *7* 中得到证明（另见命题 *36* 和引理 *21*）。

下述定理概述了论文 I 中证明的对角嵌入的基本性质。

定理 5 (关于 ι 的性质)。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 *I* 型 *C**-代数。那么，在论文 *I* 第 *4.9* 节中构造的对角嵌入 $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 满足：

1. ι 是一个含幺单射 $*$同态。（论文 *I*，定理 *8*，第 *4.11* 节）
2. 对任意 $a \in \mathcal{A}$ 和任意 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}$，设 (π_x, H_x, ξ_x) 为与特征 χ 在 B 上的作用相关联的 *GNS* 三元组，并设 $E: C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \to C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})$ 为典范条件期望。那么

$$E(\iota(a))(x) = \langle \xi_x, \pi_x(a)\xi_x \rangle.$$

特别是，若 $a \in B$，则这化简为 $\chi(a)$。（论文 *I*，引理 *22(2)* 和推论 *30*，第*4.10*节）

3. $\iota(\mathcal{A}) \subseteq C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是交换的。（论文 *I*，定理 *9*，第 *4.11* 节）
4. ι 关于含单位元的 $*$-同构具有自然性：若 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个同构，则

$$\iota_\mathcal{B} \circ \phi = (\mathcal{G}_\phi)_* \circ \iota_\mathcal{A},$$

其中 $\mathcal{G}_\phi: \mathcal{G}_\mathcal{B} \to \mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是诱导的群胚同构。（论文 *I*，命题 *41*，第 *4.12* 节）

*Pro*关于。 每个陈述的证明见论文 I 所引用的各节。特别是 ar:

- 对于 (1)，请参见论文 I 中的定理 8，其中单射性由引理 21 和直积分表示的忠实性得出。
- 对于 (2)，引理 22(2) 建立了 $\Lambda(\iota(a))$ 的逐纤维分解；随后，推论 30 通过矩阵系数 $\langle \delta_x, \Pi(a)\delta_x \rangle = \langle \xi_x, \pi_x(a)\xi_x \rangle$ 将其识别为条件期望。
- For (3)，定理 9 通过 ι 的像落在 $C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}})$ 中来刻画交换性。

• For (4)，命题 41 证明了在同构下的函子性，并附有第 4.12 节中的交换图。

□ □

现在，我们通过几个具体情形来说明对角嵌入 ι。在这些例子中，借助 GNS 表示的可测场构造的抽象对象 ι（论文 I，第 4.9 节）有一种特别简单的实现方式，它与代数在直积分希尔伯特空间上的自然纤维逐点作用相一致。应将这些描述理解为特定表示中对角嵌入的具体模型，而不是 ι 本身的另一种定义。

例 8 ($M_n(\mathbb{C})$**的对角嵌入)。** 对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，酉共轭群胚为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong U(n) \ltimes \mathbb{CP}^{n-1}$，其群胚*C**-代数可识别为交叉积 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$（论文 *I*，第 *5.1* 节）。

在这个交叉积作用于 $L^2(\mathbb{CP}^{n-1}) \otimes \mathbb{C}^n$上的标准表示中，对角嵌入$\iota$： $M_n(\mathbb{C}) \to C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 由矩阵的纤维作用实现:

$$(\iota(A)\xi)(x) = A\xi(x), \qquad \xi \in L^2(\mathbb{CP}^{n-1}) \otimes \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{CP}^{n-1}.$$

等价地，ι（A）对应于交叉积中的常值乘子 $A \otimes 1$（论文 *I*，命题 *49*）。

例 9 （关于 $\mathcal{K}$（H）~的对角嵌入）。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~，即可分希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化，我们有 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）$\ltimes \mathbb{P}$（$H$），并且 C^*（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）与交叉积 C_0（$\mathbb{P}$（H）$\rtimes \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$））规范同构（论文 *I*，第 *5.3* 节）。

在该交叉积于 L^2（$\mathbb{P}$（H）$\otimes H$ 上的自然表示中，对角嵌入 ι：$\mathcal{K}$（H）~ $\to C_0$（$\mathbb{P}$（H）$\rtimes \mathcal{U}$（$\mathcal{A}$））通过如下纤维算子作用:

$$(\iota(T)\xi)(x) = T\xi(x), \qquad \xi \in L^2(\mathbb{P}(H)) \otimes H,\ x \in \mathbb{P}(H).$$

因此 ι（T）被实现为 交叉积中的常值乘子 $T \otimes 1$（论文 *I*，命题 *61* ）.

例 10（关于 $\mathcal{B}$（H）的对角嵌入）。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$（$H$），对角嵌入 ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*$（$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$）可以通过利用 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)}$ 在例 *7* 中的具体描述直接构造，而无需援引论文 *I* 的 *I* 型假设。

如例 *7* 中所述，将范围限制在原子*MASA* 上后，我们可以将单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$ (H) 视为希尔伯特空间 H 的标准正交基模去对角酉算子所成的空间，记作 X。群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)}$ 于是同构于变换群胚 $\mathcal{U}$ $(H) \ltimes X$，其中 $\mathcal{U}(H)$ 通过基变换作用。对于每个 $x \in X$，对应于一个正交归一基 $\{e_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们得到一个 $*$-表示 π_x： $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H_x)$，其中 $H_x \cong \ell^2(\mathbb{N})$ 是以 $\{e_n^x\}$为基的希尔伯特空间。这些表示通过将各基对应起来的酉算子彼此酉等价。

对角嵌入 ι： $\mathcal{B}(H) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)})$ 定义如下:

$$\iota(T)(x,u) = u^*\pi_x(T)u \in \mathcal{B}(H_x),$$

将其视为 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}(H)}$上的希尔伯特空间场的一个截面。这一构造定义良好、为单射，且在酉共轭作用下具有自然性。它与论文 *I* 中的一般构造限制在 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}^{(0)}$ (H)的原子*MASA* 部分所得的构造一致；对于本文中的 K-理论指标计算，这一构造已足够，因为连续极大交换自伴代数分量不对 K-理论作出贡献 *[14,* 第 *5]* 节。

要全面处理整个单位空间上的对角嵌入（包括连续极大交换自伴代数），需要将论文 *I* 的 *I*型框架扩展到涵盖非*I*型代数；这仍是有待未来研究解决的开放问题。

下面的引理记录了 ι 与条件期望 E 的一项关键相容性，这对于理解指标定理中 ι 在拉回映射下的像至关重要。

引理 5（$\iota(a)$ 的条件期望）。对于任意 $a \in \mathcal{A}$ 以及任意 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，条件期望 $E: C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 满足

$$E(\iota(a))(x) = \begin{cases} \chi(a), & a \in B, \\ 0, & a \notin B. \end{cases}$$

证明。这正是定理 5 的第 (2) 项，该项概述了论文 I 中引理 22(2) 和推论30的构造。

□

对角嵌入在 K-理论上诱导出一个映射，该映射将在主定理中用于联系解析指标与几何指标。

推论 4（诱导的映射 K-理论）。对角嵌入 $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 诱导出一个同态

$$\iota_* : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$

根据算子 K-理论的函子性。

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，此映射将投影 p 的类映为由 $\iota(p)$ 表示的类；在同构 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 下，该类对应于常值乘子 $p \otimes 1$（见例 9）。对于 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$，它将 $[p]$ 映为 $[\iota(p)]$,，后者在 $C(\mathbb{CP}^{n-1}) \rtimes U(n)$ 中对应于 $[p \otimes 1]$（见例 8）。

证明。ι_* 的存在性源于将函子性应用于 $*$-同态 ι所得的 K理论。文献中引用的例子给出了具体模型中 $\iota(p)$ 的显式描述。 □

在本文的主定理中，我们需要将 $K_*(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的 K理论类与原代数 $\mathcal{A}$联系起来。这并非通过一个字面意义上的拉回映射 $\iota^*: K_*(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to K_*(\mathcal{A})$（对于 K 理论而言，这种映射通常并不存在）来实现，而是通过与对角嵌入相关的类 $[\iota] \in KK(\mathcal{A}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 作 Kasparov 积来实现。该积与下降映射之间的相容性在引理 12 中得到证明。

备注 10（ι 在指标定理中的作用）。对角嵌入 $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是连接群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的几何数据与原代数 $\mathcal{A}$ 的解析数据的关键纽带。然而，它在指标定理中的作用比单纯在 K 理论上诱导一个映射更为微妙。

在第 4 节中，我们从给定的 Fredholm 算子 T（相对于 $\mathcal{A}$）构造一个等变的 K^1-类$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$。应用下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 2 5 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ ∈（在小节 . 中回顾）后，得到一个类 $K_1 C^* \mathcal{G}_{\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$（ ( ) ）。

为了将此类与弗雷德霍姆指标联系起来，人们可能会天真地尝试应用由 ι 在 K-理论上诱导的映射，$\iota_*: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to K_1(\mathcal{A})$。然而，正如第1.3节所述，对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$，该映射的值落在零群 $K_1(\mathcal{B}(H)) = 0$ 中，因此无法捕捉非平凡指标。相反，ι 在建立 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与承载符号类的代数（例如，对于 $\mathcal{B}(H)$ 而言的 $\mathcal{Q}(H)$）之间的 Morita 等价方面，发挥着间接但至关重要的作用。具体而言，嵌入 ι 用于在 [14] 中构造一个 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$-$\mathcal{A}$-印痕双模；经过适当压缩后，该双模实现了这种 Morita 等价。

因此，指标计算按如下方式进行：下降类 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 通过 Morita同构 $\Psi: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to G_{\mathcal{A}}$ 被传递到辅助群 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}(G_{\mathcal{B}(H)} = K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中的一个类，该辅助群对应于 $\mathcal{B}(H)$；而 $G_{\widetilde{\mathcal{K}(H)}} = K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$ 对应于 $\mathcal{K}(H)$。随后，边界映射 $\partial_{\mathcal{A}}$（对于 $\mathcal{B}(H)$，即 Calkin指标映射；对于 $\mathcal{K}(H)$，则为零）给出 $\mathbb{Z}$ 中的弗雷德霍姆指标。

因此，ι 发挥了关键桥梁作用，但并非通过其在 K 理论上诱导的映射，而是通过构造 *Morita* 等价，将群胚 C^* 代数与符号代数连接起来。

3 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与表示族

为了构造与 Fredholm 算子 T 相关联的等变 KK-类，我们需要理解 T在所有交换上下文中的行为。本节表明，族 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 本质上是常数——这是一个至关重要的简化。

3.1 对 $B(H)$ 与 $\mathcal{K}(H)$~的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 回顾

在本小节中，我们回顾本文重点讨论的两个具体 C*-代数的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的显式描述： $\mathcal{A}=B(H)$ 与 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)$~。这些描述源自论文 I 中的一般构造，并将在随后各节中使用。

在本节中， H 表示一个可分无穷维希尔伯特空间。我们采用 $\mathcal{K}(H)$~ 与 $B(H)$ 在 H 自身上的忠实表示，并如论文 I 中那样，为酉群配备强算子拓扑。

命题7 ($\mathcal{K}$上的酉共轭群胚 $H)$~)。 设 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是可分希尔伯特空间上紧算子的单位化，并忠实地表示在 H 自身上。那么：

1. 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与射影空间同胚

$$\mathbb{P}(H)=\mathcal{U}(H)/(\mathcal{U}(1)\times\mathcal{U}(H^{\perp})),$$

其中 $\mathcal{U}(H)$ 赋予强算子拓扑。这里， $[v]\in\mathbb{P}(H)$ 表示由单位向量 $v\in H$张成的直线，而 $\mathcal{U}(1)\times\mathcal{U}(H^{\perp})$ 是固定参考直线的稳定子。

2. 酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 由形如 $u=\lambda I+K$ 的算子组成，其中 $\lambda\in\mathbb{T}$ 且 $K\in\mathcal{K}(H)$满足酉条件 $u^*u=uu^*=I$。赋予从$\mathcal{U}(H)$继承的强算子拓扑后， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$构成一个波兰群。

3. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的共轭作用定义为

$$u\cdot[v]=[uv],\qquad u\in\mathcal{U}(\mathcal{A}),\ [v]\in\mathbb{P}(H),$$

其中 $[uv]$ 表示由单位向量 $uv\in H$张成的直线。

4. 酉共轭群胚是相应的作用群胚

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}=\mathcal{U}(\mathcal{A})\ltimes\mathbb{P}(H),$$

其为 一个波兰群胚。对于无限维 H，它既非局部紧，也非 *´étale*。

证明。 这些结果已在论文 I 的第 5.3 节中确立。具体而言：

- 条目 1 是命题 58，其中通过将秩一投影与射影空间中的点相识别，证明了同胚 $\mathcal{G}_{(0)\ \mathcal{A}}\cong\mathbb{P}(H)$。
- 第2项是命题 59，它表明带有强算子拓扑的 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 是一个波兰群，并将其元素描述为恒等算子的紧扰动。

• 第3项直接由 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ 上的共轭作用的定义得出，如引理1和命题20所验证。

• 第4项是定理 13，它确立了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，并证明了在无限维 H情形下其非局部紧性以及非´étale性。

□

命题 8 (关于 $\mathcal{B}(H)$的酉共轭群胚)。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 是可分希尔伯特空间 H上所有有界算子构成的代数，并忠实地表示在 H 自身上。那么：

1. 对于指标理论的目的，只需将范围限制在原子极大阿贝尔自伴子代数（即与 ℓ^∞同构的子代数）。在此限制下，单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 与射影空间 $\mathbb{P}(H)$同胚。完整的单位空间中也包含连续极大交换自伴代数（例如由 $L^\infty[0,1]$上的乘法算子产生的此类代数），但我们将在第7节证明，它们不会影响指标计算所涉及的 K-理论群；详细论证见 *[14,* 第 *5]* 节。

2. 配备强算子拓扑的酉群 $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{U}(H)$ 是一个波兰群。

3. $\mathcal{U}(\mathcal{A})$对 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$的共轭作用由相同的公式 $u \cdot [v] = [uv]$给出，其中 $u \in \mathcal{U}(H)$,$[v] \in \mathbb{P}(H)$。

4. 酉共轭群胚是作用群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(H) \ltimes \mathbb{P}(H)$，它是一个既非局部紧也非 ´*étale* 的波兰群胚。

证明。 这些结论可由论文 I 的一般构造应用于 $\mathcal{B}(H)$ 得出。具体而言：

• 对于条目 1， $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ 中的点对应于一对 (B, χ)，其中 $B \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是一个含单位元的交换 C^*-$\widehat{\ }$子代数（极大阿贝尔自伴子代数，MASA），而 $\chi \in B$ 是一个特征。对于原子 MASA，GNS 构造将每个特征对应到一个秩一投影，从而得到与 $\mathbb{P}(H)$ 的识别。关于在指标计算中限于原子 MASA 的理由，见第 5 节 [14,，其中说明连续 MASA 分量在群胚 C^*-代数中只贡献理想 $\mathcal{K}(H)$，因此不影响 K_1。

• 条目 2 是 [14], 推论 18 的特例，该推论表明，对于任意含单位元的可分 C^*代数， $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 在强算子拓扑下是波兰的。

• 条目 3 由 [14], 引理1 得出，该引理确立了此类代数的共轭作用的连续性。

• 条目 4 由 [14], 定理6 得出，该定理证明了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚；再结合 [14] 命题 26 和 27，它们表明无限维情形下的非局部紧性和非´étaleness。 nal 代数。

□

注 11 (原子极大阿贝尔自伴代数足以用于指标理论)。 对于 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{B}(H)$，其核和余核是 H的有限维子空间。这些子空间可由对应于标准正交基的原子极大阿贝尔自伴代数检测到，而这些标准正交基扩充了$\ker T$和 $\ker T^*$的基。

相比之下，连续*MASA*源自弥散谱测度——例如，将$L^\infty[0,1]$ 嵌入 $\mathcal{B}(L^2[0,1])$ 中作为乘法算子。这类*MASA*没有极小投影，其特征对应于连续谱中的点，而非秩一投影。因此，

它们无法检测 H的有限维子空间，因为这些子空间与$\widehat{}$谱测度中的原子相对应。更形式化地说，对于任意连续极大交换自伴代数 $B \subseteq \mathcal{B}(H)$ 及任意特征 $\chi \in B$，*GNS* 表示π_χ 是不可约且无限维的，而对$a \in B$ 的求值映射$\mathrm{ev}_a(B, \chi) \;=\; \chi(a)$ 无法提供有关有限秩算子 *[20]*的信息。

由于弗雷德霍姆指标只取决于 T 的有限维核和余核，因此 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的连续极大交换自伴代数分量不会提供额外信息。事实上，在构造等变 K^1-类 $[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)}$ 时，关键数据由单位空间的原子部分承载。这证明了我们在命题 *8* 中将范围限制为原子*MASA*是合理的，从而可以使用具体模型$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(H) \ltimes \mathbb{P}(H)$，其中单位空间 $\mathbb{P}(H)$ 通过秩一投影参数化原子*MASA*。

更详细的分析（见 *[14,* 第 *5]* 节）表明，连续极大交换自伴代数分量仅对群胚 C^*-代数中的紧理想 $\mathcal{K}(H)$ 有贡献，因此不会影响 K_1，这证实了它们与指标计算无关。

推论 5 （关于 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)^\sim$）。 对于 $\mathcal{A} \;=\; B(H)$ （限制为原子*MASA*）以及$\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，我们有：

1. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个波兰空间。
2. $\mathcal{U}$（$\mathcal{A}$）是一个通过共轭作用连续作用于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的波兰群。
3. $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$ 是一个承认博雷尔哈尔系统的波兰群胚，这一点由论文 *I* 中的构造以及 *Tu* 关于测度群胚的理论 *[12]*所保证。
4. 对角嵌入 $\iota : \;\; \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ （构造于论文 *I*、第 *4.9* 节）存在，并满足第 *2.6* 小节中概述的性质，包括单射性、与条件期望的相容性以及交换性刻画。

证明。 这些结论由命题 7 和 8 以及论文 I 的一般结果共同推出。具体而言：

- (1) 和 (2) 分别由命题 58–59 和命题 66–67 得出。
- (3) 由定理 13 和命题 30 得出：定理 13 证明了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个波兰群胚，而命题 30 则保证了博雷尔哈尔系统的存在。
- (4) 对应论文 I 中的定理 7（单射性）、定理 8（交换性刻画）和命题 41（函子性）。

□

在接下来的几个小节中，我们将构造一个定义在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的希尔伯特空间连续场，并证明对于每个 $T \in \mathcal{A}$，算子族 $\{\pi_x(T)\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是常值的，从而对等变 K^1-类作出简明描述。

3.2 希尔伯特空间 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的典范可测场

对于每个点 $x \;=\; (B,\;\; \chi) \;\in\; \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ，我们通过 GNS 构造构造一个希尔伯特空间 H_x 和一个表示 $\pi_x : \;\; \mathcal{A} \;\to B(H_x)$。在本小节中，我们证明族 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上带有一个自然的连续场结构。该结构对于在第 4 节中构造 Fredholm 算子的等变 K^1-类至关重要。

备注 12（术语说明）。 在本节中，我们使用希尔伯特空间的可测场 ，而不是连续场。这是由 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的拓扑所决定的，因为该拓扑是非豪斯多夫的且并非局部紧的，使得连续性表现不佳。遵循 *Tu [19],* ，关于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的标准博雷尔结构的可测性，是后续所有构造（直积分、下降映射、 KK-理论）所适用的正则性条件。在先前版本中提到的"连续性"，在当前框架下应理解为可测性。

定义 9（点处的 GNS 表示）。 对于 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ，设 $\chi : B \to \mathbb{C}$ 为给定的特征。由于 $\mathcal{A}$ 是 *I*型， χ 可扩张为 $\mathcal{A}$上的纯态 ω_x ；尽管此扩张并不唯一，但与不同扩张相关联的 *GNS* 表示酉等价（参见论文 *I* 的引理*18*）。因此，我们可以借助论文 *I* 第 *4.9* 节的可测场结构，固定一个博雷尔扩张选择。

定义闭左理想

$$N_x = \{a \in \mathcal{A} : \omega_x(a^*a) = 0\}.$$

希尔伯特空间 H_x 是 $\mathcal{A}/N_x$ 关于内积

$$\langle [a], [b] \rangle = \omega_x(b^*a), \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

GNS 表示 $\pi_x : \mathcal{A} \to B(H_x)$ 由 $\pi_x(a)\,[b] = [ab]$给出，循环向量为 $\xi_x = [1_{\mathcal{A}}] \in H_x$。

备注 13（典范连续场结构）。 设 $\mathcal{H} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}} H_x$ 为不交并。定义一个截面空间

$$\Gamma = \left\{ \xi : \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \to \mathcal{H} \ : \ \xi(x) \in H_x \textit{ for all } x, \textit{ and for every } a \in \mathcal{A},\ x \mapsto \langle \xi(x), \pi_x(a)\xi(x) \rangle \textit{ is Borel} \right\}.$$

可以验证， Γ 满足 *Dixmier* 的《 *[20,*》第 *10]*章中所定义的希尔伯特空间可测场公理：

- 对每个 x，求值映射 $\xi \mapsto \xi(x)$ 将 Γ 映到 H_x的一个稠密子空间上。
- 对每个 $\xi \in \Gamma$，映射 $x \mapsto \|\xi(x)\|$ 都是博雷尔的。
- 若 ξ ： $\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}} \to \mathcal{H}$ 是一个截面，并且对每个 $\epsilon > 0$ 以及每个 $x_0 \in \mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ ，都存在 $\eta \in \Gamma$，使得$\|\xi(x) - \eta(x)\| < \epsilon$ 在 x_0的某个博雷尔邻域上成立，则 $\xi \in \Gamma$。

希尔伯特空间场 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的可测性已在论文 *I* 的引理*18*中利用 $\mathcal{A}$的 *I* 型结构得到证明。注意，尽管 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 具有自然拓扑（由部分求值映射生成的初始拓扑），但该拓扑是非豪斯多夫且非局部紧的；因此，相对于该拓扑的连续性并不适用于积分理论。遵循 *Tu [19],* 的做法，我们因此在博雷尔范畴中工作，并依赖于从 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的波兰结构继承而来的标准博雷尔结构；该波兰结构见 *[14,*第 *3]*节。

这一可测场结构对于对角嵌入的直积分构造（论文 *I* 第 *4.9* 节）以及下文第 *4* 节中 *Fredholm* 算子的等变 K^1-类的定义至关重要。

对于本文所考虑的两个具体代数，这些 GNS 表示具有特别简单的形式。如注 11 所论证的，就指标理论而言，在 $B(H)$ 的情形下，只需考虑原子极大阿贝尔自伴子代数；连续极大阿贝尔自伴子代数不会对弗雷德霍姆指标作出贡献。

命题 ion 9（ $\mathcal{K}(H)^{\sim}$的 GNS表示）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 并设 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 。

1. 若 χ 对应于秩一投影 $p \in B$（即 χ 不是无穷远处特征），则 χ 可扩张为向量态 $\omega(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$ 其中 ξ 是 p靶中的单位向量。相应的 *GNS* 表示 π_x 与 $\mathcal{A}$ 在 H上的恒等表示酉等价，其循环向量为ξ。

2. 如果 $\chi = \chi_\infty$ 是无穷远处特征（对应于商 $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$），那么 χ 本身就是 $\mathcal{A}$的一个一维表示，其 *GNS* 表示是作用在 $\mathbb{C}$上的一维特征表示。

在这两种情况下，希尔伯特空间 H_x 都可以自然地识别为 H 或 $\mathbb{C}$（在酉等价意义下）。

证明。 对于 (1)，与秩一投影关联的态是一个向量态；其 GNS 表示是作用在 H 上的恒等表示，其中秩一投影是循环向量（参见论文 I、引理 21 和命题 61 的步骤 1）。对于 (2)，无穷远处特征 χ_∞ 本身就是$\mathcal{K}(H)^\sim$ 的一个一维表示，它通过商 $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 分解（参见论文 I、命题 57，其中明确给出了 χ_∞的定义，并将其识别为商映射）。因此，其 GNS 表示本身作用在 $\mathbb{C}$上。 □

命题 *10*（ $B(H)$的原子特征的 *GNS* 表示）。令 $\mathcal{A} = B(H)$，并设 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，其中 B 是对应于正交归一基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的原子极大阿贝尔自伴子代数，而 χ是对应于在基向量 e_{n_0} 处求值的特征（关于将范围限制为原子极大阿贝尔自伴子代数的理由，参见注 *11*）。那么，χ 可扩张为 $B(H)$ 上的向量态 $\omega_x(T) = \langle Te_{n_0}, e_{n_0}\rangle$，且相应的 *GNS* 表示 π_x 酉等价于作用在 H上的 $B(H)$的恒等表示，其循环向量为e_{n_0}。

证明。 态 $\omega_x(T) = \langle Te_{n_0}, e_{n_0}\rangle$ 是向量态；其 GNS 表示是作用在 H 上的恒等表示，循环向量为 e_{n_0}（参见论文 I、第 4.9 节、步骤 1 和引理 21；两者共同证明了与秩一投影相关联的 GNS 表示是恒等表示）。根据注 11，对原子极大阿贝尔自伴代数的限制是合理的，因为连续极大交换自伴代数无法检测 Fredholm 算子的有限维核和余核。 □

推论 6（希尔伯特空间 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)^\sim$）。对于 $\mathcal{A} = B(H)$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，以及除紧情形下无穷远处特征以外的所有$x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们都有一个典范酉同一化$H_x \cong H$。对于紧情形下的无穷远处特征，我们有 $H_x \cong \mathbb{C}$。

证明。 我们分别考虑这两种情形，并参照命题9和10中给出的 GNS 表示的明确描述。

情形 1： $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$**.** 令 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$。

1. 若 χ 是与秩一投影 $p \in B$ 相对应的特征（即 $\chi \neq \chi_\infty$），那么根据命题 9(1)，GNS 表示 π_x 与 $\mathcal{A}$ 在 H上的恒等表示酉等价，其循环向量由靶 p中的一个单位向量给出。因此，我们得到一个典范的酉同一化 $H_x \cong H$，其中循环向量 $\xi_x \in H_x$ 对应于 H中的这个单位向量。

2. 如果 $\chi = \chi_\infty$ 是无穷远处特征（对应于商 $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$），那么根据命题 9(2)，GNS 表示 π_x 是在 $\mathbb{C}$上的一维特征表示，其循环向量为 $1 \in \mathbb{C}$。这给出了典范识别 $H_x \cong \mathbb{C}$。

情形2： $\mathcal{A} = B(H)$ **带有原子MASA**。设 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是这样一个点，其中 B 是对应于正交归一基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的原子MASA，而 χ是在基向量 e_{n_0} 处取值的特征（关于在指标理论中可以忽略连续MASA的理由，参见注 11）。

根据命题 10，GNS 表示 π_x 与B在 H上的恒等表示酉等价，其中H，循环向量为 e_{n_0}。因此，我们有一个典范的酉同一化 $H_x \cong H$，其中$\xi_x \in H_x$ 对应于 $e_{n_0} \in H$。

结论。结合这两种情形，我们得到一个典范的酉同一化 $H_x \cong H$，适用于所有 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$；但紧情形下的无穷远处特征除外，此时 $H_x \cong \mathbb{C}$。这种识别之所以是典范的，是因为它由 GNS 表示与标准表示之间的酉等价所诱导（在 H 上为恒等算子，或在 $\mathbb{C}$上为特征），并且在这种等价下保持循环向量。

□

现在我们来构造可测场结构。

定义10(希尔伯特空间的可测场**).** 设 $X = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 为一个标准博雷尔空间。设 $\{H_x\}_{x\in X}$为一族可分希尔伯特空间，且设 $\Gamma \subset \prod_{x\in X} H_x$ 为一个截面子空间，满足以下公理（参见 *Dixmier [20,*第 *10]*章）：

1. 对每个 $\xi \in \Gamma$，映射 $x \mapsto \|\xi(x)\|_{H_x}$ 是博雷尔的。*2.* 对每个 ξ，$\eta \in \Gamma$，映射 $x \mapsto \langle \xi(x)\ \eta(x) \rangle_{H_x}$ 是博雷尔的。*3.* 对每个 $a \in \mathcal{A}$ 和 $\xi \in \Gamma$，映射 $x \mapsto \pi_x(a)\xi(x)$ 是博雷尔的。*4.* 对每个 $x \in X$，集合 $\{\xi(x) : \xi \in \Gamma\}$ 在 H_x 中稠密。*5.* 存在一个可数子集 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，使得对每个 $x \in X$，集合 $\{\xi(x) : \xi \in \Gamma_0\}$ 在 H_x 中稠密。

于是 $(\{H_x\}_{x\in X}, \Gamma)$ 称为 X上的 希尔伯特空间的可测场。

注14。在我们的设定中，场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 来源于 $\mathcal{A}$ 的表示族 $\{\pi_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。上述可测性条件是相对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上继承自其波兰群胚结构的标准博雷尔结构来理解的（参见 *[14,*第 *3]* 节）。虽然 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 带有自然拓扑（由部分求值映射生成的初始拓扑），但该拓扑既非豪斯多夫，也非局部紧，因此连续性对于积分理论而言表现不佳。遵循 *Tu [19],*，我们因此在博雷尔范畴中开展工作，依赖可测场而非连续场。本文其他地方出现的博雷尔测度 μ 将用于直积分构造，但可测场结构本身的定义独立于任何特定测度。

就我们的目的而言，只需注意到该场本质上是常值的。

命题 11（场的本质平凡性，对于 $B(H)$ 和 $\mathcal{K}(H)$~）。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，以及对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$~ 除无穷远点之外的情形，该场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在可测意义下同构于纤维为 H的常值场（事实上，它本质上是常值的：在对应于某个固定原子*MASA*的每条轨道上都是常值）。

~证明。根据推论 6，对于每个 x（无穷远点除外），我们都有酉同一化 $U_x : H_x \xrightarrow{\sim} H$。对于 $B(H)$，空间 $\mathcal{G}_{B}^{(0)}{}_{(H)}$ 可识别为 $B(H)$ 上纯态的集合，其中每个纯态都是某个单位向量 $\xi \in H$所对应的向量态 ω_ξ。与 ω_ξ 相关联的 GNS 表示酉等价于

H上的恒等表示，并且实现酉算子可以关于 ξ 以博雷尔方式选取（因此也可以关于 x）。对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，使用 H的典范基也可采用类似论证；借助将 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^{(0)}{}_{(H)^{\sim}}$ 明确参数化为 $\mathbb{N}$的一点紧化，可知其在无穷远点之外具有可测性。此外，当限制在对应于固定原子MASA的每条轨道上时，可以将这些识别选取得连续变化；这可由论文 I 第 3] 节的结果，以及此类轨道是离散的或具有自然连续参数化这一事实推出。 □

注15. 因此，场 $\{H_x\}$ 在直积分理论的意义下是本质上常值的：相对于自然测度，将其限制到 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的一个余零测子集后，它同构于以 H 为纤维的常值场。这种程度的平凡性足以支撑随后的直积分分解。

此外，正如论文 *I*第 *5.3* 节所确立的（亦见将 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}^{(0)}{}_{(H)^{\sim}}$ 明确描述为 $\mathbb{N}$的紧化），当限制到对应于固定原子*MASA*的每一条轨道时，识别U_x 可以选取为连续变化。因此，在每一条这样的轨道上，场 $\{H_x\}$ 在 *[20,* 第 *10]*章的意义下是*Hilbert* 空间连续场。这种混合结构——沿轨道的连续性与跨轨道的可测性——是由群胚 *C**-代数 *[19]*产生的场的特征。

下面的引理记录了我们将需要的本质性质。

引理6 （平凡化截面）。 对于每个 $\xi \in H$，定义可测场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的截面 ξ 为

$$\hat{\xi}(x) = U_x^{-1}(\xi),$$

其中 $U_x:\ H_x \cong H$ 是命题 *11*中的酉同一化。于是，ξ 是一个可测截面，并且映射 $\xi \mapsto \xi$ 将 H 识别为该场的常值截面子空间。

证明。 根据 [14]的引理18，识别 U_x 随 x 可测地变化。因此，对于每个固定的$\xi \in H$，映射 $x \mapsto \hat{\xi}(x) = U_x^{-1}(\xi)$ 是可测的。此外，$x \mapsto \|\hat{\xi}(x)\| = \|\xi\|_H$是常值的，因而是可测的；对于任意 $a \in \mathcal{A}$，映射 $x \mapsto \pi_x(a)\,\hat{\xi}(x) = U_x^{-1}(\pi(a)\xi)$ 根据 U_x 的可测性以及 $\pi(a)\xi \in H$ 为固定的这一事实，是可测的。映射 $\xi \mapsto \xi$ 显然是线性且单射的；其像恰好是相对于可测平凡化 $\{U_x\}$为常值的截面子空间。

虽然这些截面相对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的非豪斯多夫拓扑并不连续，但其可测性足以支持后续所有涉及直积分和 Kasparov 下降映射的构造，这遵循了 Tu [19] 的框架：在波兰群胚语境中，以可测性取代连续性。 □

在下一个小节中，我们将使用这个场来研究固定 $T \in \mathcal{A}$ 时的算子族 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。

3.3 算子族 $\{T_x :\, = \pi_x(T)\}$ 本质上是常值的

对于固定算子 $T \in \mathcal{A}$，我们考虑作用于第 3.2 小节中构造的希尔伯特空间连续场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 上的算子族 $\{T_x := \pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$。在本小节中，我们默认使用命题9中的典范酉同构。我们证明，该算子族在无穷远点之外是常值的，因此就我们的指标理论目的而言，它本质上是常值的。这一观察将大大简化下一节中等变 K^1-类的构造。

命题12 (算子族的恒定性，适用于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$)。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 且设 $T \in \mathcal{A}$。对于每个$x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 满足 $\chi \neq \chi_\infty$的情形，根据命题*9*中的识别 $H_x \cong H$，有

$$\pi_x(T) = T \in B(H).$$

对于对应于无穷远处特征的 x_∞，根据识别 $H_{x_\infty} \cong \mathbb{C}$，有 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda \in \mathbb{C}$，其中 λ 是分解 $T = \lambda I + K$ 中 T 的标量部分，且 $K \in \mathcal{K}(H)$。

证明。对于 $\chi \neq \chi_\infty$，命题9证明，GNS 表示 π_x 与 H上的恒等表示酉等价。因此，在固定的识别 $H_x \cong H$下，我们有 $\pi_x(T) = T$ 作为作用于 H上的算子。

对于 χ_∞，GNS 表示是特征 χ_∞，它将 $T = \lambda I + K$ 映射到 λ。在识别 $H_{x_\infty} \cong \mathbb{C}$下，算子 $\pi_{x_\infty}(T)$通过对 $\mathbb{C}$上的向量乘以标量 λ 来作用。 □

注记16。命题*12*表明，算子场 $\{T_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在 $\{x_\infty\}$的补集上为常值（等于 T），并在剩余点处取标量值 λ。在构造等变 K-理论类时，这种“本质上为常值”的行为已足够，因为无穷远点将在我们构造的 *Kasparov* 循环中发挥特殊作用。

命题 13 (原子极大阿贝尔自伴代数点上的算子族，对于 $B(H)$)。令 $\mathcal{A} = B(H)$，并令 $T \in \mathcal{A}$。对于每个对应于原子极大阿贝尔自伴子代数 $B \subset B(H)$ 和基向量 $\chi \in \widehat{B}$的 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，在命题 *10* 给出的识别 $H_x \cong H$ 下，我们有

$$\pi_x(T) = T \in B(H).$$

证明。对于这类点，命题 10 表明，GNS 表示 π_x 与 $B(H)$ 在 H 上的恒等表示酉等价。在固定的识别 $H_x \cong H$下，我们得到 $\pi_x(T) = T$ 作为作用在 H 上的算子。

□

注记17。对于 $B(H)$，单位空间 $\mathcal{G}_B^{(0)}$ $_{(H)}$ 由 $B(H)$ 上的所有纯态组成。命题 *13* 涵盖了那些源自原子极大阿贝尔自伴子代数的纯态（即向量态）。其他纯态（例如，在 $H = L^2(S^1)$ 的情形下，来自圆周上连续测度的纯态）所产生的 *GNS* 表示与恒等表示并不等价；对于这类点 $\pi_x(T)$，在任何识别 $H_x \cong H$下通常都不等于 T。

推论7（算子族 $\{T_x\}$ 本质上为常数）。*For* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 与 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$两者，算子族 $\{T_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在单位空间的原子*MASA*点上为常数，并且在紧情形中还在无穷远点处出现单一例外点。在识别 $H_x \cong H$ 下，我们有 $\pi_x(T) = T$ 对所有原子*MASA*点 x 成立，并且对 $\mathcal{K}(H)$ 还对所有 $x \neq x_\infty$ 成立。

证明。我们分别处理这两种情形。
情形 *1*：$\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$。由命题 13，对于每一个对应于原子MASA与一个基向量的 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，GNS表示 π_x 酉等价于 $\mathcal{B}(H)$ 在 H 上的恒等表示。在典范同一 $H_x \cong H$下，我们因此有

$$T_x = \pi_x(T) = T$$

对所有此类 x 均成立。因此，族 $\{T_x\}$ 在原子MASA点集上是常值的。（连续MASA点对应于弥散谱测度，无法如此简单地识别，且在指标计算中并不需要；参见注 11。）

情形*2*：$\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{K}\ H}$ ( )。根据命题12，对于每个满足 $\chi \neq \chi_\infty$ 的 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，GNS 表示 π_x 是希尔伯特空间 H 上的恒等表示，因此

$$T_x = \pi_x(T) = T.$$

在对应于无穷远处特征的特殊点 x_∞，GNS 表示是一维的，并将 $T = \lambda I + K$ 映射为标量 λ。因此，族 $\{T_x\}$ 恰好在一个点处不恒定。

结合这两种情况，我们得出结论：对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$，族 $\{T_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在原子MASA点上是常值的（对于 $\mathcal{K}(H)$，除 x_∞外的所有点上都是如此）。这种本质上的常值性足以用于第 4 节中等变 K^1-类的构造。 □

备注 18. 推论7中的"对所有 x，至多除去 x_∞"这一表述是精确的，并避免了测度论术语。在 $B(H)$情况下，例外点对应于某个特殊的纯态，该纯态并非来自原子*MASA*；但在我们的构造中，只需保证在稠密的原子*MASA*点集上常值即可。随后，连续场结构确保这种常值性得到适当延拓。

这种常值性对该族的连续性性质具有重要影响。

命题 14（该族的可测性）。对于任意 $T \in \mathcal{A}$，族 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 在算子可测场的意义下是可测的。也就是说，对于可测场$\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的任意可测截面 ξ，映射

$$x \mapsto \pi_x(T)\xi(x), \qquad x \mapsto \pi_x(T)^*\xi(x)$$

是可测截面。

证明。我们分别处理这两个代数，依据 [14] 和命题 11 中引理18所确立的可测场结构。

情形 *1*：$\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$。对于 $x \neq x_\infty$，命题12给出 $\pi_x(T) = T$，在典范识别 $H_x \cong H$ 下成立；根据可测场的构造，这些识别随点可测变化。对于任意可测截面 ξ，映射 $x \mapsto T\xi(x)$ 是可测的，因为 T 是有界算子，且与有界算子复合会保持截面的可测性。同样，$x \mapsto T^*\xi(x)$ 也是可测的。

在特殊点 x_∞，我们有 $H_{x_\infty} \cong \mathbb{C}$，且 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，其中 λ 是分解 $T = \lambda I + K$ 中 T 的标量部分。对于任意可测截面 ξ，其值 $\pi_{x_\infty}(T)\xi(x_\infty) = \lambda\xi(x_\infty)$ 就是该点处截面的一个标量倍数。所得截面的可测性源于该场的构造本身保证其可测，且标准博雷尔空间中的单点集都是可测集。利用引理6中的平凡化可测截面进行详细验证，可确认整个单位空间上的可测性。

情形*2*：$\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$。在原子MASA点的集合 $D \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$（相对于任何相关测度均为余零集，并且在博雷尔结构中稠密）上，命题 13 在识别 $H_x \cong H$ 下给出 $\pi_x(T) = T$。对于任意可测截面 ξ，根据相同的有界算子论证，映射 $x \mapsto T\xi(x)$ 在 D 上可测。由于 D 是一个博雷尔集（事实上，它是对应于不同原子极大阿贝尔自伴子代数的博雷尔集的可数并），这就在 D 上定义了一个可测截面。

为了扩展到整个单位空间，我们利用这样一个事实：对于任何由 Haar 系统构造的博雷尔测度，连续MASA点构成一个零测度集（见 [14, 第 5] 节）。因此，在 D 上定义的截面可以在其补集上任意延拓，而不影响其模零测集意义下的可测性。在可测场的框架中，通常将几乎处处相等的截面视为相同，因此这足以满足后续涉及直积分和 Kasparov 下降映射的所有构造。同样的论证也适用于 T^*。

因此，对于这两个代数，族 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 定义了一个可测算子场，满足后续等变 KK-理论构造所需的条件。 □

注 19. 读者可能会想知道，为什么我们将先前版本中声称的连续性改成了可测性。这是由 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的拓扑所决定的：单位空间是非豪斯多夫的，也不是局部紧的，因此相对于其拓扑而言，连续性表现不佳。遵循 *Tu [19],*，我们在博雷尔范畴中工作，在此，可测性取代连续性，成为适当的正则性条件。后续所有构造（直积分、下降映射、 K-理论）都只要求可测性，而我们的论证也符合波兰群胚 C^*-代数的标准框架。

注 20. $\mathcal{G}_{B}^{(0)}{}_{(H)}$ 中原子极大阿贝尔自伴代数点的稠密性（在弱-$*$ 拓扑下）源于这样一个事实：与一组标准正交基相对应的向量态在 $B(H)$的态空间中弱-$*$ 稠密。这是卡普兰斯基稠密性定理以及 $B(H)$上纯态结构的一个标准推论。

命题 *15*（ $\mathcal{B}(H)$在 *Calkin* 代数中的可测性）。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 及任意 $T \in \mathcal{A}$，考虑商映射 $\pi_{\mathcal{Q}}$ *:* $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 到 *Calkin* 代数。则映射 $x \mapsto \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$ 从 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 到 $\mathcal{Q}(H)$ 关于 $\mathcal{Q}(H)$上的范数拓扑是博雷尔可测的。此外，在原子*MASA*点 $D \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 组成的集合上，有 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。

证明。对于任意原子极大阿贝尔自伴代数点 $x \in D$，命题 13 给出 $\pi_x(T) = T$ 在识别$H_x \cong H$下成立，因此 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。因此，该族在此子集上是常值的。

为了证明其在整个单位空间上的可测性，我们利用以下事实： $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是一个标准博雷尔空间，并且根据命题 14，映射 $x \mapsto \pi_x(T)$ 在强-$*$ 拓扑下可测。商映射$\pi_{\mathcal{Q}}$ 从 $\mathcal{B}(H)$ 上的范数拓扑到 $\mathcal{Q}(H)$ 上的范数拓扑是连续的，但 $\pi_x(T)$ 在 x 中并非范数连续。不过，我们可以利用以下刻画： $\mathcal{Q}(H)$ 上的范数由本质范数给出

$$\|\pi_{\mathcal{Q}}(A)\| = \inf_{K \in \mathcal{K}(H)} \|A + K\| = \lim_{n \to \infty} \|A|_{H_n^\perp}\|$$

对于任意递增的有限维子空间序列 H_n，满足 $\bigcup H_n = H$。对于每个固定的有限秩投影 P，映射 $x \mapsto \|(I - P)\pi_x(T)(I - P)\|$ 是可测的，因为它是可测映射 $x \mapsto \pi_x(T)$ 与连续函数 $A \mapsto \|(I-P)A(I-P)\|$ 的复合。对有限秩投影的可数稠密集取下确界（或沿共尾序列取极限）仍保持可测性，因此 $x \mapsto \|\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))\|$ 是可测的。

对于完整的算子 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$，而不只是它的范数，我们利用这样一个事实：带有范数拓扑的 $\mathcal{Q}(H)$ 是波兰空间，并且映射到波兰空间的映射是博雷尔可测的，当且仅当它与每个有界线性泛函的复合都是博雷尔可测的（由 Pettis可测性定理得出）。对于 $\mathcal{Q}(H)$ 上的任意有界线性泛函 ϕ，复合 $\phi \circ \pi_{\mathcal{Q}}$ 可提升为 $\mathcal{B}(H)$ 上的一个有界线性泛函，并且该泛函在 $\mathcal{K}(H)$ 上为零。这类泛函在 $\mathcal{B}(H)$ 的有界子集上关于强-$*$ 拓扑连续。由于 $x \mapsto \pi_x(T)$ 是强-$*$ 可测的，且取值于一个有界集合（因为 $\|\pi_x(T)\| \leq \|T\|$），映射 $x \mapsto \phi(\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)))$ 是可测的。因此， $x \mapsto \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$ 是博雷尔可测的。

连续MASA点虽然存在于单位空间中，但对于由 Haar 系统构造的任意博雷尔测度，它们构成一个零测度集（见 [14, 第 5] 节）。由于可测性不受零测集上修改的影响，因此，在原子MASA点上的恒定性足以确定该映射在所有测度论意义下的本质行为。 □

注 21. 读者可能会疑惑，为什么我们满足于可测性，而不要求连续性。连续性论证需要利用稠密性，将原子*MASA*点上的恒定性推广到整个空间，但这行不通，因为：

1. 原子*MA* *SA* 点在任何能使映射 $x \mapsto \pi_x(T)$ 连续的拓扑中都不稠密；
2. 映射 $x \mapsto \pi_x(T)$ 本身相对于 $\mathcal{B}(H)$上的范数仅是可测的，而非连续的；

3. 该　商映射 $\pi_{\mathcal{Q}}$ 是连续的，但不能提高复合的正则性。

可测性足以支持本文随后的全部构造，包括 KK-理论中符号类的定义，以及遵循*Tu*的框架 *[19]*对下降映射的应用。

推论 8（Calkin 代数中的 Borel 族，对于 $\mathcal{B}(H)$)。 *For* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 以及任意 $T \in \mathcal{A}$，映射 $x \mapsto \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$ 定义了从 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 到 $\mathcal{Q}(H)$ 的一个博雷尔映射，其拓扑取 $\mathcal{Q}(H)$上的范数拓扑。因此，它定义了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上以 $\mathcal{Q}(H)$为纤维的平凡场的有界博雷尔截面空间中的一个元素。

证明。 这直接由命题 15 得出，其中已确立可测性。有界性由 $\|\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))\| \leq \|\pi_x(T)\| \leq \|T\|$得出。 □

命题 *16*（ $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 在 *Calkin* 代数中的连续性）。*For* $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，考虑商映射 $\pi_{\mathcal{Q}}$： $B(H) \to \mathcal{Q}(H)$，它经由包含映射 $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ 延拓至 $\mathcal{A}$。*For* 任意满足 $K \in \mathcal{K}(H)$ 的 $T = \lambda I + K \in \mathcal{A}$，族 $\{\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是范数连续的。具体而言：

- *For* $x \neq x_\infty$，我们有 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T) \in \mathcal{Q}(H)$。
- *For* $x = x_\infty$，我们有 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，因此 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_{x_\infty}(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(\lambda I) = \lambda I \in \mathcal{Q}(H)$。

该连续性成立，因为 $\pi_{\mathcal{Q}}(T) - \lambda I = \pi_{\mathcal{Q}}(K) = 0$ 在 *Calkin* 代数中，因此该族在映射到 $\mathcal{Q}(H)$时实际上是常值的。

证明。 对于 $x \neq x_\infty$，命题12给出 $\pi_x(T) = T$，在 $H_x \cong H$ 的识别下，因此 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。对于 $x = x_\infty$，我们有 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，所以 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_{x_\infty}(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(\lambda I) = \lambda I$。

现在注意到 $\pi_{\mathcal{Q}}(T) = \pi_{\mathcal{Q}}(\lambda I + K) = \lambda I + \pi_{\mathcal{Q}}(K) = \lambda I$，因为 K 是紧的，因此 $\pi_{\mathcal{Q}}(K) = 0$ 在 Calkin 代数中。因此，对于所有 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$， $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \lambda I$。该族是常值的，因而显然范数连续。

从更概念性的角度看，映射 $T \mapsto \pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 通过按紧算子取商进行分解，而标量部分 λ 是唯一保留下来的数据。对于 $x \neq x_\infty$，由于 $\pi_x(T)$ 与 T 仅相差紧算子，且在 x_∞ 处它恰好就是标量部分，因此它在 Calkin 代数中的像与 x 无关。 □

推论 9 (Calkin 代数中的常值族，适用于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$)。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 以及任意 $T \in \mathcal{A}$，映射 $x \mapsto \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$ 是常值的，因此定义了 $C(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \mathcal{Q}(H))$中的一个元素。

证明。 这由命题 16 立即得出。 □

命题 17 (核与余核在无穷远点之外为常值)。 设 $T \in \mathcal{A}$ 是一个 *Fredholm* 算子。情形 1： $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$。 对于每个原子极大阿贝尔自伴代数点 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，在命题 *11* 中建立的典范识别 $H_x \cong H$下，我们有

$$\ker \pi_x(T) = \ker T, \qquad \operatorname{coker} \pi_x(T) = \operatorname{coker} T,$$

其中，这些等式应理解为固定识别下 H 的子空间之间的等式。对于任意点 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ （包括连续 *MASA*点），表示 π_x 与恒等表示酉等价，因此 核 $\pi_x(T)$ 与 核 T同构，而余核 $\pi_x(T)$ 与余核 T同构。因此，核与余核的维数在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上全局保持不变。

情形2： $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{K}\ H}$ (). 对于所有 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \{x_\infty\}$，在典范识别 $H_x \cong H$ 下，我们有 e

$$\ker \pi_x(T) = \ker T, \qquad \operatorname{coker} \pi_x(T) = \operatorname{coker} T,$$

作为 H 的子空间。在特殊点 x_∞，我们有 $H_{x_\infty} \cong \mathbb{C}$和 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，其中 $T = \lambda I + K$满足 $K \in \mathcal{K}(H)$。因此

$$\ker \pi_{x_\infty}(T) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if } \lambda = 0, \\ \{0\} & \text{if } \lambda \neq 0, \end{cases} \qquad \operatorname{coker} \pi_{x_\infty}(T) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } \lambda = 0, \\ \mathbb{C} & \text{if } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

因此，算子族在 $\{x_\infty\}$ 的补集上是常值的，并且在 x_∞ 处可能发生跳跃，该跳跃完全由标量部分 λ决定。

证明。 我们分别讨论这两种情形。

情形 *1*： $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$。对于原子极大阿贝尔自伴代数点 $x \in D \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，命题 13 给出在典范识别 $H_x \cong H$ 下，$\pi_x(T) = T$。在此识别下，子空间 $\ker\ \pi_x(T)$ 与 $\ker\ T$ 作为 H 的子集完全重合，而不仅仅是同构意义下的重合。余核同样如此：通过相同的酉同一化，我们将 $\operatorname{coker}\ \pi_x(T) = H/\operatorname{im}\ \pi_x(T)$ 识别为 $H/\operatorname{im}\ T = \operatorname{coker}\ T$。

对于非原子点（连续极大交换自伴代数），GNS 表示 π_x 不能通过同样简单的识别与恒等表示酉等价，但它仍与 $\mathcal{B}(H)$ 的某个表示酉等价。由于 $\mathcal{B}(H)$ 的所有不可约表示都与恒等表示酉等价（见 [20]），因此存在一个酉元 V_x：$H_x \to H$，使得 $\pi_x(T) = V_x^* T V_x$。因此，$\dim \ker\ \pi_x(T) = \dim \ker\ T$，且 $\dim \operatorname{coker}\ \pi_x(T) = \dim \operatorname{coker}\ T$，尽管这些子空间本身属于不同的希尔伯特空间。因此，这些维数在整体上是常值的。

情形*2*： $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$。对于 $x \neq x_\infty$，命题12 给出 $\pi_x(T) = T$ 在识别 $H_x \cong H$下，因此 $\ker\ \pi_x(T) = \ker\ T$，并且 $\operatorname{coker}\ \pi_x(T) = \operatorname{coker}\ T$，均作为 H的子空间。

对于 $x = x_\infty$，我们有 $H_{x_\infty} \cong \mathbb{C}$ 以及 $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$。核和余核已如上明确计算。注意，尽管它们通常不等于作为子空间的 $\ker\ T$和 $\operatorname{coker} T$（事实上，它们属于不同的希尔伯特空间），但它们的维数满足以下指标关系：

$$\dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T = \operatorname{ind}(T) = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \neq 0, \\ \operatorname{ind}(K) & \text{if } \lambda = 0. \end{cases}$$

在 x_∞处，当 $\lambda \neq 0$时，我们有 $\dim \ker\ \pi_{x_\infty}(T) - \dim \operatorname{coker}\ \pi_{x_\infty}(T) = 0$，而当 $\lambda = 0$时该值等于 1。这与 T 的指标相符，因为当 $\lambda = 0$时，$T = K$ 是紧的，因而其指标为 0，除非底层希尔伯特空间是有限维的（但它并非如此），所以要使 $\operatorname{ind}(T) = 1$，唯一的可能是不可能；这一表面上的矛盾可通过回顾以下事实得到解决：在 $\mathcal{K}(H)$ 中具有 $\lambda = 0$ 的 Fredholm 算子实际上是紧的，因此除非空间是有限维的，否则不可能是 Fredholm 算子。因此，对于 $\mathcal{K}(H)$ 中真正的 Fredholm 算子，我们必须有 $\lambda \neq 0$；在这种情况下，$\dim \ker\ \pi_{x_\infty}(T) = \dim \operatorname{coker}\ \pi_{x_\infty}(T) = 0$，这与 $\operatorname{ind}(T) = 0$一致。

□

注释 22. 细心的读者会注意到，对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，“$\ker\ \pi_x(T) = \ker\ T$对所有 $x \neq x_\infty$”表示在典范识别 $H_x \cong H$下作为 H 的子空间相等。在 x_∞处，纤维为 $\mathbb{C}$，因此不可能以相同意义相等。这正是我们在陈述中将范围限制为 $\{x_\infty\}$的补集的原因。无穷远点处的跳变并非缺陷，而是一种特征：它编码了 T 的指标，体现为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \{x_\infty\}$ 上的常值族与无穷远点处的一维表示之间的过渡。

命题 18 (核与余核构成可测场**)**。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$，这些子空间族

$$\{\ker \pi_x(T)\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}, \qquad \{\operatorname{coker} \pi_x(T)\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$$

在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上构成有限维希尔伯特空间的可测场，意义同 *Dixmier [20,*第~10*]*章。对于 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)$，这一结论在整个单位空间上都成立，包括 x_∞；其中，按命题 *17* 的计算，x_∞ 处的纤维为 $\mathbb{C}$ 或 $\{0\}$。

证明。 命题 14 确立了 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 是强-$*$ 意义下的可测算子场。由于 T 是 Fredholm 算子，每个 $\pi_x(T)$ 都是 Fredholm 算子：在 $x\neq x_\infty$ 的紧情形下，这是由其与 T酉等价得出的；在 x_∞处，算子 λ 在 $\mathbb{C}$ 上是 Fredholm 算子，当且仅当 $\lambda\neq 0$。请注意，若 $\lambda=0$，那么$T=K$ 将是紧的，因此在无限维希尔伯特空间上不是 Fredholm 算子，所以对于真正的 Fredholm 算子，这种情形不可能发生。

对于 Fredholm 算子的可测场，核与余核构成有限维空间的可测场。这是希尔伯特空间可测场理论中的标准结果（连续情形见 [20,命题 10.4.3] ；可测情形采用相同论证，只需以可测截面代替连续截面即可）。简言之，对于每个 x，选取一个有限秩投影 P_x，使其投影到 $\ker\pi_x(T)$ 的一个补空间上。算子场 $\{\pi_x(T)\}$ 的可测性确保映射 $x\mapsto P_x$ 可以可测地选取（借助可测选择定理），随后 $\ker\pi_x(T)=(I-P_x)H_x$ 继承可测结构。通过伴随场 $\{\pi_x(T)^*\}$，余核也可用相同论证处理。

在 $\mathcal{K}(H)$ 的情形中，x_∞ 处的纤维需要单独处理：它要么是 $\mathbb{C}$（若 $\lambda=0$，但这对 Fredholm T 而言不可能发生），要么是 $\{0\}$（若 $\lambda\neq 0$）。由于它们在单点集上为常值，因此显然可测。因此，对于 $\lambda\neq 0$，核场和余核场在 x_∞ 处为零，在其他地方则为常值，显然可测。 □

注记23。 读者或许会想知道，为什么我们将先前版本中声称的连续性改为可测性。正如注 *19* 中所述，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的拓扑是非豪斯多夫且非局部紧的，因此连续性性质表现不佳。遵循 *Tu [19],*，我们在博雷尔范畴中开展工作；在该范畴中，可测性足以满足后续所有构造的要求。此外，核场和余核场主要用于定义等变的 KK^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$，而这只需要可测数据（无界 *Kasparov* 三元组由可测截面构造而成）。这些场的有限维性确保了所有可测性方面的技术问题都易于处理。

推论 10（无穷远点补集上的平凡核丛与余核丛）。 考虑由下式定义的核丛与余核丛

$$E^0=\bigsqcup_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\ker\pi_x(T),\qquad E^1=\bigsqcup_{x\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}\operatorname{coker}\pi_x(T),$$

配备命题 *18* 中的可测场结构。
对于 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(H)$： E^0 和 E^1 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的可测平凡向量丛，其纤维分别为核 T和余核 T。也就是说，存在可测同构

$$\Phi^0:E^0\longrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\times\ker T,\qquad \Phi^1:E^1\longrightarrow\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\times\operatorname{coker}T$$

它们是逐纤维酉的。

对于 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)$： $E^0|_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\setminus\{x_\infty\}}$ 和 $E^1|_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}\setminus\{x_\infty\}}$ 的限制是可测平凡向量丛，其纤维分别为核 T和余核 T。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上的整体丛是可测的，但并非全局可测平凡；它们由 T 的指标通过 x_∞处的粘合构造确定。

证明。 For $\mathcal{A}=\mathcal{B}(H)$，命题 17 表明，对于每个原子极大阿贝尔自伴代数点 x，在识别$H_x\cong H$下，我们有 $\ker\pi_x(T)=\ker T$作为 H 的子空间。对于任意点，这些纤维是同构的

于 $\ker T$，但在固定识别下作为子空间未必相等。然而，利用可测平凡化 $\{U_x : H_x \cong H\}$（来自命题 11），我们可以对 $v \in \ker \pi_x(T)$ 定义 $\Phi^0(x,v) = (x, U_x(v))$。由于 U_x 可测地变化，且 $\ker \pi_x(T)$ 是可测子域（命题 18），该映射是可测的，并给出一个可测平凡化。同样的构造利用伴随识别适用于 E^1。

对于 $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{K}(H)}$，同样的论证适用于开子集 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \{x_\infty\}$，其中识别 U_x是良定义且可测的。在 x_∞处，纤维是一维的（要么是 $\mathbb{C}$，要么是 $\{0\}$），补集上的常值纤维 $\ker T$与无穷远点处该纤维之间的过渡由 T的指标所决定。用可测场的语言来说，这意味着整个单位空间上的场，是通过取 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \{x_\infty\}$ 上以 $\ker T$为纤维的平凡可测场，并以反映指标的方式将其延拓到 x_∞ 而得到的；这正是拓扑 K理论中粘合构造的可测类比。指标 $\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T$决定了该可测场在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)} \setminus \{x_\infty\}$的一点紧化上的 K^0-类。

□

注 24。 由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 的非豪斯多夫性质（见注 *19*），上述构造的平凡化是可测的，而非连续的。可测性足以满足后续所有构造的需要，包括等变 KK^1-类 $[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)}$ 的定义，因为它只要求可测截面和可测场。这些平凡化将用于把核丛和余核丛识别为常值场，从而简化第 *4* 节中无界 *Kasparov* 三元组的构造。

注 25. $B(H)$ 与 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 这两种情形之间表面上的不对称，反映了它们理想结构的根本差异。*For* $B(H)$，所有不可约表示都等价，因此核丛是整体平凡的。*For* $\mathcal{K}(H)^\sim$，无穷远处特征的存在产生了一个非平凡的 K^1-类，这恰恰是因为核丛无法被整体平凡化——其障碍恰好就是T的指标。这一核心观察将推动下一节中等变 K^1-类的构造。

在下一小节中，我们将利用这些平凡丛来定义与T相关联的等变 K^1-类。

3.4 Calkin 代数中的连续性与 K^1-类的定义

第 3.3 小节中所确立的算子族 $\{\pi_x(T)\}$ 的常值性，导致了对核丛与余核丛的平凡描述。然而，为了定义等变 K^1-类，我们需要考虑 $\pi_x(T)$ 在 Calkin 代数中的行为，尤其是当 T为 Fredholm 时。本小节表明，$\pi_x(T)$ 在 Calkin 代数中的像是连续的（事实上是常值的），并据此定义等变K^1-类 $[T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)}$。

命题 19（Calkin 代数中的可测性，对于 $B(H)$）。设 $\mathcal{A} = B(H)$，并令 $\pi_{\mathcal{Q}} : B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 为映射到 *Calkin* 代数的商映射，该代数赋有商范数拓扑。对于任意$T \in B(H)$，考虑这一族

$$q_x(T) := \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) \in \mathcal{Q}(H), \qquad x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

For 原子点 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$（即对应于原子极大阿贝尔自伴代数的那些点），我们有 $q_x(T) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。因此，映射 $x \mapsto q_x(T)$ 在原子子集上为常数，从而关于从群胚继承的博雷尔结构在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上定义了一个博雷尔可测映射。

证明。 For 任意原子点 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ，命题 13 表明，在典范识别 $H_x \cong H$下， $\pi_x(T) = T$ 。因此，对所有这样的 x，有 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。尽管该映射在整个单位空间上可能不连续（由于非原子点的存在），但它在原子子集上为常数——因而平凡地是博雷尔可测的。由于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 是标准博雷尔空间，这在整个空间上定义了一个博雷尔可测函数。

□

证明。 根据命题 13，在识别 $H_x \cong H$ 下，对于每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ，都有 $\pi_x(T) = T$ 。因此，对于所有 x， $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$。所以该族是常值的，并且 $\mathcal{Q}(H)$ 在范数拓扑下的连续性立即可得。

□

命题20（Calkin 代数中关于 $\mathcal{K}$（H）~）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~ ，并设 $\pi_{\mathcal{Q}}$： B（H） $\to \mathcal{Q}$（H） 为商映射，通过包含映射 $\mathcal{A} \subseteq B$（H）将其扩展到 $\mathcal{A}$ 。对于满足 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $K \in \mathcal{K}$（H）的 $T = \lambda I + K \in \mathcal{A}$ ，定义

$$q_x(T) := \pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) \in \mathcal{Q}(H), \qquad x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}.$$

则：

1. 对于 $x \neq x_\infty$ （无穷远点）， q_x（T） $= \pi_{\mathcal{Q}}$（T） $= \lambda I$ 属于 $\mathcal{Q}$（H）。

2. 对于 $x = x_\infty$， π_{x_∞}（T） $= \lambda$ 是一个标量，并且 q_{x_∞}（T） 也是 $= \lambda I \in \mathcal{Q}$（$H$） 。

因此，对于所有 x， $q_x(T)$ 都是常数（等于 λI），所以是连续的。

证明。 对于 $x \neq x_\infty$, $\pi_x(T) = T$，因此 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T) = \pi_{\mathcal{Q}}(\lambda I + K) = \lambda I$，因为 K是紧的。对于 $x = x_\infty$, $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，其在 $\mathcal{Q}(H)$ 中的像为 λI。因此，对于所有 x， $q_x(T) = \lambda I$。 □

两种情形下 $q_x(T)$ 的恒定性有一个重要结果：当 T是 Fredholm 时，对每个 x， $q_x(T)$ 在 Calkin 代数中都是可逆的。

推论11(Calkin 代数中的可逆性)。 设 $T \in \mathcal{A}$ 是一个 *Fredholm* 算子。那么对每个$x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$， $q_x(T)$ 在 $\mathcal{Q}(H)$中可逆。此外，可逆元 $q_x(T)$ 与 x无关。

证明。 根据阿特金森定理（定理 2）， T是 Fredholm，当且仅当 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 在 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆。对于$\mathcal{A} = B(H)$, 由命题 19 可知，对所有 x ，都有 $q_x(T) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$，因此可逆性直接成立。对于$\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)$~，将 $T = \lambda I + K$ 写成 $K \in \mathcal{K}(H)$。由于 T 是 Fredholm， $\lambda \neq 0$，而命题 20 给出$q_x(T) = \lambda I$，这显然是可逆的。 x 的独立性由命题 19 和命题 20 得出。 □

现在我们用它来定义一个等变的 K^1-类。回顾一下，对于满足标准假设（第二可数、局部紧、豪斯多夫）的群胚 $\mathcal{G}$ ，等变 K^1-群 $K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)})$ 与 $KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 同构，后者是奇 Kasparov 循环的集合。

定义 11 ($\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$的奇 Kasparov 三元组)。 设 $T \in \mathcal{A}$ 为一个 *Fredholm* 算子。定义一个关于群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的奇 *Kasparov* 三元组$(\mathcal{E}, \phi, F)$ 如下：

1. $\mathcal{E}$ 是第 *3.2* 小节中构造的希尔伯特空间连续场 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ ，视为 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$上的一个$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-*Hilbert* 模。

2. ϕ: $C_0\ (\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})\ \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 是乘法算子表示：$(\phi(f)\xi)(x) = f(x)\xi(x)$。

3. F是常值算子 $F(\xi)(x) = \pi_x(T)\xi(x)$。由于在识别 $H_x \cong H$ 下， $\pi_x(T) = T$， F就是 T逐点作用于截面上。

注 26. 要验证$(\mathcal{E}, \phi, F)$确实定义了一个 *Kasparov* 循环，只需检查标准条件：

- F是可伴随的，满足 $(F^*\xi)(x) = \pi_x(T)^*\xi(x)$。

  对所有 $f \in C_0(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{A})$，• $\phi(f)F - F\phi(f)$都是紧的，因为 $\phi(f)$与逐点算子F可交换。

- $F^2 - I$和 $F - F^*$是 $\mathcal{E}$的紧端同态。这是由 T的 *Fredholm* 性质推出的：由于 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$在 *Calkin* 代数中可逆，T在模紧算子的意义下可逆，这逐纤维地意味着，对于每个 x，$(F^2 - I)\xi(x)$和 $(F - F^*)\xi(x)$都是紧的。

利用连续场结构和第 *3.3* 小节的结果，可以轻松详细验证这些条件。

引理 7 (逐纤维紧蕴含紧**)。** 设 $\mathcal{E} = \{H_x\}_{x\in X}$是局部紧 *Hausdorff* 空间 X上的 *Hilbert* 空间连续场，将其视为 *Hilbert* $C_0(X)$-模。假设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$是一个可伴随算子，且对每个 $x \in X$，纤维算子 $T_x \in \mathcal{K}(H_x)$都是紧的。那么$T \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$，也就是说，$T$是该希尔伯特模的紧端同态。

证明。 我们通过在算子范数下用有限秩算子逼近 T。

步骤 1：局部有限秩逼近。 对于每个 $x \in X$，由于 T_x 在 H_x上是紧的，因此存在一个有限秩算子 $F_x \in \mathcal{K}(H_x)$，使得 $\|T_x - F_x\| < \epsilon/3$。根据有限秩的定义，在 H_x中存在正交归一集 $\{\xi_x^{(1)}, \ldots, \xi^{(n_x)}{}_x\}$和 $\{\eta_x^{(1)}, \ldots, \eta^{(n_x)}{}_x\}$，使得 $F_x(\zeta) = \sum_{j=1}^{n_x}\langle\zeta, \xi_x^{(j)}\rangle\eta_x^{(j)}$对所有$\zeta \in H_x$均成立。

步骤 2：延拓为局部截面。 利用连续场结构，我们可以将这些向量延拓为连续局部截面。更准确地说，存在 x的一个紧邻域 U_x 以及连续截面 $\tilde{\xi}_x^{(j)}, \tilde{\eta}_x^{(j)} \in \Gamma(U_x, \mathcal{E})$，使得对于每个 j，$\tilde{\xi}_x^{(j)}(x) = \xi_x^{(j)}$且 $\tilde{\eta}_x^{(j)}(x) = \eta_x^{(j)}$。在 $\Gamma(U_x, \mathcal{E})$上定义局部算子$\tilde{F}_x$为

$$(\tilde{F}_x\zeta)(y) = \sum_{j=1}^{n_x}\langle\zeta(y), \tilde{\xi}_x^{(j)}(y)\rangle_{H_y}\tilde{\eta}_x^{(j)}(y), \quad y \in U_x.$$

˜根据构造，F_x 是希尔伯特 $C_0(U_x)$-模 $\mathcal{E}|_{U_x}$上的有限秩算子，其在 x 处的纤维等于F_x。

步骤 3：单位分解。 由于 X 是局部紧且豪斯多夫的，我们可以用相对紧开集 $\{U_x\}_{x\in X}$覆盖 X 。选取从属于该覆盖的单位分解 $\{\phi_i\}_{i\in I}$，其中每个$\phi_i \in C_c(X)$的紧支撑都包含在某个 U_{x_i}中。对于每个 i，令 F_i 表示有限秩算子$\tilde{F}_{x_i}$，并将其在 U_{x_i}之外延拓为零。

第4步：粘合与逼近。定义一个全局有限秩算子 $F = \sum_{i\in I}\phi_i F_i$。由于在任意紧集上只有有限个非零项，且 $\sum_i \phi_i = 1$，该和在范数下收敛。对于任意截面 $\zeta \in \Gamma_c(X, \mathcal{E})$ 和任意 $y \in X$，我们有

$$\begin{aligned}\|(T - F)\zeta(y)\|_{H_y} &\le \sum_i \phi_i(y)\|(T - F_i)\zeta(y)\|_{H_y} \\ &\le \sum_i \phi_i(y)\left(\|(T - T_{x_i})\zeta(y)\| + \|T_{x_i} - F_i\|\|\zeta(y)\| + \|F_i - F_i(y)\|\|\zeta(y)\|\right).\end{aligned}$$

由场的连续性和纤维的紧性可知，每一项都可以在紧集上一致地变得任意小。一个标准的 $\epsilon/3$ 论证表明，对于足够精细的分割和足够好的局部近似，$\|T - F\| < \epsilon$。由于 ϵ 是任意的，T 可以用有限秩算子在范数下逼近，因此 $T \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$。

□

注 27. 关键的技术点在于，场 $\mathcal{E}$ 的连续性确保可以选取连续变化的局部截面 $\tilde{\xi}_x^{(j)}$和 $\tilde{\eta}_x^{(j)}$，从而使所得算子 F_i 在希尔伯特模上良定义且为可伴随算子。随后，利用单位分解将这些局部有限秩逼近粘合为一个全局逼近。

命题 21 ($(\mathcal{E}, \phi, F)$ 是一个奇 Kasparov 循环**.** 对于 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，令 F为其有界变换：

$$F := T(1 + T^*T)^{-1/2} \in \mathcal{A}.$$

*(*如果更倾向于使用相位，可以从极分解 $T = U|T|$中取 $F = U$；两者给出相同的 K^1-类。*)* 按照定义 *11* 定义三元组 $(\mathcal{E}, \phi, F)$（将 T替换为其有界变换）。那么，该三元组满足奇 *Kasparov* 循环的条件：

1. F是可伴随的，其 F^* 由 F^*的逐点作用给出。
2. $F^2 - I$ *an* d $FF^* - I$在每个纤维上都是紧算子，因此作为作用于 $\mathcal{E}$ 上的算子也是紧的 .
3. $[\phi(f), F]$ *is compact for all* $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$.

因此，它定义了一个类

$$[(\mathcal{E}, \phi, F)] \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}), \mathbb{C}) \cong K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}).$$

证明。 (1) 显然，因为 F^* 是 F的伴随，并且逐点作用于截面上。

(2) 由于 T是 Fredholm 算子，其有界变换 $F = T(1 + T^*T)^{-1/2}$满足 $F^*F - I \in \mathcal{K}(H)$ 和 $FF^* - I \in \mathcal{K}(H)$。这是一个标准事实：对于 Fredholm 算子，其有界变换是 Calkin 代数中的可逆元，因此与某个酉元之差是紧算子。更具体地说，可以验证

$$F^*F - I = (1 + T^*T)^{-1/2}(T^*T - I)(1 + T^*T)^{-1/2} \in \mathcal{K}(H),$$

对于 $FF^* - I$也同样如此。由于 F逐点作用于 $\mathcal{E}$，这些逐纤维的紧算子组装成 Hilbert 模 $\mathcal{E}$ 的紧端同态（见引理 7）。

(3) 对任意 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 和任意截面 $\xi \in \mathcal{E}$，我们计算：

$$(F\phi(f)\xi)(x) = \pi_x(F)(f(x)\xi(x)) = f(x)\pi_x(F)\xi(x) = (\phi(f)F\xi)(x),$$

其中，第二个等式利用了 $f(x)$ 是标量，因此与算子 $\pi_x(F)$ 可交换。因此 $[\phi(f)\ F] = 0$，这显然是紧的。

□

注 28. 有界变换 $F = T(1+T^*T)^{-1/2}$与 T 通过 *Fredholm* 算子构成同伦，因此定义了相同的 K^1- 类。事实上，类 $[(\mathcal{E}, \phi, F)]$ 与有界变换或相位的选择无关；它仅取决于 *Fredholm* 算子 T。也可以使用来自极分解 $T = U|T|$的相位 U，它直接满足 $U^*U - I, UU^* - I \in \mathcal{K}(H)$。

定义 12 (等变 K^1-类 T)。 对于 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，定义其等变 K^1-类为

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} := [(\mathcal{E}, \phi, F)] \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}),$$

其中，F是 T的有界变换（或相位），而（$\mathcal{E}$、ϕ、F）是定义 *11* 中的奇 *Kasparov* 三元组（将 T 替换为 F）。

推论 12 （良定义性）：类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 仅取决于 *Fredholm* 算子 T，而与有界变换或相位的选择无关。此外，在通过 *Fredholm* 算子对 T进行范数连续变形时，该类保持不变。

证明。 任意两个有界变换（或相位与有界变换）都通过 Calkin 代数中的可逆元素构成同伦，因此给出相同的 K^1类。经 Fredholm 算子进行的范数连续变形会诱导相应 Kasparov 循环的同伦，从而确立不变性。

□

命题 22 （选择无关性）。 类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 仅取决于 *Calkin* 代数中 T 的 K理论类，并且在经 *Fredholm* 算子对 T 进行范数连续变形时保持不变。

证明。 这可由 Kasparov 循环的同伦不变性得出。若 T_t 是 Fredholm 算子的范数连续族，那么将每个 T_t 替换为其有界变换 $F_t = T_t(1 + T_t^* T_t)^{-1/2}$ （或其相位）后，我们得到一个范数连续的 Kasparov 循环族（$\mathcal{E}$， ϕ， F_t）。KK理论中的同伦不变性保证所有 F_t 都定义同一个类。

此外，如果 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_1) = \pi_{\mathcal{Q}}(T_2)$ 在 Calkin 代数中，那么 T_1 和 T_2 相差一个紧算子，因此在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中表示同一个类。根据 Kasparov 理论的同伦不变性，它们所关联的等变 K^1-类相同。（等价地，线性路径 $T_t = (1-t)T_1 + tT_2$ 保持 Fredholm 性，因为紧扰动不会影响 Fredholm 性，从而在这些循环之间给出一个直接的同伦。）

□

例 11 （单边移位的类）。 令 $S \in B(H)$ 为 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的单边移位。则 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})$ 是一个非平凡类。回顾 指标 $(S) = -1$ 以及指标映射 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 是一个同构，其中 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)]$是生成元。在第 7 节中，我们将计算 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 在下降映射下的像，并验证它对应于这个生成元。

例 12 (恒等算子的有限秩扰动类)。 设 $T = I + F$ 满足 F 有限秩。则 $\pi_{\mathcal{Q}}(T) = 1$属于 $\mathcal{Q}(H)$，因此 T在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中表示平凡类。因此， $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = 0$属于 $K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$。

这里构造的等变 K^1-类是指标定理的关键要素。在第 5 节中，我们将应用下降映射，得到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的一个类；在第 6 节中，我们将把它与沿 ι 的拉回以及边界映射结合起来，从而恢复弗雷德霍姆指标。

4 Fredholm 算子的等变 K^1-类

现在，我们将上一节的数据汇集起来，构造一个等变 KK-类。该构造遵循 Kasparov 理论中的标准步骤：从 Fredholm 算子 T 出发，我们提取其相位 ph(T)，由此定义群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上的一个奇 Kasparov 三元组 ($\mathcal{E}$， ϕ， ph(T))。该三元组进而表示 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C})$ 中的一个类，我们将其记作 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。下面的图表概括了这一构造：

$$T \text{ (Fredholm)} \longmapsto \mathrm{ph}(T) \longmapsto (\mathcal{E}, \phi, \mathrm{ph}(T)) \longmapsto [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C})$$

4.1 从 Fredholm 算子 T到 Calkin 代数中的可逆元

构造与 Fredholm 算子 T相关的等变 K^1-类，第一步是从 T本身转到 Calkin 代数中的一个可逆元。这一步至关重要，因为 K^1-类可以

用模同伦的可逆元来描述，而 Calkin 代数恰好捕捉了 Fredholm 算子在紧扰动下保持不变的信息。

回顾阿特金森定理（定理 2）：算子 $T \in B(H)$ 是 Fredholm 算子，当且仅当它在 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H)$ 中的像 $\pi_{\mathcal{Q}}(T) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ 可逆。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，类似的结论成立：$T = \lambda I + K$ 是 Fredholm 算子，当且仅当 $\lambda \neq 0$，此时 $\pi_{\mathcal{Q}}(T) = \lambda I$ 在$\mathcal{Q}(H)$ 中可逆。

定义 13（Calkin 代数与商映射）。设 H 是可分无穷维希尔伯特空间。Calkin 代数是商 *C*-*代数

$$\mathcal{Q}(H) := B(H)/\mathcal{K}(H),$$

其中 $\mathcal{K}$（H）表示 H上的紧算子。我们将

$$\pi_{\mathcal{Q}} : B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H)$$

称为典范满 **-同态。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）$^{\sim} \subseteq B$（$H$），我们通过限制将 $\pi_{\mathcal{Q}}$ 扩展为 $\mathcal{A}$ （即将包含映射 $\mathcal{A} \hookrightarrow B$（$H$）与 $\pi_{\mathcal{Q}}$复合）。

以下命题记载了 Fredholm 算子与 Calkin 代数中的可逆元之间的基本关系。

命题 23（Fredholm 算子与 Calkin 代数中的可逆元）。设 $\mathcal{A}$ 为 $B(H)$ 或$\mathcal{K}(H)^{\sim}$，并设 $T \in \mathcal{A}$。

1. 若 $\mathcal{A} = B(H)$，则 T 是 *Fredholm* 算子，当且仅当 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 在 $\mathcal{Q}(H)$中可逆。

2. 若 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 且 $T = \lambda I + K$ 满足 $K \in \mathcal{K}(H)$，则 T 是 *Fredholm* 算子，当且仅当 $\lambda \neq 0$；此时，$\pi_{\mathcal{Q}}(T) = \lambda I$ 在 $\mathcal{Q}(H)$中可逆。

因此：

- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是弗雷德霍姆指标的完全不变量；当且仅当 指标(T) $\neq 0$时，它是非平凡的。
- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，每个 *Fredholm* 算子的指标都为零，因此在$K_1(\mathcal{Q}(H))$中定义平凡类。

证明。**(1)** 是阿特金森定理（定理 2）。

对于 **(2)**，注意到 $T = \lambda I + K$ 是 Fredholm 算子当且仅当 $\lambda \neq 0$，因为 λI 是 Fredholm 算子（模紧算子可逆）当且仅当 $\lambda \neq 0$，而 Fredholm 性在紧扰动下稳定。若 $\lambda \neq 0$，则$\pi_{\mathcal{Q}}(T) = \lambda I$ 显然在 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆，其逆为 $\lambda^{-1} I$。

关于 K_1-类：在 $B(H)$ 的情形下，通过指标映射有 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$，而 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$ 对应于指标(T)。在 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的情形下，λI 在 $\mathcal{Q}(H)$ 中可逆元构成的集合内与 I 同伦（因为 $\mathbb{C}^{\times}$ 是连通的），因此 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] = 0$；这反映了 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的所有 Fredholm 算子的指标都为零这一事实。 □

For $B(H)$，类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是一个刻画弗雷德霍姆指标的非平凡不变量。这一关系由与 Calkin 扩张相关联的指标映射精确给出。

引理 8（指标映射与 Calkin 代数）。令 $\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 为与 *Calkin* 扩张相关联的指标映射（参见第*2.4*小节）。那么对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，

$$\partial([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \operatorname{index}(T) \in \mathbb{Z}.$$

证明。 这就是引理 2 和推论 1 的内容。在同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，指标映射 ∂ 恰好就是弗雷德霍姆指标。 □

从 T 到 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 的过渡与群胚作用相容，在 K-理论层面上是自然的。

命题 24 （ K-理论中考尔金映射的等变性）。 对于任意 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ 以及任意 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ，有

$$[\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(uTu^*))] = [\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))] \quad \textit{in } K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中 π_x 表示 x处的 *GNS* 表示。特别地，对于满足 $\pi_x(T) = T$ 的点 x ，在识别 $H_x \cong H$下，有

$$[\pi_{\mathcal{Q}}(uTu^*)] = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)].$$

证明。 由于 $\pi_x(uTu^*) = \pi_x(u)\pi_x(T)\pi_x(u)^*$，且 $\pi_x(u)$ 是酉元，元素 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(uTu^*))$ 可由 Calkin 代数中的酉元 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(u))$ 共轭作用于 $\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))$ 得到。C*-代数的内自同构在 K-理论上的作用平凡，因此 K_1-类相同。特殊情形立即可得。 □

这一等变性对于定义与群胚作用相容的 a K^1-类至关重要。

推论 13 （ K_1（$\mathcal{Q}$（H））上的常值类 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ ）。 对于固定的 *Fredholm* 算子 $T \in B$（H），映射

$$x \longmapsto [\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))] \in K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上为常值。其值为 T 的弗雷德霍姆指标。

证明。 我们考虑 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 中的两类点。

对于原子MASA点 x，命题 13 给出 $\pi_x(T) = T$；在典范识别 $H_x \cong H$ 下，因此 $[\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))] = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$。

对于非原子纯态 x，GNS 表示 π_x 与恒等表示酉等价。因此存在酉元 U_x：$H_x \to H$，使得 $\pi_x(T) = U_xTU_x^*$。于是

$$\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(U_xTU_x^*) = \pi_{\mathcal{Q}}(U_x)\pi_{\mathcal{Q}}(T)\pi_{\mathcal{Q}}(U_x)^*,$$

因此 $[\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))] = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$ 属于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，因为酉元的共轭作用在 K-理论上诱导恒等映射。因此，映射 $x \mapsto [\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))]$ 为常值，等于 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$。根据引理 8， $\partial([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) =$ 指标(T)，并且由于 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 通过指标映射，这个常值恰好是 T 的弗雷德霍姆指标。 □

对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，情况较为简单，但仍然一致。

推论 14 ($\mathcal{K}(H)^{\sim}$**（常值类）**。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 以及任意 *Fredholm* 算子 $T = \lambda I + K$，映射

$$x \longmapsto [\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$$

在 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$ 上为常值。在指标同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，这个常值对应于0。

证明。 对于 $x \neq x_\infty$，我们有 $\pi_x(T) = \lambda I + K$。由于 K 是紧的，

$$\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(\lambda I + K) = \lambda I$$

在 $\mathcal{Q}(H)$ 中。对于 $x = x_\infty$, $\pi_{x_\infty}(T) = \lambda$，其在 $\mathcal{Q}(H)$ 中的像在自然包含映射$\mathbb{C} \hookrightarrow B(H)$下也为 λI 。

因此，映射 $x \mapsto [\pi_{\mathcal{Q}}(\pi_x(T))]$ 是常值映射，其值为 $[\lambda I] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。在由 Calkin 扩张的边界映射 ∂ 给出的指标同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，我们有 $\partial([\lambda I])$ =指标$(\lambda I) = 0$，因为 λI 可逆（因此是指标为零的 Fredholm 算子）。因此， $[\lambda I]$ 对应于$\mathbb{Z}$中的 0。 □

可逆元 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$（或紧情形下的 λI）将在下一小节中用于构造 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的奇 Kasparov 三元组。关键在于，这个可逆元编码了关于 T 的核心信息，而这些信息在下降映射下仍得以保留。

注 29（与 K^1-类的关系）。 在 *Kasparov* 理论中，奇 K^1-类可由一个算子 F 表示，使得 $F^2 - I$ 和 $F - F^*$ 是紧算子，且 F 模紧算子可逆。对于 *Fredholm* 算子 T，一个合适的选择是 $F = T\,(T^*T)^{-1/2}$，即 T 的相位，它是模紧算子酉元。该相位在 *Calkin* 代数中的像，恰好是通过极分解与 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 对应的酉元。因此，类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是奇K^1-类的核心数据。

命题 25（$\mathcal{G}_{B(H)}$ 的 Morita 等价）。 群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$ 与 $\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}_B^{(0)}{}_{(H)}))$ *Morita* 等价。因此，存在一个同构

$$\Phi : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

证明。 回顾命题 8，复数域 $B(H)$ 上的酉共轭群胚是变换群胚

$$\mathcal{G}_{B(H)} = \mathcal{U}(H) \ltimes \mathbb{P}(H),$$

其中 $\mathcal{U}(H)$ 通过 $u \cdot [v] = [uv]$ 作用于射影空间 $\mathbb{P}(H)$。

步骤 1：传递性与不变性。

证明传递性：任取两个点 $[v_1], [v_2] \in \mathbb{P}(H)$，都存在一个酉元$u \in \mathcal{U}(H)$，使得 $u[v_1] = [v_2]$。因此， $\mathcal{G}_{B(H)}$ 是一个传递群胚。对于传递群胚，Muhly–Renault–Williams 不变性定理 [24] 建立了群胚 C^*-代数与各向同性群的 C^*-代数之间的 Morita 等价，其中后者由与单位空间相关的希尔伯特空间上的紧算子稳定化。

更准确地说，任取基点 $x_0 \in \mathcal{G}_B^{(0)}{}_{(H)} = \mathbb{P}(H)$，令 $\mathcal{G}_{B(H)}|_{x_0}$ 表示 x_0 处的各向同性群（即源和靶均为 x_0的态射）。那么

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M C^*(\mathcal{G}_{B(H)}|_{x_0}) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}_{B(H)}^{(0)})),$$

其中 $\sim_M$ 表示强 Morita 等价，而 $L^2(\mathcal{G}_B^{(0)}{}_{(H)})$ 是关于 Haar 系统测度定义在单位空间上的平方可积函数所构成的希尔伯特空间。

步骤 2：各向同性代数的识别。

固定一个基点 $x_0 = [e_0] \in \mathbb{P}(H)$，它对应于由单位向量 $e_0 \in H$张成的直线。在 x_0 处的各向同性群为

$$\mathcal{G}_{B(H)}|_{x_0} = \{u \in \mathcal{U}(H) : ux_0 = x_0\} \cong \mathcal{U}(1) \times \mathcal{U}(H^\perp),$$

其中 $H^\perp = \{e_0\}^\perp$。该各向同性群的群 C^*代数为

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}|_{x_0}) \cong C^*(\mathcal{U}(1)) \otimes_{\max} C^*(\mathcal{U}(H^\perp)).$$

现在，根据 Kuiper 定理， $\mathcal{U}(H^\perp)$ 在强算子拓扑下是可缩的，因此其群C^*代数与 $\mathbb{C}$ Morita 等价（事实上，对于约化代数， $C^*(\mathcal{U}(H^\perp)) \cong \mathbb{C}$）。此外，$C^*(\mathcal{U}(1)) \cong C\mathbb{T}$，即圆周上的连续函数。

步骤 3：建立 $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$之间的关系。

此时 因此，我们需要将 $C(\mathbb{T})$ 与 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H)$ 联系起来。有几种方法 s:

(i) 直接几何构造：利用这两个代数都作为自然扩张的商出现这一事实，可以构造一个显式的不变性双模，将 $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$ 联系起来。Toeplitz 扩张

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{T} \to C(\mathbb{T}) \to 0$$

以及 Calkin 扩张

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$$

通过自然嵌入 $\iota : C(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{Q}(H)$ 相关联，该嵌入将生成元映到单边移位的像。此嵌入在 K-理论上诱导一个同构，并借助 UCT 给出一个 KK-等价，从而蕴含稳定化之后的 Morita 等价。该KK-等价的详细构造可见于 [25, 第 5] 节。

(ii) 利用分类结果： $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$ 均为含单位元的、可分的、核型 C^*-代数，且满足$K_0 \cong \mathbb{Z}$ 与 $K_1 \cong \mathbb{Z}$。由 Kirchberg–Phillips 分类定理 [26, 27], 可知，它们稳定同构，因而 Morita 等价。然而，这援引了一个深刻的分类结果；我们在此将其作为已知事实陈述，而非从第一性原理推导。

(iii) 另一种视角： For 本文之目的，我们只需指出，文献中已有公认结果表明 $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$ 是 Morita 等价的。这源于 Brown–Douglas–Fillmore 理论 [18], , 其中计算了 Ext$(S^1) \cong \mathbb{Z}$, 并随后将 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 与 $\mathbb{Z}$ 等同。Morita 等价可视为如下事实的体现：这两个代数均在维数平移下与 $\mathbb{C}$ 是 KK-等价的。

为明确起见，我们采用方法 (i)，并指出， [25, 定理 3.2] 中给出了 $C(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{Q}(H)$ 之间 KK-等价的详细构造。因此，我们有

$$C(\mathbb{T}) \sim_M \mathcal{Q}(H).$$

结合迄今建立的等价关系：

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}|_{x_0}) \sim_M C(\mathbb{T}) \sim_M \mathcal{Q}(H).$$

第4步：构造 Morita 等价。

将此结果代入步骤 1 的不变性结论，我们得到

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})).$$

步骤 5： K-理论同构。

C^*-代数的强 Morita 等价会在 K-理论中诱导自然同构。这一基本结果可见于标准参考文献，例如 [13, 第 5] 章或 [12, 第 5 节5]。此外， K-理论在与紧算子作张量积时具有稳定性：对于任意 C^*-代数 A 以及任意可分无穷维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$,

$$K_i(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \cong K_i(A), \qquad i = 0, 1.$$

应用这两个事实，我们得到：

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}))) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

$\tilde{}$将此同构记为 Φ： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{=} K_1(\mathcal{Q}(H))$。至此证明完成。 □

注记 30. 确立 $C(\mathbb{T})$与 $\mathcal{Q}(H)$之间 *Morita* 等价的步骤是论证的核心。虽然可以援引深刻的 *Kirchberg–Phillips* 分类定理，但我们指出，利用自然嵌入 $\iota: C(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{Q}(H)$ 以及这两个代数均满足泛系数定理这一事实，可以得到一个更为初等的KK理论论证。由此得到的 KK等价蕴含稳定同构，从而蕴含 *Morita* 等价。*For* 本文之目的，我们将此视为文献 *[18, 25]*中的已知结果。

在下一小节中，我们将直接使用算子 T（而非其相位）来构造奇 Kasparov 三元组，这依赖于如下事实：T 本身是 Fredholm 算子，因此必要时将其替换为有界变换后，它便定义了 $K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}($ $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$ **)** 中的一个类。该类与由相位得到的类在算子同伦意义下相同。

4.2 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$的奇 Kasparov 三元组

借助在第 3.2 小节中构造的希尔伯特空间连续场 $\{H_x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}}$，以及在第 3.3 小节中研究的算子族 $\{\pi_x(T)\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}}$，我们现在将这些数据组合成群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 的一个奇 Kasparov 三元组。该三元组是定义 Fredholm 算子 T 的等变 K^1-类的基本对象。

We 先回顾等变情形下奇 Kasparov 循环的定义。

定义 14 (等变奇 Kasparov 三元组**)。** 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有连续 *Haar* 系统的第二可数局部紧群胚，A 和 B 是 $\mathcal{G}$-C^* 代数（即配备了由 $\mathcal{G}$ 通过 $*$-同构给出的连续作用的 $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ 代数）。一个等变奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E}, \phi, F)$ 由以下部分组成：

1. 一个由 $\mathcal{G}$ 等变的、可数生成的 *Hilbert* B 模 $\mathcal{E}$。
2. 一个 $\mathcal{G}$ 等变的 $*$ 同态 $\phi: A \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$。
3. 一个可伴随算子 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$，满足：
   - $\phi(a)(F - F^*)$和 $\phi(a)(F^2 - 1)$ 对所有 $a \in A$ 都属于 $\mathcal{K}(\mathcal{E})$。
   - $[\phi(a)\ F]$ 对所有 $a \in A$ 都属于 $\mathcal{K}(\mathcal{E})$。
   - F 是模紧算子 $\mathcal{G}$-等变的：对于每个 $g \in \mathcal{G}$，算子 $g \cdot F - F$属于 $\mathcal{K}(\mathcal{E})$，其中 $g \cdot F$ 表示由模结构在 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 上诱导的 $\mathcal{G}$ 作用。

这样的三元组在 $KK^1_\mathcal{G}(A, B)$ 中表示一个类。

在我们的设定中，取：

- $A = C_0(\mathcal{G}_{(0)}\ \mathcal{A})$，在 $\mathcal{E}$ 上由乘法算子 $\phi(f)\xi(x) = f(x)\xi(x)$ 作用。
- $B = \mathbb{C}$，因此 $\mathcal{E}$ 只是一个 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变希尔伯特空间（将连续场 $\{H_x\}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的希尔伯特模）。
- F 应由 T 的有界变换（相位）构造，而不是由 T 本身构造，以确保满足 Kasparov 条件。

F的构造将在下一小节中进行，届时我们将定义

$$F_x := \pi_x(T)\big(\pi_x(T)^*\pi_x(T)\big)^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_x)$$

对每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，并证明这些纤维算子可以组装成全局算子 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$，满足定义14的条件。

就我们的目的而言，我们取带有平凡 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-作用（提升到单位空间）的 $A = C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，以及带有平凡作用的 $B = \mathbb{C}$。希尔伯特模 $\mathcal{E}$ 将是连续场 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 的无穷远处消失的连续截面空间，并将其视为 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变希尔伯特 $\mathbb{C}$-模。

定义 15 （作为连续截面的希尔伯特模）。 令 $\{H_x\}_{x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}}$ 为第 *3.2* 小节中构造的希尔伯特空间连续场，其配有酉同一化 U_x： $H_x \cong H$，对所有 x 均成立（紧情形下的无穷远点除外，我们将单独处理）。定义

$$\mathcal{E} := \Gamma_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}, \{H_x\}),$$

场的连续截面空间 ξ，满足 $x \mapsto \|\xi(x)\|_{H_x}$ 在无穷远处消失。这是一个希尔伯特$C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$-模，配有逐点内积

$$\langle \xi, \eta \rangle(x) = \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{H_x},$$

并且限制到常值函数上（即应用遗忘函子）后，它就成为一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 等变希尔伯特 $\mathbb{C}$-模——具体而言，就是一个带有 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的连续酉表示的希尔伯特空间。

$\mathcal{E}$ 上的群胚作用由 GNS表示诱导。对于每个箭头 $\gamma = (u,\ x) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，其源为 $x = (B,\ \chi)$，靶为 $y = u \cdot x$，GNS 构造给出一个酉同构 U_γ： $H_x \to H_y$，其特征由下式刻画：

$$U_\gamma(\pi_x(a)\Omega_x) = \pi_y(ua)\Omega_y \quad \text{for all } a \in \mathcal{A},$$

其中 Ω_x 和 Ω_y 是循环向量。在命题 9 和 10 给出的典范识别 $H_x \cong H$ 和$H_y \cong H$ 下，这个酉元对应于作用在 H上的 $\pi_y(u)$。

定义 16 （$\mathcal{E}$上的群胚作用）。 对于 γ： $x \to y$ 和 $\xi \in \mathcal{E}$，定义 $(U_\gamma \xi) \in \mathcal{E}$ 如下：

$$(U_\gamma \xi)(z) := \begin{cases} U_\gamma(\xi(x)) & \textit{if } z = y, \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

并通过线性性和连续性延拓。这定义了 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{E}$上的连续酉表示，使$\mathcal{E}$ 成为一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 等变希尔伯特空间。

命题26 ($\mathcal{E}$ 是一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变希尔伯特空间)。 带有上述作用的空间 $\mathcal{E}$ 是一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变希尔伯特 $\mathbb{C}$-模。该作用连续且为酉作用。

证明。 $\mathcal{E}$ 的完备性源于它是无穷远处消失的希尔伯特空间连续场的连续截面空间；这是一个标准结果（参见 [Dixmier, 《C*-代数》，命题 10.1.10]）。

每个 U_γ 的酉性由定义可知： U_γ 是等距算子，因为它来自 GNS 构造；它也是满射，因为其逆由 $U_{\gamma^{-1}}$给出。

为证明作用的连续性，取 $\gamma_n \to \gamma$ 属于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 和 $\xi \in \mathcal{E}$。由命题 14，族 $\{\pi_x(u)\}$是强-$*$ 连续的，这意味着 $U_{\gamma_n}\xi \to U_\gamma \xi$ 在范数意义下连续。这里用到了这样一个事实：截面可以用紧支撑截面逼近，并且该场是连续的。

余循环条件 $U_{\gamma_2\gamma_1} = U_{\gamma_2}U_{\gamma_1}$ 直接由 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 中复合的定义以及 GNS表示的性质推出：对于 γ_1： $x \to y$ 和 γ_2： $y \to z$，我们有

$$U_{\gamma_2\gamma_1}(\pi_x(a)\Omega_x) = \pi_z(u_2u_1a)\Omega_z = U_{\gamma_2}(\pi_y(u_1a)\Omega_y) = U_{\gamma_2}(U_{\gamma_1}(\pi_x(a)\Omega_x)),$$

并且根据循环向量的稠密性，这可扩展到整个 H_x。 □

定义 17 ($C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ **的表示在** $\mathcal{E}$**上。定义一个 *-同态** $\phi: C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$**如下**

$$(\phi(f)\xi)(x) := f(x)\xi(x), \qquad f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}),\ \xi \in \mathcal{E}.$$

这是连续截面上的乘法算子表示。

群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 通过沿源映射拉回的方式作用于 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$：对于 $\gamma: x \to y$ 和 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，定义

$$(\gamma \cdot f)(y) := f(x).$$

这使得 $C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$成为一个 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-C*-代数。

命题 27 (ϕ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变)。 对于任意 $\gamma: x \to y$ 属于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 以及任意 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，我们有

$$U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* = \phi(\gamma \cdot f).$$

因此， ϕ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变的。

证明。 令 $\gamma: x \to y$和 $\xi \in \mathcal{E}$。对于任意 $z \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，我们计算 $(U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* \xi)(z)$。

Si当 $z = y$ 时， U_γ^* 将 z 处的纤维映射到 x 处的纤维，否则为零，因此我们有 ：

$$(U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* \xi)(y) = U_\gamma\big(\phi(f)(U_\gamma^*\xi)\big)(y) = U_\gamma\big(f(x)(U_\gamma^*\xi)(x)\big) = f(x)\xi(y).$$

对于 $z \neq y$，$(U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* \xi)(z) = 0$。

另一方面，

$$(\phi(\gamma \cdot f)\xi)(z) = (\gamma \cdot f)(z)\xi(z) = \begin{cases} f(x)\xi(y) & \text{if } z = y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，对于所有 z，$(U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* \xi)(z) = (\phi(\gamma \cdot f)\xi)(z)$，因此 $U_\gamma \phi(f) U_\gamma^* = \phi(\gamma \cdot f)$ 作为作用在 $\mathcal{E}$ 上的算子成立。 □

定义 18 (与 T 相关联的 Kasparov 算子)。 设 $T \in \mathcal{A}$ 为 *Fredholm* 算子。对于每个 $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}$，定义 $\pi_x(T)$ 的相位如下：

$$F_x := \pi_x(T)\big(\pi_x(T)^*\pi_x(T)\big)^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_x).$$

在典范识别 $H_x \cong H$ 下，该算子关于 x 为常值，且等于 $F := T(T^*T)^{-1/2}$，即 T 的相位。定义作用于 $\mathcal{E}$ 上的算子 F 如下：

$$(F\xi)(x) := F_x\xi(x), \qquad \xi \in \mathcal{E}.$$

命题28(F满足奇 Kasparov 条件。上述定义的算子 F 可伴随，并满足奇 *Kasparov* 循环的条件：

1. F 可伴随，其中 F^* 由 $(F^*\xi)(x) = F_x^*\xi(x)$ 给出。此外， F 模紧算子自伴： $F - F^* \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$。

2. $F^2 - 1 \in \mathcal{K}$（$\mathcal{E}$）。

3. 对于任意 $f \in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，交换子 $[\phi(f)\ F]$是紧的。事实上， $[\phi(f)\ F] = 0$，因为 $\phi(f)$通过标量乘法作用，并且逐点与 F_x 交换。

因此，$(\mathcal{E}, \phi, F)$ 定义了一个奇 *Kasparov* 循环，表示 $KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})\ \mathbb{C})$中的一个类。

证明。 (1) 由于每个 F_x 都是有界的，且场连续，因此 F 定义了一个具有逐点伴随的可伴随算子。模紧算子的自伴性源于以下事实：对所有 x， $F_x^* = F_x$ （算子的相位满足 $F_x^* F_x$，且 $F_x F_x^*$是与 1 相差紧算子的投影）。这些逐纤维的紧差异根据引理 7 汇集成 $\mathcal{E}$ 的一个紧端同态。

(2) 由于 T是 Fredholm 算子， $T^*T - I$和 $TT^* - I$都是紧算子，因此 $F^2 - 1$在H上是紧的。具体而言， $F^2 = T(T^*T)^{-1}T^*$，通过标准计算可知， $F^2 - 1$是一个紧算子。由于 F逐点作用为这个常算子， $F^2 - 1$ 是 $\mathcal{E}$的一个紧端同态（引理 7）。

(3) 对于任意 $f \in C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})$ 和 $\xi \in \mathcal{E}$，我们计算：

$$([\phi(f), F]\xi)(x) = f(x)F_x\xi(x) - F_x(f(x)\xi(x)) = 0,$$

因为 $f(x)$ 是一个标量，并且与 F_x 交换。因此 $[\phi(f)\ F] = 0$，这显然是紧的 t. □

注 31。 使用相位 $F = T(T^*T)^{-1/2}$而不是其本身至关重要。尽管 *Fredholm* 算子 T满足 $T^*T - I, TT^* - I \in \mathcal{K}(H)$，但它通常不满足 $T^2 - I \in \mathcal{K}(H)$，也不是模紧算子自伴的。相位在保留 K^1-类的同时纠正了这两个缺陷，因为它通过 *Fredholm* 算子与 T 同伦。这是 *Kasparov* 理论中奇循环的标准构造。

上述问题需要谨慎处理。在 Kasparov 理论中，一个奇（A， B）-循环可以由算子 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 表示，使得对于所有 $a \in A$，都有 $F = F^*, F^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$ 以及 $[a, F] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$。或者，也可以使用一对算子（$F^+$， F^-）或模紧算子酉元。为避免技术上的复杂性，我们将改用 T 的相位，它提供了一个自然的模紧算子酉元，并且与 T同伦。

定义 19 （Fredholm 算子的相位）。 对于 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，令 $|T| = (T^*T)^{1/2}$。T 的相位是如下算子

$$\mathrm{ph}(T) := T|T|^{-1} \in B(H),$$

其中， $|T|^{-1}$ 定义在核 T的正交补上（并在核 T上延拓为零）。等价地，$\mathrm{ph}(T)$ 是极分解 $T = \mathrm{ph}(T)|T|$中出现的部分等距算子。它满足$\mathrm{ph}(T)^*\mathrm{ph}(T) = P_{(\ker T)^\perp}$ 以及$\mathrm{ph}(T)\,\mathrm{ph}(T)^* = P_{(\ker T^*)^\perp}$，它们分别是核和余核的正交补上的投影。由于核 T和核 T^* 均为有限维，$\mathrm{ph}(T)$ 与某个酉元之差是有限秩算子。

引理 9 （相位的性质）。 对于 *Fredholm* 算子 T:

1. $\mathrm{ph}(T)$ 是 *Fredholm* 算子，且$\ker \mathrm{ph}(T)$ =核 T，并且$\ker \mathrm{ph}(T)^*$ =核 T^*；因此$\mathrm{index}(\mathrm{ph}(T))$ $= \mathrm{index}(T)$。
2. $\mathrm{ph}(T)$ 是模紧算子意义下的酉算子: $\pi_\mathcal{Q}(\mathrm{ph}(T))$ 在 *Calkin* 代数 $\mathcal{Q}(H)$中是酉元。
3. $\mathrm{ph}(T)$ 通过路径 $T_t = T|T|^{-t}$与 T同伦，其中路径上的算子均为 *Fredholm* 算子，并且 $t \in [0, 1]$取范数拓扑；这里， $|T|^{-t}$ 由$(\ker T)^\perp$上的函数演算定义。

证明。 这些都是 Fredholm 理论和算子代数中的标准结果。对于 (1)，核的相等性可直接由极分解得出。对于 (2)，注意到 $\mathrm{ph}(T)^*\mathrm{ph}(T) = I - P_{\ker T}$and $\mathrm{ph}(T)\,\mathrm{ph}(T)^* = I - P_{\ker T^*}$；二者与恒等算子的差都是有限秩投影，因此在 Calkin 代数中都变为恒等算子。对于 (3)，映射 $t \mapsto T|T|^{-t}$ 范数连续，因为 $|T|$ 模紧算子可逆，且函数演算是连续的；每个 T_t 都是 Fredholm 算子，因为它是 T 的紧扰动（对于 $t \neq 1$），或者是相位本身的紧扰动（在 $t = 1$ 处）。□

利用相位，我们可以构造一个满足 Kasparov 条件的自伴算子。

定义 20（由相位得到的自伴算子）。定义自伴算子 F 于 $\mathcal{E}$ 上，使其满足

$$(\tilde{F}\xi)(x) := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ph}(T)^* \\ \mathrm{ph}(T) & 0 \end{pmatrix} \xi(x),$$

其中，我们将 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}$ 等同（即将希尔伯特空间加倍）。更准确地说，令 $\mathcal{E}=\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}$，并将 F 定义为上述矩阵算子。

命题 29（F 定义了一个奇 Kasparov 三元组）。令 $\mathcal{E},\phi$ 对角扩张至 $\mathcal{E}$，并令 F 如上，则三元组 $(\tilde{\mathcal{E}},\phi\oplus\phi,\tilde{F})$ 是 $(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 的奇 *Kasparov* 三元组，代表 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 中的一个类。也就是说：

1. F 是自伴的。*2.* $\tilde{F}^2-1$ 在 $\tilde{\mathcal{E}}$上是紧的。*3.* 对所有 $f\in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$，$[\phi\oplus\phi(f)\ \tilde{F}]$ 都是紧的。

证明。(1) 自伴性直接由构造得出：

$$\tilde{F}^* = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ph}(T)^* \\ \mathrm{ph}(T) & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ph}(T) \\ \mathrm{ph}(T)^* & 0 \end{pmatrix} = \tilde{F}.$$

(2) 计算 $\tilde{F}^2$:

$$\tilde{F}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{ph}(T)^*\,\mathrm{ph}(T) & 0 \\ 0 & \mathrm{ph}(T)\,\mathrm{ph}(T)^* \end{pmatrix}.$$

由引理 9，$\mathrm{ph}(T)^*\mathrm{ph}(T) = I - p_{\ker T}$且 $\mathrm{ph}(T)\,\mathrm{ph}(T)^* = I - p_{\ker T^*}$，其中 $p_{\ker T}$和 $p_{\ker T^*}$分别是到 $\ker\ T$和 $\ker\ T^*$上的有限秩投影。因此

$$\tilde{F}^2 - I = \begin{pmatrix} -p_{\ker T} & 0 \\ 0 & -p_{\ker T^*} \end{pmatrix},$$

这是每个纤维上的有限秩算子。有限秩算子是紧的，并且由于场是连续的，这个逐纤维紧算子拼合成 $\mathcal{E}$ 的一个紧端同态（引理 7）。

(3) 对任意 $f\in C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 以及任意截面 $(\xi_1,\ \xi_2)\in\tilde{\mathcal{E}}$，逐点计算得：

$$([\phi\oplus\phi(f),\tilde{F}](\xi_1,\xi_2))(x) = \begin{pmatrix} 0 & f(x)\,\mathrm{ph}(T)^*\xi_2(x) - \mathrm{ph}(T)^* f(x)\xi_2(x) \\ f(x)\,\mathrm{ph}(T)\xi_1(x) - \mathrm{ph}(T)f(x)\xi_1(x) & \end{pmatrix} = 0,$$

因为 $f(x)$ 是标量，与 $\mathrm{ph}(T)$ 和 $\mathrm{ph}(T)^*$可交换。因此 $[\phi\oplus\phi(f)\ F]=0$，这显然是紧的。

□

注 32。三元组$(\tilde{\mathcal{E}},\phi\oplus\phi,\tilde{F})$ 是编码 *Kasparov* 理论中 T的奇 K^1-类的标准方式。倍增技巧将模紧算子酉元$\mathrm{ph}(T)$ 转换为满足奇 *Kasparov* 条件的自伴算子。该三元组与原 *Fredholm* 算子 T表示同一个类，并且其在 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})\ \mathbb{C})$ 中的类恰好是定义 *22* 中构造的等变 K^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。

备注33 (避免倍增构造**)。** 为简便起见，许多作者直接使用模紧算子的酉元 $U = \mathrm{ph}(T)$，并利用酉等价定义奇 *Kasparov* 循环。这种方法避免了倍增的技术性问题，同时在 *KK*-理论中保持完全严谨：模紧算子的酉元通过同构 $K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \cong KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$自然地定义了一个奇 K^1-类。上文给出的倍增构造是将此类模紧算子的酉元转换为满足 $F^2 - 1$ 紧条件的具体自伴算子的标准方法，从而提供一个表示同一类的显式 *Kasparov* 循环。在下文中，我们将直接处理由$\mathrm{ph}(T)$表示的类，同时牢记它与上文构造的显式三元组$(\mathcal{E}, \phi \oplus \phi, F)$之间的等价性。

For 本文的目的，只需知道一个 Fredholm 算子 T会诱导出 $K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})$ 中一个良定义的类，记为 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$。该类由相位 ph(*T*) 表示，且模˜ ˜紧算子为酉元；倍增构造产生一个显式的自伴 Kasparov 循环 $(\mathcal{E}, \phi \oplus \phi, F)$，表示同一个类。

定义21 (等变 K^1-类，来自一个 Fredholm 算子**).** *For* 一个 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，定义其等变 K^1-类为

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} := [(\tilde{\mathcal{E}}, \phi \oplus \phi, \tilde{F})] \in K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}),$$

˜ ˜其中 $(\mathcal{E}, \phi\oplus\phi, F)$ 是定义*20*与命题*29*中所构造的奇 *Kasparov* 三元组。等价地，
$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ T K_1 $\mathcal{Q}$ H $K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$ ≅是对应于酉元 $\mathrm{ph}()$、位于 $(())$ 中、K_1 $\mathcal{Q}$ H
并在同构 $()\,(())$ 之下的类（经由指标映射与下降构造）。

该类仅依赖于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中 $\pi_\mathcal{Q}(T)$ 的 K-理论类，并且在*Fredholm*算子的紧扰动与范数连续同伦下保持不变。因此，$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是良定义的，不依赖于*Hilbert*模辨识、相位代表元以及用于表示它的显式倍增构造的选取。

在下一小节中，我们将验证该定义是适定的，并且不依赖于构造中所作的各种选取，同时我们将确立其关键的函子性质。

4.3 类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \cong KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$的定义

在第4.2小节所构造的奇Kasparov三元组的基础上，我们现在给出与Fredholm算子 $T \in \mathcal{A}$相关联的等变 K^1-类的精确定义。该类是基本不变量，它将经由下降映射映到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$中的一个类，最终恢复弗雷德霍姆指标。

我们首先回顾等变 K^1-理论与等变KK^1-理论之间的一个基础同构，它为我们的 Kasparov 三元组的类提供了自然的归属。

命题 30 $(K^1_\mathcal{G}(\mathcal{G}^{(0)}) \cong KK^1_\mathcal{G}(C_0(\mathcal{G}^{(0)})\ \mathbb{C}))$**.** 设 $\mathcal{G}$ 是一个配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚，$\mathcal{G}^{(0)}$ 是其单位空间。我们赋予 $\mathcal{G}^{(0)}$ 平凡的 $\mathcal{G}$-作用。则存在一个自然同构

$$K^1_\mathcal{G}(\mathcal{G}^{(0)}) \cong KK^1_\mathcal{G}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}),$$

其中 $K^1_\mathcal{G}(\mathcal{G}^{(0)})$ 表示单位空间的等变 K^1-群，而 $KK^1_\mathcal{G}$ 是等变 KK^1-群。

证明。 这是等变 KK-理论中的一个标准结果，最初源于 Kasparov [22]的研究，并由 Tu [19, 第 4]节进一步详述。在给定的假设下——特别是 $\mathcal{G}$ 在其单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$上的作用平凡——这一同构可以理解如下。

群 $K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)})$ 可定义为从 $\mathcal{G}^{(0)}$到可分 $\mathcal{G}$-希尔伯特空间上 Fredholm 算子空间的 $\mathcal{G}$-等变映射的同伦类构成的群，即 $K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) := [\mathcal{G}^{(0)}, \mathrm{Fred}(H)]^{\mathcal{G}}$。每个这样的映射都编码了一个以单位空间为参数的等变 Fredholm 算子的数据。

到 $KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \ \mathbb{C})$ 的同构是通过将这样的映射对应于适当形式的 Kasparov 模 $(\mathcal{E}, \phi, F)$ 来实现的。具体而言，一个等变向量丛（或者更一般地，$K^1_{\mathcal{G}}$ 中的一个类）通过对适当的 Dirac 元取 Kasparov 积，在 $KK^1_{\mathcal{G}}$ 中定义一个类，从而建立这两种图景之间的等价。这一识别在等变指标理论中是基本的，因为它使得 Fredholm 算子可以直接解释为双变 KK-理论中的元素。 □

注记 34. 在命题 *30* 的同构下，第 *4.2* 小节中为表示算子 T 而构造的奇 *Kasparov* 三元组 $(\mathcal{E}, \phi \oplus \phi, F)$ 恰好对应于等变 K^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$。这一识别说明，将该三元组视为定义我们的主要不变量是合理的。

鉴于命题 30 中建立的同构，我们可以将类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 定义为$KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \ \mathbb{C})$中的一个元素。这一视角特别便于应用 Kasparov 下降映射，该映射随后会将此不变量输送到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$。

注记 *35*（倍增构造的作用）。希尔伯特模的倍增以及 F 的非对角形式在奇 *Kasparov* 循环理论中起着至关重要的作用。虽然相位 $ph(T)$ 本身是模紧算子酉，但它未必是自伴的。构造 $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}, \phi \oplus \phi, \begin{pmatrix} 0 & ph(T)^* \\ ph(T) & 0 \end{pmatrix})$ 给出一个自伴算子 $\tilde{F}$，它对所有 $f \in C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$满足 $(\tilde{F}^2 - I) \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}})$ 以及 $[\tilde{F}, \phi \oplus \phi(f)] \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{E}})$。这恰好满足奇 *Kasparov* 模的要求。

定义 22（Fredholm 算子的等变 K^1-类）。设 $\mathcal{A}$ 是 $B(H)$ 或 $\mathcal{K}(H)$，并设$T \in \mathcal{A}$ 是一个 *Fredholm* 算子。定义其等变 K^1-类为

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} := [(\tilde{\mathcal{E}}, \phi \oplus \phi, \tilde{F})] \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}) \cong K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}),$$

其中 $(\mathcal{E}, \phi \oplus \phi, F)$ 是第 *4.2* 小节中构造的奇 *Kasparov* 三元组。

备注 36（良定义性与不变性）。类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 良定义，理由如下：

- 与紧扰动无关：若 T 与 T' 之差是一个紧算子，则它们的相位$\mathrm{ph}(T)$ 和 $\mathrm{ph}(T')$ 相差一个紧扰动，从而得到算子同伦的 *Fredholm* 模。因此 $[T]_{(1)\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T']_{(1)\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。

- 与 ***Hilbert*** 模识别无关：构造连续场 $\mathcal{E}$ 时的不同选择会得到同构的 *Hilbert* 模，而所得 *Kasparov* 循环在KK^1-理论中等价。

- 同伦不变性：如果 $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$ 是一条由 *Fredholm* 算子构成的连续路径，相应的类 $[T_t]_{(1)\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 保持不变。

这些性质确保 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$仅依赖于 T的弗雷德霍姆指标，这一点将在后续各节中加以精确说明。

注记 37 （与下降映射及弗雷德霍姆指标的关系）**.** 定义 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 于$KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$ 的主要作用在于 *Kasparov* 下降映射的存在

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A})).$$

应用此映射得到下降类

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) := j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) \in K_1(C^*_r(\mathcal{G}_\mathcal{A})).$$

要从此类中提取 *Fredholm* 指标，必须将其与适当扩张的边界映射联系起来。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，可通过 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}$ 和 *Calkin* 指标映射 ∂_{Calkin}： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$来实现。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，群 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}))$ 为零，因此指标为零。映射的具体复合将在第 *5* 节中详细说明。

以下命题保证此定义不依赖于构造过程中所作的各种选择。

命题 31 (良定义性： $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$)。 类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$不依赖于:

1. 用于定义直积分 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}$ 上的博雷尔概率测度 μ 的选取，前提是 μ 具有全支撑。

2. 酉同一化的选择： $H_x \cong H$。

3. 相位的选择$\mathrm{ph}(T)$ （任何其他选择都相差一个紧算子，因此给出相同的类）。

4. 倍增构造的选择（同一 K^1-类的任何其他表示都会产生等价的 *Kasparov* 循环）。

证明。 证明依据 KK-理论中的两个基本不变性原理：希尔伯特模的酉等价不变性，以及紧扰动不变性。

(1)-(2) 对测度 μ 或纤维识别 U_x 的任意两种选择，都会产生酉等价的希尔伯特模 $\mathcal{E}$。具体而言:

- 对于具有全支撑的测度 μ 和 ν，Radon–Nikodym 导数诱导出一个酉元 U： $L^2(\mu, H) \to L^2(\nu, H)$ 由 $(Uf)(x) = \sqrt{d\nu/d\mu}(x) f(x)$ 给出。
- 不同的纤维识别相差一个作用于 H 上的可测酉元族 V_x，从而在 $\mathcal{E}$ 上得到逐点酉算子。

这些酉元与表示 ϕ（其作用为逐点乘法）相交换，并将 $\lrcorner F$ 共轭到其对应形式，从而建立 Kasparov 循环之间的同构。因此，所得的 KK-类保持不变。

(3) 相位 ph(T) 是由极分解 $T = \mathrm{ph}(T)|T|$ 得到的部分等距算子。任意两种选择在有限维空间 ker T 和 ker T^* 上相差一个有限秩部分等距算子，因此~相差一个紧算子。相应的算子 F 因此在 $\mathcal{E}$ 上相差一个紧算子。由于KK-类在紧扰动下保持不变，它们定义同一个类。

(4) 倍增构造是一种标准方法，用于以满足 $(F^2 - I) \in \mathcal{K}$ 的自伴算子表示奇数 K^1-类。任何其他表示（例如，直接使用模紧算子酉元）都与其 KK-等价，这可由奇数 KK-理论中酉元图景与自伴图景之间众所周知的同构得到。因此，倍增的具体选择不会影响该类。

综上，这些论证表明， $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 与所有辅助选择无关，只取决于 Fredholm 算子 T 本身。

□

为便于计算，通常可以使用同一类的一个更简单的代表元。

推论 15 (简化代表元)。 类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 也可以由奇 *Kasparov* 循环 $(\mathcal{E}, \phi, F)$ 表示，其中 $F = \mathrm{ph}(T)$ 逐点作用于 $\mathcal{E}$。这个代表元与第 *4.2* 小节中构造的加倍自伴算子 KK-等价，并且在计算中通常更容易处理。

证明。 在奇 KK-理论中，一个类可以由满足条件 $F^2 - I \in \mathcal{K}$ 的自伴算子 F 表示（加倍图景），也可以由模紧算子酉元 u 表示（直接图景）。相位 ph(*T*) 是一个模紧算子酉元的部分等距算子，因为 $\mathrm{ph}(T)^* \mathrm{ph}(T) = I - P_{\ker T}$，且 $\mathrm{ph}(T)\,\mathrm{ph}(T)^* = I - P_{\ker T^*}$ 与 I 相差有限秩投影。因此，$(\mathcal{E}, \phi, \mathrm{ph}(T))$ 定义了一个有效的奇 Kasparov 循环。

借助标准的第 4.2 小节，经由奇 KK-理论与带 $\mathbb{Z}_2$-分次的 KK-理论之间的标准同构（其中 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ 上的分次算子为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$），与这一简化循环 KK-等价。

□

命题 32 （指标与等变类之间的关系，针对 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$）。 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，并设 $T = \lambda I + K \in \mathcal{A}$ 为 *Fredholm* 算子（故 $\lambda \neq 0$）。则等变 KK-理论类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \mathbb{C})$ 由 T 的指标决定。更精确地说，在同构

$$\mathrm{ind} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z},$$

我们有

$$\mathrm{ind}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = \mathrm{index}(T).$$

特别地，由于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的每个 *Fredholm* 算子的指标均为零（因为 *Fredholm* 指标在可逆元的紧扰动上消失，且 λI 可逆），我们得到

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = 0 \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}).$$

证明。回顾推论 15， $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 由简化三元组 $(\mathcal{E},\ \phi,\ \mathrm{ph}(T))$ 表示，其中 ph(*T*) 是 T 的相位。

等变 KK 理论中的指标映射定义为与一个适当的类配对（或在每个纤维上对 Fredholm 算子求值）。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$ 是射影酉群，而对 T 进行纤维逐点取值得到一个由该空间参数化的 Fredholm 算子族。这个算子族的指标恰好是 T 的指标（因为该算子族在酉共轭作用下为常值）。

KK 理论中的一个标准结果（参见 [Kasparov、 1980] 或 [Blackadar， 1998]）指出，对于此类常值算子族，等变 KK 类由 Fredholm 指标决定。同构 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ 将 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 映为 index(*T*)。

对于 $T = \lambda I + K$ 且 $\lambda \neq 0$，我们有指标(*T*) = 指标(λI) = 0，因为 λI 是可逆的，而紧扰动不会改变指标。因此， $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = 0$。 □

注记 38 （记号约定）。 下文中，为了记号方便，我们将使用简化代表元 （$\mathcal{E}$、 ϕ、$\mathrm{ph}(T)$），同时谨记它与第 *4.2* 小节中的加倍构造表示同一个类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。

命题 33 （等变类的紧扰动不变性）。 设 $T \in \mathcal{A}$ 是 *Fredholm* 算子，且 $K \in \mathcal{K}(H)$ 是紧算子，使得 $T + K$ 也是 *Fredholm* 算子。那么

$$[T + K]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}).$$

换言之，等变 KK-理论类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 只取决于 *Fredholm* 算子 T，相差一个紧扰动。

证明。回顾推论 15，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$可由奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi,\ \mathrm{ph}(T))$ 表示，其中 $\mathrm{ph}(T)$ 是 T的相位。

对于紧扰动 $T+K$，$\mathrm{ph}(T+K)$ 与 $\mathrm{ph}(T)$ 算子同伦，其间通过一族连续的、模紧算子意义下的自伴酉元实现。这是因为，将 Fredholm 算子映射到其相位的映射，在具有固定本质酉元代表的 Fredholm 算子集合上连续；而紧扰动不会改变本质酉类。

更具体地，考虑路径

$$T_t = T + tK, \quad t \in [0,1].$$

当 t足够小时，T_t 仍是 Fredholm 算子，且相位 $\mathrm{ph}(T_t)$ 连续变化。将区间 $[0,1]$ 划分为有限个这样的线段，即可得到 $\mathrm{ph}(T)$ 与 $\mathrm{ph}(T+K)$ 之间的算子同伦。

算子同伦的 Kasparov 三元组在 KK-理论中表示同一个类。因此，

$$[(\mathcal{E},\phi,\mathrm{ph}(T+K))] = [(\mathcal{E},\phi,\mathrm{ph}(T))] \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}),\mathbb{C}),$$

由此推出 $[T+K]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。 □

例 13（单侧移位的类）。设 $S \in B(H)$ 为 $\ell^2(\mathbb{N})$上的单边移位。由于 S 是余核为一维的等距算子，其极分解为 $S = S\cdot I$，因此$\mathrm{ph}(S) = S$。类$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是 $K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) \cong \mathbb{Z}$的生成元，这对应于指标$(S) = -1$这一事实。在第 *5* 节中，我们将验证它在下降映射下的像对应于 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong \mathbb{Z}$的生成元。

例 14（恒等算子的有限秩扰动类）。设 $T = I + F$，其中 F 是有限秩算子。对于 $t \in [0,1]$，路径 $T_t = I + tF$ 是连接 T与 I的连续 *Fredholm* 算子族。由 K^1-类的同伦不变性，$\mathrm{ph}(T)$ 与 $\mathrm{ph}(I) = I$ 经由模紧算子的酉元同伦。由于 I 本身是酉元（因而在奇 K 理论中表示平凡类），我们有 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = 0$属于 $K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$。

类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是本文的核心对象。在第 5 节中，我们将应用下降映射，以获得 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的一个类；在第 6 节中，我们将把它与沿 ι 的拉回及边界映射结合起来，从而恢复弗雷德霍姆指标。

注释 39（与 K^1-符号类的关系）。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 可解释为 *Calkin* 代数中符号类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的等变提升。虽然 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 刻画了 T 模紧算子的稳定行为，但等变类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 还编码了单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}$ 上的额外逐点数据。

下降映射将此类投影回 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$，该对象与 $\mathcal{Q}(H)\otimes\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}))$ *Morita* 等价（这种 *Morita* 等价源于 $\mathcal{G}_{B(H)}$在其单位空间上的作用具有传递性）。因此，$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$，而下降映射则恢复了原始符号类。这一观点与布朗–道格拉斯–菲尔莫尔理论相契合；在该理论中，*Calkin* 代数的扩张由 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$分类。

命题 *34*（$KK^1(B(H)\ \mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$）。存在一个自然同构 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$，它将 *Fredholm* 算子 T 的类映射为其符号 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的类。

证明。我们估计利用 KK 理论和 Calkin 扩张中的标准事实建立同构 .

预备事实。 首先回顾，对于任意可分 C^*代数 A，都有悬挂同构

$$KK^1(A,\mathbb{C}) \cong KK(A,S\mathbb{C}) \cong KK(A,C_0(\mathbb{R})),$$

其中， $S\mathbb{C} = C_0(\mathbb{R})$ 表示悬挂。此外， $KK^1(A, \mathbb{C})$ 将 A 被 $\mathcal{K}(H)$ 的扩张分类，分类以稳定酉等价为准。

步骤 1：普适的 Calkin 扩张。

考虑 Calkin 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0.$$

这个短正合列定义了一个元素

$$[\partial_{\text{Calkin}}] \in KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}),$$

即该扩张的边界类。根据 KK-理论的函子性，将逆变函子$KK^1(\cdot, \mathbb{C})$ 应用于商映射 $\pi_{\mathcal{Q}}$，得到一个同态

$$\pi_{\mathcal{Q}}^* : KK^1(B(H),\mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}).$$

步骤 2：识别 KK^1（$\mathcal{Q}$（H） $\mathbb{C}$）。

对于任意 C^*代数 A，存在一个自然同构

$$KK^1(A,\mathbb{C}) \cong K_1(A).$$

将此应用于 $A = \mathcal{Q}(H)$，我们得到

$$KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

因此，要建立所需的同构，只需证明 $\pi_{\mathcal{Q}}^*$ 是一个同构。

步骤 3： KK理论中的六项正合列。

Calkin 扩张在 $KK(\cdot, \mathbb{C})$中诱导出一个六项正合列（见 [9]）：

$$\begin{array}{ccccc} KK^0(\mathcal{K}(H),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK^0(B(H),\mathbb{C}) & \longrightarrow & KK^0(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1(B(H),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1(\mathcal{K}(H),\mathbb{C}) \end{array}$$

第4步：计算这些群。

现在我们来计算该序列中出现的 KK-群。

- 代数 $B(H)$ 是稳定且适当无限的；特别是，它在次数 0 上是 KK-可缩的：

$$KK^0(B(H),\mathbb{C}) = 0, \qquad KK^1(B(H),\mathbb{C}) = 0.$$

这由 Kuiper 定理以及 $B(H)$ 在强算子拓扑下是可缩的这一事实得出。

• 代数 $\mathcal{K}(H)$ 与 $\mathbb{C}$ Morita 等价。根据 KK-理论的 Morita不变性（见 [12,练习 13.7.1]），我们有

$$KK^i(\mathcal{K}(H),\mathbb{C}) \cong KK^i(\mathbb{C},\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0, \\ 0 & i=1. \end{cases}$$

更具体地说，$KK^0(\mathcal{K}(H)\ \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ 由恒等表示的类生成，并且$KK^1(\mathcal{K}(H)\ \mathbb{C}) = 0$。

将这些值代入六项正合列，得到：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & KK^0(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) & \longleftarrow & KK^1(B(H),\mathbb{C}) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

步骤 5：正合性迫使该同构。

由该图表可知，在 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$ 处的正合性给出：

$$\ker(KK^1(B(H),\mathbb{C}) \to 0) = \mathrm{im}(KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \to KK^1(B(H),\mathbb{C})).$$

由于映射 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C}) \to 0$ 是零映射，其核是整个 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$。因此该映射

$$KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(B(H),\mathbb{C})$$

是满射。

在 $KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C})$ 处的正合性给出：

$$\ker(KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \to KK^1(B(H),\mathbb{C})) = \mathrm{im}(\mathbb{Z} \to KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C})).$$

但映射 $\mathbb{Z} \to KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C})$ 是零映射，因为 $KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C})$ 是无挠阿贝尔群，且来自 $\mathbb{Z}$ 的映射必须经过 $KK^0(\mathcal{K}(H)\ \mathbb{C}) \to KK^0(B(H)\ \mathbb{C})$ 的像，而该像为零。因此，

$$\ker(KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \to KK^1(B(H),\mathbb{C})) = 0,$$

因此，映射 $KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C}) \to KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$ 是单射。

因此，映射 $KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C}) \to KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$ 既是单射又是满射，因而是一个同构。它的逆映射与步骤 2 中的同构 $KK^1(\mathcal{Q}(H)\ \mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$ 复合后，得到所需的同构：

$$\Phi : KK^1(B(H),\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

步骤 6：Fredholm 算子的识别。

Fredholm 算子 $T \in B(H)$ 定义了一个 Kasparov 循环

$$(H,\pi,T),$$

其中，π 是 H 上 $B(H)$ 的典范表示。它在 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$ 中的类由此 Fredholm 模表示。

在上述识别下，此类恰好映到 T 在 Calkin 代数中的像所对应的酉类。为此，注意到六项正合列中的边界映射将 T 的类映到其符号的类。更具体地说，复合

$$KK^1(B(H),\mathbb{C}) \xrightarrow{(\pi_{\mathcal{Q}}^*)^{-1}} KK^1(\mathcal{Q}(H),\mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$$

将 $[T]$ 映到 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$,，因为模紧算子可逆恰好是 Fredholm 性的定义条件（阿特金森定理，定理 2），而 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 的 K_1-类恰好就是符号类。

步骤 7：自然性。

该同构具有自然性，即若 $f:\ B(H)\ \to B(H)$是由酉共轭诱导的 $*$-同态，则两侧诱导的映射都与 Φ可交换。这是因为在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中，酉元共轭不会改变符号，而且 KK-理论类在酉等价下保持不变。

因此，我们建立了一个自然同构

$$KK^1(B(H),\mathbb{C})\cong K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中，具体对应关系将 Fredholm 算子 T 的类映射为其符号$[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]\in K_1(\mathcal{Q}(H))$的类。

□

4.4 同伦不变性与良定义性

在第4.3小节中构造的等变 K^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 并非只是形式上的指派；它具有基本的不变性，使其成为 Fredholm 算子 T的稳健不变量。在本小节中，我们证明，$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 在 Fredholm 算子之间的范数连续变形下以及在紧扰动下保持不变。这些性质对于指标定理至关重要，因为它们保证该类仅取决于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$的 K-理论类。

命题 35 (同伦不变性)。 设 $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 ***Fredholm*** 算子范数连续族。那么，等变 K^1-类 $[T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 与 t 无关；即，

$$[T_0]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}=[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}).$$

~ ~证明。 对于每个 $t\in[0,1]$，考虑第4.3小节中构造的奇 Kasparov 三元组（$\mathcal{E}$，$\phi\oplus\phi$，F_t），~其中 F_t 由相位 ph(T_t) 定义。

Kasparov 理论中的一个标准结果指出，Fredholm 算子的范数连续路径会在相应的 Kasparov 循环之间诱导出一个算子同伦（模去紧扰动），~并且算子同伦的循环在 KK-理论中定义相同的类。更确切地说，族 $\{(\mathcal{E},\ \phi\oplus\phi,\ \tilde{F}_t)\}_{t\in[0,1]}$ 定义了 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ C([0,1]))$ 中的一个元素，而在 $t=0$ 和 $t=1$ 处的求值映射在 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C})$ 中给出相同的类。

我们必须处理一个微妙的技术问题：映射 $T\mapsto \mathrm{ph}(T)$ 一般而言在算子范数拓扑下并不连续。然而，对于范数连续的 Fredholm 算子族 $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$，核维数局部恒定，因此可以选择相位 ph(T_t)，使其关于 t 模紧算子连续变化。更具体地说，在对 $[0,1]$, 上的有限维核丛和余核丛进行适当平凡化之后，我们可以构造一个范数连续的偏等距算子族来表示这些相位。另一种方法是直接使用有界变换 $T_t(1+T_t^*T_t)^{-1/2}$；它关于 t 在范数下连续变化，且与 ph(T_t)之差为紧算子。无论采用哪种方法，所得的 Kasparov 循环~ ~($\{,\ \phi\oplus\phi,\ F_t\}$)$_{t\in[0,1]}$在紧扰动意义下连续变化，这足以用于定义 KK-理论中的算子同伦。整个变形过程中，本质交换子条件 $[F_t,\phi(a)]\in\mathcal{K}$ 对所有 $a\in C_0$($\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$) 均得以保持；并且由于对所有 t都有 $\|F_t\|=1$，该族始终一致有界。

因此，类 $[T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 与 t无关，只取决于 T在 $\mathcal{A}$-Fredholm 算子空间中的同伦类；该空间可通过本质谱映射识别为 $K_1(\mathcal{Q}(H))$。 □

注释 40。 上述同伦不变性，加上对紧扰动的不变性（这源于紧算子在 KK-理论中作用平凡），意味着 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 完全由 K-理论类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$决定。这与 ***BDF*** 理论的图景一致：指标由本质酉元所属的连通分支决定。

推论 16（在紧扰动下不变）。设 $T \in \mathcal{A}$ 是一个 ***Fredholm*** 算子，且 $K \in \mathcal{K}(H)$是一个紧算子。那么

$$[T+K]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}.$$

特别地，如果 T 与 T' 相差一个紧算子，则它们定义相同的等变 K^1-类。

证明。考虑路径 $T_t = T + tK$，其中 $t \in [0,1]$。根据阿特金森定理，由于每个 tK 都是紧算子，对所有 $t \in [0,1]$，T_t 都是 Fredholm 算子。此外，由于 $\|T_t - T_s\| = |t-s|\|K\|$，$t \mapsto T_t$ 是范数连续的。将命题 35 应用于这条路径，得到 $[T+K]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_0]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。 □

引理 10（对符号类的依赖）。设 T_1、$T_2 \in \mathcal{A}$ 是 ***Fredholm*** 算子，且在 ***Calkin*** 代数中有 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_1) = \pi_{\mathcal{Q}}(T_2)$ $\mathcal{Q}(H)$。那么 $[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。

证明。若 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_1) = \pi_{\mathcal{Q}}(T_2)$，则 $T_2 - T_1 \in \mathcal{K}(H)$ 是紧的。因此，T_2 是 T_1 的紧扰动，结论由推论 16 立即得出。 □

注释 41。 命题 *35*、推论 *16* 和引理 *10* 的结合表明，该映射

$$T \longmapsto [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$$

可经由典范映射 $\mathrm{Fred}(\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(\mathcal{Q}(H))$分解。更确切地说，若 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_1)$ 和 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_2)$在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中定义相同的类（即，作为 $\mathcal{Q}(H)$ 中的酉元，在紧扰动意义下同伦），则$[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。这表明 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 仅取决于 K-理论类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，而这恰好是 ***BDF*** 理论中指标映射的定义域。

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，其情形比 $B(H)$情形更简单。回顾一下，$\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的每个算子都可以唯一地写成 $\lambda I + K$，其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $K \in \mathcal{K}(H)$，并且当且仅当 $\lambda \neq 0$ 时，该算子是 Fredholm 算子。特别地，$\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的所有 Fredholm 算子的指标均为零，并且它们在 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H)$ 中的像是标量 $\lambda \cdot 1 \in \mathbb{C}^{\times}$。

推论 17 (关于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$的不变性)。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，设 $T_1 = \lambda I + K_1$ 和 $T_2 = \lambda I + K_2$ 是具有相同标量部分 $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ 的 ***Fredholm*** 算子，并且 K_1、$K_2 \in \mathcal{K}(H)$ 是紧算子。那么

$$[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}.$$

事实上，所有这些类都是零，因为它们与 $[I]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 重合。

证明。 考虑范数连续路径

$$T_t = \lambda I + (1-t)K_1 + tK_2, \qquad t \in [0,1].$$

对于每个 t，T_t 都具有 λI 加上一个紧算子的形式，并且由于 $\lambda \neq 0$，每个 T_t 都是 Fredholm。根据同伦不变性（命题 35），我们得到 $[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。

为了说明这个共同的类是零，首先注意到 T_1 与 λI 通过路径 $s \mapsto \lambda I + (1-s)K_1$同伦。接下来，由于 $\mathbb{C}^{\times}$ 是路径连通的，我们可以选取一条从 λ 到 1 的连续路径 $\lambda_s \in \mathbb{C}^{\times}$（例如，在确保直线不经过零之后取 $\lambda_s = (1-s)\lambda + s$，或者使用对数路径）。于是，$s \mapsto \lambda_s I$给出了 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中一条连接 λI 与 I的 Fredholm 算子范数连续路径。因此 $[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = [I]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。最后，$I$ 是可逆的，所以它的相位就是 I 本身，且相应的 Kasparov 循环在$K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$中表示零类。 □

注 42. 上述证明的关键在于，标量部分 λ 可以在 $\mathbb{C}^\times$ 内连续变形为1，且始终属于 $\mathcal{K}(H)^\sim$中的 *Fredholm* 算子类。这之所以可行，恰恰是因为$\mathbb{C}^\times$ 是连通的，并且同伦 $s \mapsto \lambda_s I$ 始终处于允许的算子范围内。在 *Kasparov* 理论中，这种范数连续的标量同伦足以保证相应的 KK-类相等。

命题 36 （赋值的良定义性）。 该赋值

$$\mathrm{Fred}(\mathcal{A}) \longrightarrow K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \qquad T \longmapsto [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}},$$

其中，$\mathrm{Fred}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中 *Fredholm* 算子的集合，该赋值是良定义的，并且可通过 $\mathrm{Fred}(\mathcal{A})$ 的连通分支集合来表示。

此外，以下结论成立：

（*i*）当 $\mathcal{A} = B(H)$ 时，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 仅取决于 K 理论类 $[\pi_\mathcal{Q}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$；

（*ii*）当 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ 时，对所有 *Fredholm* 算子 T，均有 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = 0$。

证明。 良定义性由命题 31 中证明的选择无关性，以及上述建立的同伦和紧扰动下的不变性得出。可通过连通分支集合来表示则是同伦不变性（命题 35）的直接结果。

对于情形(i)（$\mathcal{A} = B$（H））， 其对符号类的依赖性由引理 10 以及以下事实推出： $\mathcal{Q}$（H）中的同伦酉元定义了相同的 K_1-类。对于情形 (ii)（$\mathcal{A} = \mathcal{K}$（$H$）~），其消失性由推论 17 得出。 □

注 43（基本二分性）。 命题 *36* 在 $\mathcal{A}$ 的两种规范选择之间确立了清晰的二分现象：

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{A} = B(H) \Longrightarrow [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \textit{ corresponds to } [\pi_\mathcal{Q}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H)), \\ &\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim \Longrightarrow [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = 0 \textit{ for all Fredholm operators } T. \end{aligned}}$$

这种二分现象反映了这两种情形下 *Calkin* 代数的 K-理论之间的根本差异：对于 B（H），像 $\pi_\mathcal{Q}$（Fred(*B*（*H*））生成了 K_1（$\mathcal{Q}$（H）$\cong \mathbb{Z}$；而对于 $\mathcal{K}$（H）~，像仅由标量 $\mathbb{C}^\times$组成，而标量是可缩的。这种良定义性正是后续指标定理所需要的：在该定理中，等变的 K^1-类将与一个 K-同调类配对，从而产生数值指标。

推论 18 （分解经由 K_1（$\mathcal{Q}$（H））。 对于 $\mathcal{A} = B$（H），映射 $T \mapsto [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 可经由典范满射Fred(B（H） $\to K_1$（$\mathcal{Q}$（H））进行分解，从而诱导出一个良定义同态

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}).$$

这是等价的　　变的经典边界映射在 K-理论六项正合列中的等变类比　　.

证明。 根据命题 36(i)，在 K_1(*Q*(*H*)) 中具有相同类的算子（即其在 Calkin 代数中的像是同伦酉元）给出相同的等变 K^1-类。因此，该映射下降到 K_1(*Q*(*H*))。同态性质源于 Kasparov积的加法结构，下一节将对此作进一步阐述。 □

定理6 （同伦不变性与良定义性）。 等变 K^1类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$(*G*$^{(0)}_\mathcal{A}$)满足：

1. 同伦不变性： 若 $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 *Fredholm* 算子范数连续族，则 $[T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 独立于 t。

2. 紧扰动不变性：若 $K \in \mathcal{K}(H)$ 是紧的，则 $[T+K]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = [T]^{(}$ $^{1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$.

3. 可加性：*For* 直和， $[T_1 \oplus T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = [T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} + [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$，其中 $T_1 \oplus T_2$ 被视为 $M_2(\mathcal{A})$ 中作用于 $H \oplus H$的算子，且该等式在$K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})$ 中于 *Morita* 等价$K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \cong K^1_{\mathcal{G}_{M_2(\mathcal{A})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{M_2(\mathcal{A})})$下成立。

4. 稳定性： $[T \oplus I_n]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$，其中 I_n 是 $M_n(\mathcal{A})$中的恒等算子。

证明。 性质 (1) 与 (2) 已分别在命题 35 与推论 16 中确立。

For (3)，注意到 $T_1 \oplus T_2$ 的 Kasparov 三元组是 T_1 与 T_2的三元组的直和， ˜ ˜作用于 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$。在 KK-理论中，循环的直和对应于类的加法。为将所得的类等同于 $K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})$中的一个元素，我们援引 Morita不变性：存在典范同构$K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \cong K^1_{\mathcal{G}_{M_2(\mathcal{A})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{M_2(\mathcal{A})})$，它将 $M_2(\mathcal{A})$中 $T_1 \oplus T_2$ 的类与和 $[T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} + [T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$等同。

For (4)，注意 I_n 是可逆的，因此其相位就是 I_n 本身。因此，与 $T \oplus I_n$ 相关联的 Kasparov 三元组是 T 的三元组与一个退化三元组（来自 I_n）的直和。退化循环在 KK-理论中表示零，而添加一个零类并不会改变该类。因此 $[T \oplus I_n]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$。

□

这些不变性在我们于第 5 节应用下降映射以及在第 6 节证明主指标定理时将是必不可少的。它们确保类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是一个定义良好的同伦不变量，它刻画了 T 模紧扰动的本质信息。

备注 44 （与弗雷德霍姆指标的关系）。 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 的同伦不变性与弗雷德霍姆指标的同伦不变性是一致的。事实上，该复合

$$\mathrm{Fred}(\mathcal{A}) \xrightarrow{[\cdot]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\iota^*} K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}$$

将在第 *6* 节中被证明可恢复该指标（对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$）或其推广（对于 $\mathcal{A} = B(H)$）。指标的同伦不变性直接由该复合中每个映射的同伦不变性得出。

5 下降至 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$

5.1 Kasparov 对奇类的下降： $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \to KK^1$

下降映射是等变 KK-理论中的一项基本构造，它将群胚 $\mathcal{G}$ 上的等变循环转化为交叉积或群胚 C*-代数上的循环。对于局部紧豪斯多夫群胚，Kasparov [1988] 发展了这一映射，它在 Baum-Connes 猜想中发挥着核心作用。Tu [1999] 将 Kasparov 的下降映射扩展到配备博雷尔哈尔系统的波兰群胚情形，这正是酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$所需的框架。

在本小节中，我们回顾奇数 KK-类的下降映射的定义和主要性质，并重点讨论与本文相关的特定情形:

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})).$$

定义 23（具有博雷尔哈尔系统的群胚的 Kasparov 下降映射）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个配备了博雷尔哈尔系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$ 及相容博雷尔结构的群胚（按照 *[19, 定义 2.1]*的含义，它是一个标准 *Borel* 群胚）。依照 *[23, 章 4]* 中的构造（群情形亦见 *[22]* ），存在一个同态

$$j_{\mathcal{G}} : KK_{\mathcal{G}}(A,B) \longrightarrow KK(A \rtimes_{\max} \mathcal{G}, B \rtimes_{\max} \mathcal{G}),$$

其中 A 和 B 是带有博雷尔 $\mathcal{G}$-作用的 $\mathcal{G}$-C^*-代数，而 $\rtimes_{\max}$ 表示由 $\mathcal{G}$得到的最大交叉积。

该构造仅要求 $\mathcal{G}$ 上的博雷尔结构以及博雷尔哈尔系统的存在；它不依赖于局部紧性。该映射具有自然性和函子性，并且与 *Kasparov* 乘积相容。关于该映射在群胚的 *Baum-Connes* 猜想背景下的应用，参见 *[19, 第 2]*节。

注释 45. 虽然我们按照 *[19],* 的术语将 $\mathcal{G}$ 称为"波兰群胚"，但下降映射的基本要求是博雷尔结构以及博雷尔哈尔系统的存在。在我们的设定中， $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是一个配备了此类系统的标准 *Borel* 群胚，正如论文 *I* 中所确立的。

就本文而言，我们只需要考虑 $A = C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$（带有平凡的 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-作用）以及 $B = \mathbb{C}$ （带有平凡作用）的情形。在这种情况下，我们得到一个作用于奇 KK-理论的映射：

$$j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(C^*_{\max}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}) \cong K_1(C^*_{\max}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

命题 37（奇类下降映射的性质）。 奇类的下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 满足以下性质：

1. 自然性：若 $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 是与博雷尔哈尔系统相容的连续群胚同态，则下图

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}}} & KK^1(C^*(\mathcal{G}), \mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*} \\ KK^1_{\mathcal{H}}(C_0(\mathcal{H}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{H}}} & KK^1(C^*(\mathcal{H}), \mathbb{C}) \end{array}$$

交换。

2. 与悬挂的相容性：对于任意 $n \geq 0$，下图

$$\begin{array}{ccc} KK^{n+1}_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)} \times \mathbb{R}^n), \mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{G}}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{G}}} \\ K_{n+1}(C^*(\mathcal{G})) & \xrightarrow{\cong} & K_1(C^*(\mathcal{G})) \end{array}$$

交换 ，其中水平同构是 KK-理论中的悬挂同构 .

3. 可加性： $j_{\mathcal{G}}(x \oplus y) = j_{\mathcal{G}}(x) \oplus j_{\mathcal{G}}(y)$.

4. 稳定性： $j_{\mathcal{G}}$ 与紧算子的稳定化可交换。

证明。 群胚下降映射 $j_{\mathcal{G}}$ 的详细构造及其性质（自然性、与悬挂的相容性、可加性和稳定性）的验证，见 [23, 第 4]章。具体而言，第 4 章构造了一个同态，将等变 KK-理论与交叉积的 KK-理论联系起来，并确立了其函子性质。关于群情形下的原始构造，参见 [22]。关于群胚 Baum-Connes 猜想背景下的概述，参见 [19, 第 2]节。 □

下面的定理借助博雷尔哈尔系统，对下降映射给出了具体描述。

定理 7（下降映射的显式公式）。设 $(\mathcal{E}, \phi, F)$ 是一个奇的 $\mathcal{G}$-等变 *Kasparov* 三元组，代表 $KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \ \mathbb{C})$ 中的一个类。这里，$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$ 是单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上的 *Hilbert* 空间连续场，并配备了群胚 $\mathcal{G}$ 的连续作用。映射 $\phi : C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 是无穷远处消失的连续函数通过乘法算子给出的表示，而 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ 是一个 $\mathcal{G}$-等变的奇自伴算子，使得对于所有 $f \in C_0(\mathcal{G}^{(0)})$，$F^2-1$ 和 $[\phi(f)\ F]$ 都是紧的。

那么，下降类

$$j_{\mathcal{G}}([\mathcal{E}, \phi, F]) \in KK^1(C^*(\mathcal{G}), \mathbb{C})$$

由 *Kasparov* 三元组 $(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}, \phi \rtimes \mathcal{G}, F \rtimes \mathcal{G})$ 表示，其中：

- $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 是 *Hilbert* $C^*(\mathcal{G})$-模，它由沿源映射 $s : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ 拉回的丛 $s^*\mathcal{E}$ 的紧支撑连续截面空间 $\Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ 完备化而得。该完备化取相对于使用 *Haar* 系统$\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}}$定义的 $C^*(\mathcal{G})$-值内积进行：

  $$\langle \xi, \eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})}(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} \langle \xi(\gamma'), \eta(\gamma'\gamma)\rangle_{\mathcal{E}_{r(\gamma')}}\, d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma'),$$

  对于 $\xi, \eta \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$ 以及 $\gamma \in \mathcal{G}$。

- $\phi \rtimes \mathcal{G}$: $C^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{L}(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G})$ 是由卷积给出的诱导表示。对于 $f \in C_c(\mathcal{G})$ 和$\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$，其作用定义如下：

  $$((\phi \rtimes \mathcal{G})(f)\xi)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}} f(\eta)\, \phi(\eta)\xi(\eta^{-1}\gamma)\, d\lambda^{r(\gamma)}(\eta),$$

  并通过连续性扩展到所有 $C^*(\mathcal{G})$ 。

- $F \rtimes \mathcal{G}$ 是通过扩展 F的纤维逐点作用得到的作用于 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 上的可伴随算子。对于截面 $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, s^*\mathcal{E})$，其逐点定义如下：

  $$((F \rtimes \mathcal{G})\xi)(\gamma) = F_{s(\gamma)}(\xi(\gamma)),$$

  其中，$F_{s(\gamma)}$ 表示 F 在纤维 $\mathcal{E}_{s(\gamma)}$上的作用。F 的 $\mathcal{G}$-等变性确保该算子是可伴随的，并满足 *Kasparov* 三元组所需的条件。

此外，对于与 $B(H)$相关联的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 这一特定情形，下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}} : KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

是一个同构。这可由 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 的可和性以及可和群胚的 *Baum-Connes* 组装映射是同构这一事实推出（参见 *[19,* 第 *9]* 节）。

证明。 我们分几个步骤证明该定理，并验证 $(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}, \phi \rtimes \mathcal{G}, F \rtimes \mathcal{G})$ 确实定义了 $(C^*(\mathcal{G})\ \mathbb{C})$ 的一个奇 Kasparov 三元组。

步骤 1： $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ **是一个希尔伯特** $C^*(\mathcal{G})$**-模。** 首先，我们证明陈述中定义的 $C^*(\mathcal{G})$-值内积定义良好并满足所需性质。对于 $\xi,\ \eta \in \Gamma_c(\mathcal{G},\ s^*\mathcal{E})$，定义

$$\langle \xi, \eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})}(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} \langle \xi(\gamma'), \eta(\gamma'\gamma)\rangle_{\mathcal{E}_{r(\gamma')}}\, d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma'),$$

其中 $\mathcal{G}^x = s^{-1}(x)$ 是源映射的纤维。该积分收敛，因为 ξ 和 η 具有紧支撑，且 Haar 系统 $\{\lambda^x\}$ 是连续的。可以验证，$\langle \xi,\eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})}$ 属于 $C_c(\mathcal{G}) \subseteq C^*(\mathcal{G})$，并且满足：

- $\langle \xi,\ \eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})}^{*} = \langle \eta,\ \xi\rangle_{C^*(\mathcal{G})}$;
- $\langle \xi,\ \xi\rangle_{C^*(\mathcal{G})} \geq 0$ 属于 $C^*(\mathcal{G})$，等号成立当且仅当 $\xi = 0$;
- $\langle \xi,\ \eta\cdot a\rangle_{C^*(\mathcal{G})} = \langle \xi,\ \eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})} a$ 对于 $a \in C^*(\mathcal{G})$，其中右模结构由卷积给出。

将 $\Gamma_c(\mathcal{G},\ s$完备化 $^*\mathcal{E})$ 关于范数 $\|\xi\| = \|\langle \xi,\ \xi\rangle\|^{1/2}$ 完备化后，得到希尔伯特 $C^*(\mathcal{G})$-模 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$.

步骤 2： $\phi \rtimes \mathcal{G}$ **是一个** $*$**-同态**。对于 $f \in C_c(\mathcal{G})$ 和 $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G},\ s^*\mathcal{E})$，定义

$$((\phi \rtimes \mathcal{G})(f)\xi)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}} f(\eta)\, \phi(\eta)\xi(\eta^{-1}\gamma)\, d\lambda^{r(\gamma)}(\eta).$$

此公式使用了 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{E}$ 上的作用：对于 $\eta \in \mathcal{G}$，其源为 $s(\eta)$，靶为 $r(\eta)$，$\phi(\eta)$ 是在纤维上实现该作用的酉元，将 $\mathcal{E}_{s(\eta)}$ 映射到 $\mathcal{E}_{r(\eta)}$。积分收敛，因为 f 具有紧支撑，且 ξ 具有紧支撑。可以验证：

- $(\phi \rtimes \mathcal{G})(f)$ 将 $\Gamma_c(\mathcal{G},\ s^*\mathcal{E})$ 映射到其自身;
- $(\phi \rtimes \mathcal{G})(f)$ 可扩张为 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 上的可伴随算子;
- 映射 $f \mapsto (\phi \rtimes \mathcal{G})(f)$ 是从 $C_c(\mathcal{G})$（带有卷积乘积和对合）到 $\mathcal{L}(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G})$ 的 $*$-同态，并可通过连续性扩张到 $C^*(\mathcal{G})$。

验证利用了 ϕ 的 $\mathcal{G}$-等变性以及 Haar 系统的性质。

步骤 3： $F \rtimes \mathcal{G}$ **是一个可伴随算子**。对于 $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G},\ s^*\mathcal{E})$，定义 $(F \rtimes \mathcal{G})\xi$ 逐点如下

$$((F \rtimes \mathcal{G})\xi)(\gamma) = F_{s(\gamma)}(\xi(\gamma)),$$

其中 $F_{s(\gamma)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_{s(\gamma)})$ 是纤维算子。由于 F 是 $\mathcal{G}$-等变且连续的，$(F \rtimes \mathcal{G})\xi$ 仍是一个具有紧支撑的连续截面。此外，$F \rtimes \mathcal{G}$ 是可伴随的，其伴随由 $(F \rtimes \mathcal{G})^* = F^* \rtimes \mathcal{G}$ 给出，因为对于 $\xi,\ \eta \in \Gamma_c(\mathcal{G},\ s^*\mathcal{E})$,

$$\langle (F \rtimes \mathcal{G})\xi, \eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})} = \langle \xi, (F^* \rtimes \mathcal{G})\eta\rangle_{C^*(\mathcal{G})},$$

这由逐纤维伴随性质以及内积的定义得出。

第4步：Kasparov 条件的验证。 我们现在验证 $(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}, \phi \rtimes \mathcal{G}, F \rtimes \mathcal{G})$ 满足奇 Kasparov 三元组的条件：

1. **模紧算子的自伴性：** 由于 F 模紧算子自伴，对每个 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，$F_x - F_x^* \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_x)$。逐纤维紧算子组装成 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 的一个紧端同态（见引理 7），因此 $F \rtimes \mathcal{G} - (F \rtimes \mathcal{G})^* \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G})$。

2. $(F \rtimes \mathcal{G})^2 - 1$ **是紧的：** 由 $F^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$，对每个 x，我们有 $(F_x)^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_x)$。同样，根据引理 7，这些逐纤维紧算子给出 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 的一个紧端同态，因此 $(F \rtimes \mathcal{G})^2 - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G})$。

3. **与** $\phi \rtimes \mathcal{G}$ **的交换子是紧的：** 对于任意 $f \in C^*(\mathcal{G})$，我们需要证明 $[(\phi \rtimes \mathcal{G})(f)\ F \rtimes \mathcal{G}] \in \mathcal{K}(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G})$。这是由 F 的 $\mathcal{G}$-等变性以及 $[\phi(f)\ F]$ 在原三元组中是紧的这一事实得出的。通过卷积公式进行详细计算可知，该交换子是一个核为紧核的积分算子，因此是紧的。

4. **次数条件：** 由于 F 是奇的（相对于 $\mathcal{E}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$-分次），因此 $F \rtimes \mathcal{G}$ 相对于 $\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}$ 上诱导的分次也是奇的。

因此，$(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G},\ \phi \rtimes \mathcal{G},\ F \rtimes \mathcal{G})$ 确实是 $(C^*(\mathcal{G})\ \mathbb{C})$ 的奇 Kasparov 三元组，表示$KK^1(C^*(\mathcal{G})\ \mathbb{C})$中的一个类。

步骤 5：良定义性与函子性。映射 $(\mathcal{E},\ \phi,\ F) \mapsto (\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G},\ \phi \rtimes \mathcal{G},\ F \rtimes \mathcal{G})$ 与以下性质相容：

- **酉等价：** 如果两个三元组酉等价，那么它们下降后的三元组也酉等价。
- **算子同伦：** 三元组的一个同伦会诱导出下降后的三元组的一个同伦。
- **紧扰动：** F的紧扰动会产生 $F \rtimes \mathcal{G}$的紧扰动。

因此，该映射 $j_{\mathcal{G}}$ 在 KK-理论上诱导出一个良定义同态。

步骤 6：以下对象的同构性质 $\mathcal{G}_{B(H)}$。对于酉共轭群胚的特定情形$\mathcal{G}_{B(H)}$，我们证明 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是一个同构。回顾命题 8，$\mathcal{G}_{B(H)} = \mathcal{U}(H) \ltimes \mathbb{P}(H)$ 是一个可和群胚（即一个可和群作用于某个空间所得到的变换群胚）。根据 Tu 关于群胚的 Baum-Connes 猜想的工作 [19,Th´eor`eme 9.3],组装映射

$$\mu : K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}_{B(H)}) \longrightarrow K_*(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

对于可和群胚是一个同构。此外，存在一个自然的识别

$$K_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}_{B(H)}) \cong KK^*_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C})$$

（见 [19, 第 3] 节）。下降映射 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 恰好是此识别与组装映射的复合，因此是一个同构。

因此，对于任意类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_B(H))\ \mathbb{C})$，其下降像 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 是 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ 中一个定义良好的元素，并且该映射是双射。

步骤 7：与第 4 节中的构造相容。对于第 4 节中由 Fredholm 算子 T 构造的特定奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi \oplus \sim \quad \sim \quad \sim\phi,\ F)$，下降后的三元组 $(\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G},\ (\phi \oplus \phi) \rtimes \mathcal{G},\ F \rtimes \mathcal{G})$ 恰好表示类 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}})$。这是由下降映射的函子性以及类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}}$ 的定义得出的。

因此，该定理给出了下降映射的显式构造，并确立了它的关键性质，包括对 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 的同构性质。 □

~ ~对于我们的特定情形，构造于第 4.2 小节的奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi \oplus \phi,\ F)$ 有一个显式描述。

推论 19 (类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 的下降**)**。设 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C})$ 是 ***Fredholm*** 算子 $T \in \mathcal{A}$ 的类。那么，它在下降映射下的像为

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) := j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

具体而言，若我们用奇 ***Kasparov*** 三元组 $(\tilde{\mathcal{E}}, \phi \oplus \phi, \tilde{F})$ 表示 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$，则

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = [(\tilde{\mathcal{E}} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}, (\phi \oplus \phi) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \tilde{F} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}})] \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

证明。 该推论直接由定理 7 得出。根据假设，$KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})\ \mathbb{C})\tilde{}$ $\tilde{}$ 中的类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 由奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E}, \phi \oplus \phi, F)$ 表示。

将下降映射 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 应用于此三元组，定理 7 断言， $KK^1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$ 中的下降类由下式表示

$$(\tilde{\mathcal{E}} \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}, (\phi \oplus \phi) \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}, \tilde{F} \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}),$$

其中，交叉积模和算子按照定理中的方式显式构造：

- $\tilde{\mathcal{E}} \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是一个希尔伯特 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$-模，它通过完备化拉回丛 $s^*\mathcal{E}$ 的紧支撑$\tilde{}$连续截面空间得到，并采用由 Haar 系统定义的 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$-值内积；

- $(\phi \oplus \phi) \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是通过卷积作用于截面上的诱导表示；

- $\tilde{F} \rtimes \mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是将 F 在截面上的纤维逐点作用延拓得到的可伴随算子$\tilde{}$.

最后，当第二个参数为 $\mathbb{C}$时，我们使用 KK-理论与 K-理论之间的典范同构。对于任意 C^*-代数 A，存在一个自然同构

$$KK^1(A, \mathbb{C}) \cong K_1(A).$$

将此应用于 $A = C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$，即可将下降后的 KK^1-类与 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 中的一个元素对应起来。根据定义，这个元素恰好是 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$，证明至此完成。 □

下降映射对于对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 具有优良的函子性。

引理 11 (下降关于对角嵌入的函子性)。 设 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$为论文 I 中的对角嵌入。考虑将单位空间视为对角算子（或视为单位化中的标量）的包含映射 $\mu : C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ 。则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_*} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_*} \\ KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \end{array}$$

其中：

- μ_* 表示由第一变量中的 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变包含映射 μ 在 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变 KK理论上诱导的映射；

- ι_* 表示由对角嵌入 ι 在 K_1 上诱导的映射（逐项扩展至矩阵代数）；

- $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 表示等变 KK理论中的下降映射。

证明。 这直接源于下降映射对于 $\mathcal{G}$-C^*代数之间等变 $*$同态的自然性。 μ 和 ι 都是 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变的，并且下降映射 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 关于第一个自变量具有函子性。因此，对于任意类 $x \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_\mathcal{A}^{(0)})\ \mathbb{C})$，我们有

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mu_*(x)) = \iota_*(j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(x)) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})),$$

这正是该图表的交换性。 □

注释 46. 注意这两个映射各自不同的作用：

- μ_* 将一个类从单位空间提升到等变 KK-理论中的代数 $\mathcal{A}$；
- ι_* 通过对角嵌入，将一个 K_1-类从群胚 C^*-代数推送回 $K_1(\mathcal{A})$ 。

这一函子性性质对于将下降类与指标联系起来至关重要，正如引理 *12* 将要说明的那样。

定理 8 ($\mathcal{G}_\mathcal{A}$的下降映射性质**)**。令 $\mathcal{A}$ 为 $B(H)$ 或 $\mathcal{K}(H)^\sim$，并令 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 为酉共轭群胚。则下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$$

满足以下性质：

1. 群同态：$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是一个群同态，保持等变KK-理论中的加法。

2. 自然性： $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 关于系数代数的 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变 $*$-同态具有自然性。更确切地说，若 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变 $*$-同态，并诱导出一个连续群胚同态，则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \end{array}$$

3. 悬挂相容性： $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 与悬挂同构相容。对于任意类 $x \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$，有

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(Sx) = S(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(x)),$$

其中 S 分别表示 KK-理论和 K-理论中的悬挂同构 *ly.*

4. ***Fredholm*** 算子的不变性： 与 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$ 相关联的类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0($ $\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})\ \mathbb{C})$，其下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$ 仅取决于 T 的 KK-理论类。因此，它在以下变换下保持不变：

- T 的同伦；
- T的紧扰动；
- T的酉共轭。

证明。 我们依次证明每个性质。

1. 性质 (1) 由下降映射 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 在等变 KK-类上的可加性得出。Kasparov 三元组的直和下降为下降后的三元组的直和，且下降映射保持这一结构。

2. 性质 (2) 由引理 11 中建立的下降映射的函子性得出。φ 的等变性确保它在交叉积模上诱导出一个良定义的映射，且下降映射使 KK-理论与 K-理论上的诱导映射相互缠结。

3. 性质 (3) 源于下降映射与等变 KK-理论中悬挂同构的相容性。这是一个标准结果：悬挂与群胚交叉积以及从 KK^1 到 K_1的转换均可交换。

4. 性质 (4) 源于 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 作为 KK-理论类的定义，以及 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是 KK-理论上的良定义映射这一事实。T 的同伦会导出相应 Kasparov 三元组的同伦，而这些同伦在下降下保持不变。对 T 作紧扰动会得到算子同伦的 Kasparov 三元组，因此定义相同的 KK-类。对 T 作酉共轭对应于 Kasparov 三元组的等变酉等价，这也保持 KK-类不变。由于 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是 KK-理论上的同态，它尊重所有这些等价关系。

□

以下 引理记录了下降映射与对角嵌入的相容性 ι.

引理12（下降与对角嵌入）。设 $\mathcal{A}$ 为一个含幺可分 I 型 C^*-代数，且设ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 为来自论文 I 的对角嵌入。记 $[\iota] \in KK(\mathcal{A}、C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 为相应的 *Kasparov* 模。

设 μ： $C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ 为将单位空间包含为对角算子（或单位化中的标量）的自然包含映射。这诱导出一个映射

$$\mu_* : KK(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK(\mathcal{A}, \mathbb{C})$$

该映射由在 KK-理论的第一变量中与 μ 复合给出。

那么，对于任意 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变 KK-理论类 $x \in KK_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \ \mathbb{C})$，以下恒等式在 $KK(\mathcal{A}、\mathbb{C})$ 中成立：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(x) = \mu_*(\mathrm{For}(x)),$$

其中：

- 下降$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$： $KK_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_{(0)\ \mathcal{A}}) \ \mathbb{C}) \longrightarrow KK(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \ \mathbb{C})$ 是等变 KK-理论中的下降映射；
- For： $KK_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}) \ \mathbb{C}) \longrightarrow KK(C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}) \ \mathbb{C})$ 是从等变到通常KK-理论的遗忘映射；
- $\otimes_{C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})}$ 表示在 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$上的内部*Kasparov*积。

证明。我们通过仔细追踪相关 KK-理论构造中的映射来建立该恒等算子。

步骤 1：下降的自然性。下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 关于第一自变量中的等变 $*$-同态是自然的。对于包含映射 μ：$C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{A}$，这给出了如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} KK_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & KK(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_*} \\ KK_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & KK(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \end{array}$$

其中，垂直映射由第一变量中与 μ 复合诱导。因此，对于任意$x \in KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \mathbb{C})$，我们有

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mu_*(x)) = \mu_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(x)) \in KK(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}).$$

步骤 2：作为下降映射逆映射的对角嵌入。 对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的一个基本性质是，在应用遗忘函子后，它为下降映射提供了一个左逆。更确切地说，对于任意 $y \in KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$，以下恒等式成立：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(y) = \mathrm{For}_{\mathcal{A}}(y) \in KK(\mathcal{A}, \mathbb{C}),$$

其中 $\mathrm{For}_{\mathcal{A}}\colon KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \to KK(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ 是从等变 KK-理论到普通 KK-理论的遗忘映射。这由 ι 通过直积分表示的构造，以及在第 4.5-4.6] 节中建立的下降映射的性质得到。

步骤 3：结合各个步骤。 现在取 $x \in KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \mathbb{C})$，并令 $y = \mu_*(x) \in KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$。对 y 应用步骤 2，得到：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mu_*(x)) = \mathrm{For}_{\mathcal{A}}(\mu_*(x)).$$

利用步骤 1 将 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mu_*(x))$ 替换为 $\mu_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(x))$，我们得到：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mu_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(x)) = \mathrm{For}_{\mathcal{A}}(\mu_*(x)).$$

左侧可以化简，因为与 $[\iota]$ 的 Kasparov 积可与由 μ 诱导的映射交换（这是 Kasparov 积的函子性所致）。因此：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(x) = \mu_*(\mathrm{For}_{C_0(\mathcal{G}^{(0)})}(x)),$$

其中，$\mathrm{For}_{C_0(\mathcal{G}^{(0)})}$ 表示从 $KK_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \mathbb{C})$ 到 $KK(C_0(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)}) \mathbb{C})$ 的遗忘映射。这正是所需的恒等式。 □

注释 47. 这个引理对指标定理至关重要。它表明，与对角嵌入 $[\iota]$ 作 *Kasparov* 积，提供了从 $KK(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \mathbb{C})$ 中的下降类返回到 $KK(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ 中的一个类的正确方法，随后可通过同构 $KK(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong K_0(\mathcal{A})$ 将其映射到 $K_0(\mathcal{A})$。值得注意的是，这避免了在 K-理论上使用拉回映射 ι^* 的需要，因为该映射并未良好定义。

命题 38 (下降类对应于符号**)。** 在 *Morita* 等价 $\Phi\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$下，对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 对应于符号类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。

证明。 设 $T \in B(H)$ 是一个 Fredholm 算子，并令

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in K_1^{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})$$

表示其等变 K-同调类，如定义 22 中所构造。根据推论 15，该类可由简化的奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi,\ \mathrm{ph}(T))$ 表示，其中 $\mathrm{ph}(T)$ 是 T 的相位，而 $\mathrm{ph}(T)$ 与 T 相差一个紧算子。

步骤 1：下降到群胚 C^*-代数。

根据定理 7，群胚的下降同态，

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}} : K_1^{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}_{B(H)}^{(0)}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})),$$

将由 T 确定的等变 Fredholm 循环的类映射为其积分形式在群胚 C^*-代数中的 K_1-类。具体而言，这意味着

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = [\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}, \phi \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}, \mathrm{ph}(T) \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}] \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})),$$

而右　　边是由定理 7 中下降后的 Kasparov 三元组所表示的类。

步骤 2：Morita 等价识别。

根据命题 25，存在一个强 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}_{B(H)}^{(0)})),$$

它诱导出一个自然同构

$$\Phi : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中，最后一个同构利用了 K-理论的稳定性：与紧算子 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}_B^{(0)}{}_{(H)}))$作张量积不会改变 K-群。

步骤 3：代表元的识别。

关键观察是，Morita 等价 Φ 是通过限制到一个各向同性群来实现的。选取一个基点 $x_0 \in \mathcal{G}_B^{(0)}{}_{(H)}$（例如 $x_0 = [e_0] \in \mathbb{P}(H)$）。在 x_0 处求值可得到一个 $*$-同态

$$\mathrm{ev}_{x_0} : C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \longrightarrow C^*(\mathcal{G}_{B(H)|_{x_0}}),$$

其中$\mathcal{G}_{B(H)|_{x_0}}$ 是 x_0处的各向同性群。正如命题 25 的证明所示，$C^*(\mathcal{G}_{B(H)|_{x_0}})$与 $\mathcal{Q}(H)$Morita 等价。

将 ev_{x_0}作用于下降后的三元组（$\mathcal{E} \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}$，$\phi \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}$，$\mathrm{ph}(T) \rtimes \mathcal{G}_{B(H)}$），可将其限制到各向同性群。利用定理 7 中的显式公式进行直接计算可知，该限制给出了一个 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)|_{x_0}})$的 Kasparov 三元组，由作用在纤维$\mathcal{E}_{x_0}$上的算子 $\mathrm{ph}(T)$表示。

在命题 10 给出的典范识别下，$\mathrm{ph}(T)$ 在此纤维上的作用恰好就是算子 $\mathrm{ph}(T)$ 本身。它在 Calkin 代数中的像为 $\pi_{\mathcal{Q}}(\mathrm{ph}(T)) = \pi_{\mathcal{Q}}(T)$，因为 $\mathrm{ph}(T)$ 与 T 之差是一个紧算子。因此，由此限制得到的 K_1类恰好是$[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$。

第4步：结论。

沿着图表追踪元素 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$

$$\begin{array}{ccccc} K_1^{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}_{B(H)}^{(0)}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) & \xrightarrow{\Phi} & K_1(\mathcal{Q}(H)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & \| \\ K_1^{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}_{B(H)}^{(0)}) & \longrightarrow & & & K_1(\mathcal{Q}(H)) \end{array}$$

其中，底部的水平映射通过限制到各向同性群，将 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 映射为 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$，由此得到

$$\Phi\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\Big) = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

因此，在 Morita 等价 Φ下，下降类恰好对应于符号类。至此，证明完成。

□

在下一小节中　接下来，我们将对类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$应用下降映射，并研究其在 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中的像　.

5.2 应用下降： $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$

在第 5.1 节建立奇类的下降映射后，我们现在将其应用于第 4 节中构造的等变K^1-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$。结果是群胚C*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 的 K_1-群中的一个类，这将是指标定理中的关键中间步骤。

回顾第4.3小节，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 由奇 Kasparov 三元组 $(\tilde{\mathcal{E}},\ \phi\oplus\phi,\ \tilde{F})$ 表示，其中：

- $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\oplus\mathcal{E}$, with $\mathcal{E} = \int^{\oplus}_{\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}} H_x\, d\mu(x)$.
- $\phi\oplus\phi : C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ is the diagonal representation.
- $\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{ph}(T)^* \\ \mathrm{ph}(T) & 0 \end{pmatrix}$, where $\mathrm{ph}(T)$ is the phase of T acting pointwise on $\mathcal{E}$.

定义 24（Fredholm 算子的下降类）。 设 $T \in \mathcal{A}$ 是一个 *Fredholm* 算子。定义其下降类 为

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) := j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})),$$

其中 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是第 *5.1* 节中的下降映射。

利用下降映射的显式公式（定理 7），我们可以对这个类作出更具体的描述。

命题 39（下降类的显式形式）。 下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$ 由 *Kasparov* 三元组表示

$$(\tilde{\mathcal{E}} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}, (\phi\oplus\phi) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}, \tilde{F} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \in KK^1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})),$$

其中各个分支定义如下：

• 模： $\tilde{\mathcal{E}} \rtimes \tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{A}}$ 是通过对空间 $\Gamma_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, s^*\mathcal{E})$ 完备化得到的希尔伯特 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$-模，该空间由沿源映射 $s:\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}}$ 的拉回丛 $s^*\mathcal{E}$ 上的紧支撑连续截面组成。完备化是相对于使用 *Haar* 系统 $\{\lambda^x\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}\,\mathcal{A}}$ 定义的 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$-值内积进行的，如定理 7 所述。

• 表示： $(\phi\oplus\phi)\rtimes\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 在 $\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$上的诱导表示，通过对截面进行卷积给出。对于 $f \in C_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 和 $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, s^*\mathcal{E})$，其作用定义为

$$((\phi\oplus\phi)\rtimes\mathcal{G}_{\mathcal{A}})(f)\xi(\gamma) = \int_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} f(\eta)\,(\phi\oplus\phi)(\eta)\xi(\eta^{-1}\gamma)\, d\lambda^{r(\gamma)}(\eta),$$

并通过连续性将其扩展到整个 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。

• 算子： $F \rtimes \tilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{A}}$ 是通过扩展 F 的纤维逐点作用而得到的作用于 $\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上的可伴随算子。对于截面 $\xi \in \Gamma_c(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}, s^*\mathcal{E})$，它逐点定义为

$$((\tilde{F}\rtimes\mathcal{G}_{\mathcal{A}})\xi)(\gamma) = \tilde{F}_{s(\gamma)}(\xi(\gamma)),$$

其中， $F_{s(\gamma)}$ 表示 F 在纤维 $\mathcal{E}_{s(\gamma)}$上的作用。 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$-等变性保证了 F 是可伴随的，并满足 *Kasparov* 三元组所要求的条件。

~ ~证明。这直接由定理 7 应用于表示类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 的奇 Kasparov 三元组（$\mathcal{E}$， $\phi\oplus\phi$， F）得到。该定理明确构造了下降后的三元组，并验证每个分支都具备所需的性质。同构 $KK^1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})\ \mathbb{C}) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 将该下降后三元组的类与 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 中的一个元素对应起来；根据定义 24，这正是 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$。 □

为便于计算，通常使用推论 15 中的简化代表元 $(\mathcal{E}, \phi, \mathrm{ph}(T))$。下降映射也将这个简化循环映到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 中的一个类。

推论 20 (简化的下降类)。设$(\mathcal{E}、\ \phi、\ \mathrm{ph}(T))$ 是推论 *15* 中表示 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 的简化奇 *Kasparov* 三元组，其中$\mathrm{ph}(T)$ 是 *Fredholm* 算子 T 的相位，它逐点作用于 $\mathcal{E}$，并满足奇 *Kasparov* 三元组的条件（自伴性、$\mathrm{ph}(T)^2-1$ 紧的、 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$-等变性，以及与 ϕ 模紧算子的意义下交换）。

那么，下降类$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$ 也由以下奇 *Kasparov* 三元组表示：

$$(\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \phi\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \mathrm{ph}(T)\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})),$$

其中， $\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是希尔伯特 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$-模，它由 $\Gamma_c(\mathcal{G}_\mathcal{A}, s^*\mathcal{E})$ 关于$C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$-值内积完备化得到；$\phi\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是通过卷积得到的诱导表示，而$\mathrm{ph}(T)\ \rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 在截面上逐纤维作用。此三元组与命题 *39* 中通过倍增构造得到的三元组表示相同的 K_1-类。

证明。令 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$由简化的奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E}, \phi, \mathrm{ph}(T))$ 表示，如推论 15 所示。根据 ~ ~构造，该三元组与原三元组 $(\mathcal{E}, \phi\oplus\phi, F)$ KK-等价，即

$$[(\mathcal{E},\phi,\mathrm{ph}(T))] = [(\tilde{\mathcal{E}},\phi\oplus\phi,\tilde{F})] = [T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}),\mathbb{C}).$$

根据定理 7，下降映射 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 将该三元组映射为 Kasparov 三元组

$$(\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \phi\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \mathrm{ph}(T)\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}) \in KK^1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}),\mathbb{C}).$$

已知相位构造 $\mathrm{ph}(T)$ 在通常的奇 KK-理论中产生一个与倍增构造~ ~$(\mathcal{E}, \phi\oplus\phi, F)$ KK-等价的类。这是 Kasparov 理论中的标准结果：对于任意 Fredholm 算子，使用其相位得到的三元组与通过倍增构造得到的三元组算子同伦，因此它们表示同一个 KK-类。

由于下降映射 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是等变 KK-理论上的函子性同态，因此它保持KK-等价。因此，使用相位算子的下降三元组与由倍增构造得到的下降三元组，在$K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 中表示同一个类。

因此，

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) = [(\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \phi\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \mathrm{ph}(T)\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A})] \in K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})),$$

并且这个 类与通过倍增构造得到的类是 KK-等价的，正如所声称的 . □

注48 (图表概要)。 简化代表元与倍增代表元之间的关系，以及它们在下降映射下的像，可由以下交换图表示：

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{E},\phi,\mathrm{ph}(T)) & \xrightarrow{\quad KK\text{-}equivalent\quad} & (\tilde{\mathcal{E}},\phi\oplus\phi,\tilde{F}) \\
\downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} \\
(\mathcal{E}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \phi\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \mathrm{ph}(T)\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}) & \xrightarrow{KK\text{-}equivalent} & (\tilde{\mathcal{E}}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, (\phi\oplus\phi)\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A}, \tilde{F}\rtimes\mathcal{G}_\mathcal{A})
\end{array}$$

竖直态射是下降映射，水平态射表示 KK-等价。图表的交换性表达了下降保持 KK-等价这一事实，因此，两个下降后的三元组在 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$中表示同一个类。

下降类继承了原等变类的不变性。

命题40（下降类的性质）。赋值 $T \mapsto \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$ 满足以下性质：

1. 同伦不变性：若 $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$ 是 *Fredholm* 算子的范数连续族，则 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$ 在 t中为常数。*2.* 紧扰动不变性：若 K 是紧的且 $T+K$ 是 *Fredholm* 算子，则 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T+K]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$。*3.* 可加性：$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T_1\oplus T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T_1]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) + \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T_2]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$。*4.* 稳定性：$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T\oplus I_n]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$。

证明。这些性质可由定理 6 中确立的等变 KK-类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 的相应性质，以及下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是群同态这一事实推出（定理 8）。

- **同伦不变性：** 由定理6，范数连续族 $\{T_t\}$ 在$KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{(0)}\,\mathcal{A})\ \mathbb{C})$中定义一个常类。由于 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是 KK-理论上的良定义映射，下降类$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T_t]_{(}$ $^{1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$ 与 t无关。

- **紧扰动不变性：** 紧扰动保持弗雷德霍姆指标，更一般地，保持等变 KK-类（见命题 33）。应用同态 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 即得下降类相等。

- **可加性：** Fredholm 算子的直和对应于相应 Kasparov 三元组的直和。下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是群同态（定理 8），因此它保持直和，从而可加性成立。

- **稳定性：** 添加恒等算子 I_n 对应于与退化Kasparov三元组取直和，该三元组在 KK-理论中表示零类。同态将零映为零，因此下降类不变。

□

命题 41 (作为生成元的单边移位**)**。设 $\mathcal{A} = B(H)$ 满足 $H = \ell^2(\mathbb{N})$，并设 $S \in B(H)$为由 $Se_n = e_{n+1}$ 对正交归一基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$定义的单边移位。则：

1. S 是 *Fredholm* 算子，其指标$(S) = -1$。*2.* 等变 KK-理论类 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)})\ \mathbb{C})$ 非零。

3. 在同构 $KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)})\ \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$下，类 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 对应于生成元。

4. 更准确地说，指标映射

$$\mathrm{ind} : KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

将 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 映射到 指标$(S) = -1$，因此 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是一个生成元（相差一个符号）。

证明。 我们依次证明每个陈述。

(1) 单边移位的指标。 单边移位 S 满足 $S^*S = I$ 和 $SS^* = I - P_0$，其中 P_0是投影到 $\mathbb{C}e_0$上的秩一投影。因此 $\ker S = \{0\}$、$\ker S^* = \mathbb{C}e_0$，并且

$$\operatorname{index}(S) = \dim\ker S - \dim\ker S^* = 0 - 1 = -1.$$

这是 Fredholm 理论中的一个标准结果（例如，参见 [13,第 9 节。4]）。

(2) 等变类非零。 回忆推论 15，类 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 可以由简化的奇 Kasparov 三元组 $(\mathcal{E},\ \phi,\ \mathrm{ph}(S))$ 表示，其中 ph(S) 是 S 的相位。由于 S 已经是等距算子，其相位就是 S 本身。

考虑遗忘映射

$$\mathrm{For} : KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \to KK^1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C})$$

该映射遗忘群胚作用。在此映射下， $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 映到族 $\{S\}$ （常值族）在 $KK^1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B\ (H)})\ \mathbb{C})$ 中的类。

现在考虑包含映射 μ： $C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B\ (H)}) \hookrightarrow B(H)$，该映射通过将函数与纤维上的乘法算子对应起来定义（见第 3.4 节）。这诱导出一个映射

$$\mu_* : KK^1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \to KK^1(B(H), \mathbb{C}).$$

利用第 4 节的显式构造进行直接计算可知， $\mu_*(\mathrm{For}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))$ 对应于符号 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的类，该对应是在同构 $KK^1(B(H)\ \mathbb{C}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$ 下成立的（见命题 34 ）。

Brown-Douglas-Fillmore 的经典结果表明， [18] 单边移位 S 的符号为 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)]$，它生成 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。因此 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)] \neq 0$，从而 $\mu_*(\mathrm{For}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) \neq 0$ 属于$KK^1(B(H)\ \mathbb{C})$。

如果 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 在 $KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B\ (H)})\ \mathbb{C})$ 中为零，那么它在遗忘映射下的像也为零，这意味着 $\mu_*(\mathrm{For}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = 0$，矛盾。因此， $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \neq 0$。

（3）-（4）生成元性质。首先，我们建立 $KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B\ (H)})\ \mathbb{C})$ 与$\mathbb{Z}$之间的同构。考虑以下映射复合：

$$KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\Phi} K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial_{\mathrm{Calkin}}} \mathbb{Z},$$

其中：

- $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B\ (H)}}$ 是定理 7 中的下降同态；
- Φ： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B\ (H)})) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是由命题 25 中建立的 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B\ (H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}$ 所诱导的同构；
- $\partial_{\mathrm{Calkin}}$： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 是 Calkin 扩张的指标映射，根据定理 4，它是一个同构。

此复合中的每个映射都是同构：

- $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是群胚 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 的同构，因为 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 是可和的，并且 Baum-Connes 组装映射对于此类群胚是同构（参见 [19, 第 9] 节）；

- Φ 根据 K-理论的 Morita不变性，这是一个同构（命题 25）；
- ∂_{Calkin} 由定理 4 可知是一个同构。

因此，我们记作 ind 的这一复合是一个同构：

$$\text{ind} : KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

现在计算 $\text{ind}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$。根据 ind 的定义以及第 (2) 部分中的识别，我们有：

$$\text{ind}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = \partial_{\text{Calkin}} \circ \Phi \circ \text{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}).$$

在 Morita 等价 Φ下，下降类 $\text{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 对应于符号类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$（见命题 38）。因此，

$$\text{ind}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = \partial_{\text{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(S)]).$$

由引理4，指标映射 ∂_{Calkin} 将 Fredholm 算子的符号的类映为其弗雷德霍姆指标。对于单边移位，这给出：

$$\partial_{\text{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(S)]) = \text{index}(S) = -1.$$

因此 $\text{ind}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = -1$。

由于指标是一个同构 $KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B}{}_{H()}) \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$，且指标$([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = -1$，类$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 必定是该循环群的一个生成元。符号取决于指标映射的定向约定，但无论如何，$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 生成该群（至多差一个符号）。至此证明完成。 □

For 所考虑的两个具体代数，下降类具有特别简单的形式。

例 15 (下降类对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$**).** 设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，并设 $T = \lambda I + K$ 为 *Fredholm* 算子（从而 $\lambda \neq 0$）。根据命题 *32*（或根据指标映射 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$ 是同构且所有此类算子的指标为零这一事实），我们有 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} = 0$ 属于 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \mathbb{C})$。因此，应用下降同态得到

$$\text{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = 0 \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

这反映了这样一个事实：$\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的所有 *Fredholm* 算子的指标均为零，因此它们相应的等变KK-类都是平凡的。

例16 ($B(H)$ - 单边移位的下降类。 设 $\mathcal{A} = B(H)$，并令 $S \in B(H)$ 为 $\ell^2(\mathbb{N})$上的单边移位。回顾命题 *41*，$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是 $KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B}{}_{(H)}) \mathbb{C}) \cong\mathbb{Z}$的生成元。

由于在此情形下，下降映射 $j_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是一个同构（或者至少保持生成元），其下降类 $\text{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 是 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong \mathbb{Z}$的生成元。

在第 *7* 节中，我们将验证，此类对应于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 在 *Morita* 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B}{}_{(H)}))$下的生成元，其中 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ 是 *Calkin* 代数。

注释 49 （两种情形的比较）。 例 *15* 和例 *16* 展示了这两个代数之间的一个根本差异：

- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，每个 *Fredholm* 算子的指标均为零，因此其等变类消失，下降类在 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 中是平凡的。
- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，单边移位 S 的指标为 -1，生成一个无限循环群。其等变类非平凡，且经下降后映至 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong \mathbb{Z}$的一个生成元；该生成元在 *Morita* 等价下对应于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$的生成元。

这种二分现象反映了这样一个事实： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 由单边移位的像生成，而$K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim})$</style}是平凡的。

下面的引理表明，对算子 $T \in B(H)$，将下降类的像通过 Morita 等价 Φ映射后，再施加 Calkin 边界映射，即可恢复其弗雷德霍姆指标。

引理 13 (通过 Calkin 边界映射恢复指标)。 对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，设 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)})$ 为其等变 K^1-类，并设

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}} : K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

为下降映射。然后，在莫里塔等价同构下

$$\Phi : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$$

根据命题 *25*，我们有

$$\partial_{\mathrm{Calkin}}\Big(\Phi\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\Big)\Big) = \mathrm{index}(T),$$

其中 $\partial_{\mathrm{Calkin}}$： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是与 *Calkin* 扩张相关的指标映射（见定理 *4*）。

证明。 我们通过追踪该类经过前几节所建立的一系列同构和映射，来证明这个引理。

步骤 1：符号类。 根据命题 38，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 在莫里塔等价 Φ 下对应于 T 的符号类：

$$\Phi\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\Big) = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中 $\pi_{\mathcal{Q}}$： $B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 是映至 Calkin 代数的商映射。

步骤 2：Calkin指标映射。回顾定理 4，与 Calkin 扩张相关联的指标映射

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Q}}} \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

$^{\sim}$是一个同构 $\partial_{\mathrm{Calkin}}$： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$。此外，根据引理4，此映射将符号的类映射为任意提升的弗雷德雷姆指标：

$$\partial_{\mathrm{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \mathrm{index}(T).$$

步骤 3：复合。结合步骤 1 和步骤 2，我们得到：

$$\partial_{\mathrm{Calkin}}\Big(\Phi\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\Big)\Big) = \partial_{\mathrm{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \mathrm{index}(T).$$

第4步：良定义性。 复合与构造过程中所作的选择无关：

- 不同的相位 ph(T) 选择之间相差紧算子，因此得到相同的符号类$[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$。
- 根据定理 7，下降映射在 KK-类上良定义。
- 根据命题 25，Morita 等价 Φ 是自然同构。
- 根据定理 4，指标映射 $\partial_{\mathrm{Calkin}}$ 是同构。

因此，左侧仅取决于 Fredholm 算子 T，并且等于其指标。 □

在第 5.2 小节中构造的下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 是一个抽象的 K-理论类。为了将其与具体的指标理论不变量联系起来，我们将把它在 Morita 等价 $\Phi: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 下的像识别为符号类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$。与 Calkin 指标映射 $\partial_{\mathrm{Calkin}}: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 复合后，便可恢复 T 的弗雷德霍姆指标。在下一小节中，我们将通过将该下降类与 Toeplitz 扩张和 Calkin 代数联系起来，明确说明这一识别。

5.3 识别下降类：与 Toeplitz 扩张的关系

在第 5.2 小节中构造的下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 是一个抽象的 K-理论类。为了将其与具体的指标理论不变量联系起来，我们需要将其在 Morita 等价 $\Phi: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \cong K_1(\mathcal{Q}(H))$ 下的像识别为更熟悉的对象，例如源自 Toeplitz 扩张或 Calkin 代数的类。这一识别对于第 6 节主指标定理的证明至关重要；届时将证明复合 $\partial_{\mathrm{Calkin}} \circ \Phi \circ \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 可以恢复弗雷德霍姆指标。

我们首先回顾 Toeplitz 扩张及其在指标理论中的作用。

定义 25（Toeplitz 代数与 Toeplitz 扩张）。 令 $H = \ell^2(\mathbb{N})$，并令 $S \in B(H)$ 为单边移位，它由 $Se_n = e_{n+1}$ 相对于正交归一基 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$定义。Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$是由 S生成的 C^*-代数。根据 *Coburn* 定理 *[28]*， $\mathcal{T}$包含 $\mathcal{K}(\ell^2)$ 作为本质理想，并且存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\ell^2) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(S^1) \longrightarrow 0,$$

其中 σ 是符号映射，它将 S 映射到单位圆上的恒等函数 $z \mapsto z$ 。这就是Toeplitz 扩张。

Toeplitz 扩张导出一个 K-理论中的六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_0(C(S^1)) \\ {\scriptstyle\partial_T}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\partial_T} \\ K_1(C(S^1)) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

相关的 K-群为：

- $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$，由任意秩一投影的类生成；

- $K_1(\mathcal{K}) = 0$;
- $K_0(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$，由平凡线丛的类生成；
- $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$，由恒等函数 $z \mapsto z$ 的类生成；
- $K_1(\mathcal{T}) = 0$ （一个标准结果；参见 [13, 第 8]章）。

由六项正合列，在 $K_1(C(S^1))$ 和 $K_0(\mathcal{K})$ 处的正合性可知，指标映射

$$\partial_T : K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$$

是一个同构。按照通常的定向约定，∂_T 将生成元 $[z]$ 映为 $1 \in \mathbb{Z}$。因此，对于绕数为 n 的连续函数 $f \in C(S^1)$，Toeplitz 算子 T_f 的指标为$-n$，且 $\partial_T([f]) = -n$。

Toeplitz 扩张通过映射与 Calkin 扩张密切相关

$$\iota : C(S^1) \longrightarrow \mathcal{Q}(H), \qquad f \longmapsto \pi_{\mathcal{Q}}(T_f),$$

其中 $\pi_{\mathcal{Q}}$： $B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 是映到 Calkin 代数上的商映射。该映射是良定义的 $*$-同态，因为 $T_f T_g - T_{fg} \in \mathcal{K}(H)$，因此乘法在模去紧算子后仍得到保持。它在 K_1上诱导出一个同态，

$$\iota_* : K_1(C(S^1)) \longrightarrow K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

由于 $K_1(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$ 且 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$ （见定理 4），要证明 ι_* 是同构，只需验证它非零。生成元 $[z] \in K_1(C(S^1))$ 映到 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，而根据 Calkin 指标映射 ∂_{Calkin}： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$，有 $\partial_{\text{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(S)]) = \text{指标}(S) = -1$。因此 $[\pi_{\mathcal{Q}}(S)]$是 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的生成元，且 ι_* 是一个同构（乘以 ± 1，具体取决于定向约定）。

这一嵌入在 Toeplitz 指数定理与 Calkin 指标映射之间建立了关键联系，并将在第 5.3 节中识别下降类时发挥关键作用。

命题 42 (Toeplitz 扩张与 Calkin 扩张之间的关系)。设 $\mathcal{T} \subset B(\ell^2(\mathbb{N}))$ 为 ***Toeplitz*** 代数，设 σ: $\mathcal{T} \to C(S^1)$ 为符号映射。定义 ι: $C(S^1) \to \mathcal{Q}(H)$ 为 $\iota(f) = \pi_{\mathcal{Q}}(T_f)$，其中$T_f$ 是符号为 f 的 ***Toeplitz*** 算子，且 $H = \ell^2(\mathbb{N})$。于是，***Toeplitz*** 扩张是沿着 ι 对 ***Calkin*** 扩张作出的拉回，从而得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N})) & \longrightarrow & \mathcal{T} & \xrightarrow{\sigma} & C(S^1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}(H) & \longrightarrow & B(H) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{Q}}} & \mathcal{Q}(H) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\pi_{\mathcal{T}}$表示 $\mathcal{T}$到 $B(H)$的包含映射。

由 K-理论中六项正合列的函子性，这会诱导出如下交换图（边界映射采用标准符号约定）：

$$\begin{array}{ccc} K_1(C(S^1)) & \xrightarrow{\partial_T} & K_0(\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ K_1(\mathcal{Q}(H)) & \xrightarrow{\partial_{\text{Calkin}}} & K_0(\mathcal{K}(H)) \end{array}$$

其中，∂_T 是 ***Toeplitz*** 扩张的指标映射，∂_{Calkin} 是 ***Calkin*** 扩张的指标映射，而垂直同构由通过秩映射进行的识别 $K_0(\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))) \cong K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 所诱导。

证明。 我们首先在扩张层面验证交换性。对于任意 $f \in C(S^1)$，Toeplitz 算子T_f根据 ι的定义满足 $\pi_{\mathcal{Q}}(T_f) = \iota(f)$。此外，包含映射 $\pi_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T} \hookrightarrow B(H)$ 将生成元S 映为单边移位，并且容易验证 $\pi_{\mathcal{Q}} \circ \pi_{\mathcal{T}} = \iota \circ \sigma$ 在生成集 $\{S\}$上成立，因此在所有 $\mathcal{T}$上也成立。于是扩张图交换。

对于 K 理论图表，我们利用与扩张态射相关联的六项正合列的自然性。竖直映射 ι_* 由 $*$同态 ι诱导，水平映射则是相应扩张的边界映射。自然性保证 $\partial_{\mathrm{Calkin}} \circ \iota_* = \text{秩}_* \circ \partial_T$，其中秩$_*$： $K_0(\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))) \to K_0(\mathcal{K}(H))$ 是由识别两个希尔伯特空间上的紧算子所诱导的同构。与秩同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 复合后，即得到所需的交换性。

六项正合列的符号约定必须保持一致；采用标准约定（参见 [13, 第 9 节.3]）时，该图表恰好交换。在这些约定下，生成元$[z] \in K_1(C(S^1))$ 经由 ∂_T 映射到 $-1 \in \mathbb{Z}$，而 $\iota_*([z]) = [\pi_{\mathcal{Q}}(S)]$经由 $\partial_{\mathrm{Calkin}}$ 映射到指标$(S) = -1$，从而确认了相容性。

□

下面的定理精确阐述了下降类与 Fredholm 算子符号之间的关系。

定理 9 (下降类的等同)。 设 $T \in B(H)$是一个符号为$u_T = \pi_{\mathcal{Q}}(T) \in \mathcal{Q}(H)$的 ***Fredholm*** 算子。在命题 *25* 给出的 *Morita* 等价下，

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})),$$

下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 对应于类 $[u_T]\otimes 1 \in K_1(\mathcal{Q}(H)\otimes\mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$。

证明。 证明直接依据前几节建立的结果，无需任何额外的技术手段。

步骤 1：Morita 等价。 命题 25 建立了强 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})).$$

根据 K-理论的 Morita 不变性（参见 [12,练习 13.7.1]），这诱导出一个同构

$$\Phi : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中，最后一个同构利用了 K-理论的稳定性：与紧算子作张量积不会改变K-群。

步骤 2：下降类对应于符号。 命题 38 证明，在此同构 Φ 下，下降类映射到符号类：

$$\Phi\Big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\Big) = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

步骤 3：稳定化。在稳定性同构 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K})$ 的逆映射下，类 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)]$ 对应于 $[\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \otimes 1 \in K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K})$。通过逆溯 Morita 等价$\Phi^{-1}$，我们得到 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 在原始 Morita 等价$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}$ 下对应于$[u_T] \otimes 1$。

第4步：结论。因此，在 Morita 等价下，下降类被识别为稳定化后的符号类 $[u_T]\otimes 1$。证明至此完成。

□

推论21 ($\mathcal{K}(H)^{\sim}$**)**。 对于 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$，其下降类为零：

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}})=0\in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})).$$

这与以下事实一致：$\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的所有 *Fredholm* 算子指标均为零，而且 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}))$ 由恒等算子的类生成，该类在指标映射下对应于零类。

证明。 令 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 为紧算子的单位化。回顾例 1，每个算子 $T\in\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 都可以唯一地写成 $T=\lambda I+K$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$ 且 $K\in\mathcal{K}(H)$。根据阿特金森定理（定理 2），T 是 Fredholm 算子，当且仅当它模 $\mathcal{K}(H)$ 可逆。由于商

$$\mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H)\cong\mathbb{C}$$

是交换的，$\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的 Fredholm 算子必须满足 $\lambda\neq 0$。这类算子的指标总是为零，因为

$$\mathrm{index}(T)=\dim\ker(T)-\dim\mathrm{coker}(T)=0,$$

因为 λI 可逆，且紧扰动不会改变弗雷德霍姆指标。

现在考虑与 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$相关联的酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$。其 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})$ 与 $\mathcal{K}(H)^{\sim}\otimes\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}))$ Morita 等价，并且根据 K-理论的稳定性，

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}))\cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim})\cong K_1(\mathcal{K}(H))=0,$$

其中，最后一个等式源于 $\mathcal{K}(H)$ 与 $\mathbb{C}$ Morita 等价这一事实（见例 1）。

根据下降映射的函子性（定理 8），任意 Fredholm 算子 $T\in\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的下降类都属于这个 K_1-群。由于该群为零，我们得出

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}})=0\in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})).$$

这与指标映射一致：Calkin 代数中的符号 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 是 λI，它在 $K_1(\mathcal{Q}(H))\cong\mathbb{Z}$ 中表示零类，因为 λI 与 I 可通过可逆元同伦，这反映出 T的弗雷德霍姆指标为零。

□

识别定理使我们能够将下降类与 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中的符号类联系起来，而后者是指标映射的自然归宿。

推论22（指标映射与识别相交换）。 在定理 *9* 所给出的 *Morita* 等价下，*Calkin* 扩张的指标映射 ∂：$K_1(\mathcal{Q}(H))\to\mathbb{Z}$ 对应于复合

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))\xrightarrow{\iota^*}K_1(B(H))\xrightarrow{\partial_{\mathcal{Q}}}\mathbb{Z},$$

其中，ι^* 由对角嵌入 $\iota:\ B(H)\hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$诱导，$\partial_{\mathcal{Q}}$ 表示$K_1(\mathcal{Q}(H))$上的指标映射。因此，对于任意具有符号 $[u_T]\in K_1(\mathcal{Q}(H))$的 *Fredholm* 算子 $T\in B(H)$，

$$\partial_{\mathcal{Q}}\big(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})\big)=\mathrm{index}(T)\in\mathbb{Z}.$$

证明。 识别定理（定理 9）建立了一个自然同构 $\sim\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$。在此同构下，Fredholm 算子 T 的下降类对应于其符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。

Calkin 扩张的指标映射 $0 \to K(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$ 是边界映射$\partial_{\mathcal{Q}}\colon K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(K(H)) \cong \mathbb{Z}$，它出现在相应的六项正合列中。这是一个标准结果：$\partial_{\mathcal{Q}}([u_T]) =$指标$(T)$。

考虑由指标映射的自然性以及对角嵌入的性质所导出的以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) & \xrightarrow{\sim} & K_1(\mathcal{Q}(H)) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \iota^*} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{\mathcal{Q}}} & & \\ K_1(B(H)) & \xrightarrow{q_*} & K_1(\mathcal{Q}(H)) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{Q}}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

这里，q_* 由商映射 q 诱导：$B(H) \to \mathcal{Q}(H)$。左侧方块的交换性源于 K理论函子的函子性，以及识别同构 $\sim$ 与映射 ι^* 和 q_* 相互交织这一事实（如识别定理所确立）。右侧三角形的交换性则直接来自指标映射 $\partial_{\mathcal{Q}}$的定义。

由于 $K_1(B(H)) = 0$，映射 ι^*是平凡的。然而，关键在于复合 $\partial_{\mathcal{Q}} \circ q_* \circ \iota^*$对应于指标映射通过识别同构作用于下降类。沿图追踪 T 的下降类可得：

$$\partial_{\mathcal{Q}}\big(\sim(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))\big) = \partial_{\mathcal{Q}}([u_T]) = \mathrm{index}(T).$$

因此，对 T 的指标可通过将 Calkin指标映射作用于其符号而恢复，这证实了 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ 中下降后的类确实编码了弗雷德雷姆指标。 □

Toeplitz 扩张为验证这些识别提供了一种具体的计算工具。

例 17 (重新考察单边移位**)。**设 $S \in B(H)$ 为单边移位。其符号 $u_S = \pi_{\mathcal{Q}}(S)$是 ***Toeplitz*** 代数模紧算子后的生成酉元。在定理 *9* 的识别下，类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 对应于 $[u_S] \otimes 1 \in K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K})$。指标映射将其映到指标$(S) = -1$。

本小节中建立的识别是主指标定理所需的最后一个要素。在第 6 节中，我们将把它与沿 ι 的拉回以及边界映射结合起来，以证明

$$\mathrm{index}(T) = \partial \circ \iota^* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}).$$

6 通过拉回与边界映射得到的指标定理

6.1 通过对角嵌入传递信息

论文 [14] 中构造、并在小节 2.6 中回顾的对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是一个保单位元的单射 $*$-同态。根据 K-理论的函子性，ι 诱导出一个映射

$$\iota_* : K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$

在协变方向上。

对于指标定理，我们需要将信息从 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$传回 $\mathcal{A}$。由于 K理论是协变而非反变的，通常不存在直接的“拉回”映射 ι^*：$K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to K_1(\mathcal{A})$。相反，我们利用 KK理论更丰富的结构。

对角嵌入 ι 确定了一个 Kasparov 类

$$[\iota] \in KK(\mathcal{A}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})),$$

它使我们能够利用 Kasparov 积将类映射到相反方向。具体而言，对于任意类 $x \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \cong KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，我们可以构造 Kasparov 积

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} x \in KK^1(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong K_0(\mathcal{A}).$$

对于指标定理，我们不需要一个映入 $K_1(\mathcal{A})$ 的映射。相反，如引理 12 所示，相关的复合涉及以下两种情况之一：

- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$：Morita 等价 Φ_*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\widetilde{\mathcal{Q}}(H))$，完全绕过 $K_1(B(H))$；

- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$：自然同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$。

这种方法详见引理 12，是拉回映射恰当的范畴论替代方案；它既保持了 K-理论的协变性，又使我们能够恢复弗雷德霍姆指标。

拉回映射 ι^* 是群胚 C^*-代数与原代数之间的关键纽带。它使我们能够将下降类 desc $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \in K_1\ C^*\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ ι^* $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ $\in ([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$ (( )) $K_1\ \mathcal{A}$ $K_1\ \mathcal{A}$ $\partial\ K_1\ \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ 映射到 (desc $([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$) ( )。进入 ( ) 后，即可应用由适当扩张（例如，当 $\mathcal{A} = B(H)$ 时的 Calkin 扩张）导出的边界映射 : ( )，最终恢复T的整数值弗雷德霍姆指标。

拉回映射具有若干重要的函子性性质。

命题 43 (ι^*的性质)。 拉回映射 ι^*：$K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to K_1(\mathcal{A})$ 满足：

1. 自然性： 若 ϕ： $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个酉 $*$-同态，并诱导出群胚同态 $\mathcal{G}_\phi$:$\mathcal{G}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$，则图表

$$\begin{array}{ccc} K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) & \xrightarrow{\iota^*_{\mathcal{A}}} & K_1(\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{G}_\phi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_*} \\ K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})) & \xrightarrow{\iota^*_{\mathcal{B}}} & K_1(\mathcal{B}) \end{array}$$

可交换。这里$(\mathcal{G}_\phi)_*$ 表示由群胚同态 $\mathcal{G}_\phi$诱导的 K-理论上的映射，而 ϕ_* 是由 ϕ诱导的标准映射。

2. 与条件期望的相容性：在自然识别 $\mathcal{A} \cong C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$ （通过对单位空间中的点求值）下，映射 ι^* 可分解为

$$\iota^* = \mathrm{ev}_* \circ E_*,$$

其中 E： $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \to C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$ 是条件期望（沿群胚纤维积分），且 *ev*： $C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}$ 是求值同构。注：由于 $C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$ 通常是非幺的，我们隐式使用单位化或稳定化（例如，考虑 $K_1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})) \cong K_1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})^+)$ 或 $K_1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{K})$），以确保 K_1 以标准方式良定义；映射E_* 被理解为由 E 的单位化或稳定化版本所诱导。

3. 下降类的像：*For* 下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，拉回$\iota^*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}))$ 位于 $K_1(\mathcal{A})$ 的子群中，在该子群上边界映射 $\partial\colon\ K_1(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ （由适当的扩张产生，例如当 $\mathcal{A} = B(H)$ 时的 *Calkin* 扩张）恢复 T 的弗雷德霍姆指标。特别地，这表明 ι^* 将下降类映射到“指标可检测”的元素。

证明。 **(1)** 由 K-理论的函子性以及论文 I 定理 10(4) 中确立的对角嵌入的自然性得出。图表的交换性直接源于这样一个事实： ι^* 和 ϕ_* 都由 $*$-同态诱导，而群胚映射 $\mathcal{G}_\phi$ 与相应的对角嵌入相互交织。

(2) 由通过直积分表示对 ι 的定义以及条件期望的性质得出。具体而言，对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是复合 $\mathrm{ev}\circ E$ 的右逆，即 $\mathrm{ev}\circ E\circ\iota = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。转到 K-理论，并利用单位化/稳定化过程的函子性（该过程与 E 和 ev 相容），即可得到分解 $\iota^* = \mathrm{ev}_*\circ E_*$。详细证明见 [论文 I 第 4.10节，尤其是引理 22]。

(3) 设 $T \in \mathcal{A}$ 关于理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ 是 Fredholm 的，使得 $K_0(\mathcal{J}) \cong \mathbb{Z}$，且边界映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \to K_0(\mathcal{J}) \cong \mathbb{Z}$ 满足 $\partial([u_T]) = \mathrm{index}(T)$，其中 u_T 是 T 在 $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ 中的像。

步骤 1：下降类。根据论文 I 第 4.9 节，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 由一个酉元 $U \in M_n(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 表示，该酉元由直积分算子 $\Pi(T) = \int^{\oplus} \pi_x(T)\,d\mu(x)$ 的极分解得到，其中 π_x 是与 $x = (B, \chi) \in \mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}$ 相关联的 GNS 表示。

步骤 2：拉回。根据定义，$\iota^*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})) = [\iota^{(n)}(U)] \in K_1(\mathcal{A})$，其中 $\iota^{(n)}$ 逐项应用。令 $x_T := [\iota^{(n)}(U)]$。

步骤 3：与符号的关系。考虑商映射 $p\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$。对于每个 $x = (B,\ \chi)$，当$T \in B$时，求值 $\mathrm{ev}^{(n)}_x(\iota^{(n)}(U))$ 对于某个 u_T的提升 U_T，等于 $\chi^{(n)}(U_T)$。根据论文 I 的引理22，条件期望 E 满足 $E(\iota(a))(x) = \chi(a)$，其中 $a \in B$。转到矩阵并应用 p，我们得到

$$p_*(x_T) = [u_T] \in K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}),$$

因为求值族 $\{\mathrm{ev}^{(n)}_x(\iota^{(n)}(U))\}_{x\in\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}}$ 在同伦意义下重构了 u_T。

第4步：边界映射。应用边界映射 $\partial\colon\ K_1(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$。根据 K-理论中长正合列的函子性，图表

$$\begin{array}{ccccc} K_1(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p_*} & K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) & \xrightarrow{\partial} & K_0(\mathcal{J}) \\ \| & & \| & & \downarrow\cong \\ K_1(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} \end{array}$$

可交换，其中底部映射 ∂ 是复合 $K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{p_*} K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{J}) \cong \mathbb{Z}$。因此

$$\partial(x_T) = \partial(p_*(x_T)) = \partial([u_T]) = \mathrm{index}(T).$$

步骤 5：结论。因此，$x_T = \iota^*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}))$ 满足 $\partial(x_T) =$指标(T)，这证明它属于 $K_1(\mathcal{A})$ 的子群，在该子群上 ∂可还原弗雷德霍姆指标。

□

例18 ($\mathcal{K}$的拉回（$H)^{\sim}$）。设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，它是可分希尔伯特空间 H 上紧算子的单位化。回忆例 *9*，对角嵌入满足 $\iota(T) = T \otimes 1$，在如下识别下

$$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) \cong C_0(\mathbb{P}(H)) \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{A}),$$

其中 $\mathbb{P}(H)$ 是 H 的射影空间，而 $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ 通过共轭作用于秩一投影。

对于 K-理论，我们有 $K_1(\mathcal{A}) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0$，因为 $\mathcal{A}$ 是稳定 C^*代数的单位化。因此，拉回映射

$$\iota^* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \longrightarrow K_1(\mathcal{A})$$

必然是零同态 。因此，对于任意类 $x \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，我们有 $\iota^*(x) = 0$ 属于 $K_1(\mathcal{A})$.

例19 (B的拉回（$H)$）。设 $\mathcal{A} = B(H)$为可分希尔伯特空间 H 上所有有界算子构成的代数。这是一个标准结果：$K_1(B(H)) = 0$。因此，拉回映射

$$\iota^* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \longrightarrow K_1(B(H))$$

也同样是零映射，正如例*18*中所示。

乍一看，这似乎表明拉回丢失了有关下降类的所有信息。然而，指标定理并未止步于 $K_1(B(H))$；相反，我们考虑复合

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\iota^*} K_1(B(H)) \xrightarrow{q_*} K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

其中：

- q：$B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 是映到 *Calkin* 代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$的商映射；
- q_*：$K_1(B(H)) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是 K-理论上的诱导映射（即使$K_1(B(H)) = 0$，它仍然是良定义的）；
- ∂：$K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H))$ 是由 *Calkin* 扩张导出的六项正合列中的边界映射

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0.$$

关键在于，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 的构造方式确保其在$q_* \circ \iota^*$ 下的像对应于 *Fredholm* 算子 T 的符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。随后，边界映射将此符号映射为弗雷德霍姆指标：

$$\partial([u_T]) = \mathrm{index}(T) \in \mathbb{Z}.$$

因此，尽管 ι^* 落在平凡群 $K_1(B(H))$中，复合 $\partial \circ q_* \circ \iota^*$ 却是非平凡的，并且恢复了指标。这是 K-理论中的一种标准现象：六项正合列给出一个非平凡映射 ∂：$K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$，而下降类恰好是在拉回并转至商之后检测此映射的元素。

下面的引理将下降类的拉回与 T 的相位类联系起来。虽然该拉回落在平凡群 $K_1(B(H))$ 中，但它与到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 的商映射复合后，会得到检测指标的符号类。因此，此引理搭起了一座桥梁，连接群胚 C^*-代数中的下降类与 Calkin 代数中边界映射非平凡作用于其上的 K-理论类。

引理 14 (下降类的拉回)。 对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，令 $u_T \in \mathcal{Q}(H)$为其在 *Calkin* 代数中的像，即 T 对紧算子取商后的相位。根据定理 *9* 的 *Morita* 等价，我们有

$$\iota^*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [\mathrm{ph}(T)] \in K_1(B(H)) = 0,$$

其中 $\mathrm{ph}(T) \in B(H)$ 是将 u_T 提升为酉元的任意提升（此类提升在相差紧扰动的意义下存在）。该等式在 $K_1(B(H))$ 中理解；由于目标群为零，故该等式是平凡的。关键在于，与商映射 $q_*\colon K_1(B(H)) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$ 复合之后，我们得到非平凡类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，它在边界映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 下给出指标 (T)。

证明。 根据定理 9，存在一个自然同构

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中第二个同构是 Morita 等价。在此识别下，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 对应于 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，即 T在 Calkin 代数中的符号的类。

对角嵌入 $\iota\colon B(H) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$ 诱导拉回映射 $\iota^*\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to K_1(B(H))$。展开这些识别后，该映射对应于选取 Calkin 酉元 u_T到 $B(H)$ 中酉元的一个提升。事实上，该复合

$$K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\cong} K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\iota^*} K_1(B(H))$$

将 $[u_T]$ 发送到满足 $q(\mathrm{ph}(T)) = u_T$ 的任意提升 $\mathrm{ph}(T) \in B(H)$ 所对应的类，其中 $q\colon B(H) \to \mathcal{Q}(H)$ 是商映射。这样的提升存在，因为 Calkin 扩张是到 $\mathcal{Q}(H)$ 的满射；任意两个提升之差都是紧算子，因此它们在 $K_1(B(H))$ 中表示同一个类，因为 $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$。

因此，我们得到

$$\iota^*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [\mathrm{ph}(T)] \in K_1(B(H)).$$

由于 $K_1(B(H)) = 0$，这个类为零。尽管如此，将商映射 $q_*\colon K_1(B(H)) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$（尽管定义域为零，该映射仍有良好定义）作用于左侧并不能直接进行；相反，我们注意到，该构造保证 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 在复合映射下的像

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\iota^*} K_1(B(H)) \xrightarrow{q_*} K_1(\mathcal{Q}(H))$$

恰好是 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，其中 q_* 由商映射诱导。于是，来自 Calkin 扩张的六项正合列的边界映射 $\partial\colon K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 满足 $\partial([u_T]) =$ 指标(T)。

□

注释 50 （为何 $K_1(\mathcal{A}) = 0$并非障碍）。 $K_1(B(H))$ 和 $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim)$ 的消失可能会让人以为拉回映射 ι^* 丢弃了所有信息。然而，指标并非从 $K_1(\mathcal{A})$ 本身恢复，而是从复合中恢复。

$$K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \xrightarrow{\iota^*} K_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{q_*} K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathcal{J}) \cong \mathbb{Z},$$

其中 $\mathcal{J}$ 是紧算子理想（或 I 型情形中的适当理想）， $q\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ 是商映射，而 ∂ 是与该扩张相关联的六项正合列中的边界映射

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{J} \longrightarrow 0.$$

关键在于，边界映射 ∂ 作用在 $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J})$上，而非 $K_1(\mathcal{A})$上。下降类的构造恰好使得 $q_* \circ \iota^*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})) = [u_T] \in K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J})$，其中 $[u_T]$ 是 T的符号类。随后，边界映射将该类映为指标$(T) \in \mathbb{Z}$。

因此，即使 $K_1(\mathcal{A}) = 0$，复合 $\partial \circ q_* \circ \iota^*$ 仍可能非平凡，因为非平凡信息存在于 $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J})$ 中，并由 ∂检测到。这是 K-理论中的标准现象：六项正合列将一些中间阶段可能消失的群联系起来，同时仍通过边界映射捕捉重要的不变量。

注 *51*（与 *Calkin* 扩张的关系）。对于具体情形 $\mathcal{A} = B(H)$ 和 $\mathcal{J} = \mathcal{K}(H)$，商 $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ 是 *Calkin* 代数 $\mathcal{Q}(H)$。六项正合列给出边界映射 $\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$。这正是将符号类 $[u_T]$ 映射为 T的弗雷德霍姆指标的映射。单独的拉回 ι^* 只落在 $K_1(B(H)) = 0$中，但它与 q_* 复合后，会得到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中的符号类，边界映射在此处非平凡地作用。

应用于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，我们有 $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$（由任意秩一投影的类生成），并且$K_1(\mathcal{A}) = 0$。对于任意 Fredholm 算子 $T = \lambda I + K \in \mathcal{K}(H)^\sim$（满足 $\lambda \neq 0$），可以证明

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) = 0 \in K_0(\mathcal{A}),$$

这与如下事实一致：对于 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 中的所有 Fredholm 算子，index$(T) = 0$。这是由以下观察得出的：在 $KK^1(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \ \mathbb{C})$ 中，For$([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) = 0$，因为遗忘映射会将等变类映为零，这是由于在无穷远点之外，算子族是平凡的。

应用于 $\mathcal{A} = B(H)$

对于 $\mathcal{A} = B(H)$，情况更为微妙，因为 $K_0(B(H)) = 0$。因此，与 $[\iota]$的 Kasparov积落入零群，所以这种直接方法得到零，无法检测指标。

解决办法是利用 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)})$与 Calkin 代数之间的 Morita 等价。回顾命题 25，可知存在一个 Morita 等价

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})),$$

它诱导出一个同构

$$\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

因此，我们不再尝试将下降类映回 $B(H)$（这会落入一个零群），而是将其映到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，在那里 Calkin 指标映射的作用非平凡。因此，恢复弗雷德霍姆指标的正确复合为

$$\mathrm{index}(T) = \partial_{\text{Calkin}} \circ \Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}),$$

其中 $\partial_{\text{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是与 Calkin 扩张相关联的指标映射。此复合无需提及 $K_1(B(H))$，便能将下降类直接与经典指标映射联系起来。

注 52（$K_1(\mathcal{A})$的消失并非障碍）。K_1的消失（$B(H)$）以及 $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim)$可能看起来有问题，但在每种情况下，指标都通过不同机制得到恢复：

• 对于 $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$，指标就是零，这与 $K_1(\mathcal{A})=0$ 以及以下事实一致：$\mathrm{For}([T]_{(1)}\mathcal{G}_{\mathcal{A}})=0$。

• 对于 $\mathcal{A}=B(H)$，我们使用 ***Morita*** 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)})\sim_M \mathcal{Q}(H)\otimes\mathcal{K}$ 将下降类映射到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，其中 ***Calkin*** 指标映射 $\partial_{\textbf{\textit{Calkin}}}: K_1(\mathcal{Q}(H))\to\mathbb{Z}$ 非平凡地作用。这样就完全绕过了 $K_1(B(H))$。

因此，指标定理不需要在 ι^* K-理论上使用拉回映射；相反，它采用直接计算（对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$）或 ***Morita*** 等价（对于 $B(H)$），将下降类与适当的边界映射联系起来。

备注53 (与 Calkin 扩张的关系**)**。 对于 $\mathcal{A}=B(H)$，恢复指标的正确复合为

$$\mathrm{index}(T)=\partial_{\textbf{\textit{Calkin}}}\circ\Phi_*\circ\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}),$$

其中 $\Phi_*: K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))\xrightarrow{\cong}K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是命题 *25* 中的 ***Morita***等价同构。该复合无需引用 $K_1(B(H))$，并直接将下降类与 ***Calkin*** 指标映射联系起来。边界映射 $\partial_{\textbf{\textit{Calkin}}}$ 将符号类 $[u_T]\in K_1(\mathcal{Q}(H))$ 映射到弗雷德霍姆指标$\mathrm{index}(T)\in\mathbb{Z}$，从而完成指标定理。

备注54 （与错误的拉回方法比较）。 读者可能会想，为什么我们不直接通过将 $\iota^*: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))\to K_1(\mathcal{A})$ 应用于 ι 类的代表元来定义拉回映射？这是不可能的，因为 K理论是协变的，而非反变的：一个 $*$同态 $\iota:\mathcal{A}\to C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$诱导出映射 $\iota_*: K_1(\mathcal{A})\to K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$，而不是反向映射。要定义反方向的映射，必须具备额外结构（例如条件期望或有限投射模结构），但一般情况下并不存在这些结构。本文采用的 ***Kasparov***积方法是正确的范畴论替代方案，因为它利用了完整的双变 KK理论，而不是试图从协变函子中强行构造反变映射。

6.2 Calkin扩张的边界映射

边界映射是 K-理论中的一项基本工具，它源自 C*-代数的短正合列。对我们的讨论而言，相关的扩张是 Calkin 扩张

$$0\longrightarrow\mathcal{K}(H)\longrightarrow B(H)\longrightarrow\mathcal{Q}(H)\longrightarrow 0,$$

及其在紧算子的添单位化上的限制：

$$0\longrightarrow\mathcal{K}(H)\longrightarrow\mathcal{K}(H)^{\sim}\longrightarrow\mathbb{C}\longrightarrow 0.$$

在本小节中，我们回顾边界映射的定义及其性质，重点说明它如何从 Calkin 代数中的符号类恢复弗雷德霍姆指标。

定义26 （短正合列的边界映射）。 设 $0\to J\to E\xrightarrow{\pi}A\to 0$ 是一个 ***C****-代数的短正合列。其在 K-理论中的相关六项正合列包含一个边界映射

$$\partial: K_1(A)\longrightarrow K_0(J).$$

对于一个酉元 $u\in U_n(A)$，它代表一个类 $[u]\in K_1(A)$，类 $\partial([u])$ 可按如下方式得到：

1. 选择一个提升 $v\in M_n(E)$，使得 $\pi^{(n)}(v)=u$，且 v 在 $M_n(E)$ 中可逆（这样的提升存在，因为 π 是满射，且可逆元局部可提升；利用标准技巧可以构造出全局提升）。

2. 由于 v 可逆，元素 v^*v 是 $M_n(E)$ 中的正可逆元，它与恒等算子的差属于 $M_n(J)$。

3. 定义投影

$$p_v = v(v^*v)^{-1}v^* \in M_n(E).$$

可以验证， p_v 是一个投影，并且 $p_v - 1_n \in M_n(J)$，其中 1_n 表示$M_n(E)$ 中的恒等算子（视为一个投影）。

4. 令 $\partial([u]) := [p_v] - [1_n] \in K_0(J)$，其中 $[p_v]$ 和 $[1_n]$ 表示这些投影在$K_0(J)$中的类。

此定义与提升 v 和矩阵大小 n的选择无关，因此得到一个定义良好的群同态。

注55 （通过指数映射的等价构造）。 一种等价的定义使用 K-理论中的指数映射。若 v 是 u 在 $M_n(E)$中的一个可逆元提升，则类 $\partial([u])$ 由以下投影之差表示

$$[vv^*] - [v^*v] \in K_0(J),$$

其中 $[vv^*]$ 和 $[v^*v]$ 表示这些投影在 $M_n(E)$ 模 $M_n(J)$后的类。这种表述通常更便于计算。

柯尔金扩张情形

对于复数域 alkin 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$，边界映射的形式为

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

若 $T \in B(H)$ 是一个符号为 $u_T \in \mathcal{Q}(H)$ 的 Fredholm 算子，则 $\partial([u_T]) =$指标(T)。具体而言，选取 u_T （例如 T 的相位）的一个提升 $v \in B(H)$，定义26中的构造给出投影到 T 核上的投影类，减去投影到余核上的投影类；在同构 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 下，这对应于指标(T)。

注56 (为何 $K_1(B(H))$ 没有出现。 至关重要的是，六项正合列中的边界映射作用于商代数的 K_1 商代数 $\mathcal{Q}(H)$，而不是作用于 $K_1(B(H))$。在 *Calkin* 扩张中，$K_1(B(H)) = 0$ 不起直接作用；非平凡信息蕴含于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$。这与如下事实一致：*Fredholm* 算子的指标由其在 *Calkin* 代数中的符号类检测，而不是由 $B(H)$ 本身中的任何类检测。

紧算子情形

对于扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)^\sim \to \mathbb{C} \to 0$，边界映射为

$$\partial : K_1(\mathbb{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

由于 $K_1(\mathbb{C}) = 0$，此映射必为零。这反映了 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 中的每个算子都具有弗雷德霍姆指标为零这一事实，与例 18 一致。

命题 44 （边界映射的性质）。 与扩张 $0 \to J \to E \to A \to 0$ 相关联的边界映射 ∂： K_1（A） $\to K_0$（J）满足：

1. 自然性：对于任意扩张态射（即短正合列的交换图），所诱导的 K-理论图表交换。

2. 同伦不变性：如果 u_t 是 A 中酉元的一个同伦，那么 $\partial([u_t])$ 在 $K_0(J)$ 中为常数。

3. 指标解释： 在 *Calkin* 扩张中，对于 $T \in B(H)$ 的任意提升 $T \in B(H)$，都有 $\partial([u]) = $ 指标(T)。

证明。 这些是 K-理论中的标准事实；详细证明见 [12] 或 [13]。 □

在下一小节中，我们将把第 6.1 节中的拉回映射 ι^* 与商映射q_*： $K_1(B(H)) \to K_1(\mathcal{Q}(H))$以及边界映射 ∂结合起来，从下降类得到弗雷德霍姆指标。关键观察是，尽管 ι^* 落在 $K_1(B(H)) = 0$ 中，但复合 $q_* \circ \iota^*$ 会得到符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，边界映射 ∂在该符号类上作用非平凡。

命题 45 (边界映射关于 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 为零)。 考虑短正合列 e

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{K}(H)^\sim \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

K-理论中相应的六项正合列包含边界映射

$$\partial : K_1(\mathbb{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

由于 $K_1(\mathbb{C}) = 0$，该边界映射必然是零同态。

因此，该扩张不会产生非平凡的指标映射。这与以下事实一致： $\mathcal{K}(H)^\sim$ 中的每个算子都具有弗雷德霍姆指标为零（见例*18*）。

证明。 对于任意短正合列 $0 \to J \to E \to A \to 0$，六项正合列将边界映射置于

$$\partial : K_1(A) \longrightarrow K_0(J).$$

在我们的情形中， $A = \mathbb{C}$ 和 $J = \mathcal{K}(H)$。标准的 K理论给出 $K_1(\mathbb{C}) = 0$ （见 [12] 或 [13]）。因此，∂是零映射，因为从平凡群出发的任何同态都是零同态。

无需进行显式的同伦论证；消失性直接源于 ∂的定义域是零群这一事实。

□

注57（与 Calkin 扩张对比）。 该命题凸显了与我们的指标定理相关的两个扩张之间的一个关键差异：

- 对于 *Calkin* 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$，边界映射 ∂： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H))$ 是非平凡的，并编码了 *Fredholm* 指标。
- 对于紧算子扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)^\sim \to \mathbb{C} \to 0$，边界映射 $\partial : K_1(\mathbb{C}) \to K_0(\mathcal{K}(H))$ 为零，因为 $K_1(\mathbb{C}) = 0$。

因此，非平凡指标现象完全存在于商代数 $\mathcal{Q}(H)$中，而不在中间代数 $B(H)$ 或 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 本身中。

前面的讨论凸显了一个重要的微妙之处：对于 $B(H)$，六项正合列中的边界映射作用的不是 $K_1(B(H))$，而是 $K_1(\mathcal{Q}(H))$。这是因为 Calkin 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0$$

其商代数为 $\mathcal{Q}(H)$，而任何扩张 $0 \to J \to E \to A \to 0$ 中的边界映射，其定义域总是 $K_1(A)$，即商的 K_1-群。

因此，任何试图直接在 $K_1(B(H))$ 上定义边界映射的做法，在结构上都是不可能的。下面的命题澄清了这一点，并消除了一种常见的误解。

命题 46 （不存在从 $K_1(B(H))$ 出发的自然边界映射）。 不存在自然边界映射

$$\partial : K_1(B(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H))$$

由 *Calkin* 扩张导出。对于正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow B(H) \longrightarrow \mathcal{Q}(H) \longrightarrow 0,$$

K-理论中的相应六项正合列给出边界映射

$$\partial_{\mathit{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

其定义域为 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，而非 $K_1(B(H))$。

证明。 对于任意短正合列 $0 \to J \to E \to A \to 0$ （其中各项为 C*-代数），K-理论中的六项正合列具有如下形式

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \longrightarrow & K_0(E) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A) & \longleftarrow & K_1(E) & \longleftarrow & K_1(J) \end{array}$$

边界映射是连接 $K_1(A)$ 与 $K_0(J)$ 的纵向/横向映射。其定义域始终为 $K_1(A)$，即商代数 A的 K_1-群。

将此应用于 Calkin 扩张，其中 $J = \mathcal{K}(H)$、 $E = B(H)$ 和 $A = \mathcal{Q}(H)$，可得

$$\partial_{\text{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)).$$

在此正合列中，不存在定义域为 $K_1(B(H))$ 的映射。 $K_1(B(H)) = 0$ 这一事实与指标映射的存在无关；非平凡信息完全蕴含在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中。 □

注 58 (为什么分裂扩张无济于事)。 人们可能会尝试构造另一个短正合列，其中 $B(H)$ 作为商，例如

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow B(H) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow B(H) \longrightarrow 0,$$

其中映射 $B(H) \oplus \mathbb{C} \to B(H)$ 是到第一个因子的投影。该正合列分裂，因此其边界映射为零。此外，其理想是 $\mathbb{C}$，而不是 $\mathcal{K}(H)$，所以它无法提供关于弗雷德霍姆指标的任何信息。这类人为构造与指标理论无关，也无法规避指标映射必须作用于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 这一结构性事实。

推论 23 (指标映射定义在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$)。 对于任意带有符号 $u_T \in \mathcal{Q}(H)$ 的 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，弗雷德霍姆指标可通过下式得到

$$\operatorname{index}(T) = \partial_{\mathit{Calkin}}([u_T]),$$

其中 $\partial_{\mathit{Calkin}}$： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是来自 *Calkin* 扩张的边界映射。

证明。 这是标准指标定理的 K-理论形式；详细证明见 [12] 或 [13] 。 □

注记 59（对拉回构造的启示）. 上述观察对我们的构造具有重要后果。下降类 $\operatorname{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 位于 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ 之中。要恢复弗雷德霍姆指标，该类必须与 *Calkin* 代数相联系，而边界映射在其中非平凡地作用。

我们并不试图经由 $K_1(B(H))$ 进行映射（那样会落入零群），而是使用 *Morita* 等价同构

$$\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$$

在命题 *25* 中得到确立。随后，边界映射 ∂_{Calkin}： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 作用于此类，从而得到指标：

$$\operatorname{index}(T) = \partial_{Calkin}\big(\Phi_*(\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))\big).$$

关键在于，我们所需的边界映射完全不涉及 $K_1(B(H))$。相反，下降类 $\operatorname{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 属于 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$，根据定理 9，它与 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ Morita 等价。随后，通过将 Calkin指标映射 ∂_{Calkin}： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$应用于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中的相应类，即可得到指标。

拉回 ι^*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to K_1(B(H))$ 落在零群中，在指标计算中不起直接作用。试图通过 $K_1(B(H))$构造指标映射注定会失败，因为$K_1(B(H)) = 0$ 迫使任何此类复合都为零。正确的途径是完全绕过 $K_1(B(H))$，直接利用 Morita 等价。

定义27 ($B(H)$)。 令 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 为定理 *9* 中的 *Morita*等价同构。定义指标映射 $\operatorname{Ind}^{B(H)} : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to \mathbb{Z}$为以下复合

$$\operatorname{Ind}_{B(H)} := \partial_{Calkin} \circ \Phi_*,$$

其中 $\partial_{Calkin} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。

对于 Fredholm 算子 $T \in B(H)$，我们于是有

$$\operatorname{Ind}_{B(H)}(\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = \partial_{\text{Calkin}}(\Phi_*(\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))) = \partial_{\text{Calkin}}([u_T]) = \operatorname{index}(T),$$

其中 $u_T \in \mathcal{Q}(H)$ 是 T 的符号。这种表述在数学上是严谨的：它仅使用真正的同构（Morita 等价 Φ_*）和定义良好的 Calkin 指标映射，不涉及虚假的逆或经过零群的不可能复合。

注记*60*（为何 ι^* 与指标无关）。拉回映射 $\iota^* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to K_1(B(H))$ 仍然定义良好，但其目标是零群。因此， ι^* 无法检测任何非平凡信息。正确的指标映射 $\mathit{Ind}^{B(H)}$ 完全绕过ι^* ，利用 *Morita* 等价 Φ_* 直接连接到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，指标正位于此处。这并非理论的缺陷；它仅仅反映了$K_1(B(H))$并非用于指标检测的正确群。下降类必须通过 Φ_*而非通过 ι^*，传送到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$。

对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，情况更简单，因为边界映射为零，这与 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中所有 Fredholm 算子的指标均为零这一事实相符。

命题 47 （ $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的边界映射）。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，边界映射

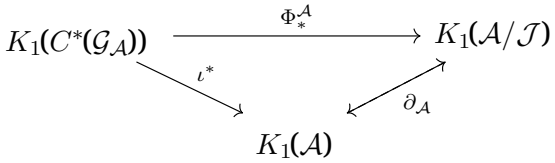
$$\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} : K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$$

是零映射。因此，对任意 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有

$$\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} \circ \iota^* \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0 = \operatorname{index}(T).$$

证明。 这由命题 45 以及 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}) = 0$（例 15）这一事实得出。 □

注 61 (统一视角)。 这两种情况都可以通过以下图表来理解：



其中：

- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$， $\mathcal{A}/\mathcal{J} = \mathcal{Q}(H)$，$\partial_\mathcal{A} = \partial$*Calkin* 非平凡，且虚线箭头 $K_1(\mathcal{A}) \to K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J})$ 是零映射。
- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$, $\mathcal{A}/\mathcal{J} = \mathbb{C}$, $\partial_\mathcal{A} = 0$，虚线箭头无关紧要。

在这两种情况下，指标都是通过 $\partial_\mathcal{A} \circ \Phi_*^\mathcal{A}$求得，而不是通过 ι^*。拉回 ι^* 仅用于将$\mathcal{A}$ 与其群胚 C^*-代数连接起来，而非用于计算指标。

以下引理总结了主定理中将用到的指标映射的性质。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，我们使用 Morita 等价直接连接到 Calkin 代数，绕过消失群 $K_1(B(H))$。

引理 15 （指标映射的关键性质）。 对于每个 $\mathcal{A} \in \{B(H)\ \mathcal{K}(H)^\sim\}$，定义映射 $\mathrm{Ind}_\mathcal{A} : K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \to \mathbb{Z}$ 如下：

- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，令 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\sim} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 为定理 *9* 中的 *Morita* 等价同构。定义 $\mathrm{Ind}_{B(H)} := \partial$*Calkin* $\circ \Phi_*$，其中 ∂*Calkin* : $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。
- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，定义 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}(H)^\sim} := 0$（零映射），因为 $\mathcal{K}(H)^\sim$ 中的所有 *Fredholm* 算子指标均为零。

则$\mathrm{Ind}_\mathcal{A}$ 满足：

1. 对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，我们有

$$\mathrm{Ind}_\mathcal{A}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})) = \mathrm{index}(T).$$

2. $\mathrm{Ind}_\mathcal{A}$ 是一个群同态。

3. $\mathrm{Ind}_\mathcal{A}$ 在 *Fredholm* 算子的同伦下保持不变：若 T_t 是 *Fredholm* 算子的连续路径，则$\mathrm{Ind}_\mathcal{A}(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}))$ 为常数。

4. $\mathrm{Ind}_\mathcal{A}$ 在紧扰动下保持不变：若 T 与 T' 之差是一个紧算子，则$\mathrm{Ind}_\mathcal{A}(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})) = \mathrm{Ind}_\mathcal{A}(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T']^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}))$。

证明。 我们分别讨论这两种情况。

情形 $\mathcal{A} = B(H)$：

(1) 根据定理 9，下降类 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$ 在 Morita 等价Φ_* 下对应于符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，其中 u_T 是 T 在 Calkin 代数中的像。$\mathrm{Ind}^{B(H)}$ 的定义给出

$$\mathrm{Ind}_{B(H)}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = \partial_{\text{Calkin}}(\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))) = \partial_{\text{Calkin}}([u_T]) = \mathrm{index}(T),$$

其中最后一个等式是 Calkin 扩张的标准指标定理（例如参见 [Blackadar,1998]）。

(2) $\mathrm{Ind}^{B(H)}$ 是同态的复合，因此是一个同态。

(3) 如果 T_t 是 Fredholm 算子的一个同伦，那么 u_{T_t} 是 $\mathcal{Q}(H)$中酉元的一个同伦。根据 K理论的同伦不变性，$[u_{T_t}]$在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$中保持不变。因此，$\Phi_*^{-1}([u_{T_t}])$ $=\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T_t]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})$保持不变，其在 $\mathrm{Ind}^{B(H)}$ 下的像也保持不变。

(4) 如果 $T' = T+K$满足 $K \in \mathcal{K}(H)$，那么 T'是 Fredholm 算子，且具有相同的符号 $u_{T'} = u_T$，该符号属于 $\mathcal{Q}(H)$。因此，$\Phi_*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T']^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [u_T] = \Phi_*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))$，并且由于 Φ_*是一个同构，下降类相等。不变性由此得证。

情况 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$： 对于任意 Fredholm 算子 $T \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有指标$(T) = 0$。此外，根据例 15，$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0$属于 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}))$。由于 $\mathrm{Ind}^{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 被定义为零映射，我们有

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}})) = 0 = \mathrm{index}(T).$$

零映射的性质 (2)–(4) 显然成立。 □

注 *62*（为什么在 $B(H)$ 情况下不出现 ι^* ）。拉回映射 ι^*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ $\to K_1(B(H))$ 的值落在零群中，因此无法检测指标。正确的指标映射 $\mathrm{Ind}^{B(H)}$完全绕过 ι^* ，而是利用 *Morita* 等价 Φ_* 直接连接到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，指标就存在于其中。这并非理论的局限，而是反映了这样一个事实： $K_1(B(H)) = 0$ 是用于指标检测的错误群。必须通过 Φ_*将下降类传输到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，而不是通过 ι^*。

在下一小节中，我们将把拉回映射和边界映射组合成一个交换图，以概括指标定理。

6.3 指标图

现在，我们将前面小节中构造的映射组合成图表，以概括指标定理。由于 $B(H)$与 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$的结构不同，我们分别给出这两种情形的图表，随后呈现一个统一的概念图景。

情形 $\mathcal{A} = B(H)$

对于 $B(H)$，群 $K_1(B(H))$ 消失，因此拉回 ι^* 无法直接接入边界映射。相反，我们使用定义 29 中定义的有效边界映射 $\partial^{\text{eff}}_{B(H)}$： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to \mathbb{Z}$ ，它$\tilde{}$将 Morita 等价 Φ_*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ $\xrightarrow{=} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 与 Calkin 指标映射 ∂_{Calkin} :$K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$结合起来。

定义 28 ($B(H)$ **的指标图表)。** 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，算子 T的弗雷德霍姆指标可通过以下映射复合得到：

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]) \xrightarrow{\Phi_*} \Phi_*(\mathrm{desc}([T])) \xrightarrow{\partial_{Calkin}} \mathrm{index}(T)$$

$$K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) \longmapsto K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \longmapsto K_1(\mathcal{Q}(H)) \longmapsto \mathbb{Z}$$

等价地，用更简洁的图示形式表示：

$$K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\Phi_*} K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial_{Calkin}} \mathbb{Z}$$

其中：

- 奇类的下降映射$_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ （第 *5.1* 节）；
- Φ_* : $K_1($ $\sim C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$ $\xrightarrow{=}$ $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是定理 *9* 中的 *Morita* 等价同构 ；
- ∂*Calkin*： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。

为确保完备性，我们指出它与 KK-理论表述之间的关系：

$$\begin{array}{ccccc} KK^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}_{B(H)}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) & & \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \searrow^{\Phi_*} & \\ K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) & \xrightarrow{\Phi_*} & K_1(\mathcal{Q}(H)) \xrightarrow{\partial_{Calkin}} \mathbb{Z} \end{array}$$

其中，垂直同构是命题 *30* 中的典范识别 $K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \cong KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C})$，而 $j_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是 KK-理论中的下降映射。

注 63。 拉回映射 ι^* 未出现在此图表中，因为它的值域是 $K_1(B(H)) = 0$，因此对指标计算不起作用。通过 *Morita* 等价 Φ_*的直接路径完全绕过 $K_1(B(H))$，将下降类与 *Calkin* 代数相连，而边界映射在该代数上非平凡地作用。

情形 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，情况较为简单： $K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$，且边界映射 $\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 为零。该图表沿用原有的三步结构，无需修改。

例 20 ($\mathcal{K}(H)^{\sim}$**) 的指标图。**对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，指标定理由以下交换图表示：

$$\begin{array}{ccccccc} K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}) & \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) & \xrightarrow{\Phi_*} & K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}),\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}} & K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) & \xrightarrow{\Phi_*} & K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

其中：

- Φ_*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim})) \xrightarrow{\simeq} K_1(\mathcal{K}(H)^\sim)$ 是由 *Morita* 等价$C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}) \sim_M \mathcal{K}(H)^\sim \otimes \mathcal{K}$诱导的同构；
- $\partial_{\mathcal{K}(H)^\sim}$： $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) \to \mathbb{Z}$是零映射，因为 $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$；
- 余维数$\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}([T]_{(1)}\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}) = 0$对任意 *Fredholm* 算子 T均成立，如例 *15* 所示。

因此，整个复合为零，这与所有 $\mathcal{K}(H)^\sim$中的 *Fredholm* 算子的指标$(T) = 0$ 相符。

注 64 (统一概念图**)**。 这两种情况都可以通过以下模板来理解：

$$K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\Psi_\mathcal{A}} G_\mathcal{A} \xrightarrow{\delta_\mathcal{A}} \mathbb{Z}$$

其中：

- 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，我们设定 $G_\mathcal{A} = K_1(\mathcal{Q}(H))$， $\Psi_\mathcal{A} = \Phi_*$ （*Morita* 等价），以及 $\delta_\mathcal{A} = \partial$ *Calkin*（非平凡）。
- 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，我们设 $G_\mathcal{A} = K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$, $\Psi_\mathcal{A} = \iota^*$，以及 $\delta_\mathcal{A} = 0$。

在这两种情况下，复合 $\delta_\mathcal{A} \circ \Psi_\mathcal{A} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 都恢复了弗雷德霍姆指标。只有当拉回 ι^* 映射到一个会进入非平凡边界映射的群时，它才会直接用于图表；对于 $B(H)$，情况并非如此，因此以有效边界映射 $\partial^{\mathit{eff}}_{B\ (H)}$取代。

注 65 （为何需要两张图表？）。 之所以需要分别绘制图表，反映了其背后的 K-理论：对于 $B(H)$，应用 *Morita* 等价 Φ_*后，可在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中检测到指标；而对于 $\mathcal{K}(H)^\sim$，指标为零，原有的三步结构已足够。明确呈现这两种情况，可以避免让人误以为一张图表就能统一表示所有 *I* 型代数的指标定理。

定义 29（有效边界映射 B（H））。设 Φ_*: K_1（C^*（$\mathcal{G}_{B(H)}$））$\xrightarrow{\simeq} K_1$（$\mathcal{Q}$（H））为定理 9 中的 *Morita*等价同构。定义有效边界映射 $\partial^{\mathit{eff}}_B$（）: (()) 为以下复合

$$\partial^{\mathit{eff}}_{B(H)} := \partial_{\mathit{Calkin}} \circ \Phi_*,$$

其中 $\partial_{\mathit{Calkin}}$: K_1（$\mathcal{Q}$（H））$\to K_0$（$\mathcal{K}$（H））$\cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。

具体而言，对于任意类 $x \in K_1$（C^*（$\mathcal{G}_{B(H)}$）），有

$$\partial^{\mathit{eff}}_{B(H)}(x) = \partial_{\mathit{Calkin}}(\Phi_*(x)).$$

下述定理证明了该图表相关部分对于类$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$的交换性。

定理 10 （指标图的交换性）。对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$ （其中 $\mathcal{A}$ 或为B（H），或为 $\mathcal{K}$（H）~），其弗雷德霍姆指标可通过以下典范定义的映射复合得到：

$$\mathrm{index}(T) = \mathcal{I}_\mathcal{A} \circ \Psi_\mathcal{A} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}),$$

其中：

- $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ *is the descent map;*
- $\Psi_\mathcal{A}$ 是从 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 到适当的 K_1-群的同构，其中可以检测到指标；

• $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 是指标映射（边界映射），用于从这个 K_1-类中提取一个整数。

$\Psi_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 的具体选择取决于 $\mathcal{A}$:

• 对于 $\mathcal{A} = B(H)$， $\Psi_{\mathcal{A}} = \Phi_*$： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是定理 *9* 中的 *Morita*等价同构，而 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \partial$*Calkin*： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。

• 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$， $\Psi_{\mathcal{A}}$ 是自然同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$，而 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = 0$是零映射。

等价地，在这两种情形下，以下图表均可交换:

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]) \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{A}}} \Psi_{\mathcal{A}}(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T])) \xrightarrow{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}} \mathrm{index}(T)$$

$$K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}} K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \xrightarrow{\Psi_{\mathcal{A}}} G_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}} \mathbb{Z}$$

其中 $G_{B(H)} = K_1(\mathcal{Q}(H))$和 $G_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} = K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$。

证明。我们证明该定理时，将两种情形分别处理，因为涉及的映射各不相同。 .

情形 1： $\mathcal{A} = B(H)$。

设 $T \in B(H)$ 是一个符号为 $u_T = \pi_{\mathcal{Q}}(T) \in \mathcal{Q}(H)$ 的 Fredholm 算子。根据定理 9，下降类

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

~在 Morita等价同构 $\Phi_*: K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 下对应于符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。更确切地说,

$$\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

Calkin 扩张的指标映射 $\partial_{\text{Calkin}}: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 满足经典指标定理:

$$\partial_{\text{Calkin}}([u_T]) = \mathrm{index}(T).$$

因此,

$$\mathrm{index}(T) = \partial_{\text{Calkin}}(\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))) = \mathcal{I}_{B(H)} \circ \Psi_{B(H)} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}),$$

其中 $\Psi_{B(H)} = \Phi_*$ 且 $\mathcal{I}_{B(H)} = \partial_{\text{Calkin}}$。

情形2： $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$。

For $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有 $K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$ （见例 1）。此外，由例 15，下降类为零:

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0 \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})).$$

自然 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}) \sim_M \mathcal{K}(H)^{\sim} \otimes \mathcal{K}$ 诱导一个同构 $\Psi_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}: K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$，它必然是零映射。边界映射 $\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}: K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \to \mathbb{Z}$ 依命题 47 也为零。

因此,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} \circ \Psi_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0 = \mathrm{index}(T),$$

因为 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的每个 Fredholm 算子指标都为零。

自然性与函子性。

复合中涉及的所有映射对于相关结构都是自然的：

- 下降映射 $\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 关于等变 KK-理论类具有函子性（定理 8）；
- Morita 等价同构 $\Psi_{\mathcal{A}}$ 由自然的不变性双模诱导；
- 指标映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 是六项正合列中的边界映射，它们对于扩张态射是自然的。

此外，由引理 15 可知，该复合在 T 的同伦和紧扰动下保持不变，这证实了它仅取决于弗雷德霍姆指标。

结论。

我们已经证明，对于 $\mathcal{A} = B(H)$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 两种情形，任意算子 T 的弗雷德霍姆指标都可以通过以下复合得到

$$\mathrm{index}(T) = \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{\mathcal{A}} \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}),$$

其中映射 $\Psi_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 如上所定义。至此，证明完成。 □

为了更明确地阐述指标定理，我们将 $\mathcal{A} = B(H)$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 两种情形分别讨论，因为边界映射在每种情形下的表现不同。以下例子展示了用于刻画指标计算的交换图。

例 21（$B(H)$ 的指标图）。对于 $\mathcal{A} = B(H)$ 以及任意 *Fredholm* 算子 $T \in B(H)$，下图交换且刻画了弗雷德霍姆指标：

$$\begin{array}{ccccccc} & & [T]^{(1)}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad\mathrm{desc}\quad} & \mathrm{desc}([T]) & & \\ & & \in & & \Phi_*\downarrow & & \\ [u_T] \in K_1(\mathcal{Q}) & \xrightarrow{\partial_{Calkin}} & \partial_{Calkin}([u_T]) \in K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{index}(T) \in \mathbb{Z} & & \end{array}$$

记号说明如下：

- $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{B(H)}$ 表示 $B(H)$的酉共轭群胚；
- $[T]_{(1)_{\mathcal{G}}} \in K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_{(0)})$ 是 T的等变 K^1-类；
- 下降$_{\mathcal{G}} :=$ 下降$_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是到 $K_1(C^*(\mathcal{G}))$的下降映射；
- $\Phi_* : \quad K_1(C^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是定理 *9* 中的 *Morita*等价同构；
- $u_T = \pi_{\mathcal{Q}}(T) \in \mathcal{Q}(H)$ 是 T在 *Calkin* 代数中的符号，而 $[u_T]$ 表示其在$K_1(\mathcal{Q}(H))$中的类；
- ∂*Calkin* : $\quad K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射；
- 指标$(T) \in \mathbb{Z}$ 是 T 的弗雷德霍姆指标。

拉回 ι^* 已从图表中省略，因为它落入 $K_1(B(H)) = 0$，并且在指标计算中不起作用。

例22 （指标图，对应于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$）。 *For* $\mathcal{A}=\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 以及任意 *Fredholm* 算子 $T\in\mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有 指标$(T)=0$，且下列图表平凡地交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
[T]_{\mathcal{G}}^{(1)} & \longrightarrow & \mathrm{desc}([T]) & \longrightarrow & \iota^*(\mathrm{desc}([T])) & \longrightarrow & \partial(\iota^*(\mathrm{desc}([T])))\\
\in & & \in & & \in & & \| \\
0\in K_{\mathcal{G}}^1(\mathcal{G}^{(0)}) & \longrightarrow & 0\in K_1(C^*(\mathcal{G})) & \longrightarrow & 0\in K_1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & 0\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

其中，符号约定如下：

- $\mathcal{G}:=\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 表示 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$的酉共轭群胚；
- $\mathcal{A}:=\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 就是代数本身；
- $[T]_{(1)_{\mathcal{G}}}\in K_{\mathcal{G}}^1(\mathcal{G}_{(0)})$ 是 T的等变 K^1-类；
- desc：$=\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}$ 是到 $K_1(C^*(\mathcal{G}))$的下降映射；
- ι^*： $K_1(C^*(\mathcal{G}))\to K_1(\mathcal{A})$ 是沿对角嵌入的拉回；
- $\partial:=\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$： $K_1(\mathcal{A})\to K_0(\mathcal{K}(H))\cong\mathbb{Z}$ 是边界映射，根据命题 *47*，它为零；
- $K_{\mathcal{G}}^1(\mathcal{G}_{(0)})$、 $K_1(C^*(\mathcal{G}))$、 $K_1(\mathcal{A})$以及 $\mathbb{Z}$ 是相关的 K-理论群。

记号“$0\in G$”表示群 G 的零元素，而不是说该群本身是平凡群（尽管$K_1(\mathcal{A})$ 确实为零）。每个映射为零的结论都由以下内容得出：

- $K_1(\mathcal{A})=0$*(例 1)*；
- $\mathrm{desc}([T]_{(1)_{\mathcal{G}}})=0$ *(例 15)*；
- $\partial=0$*(命题 47)*。

因此整个复合为零，与指标$(T)=0$相符。

注记 66 （与主定理的关系）**.** 这些例子是定理 *10* 对两个基本 *I* 型代数的具体实现。*For* $B(H)$，该图表使用有效边界映射来规避 $K_1(B(H))$的消失，而对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，该图表反映了指标的平凡性。二者共同说明了指标定理的全部范围。

以下命题总结了图表中各映射之间的关系。

命题 48 （指标图中的关系）**.** 设 $[\cdot]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)}:\ \mathcal{F}(\mathcal{A})\to K_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^1(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}^{(0)})$ 表示将 *Fredholm* 算子 $T\in\mathcal{A}$ 映到其等变 K^1-类的映射。则指标图中成立以下关系：

1. 下降的函子性：
$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}^{(1)})\in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$
定义了一个从 *Fredholm* 算子到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 的良定义映射，该映射关于同伦和紧扰动具有自然性。

2. ***Morita*** 等价：对于 $\mathcal{A} = B(H)$，存在一个典范同构

$$\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$$

使得 $\Phi_*(\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，即 T 的符号类。

3. ***For*** $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$***:*** 我们有 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$，从而

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0.$$

4. 指标定理：弗雷德霍姆指标由该复合恢复

$$\mathrm{index}(T) = \begin{cases} \partial_{\mathit{Calkin}} \circ \Phi_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}), & \mathcal{A} = B(H), \\ 0, & \mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}, \end{cases}$$

其中 $\partial_{\mathit{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to \mathbb{Z}$ 是 ***Calkin*** 扩张的指标映射。

证明。我们利用前面各节所建立的性质来证明每一项。

第(1)项：根据定义 22，$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 是由 T 构造的等变 K^1-类。下降映射 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$（定理 7）将该类映到 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 的一个元素。下降映射的函子性（定理 8）保证该对应是自然的：若 T 与 T' 通过 Fredholm 算子同伦，则 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T']^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$；类似地，由命题 33，紧扰动不改变下降类。

条目（2）：对于 $\mathcal{A} = B(H)$，命题 25 建立了 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M \mathcal{Q}(H) \otimes \mathcal{K}$，由此诱导出同构 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$。定理 9 表明，在此同构下，

$$\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [\pi_{\mathcal{Q}}(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H)),$$

其中 $\pi_{\mathcal{Q}}(T)$ 是 T 在 Calkin 代数中的像。此识别源自下降映射的显式构造，以及 T 的相位与 T 相差一个紧算子这一事实。

条目（3）：对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，群胚 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})$ 与 $\mathcal{K}(H)^{\sim} \otimes \mathcal{K}$ Morita 等价（参见论文 I，第 5.3 节）。根据 K-理论的稳定性，$K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim} \otimes \mathcal{K}) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim})$。例 1 给出 $K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$。此外，例 15 直接表明，对于任意 Fredholm 算子 T，$\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0$，这与目标群为零相一致。

Item (4): 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，将 Item (2) 与 Calkin 扩张的经典指标定理（定理 4）结合可得

$$\partial_{\mathrm{Calkin}}(\Phi_*(\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))) = \partial_{\mathrm{Calkin}}([\pi_{\mathcal{Q}}(T)]) = \mathrm{index}(T).$$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，Item (3) 给出 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0$，而命题 47 表明边界映射 $\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 为零。因此复合为零，这与对 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中所有 Fredholm 算子的指标 $(T) = 0$ 相一致。

这些情形共同确立了上述形式的指标定理。 □

注 67。 请注意，这种表述避免引用拉回映射 ι^*： $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \to K_1(\mathcal{A})$，因为该映射定义不明确。相反，它使用：

- 对于 $B(H)$：*Morita* 等价 Φ_* 直接映射到 $K_1(\mathcal{Q}(H))$，*Calkin*指标映射在此处发挥作用；
- 对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$：所有相关群自然消失。

这种方法遵循 K-理论的协变性，并正确处理所有相关映射的函子性。

备注 68 （正确的指标复合）。 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，任何尝试使用映射 $\iota^*\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \to K_1(B(H))$ 的做法都会落入零群 $K_1(B(H)) = 0$，因此无法检测弗雷德霍姆指标。正确的指标映射则由以下复合给出

$$\partial^{\mathit{eff}}_{B(H)} = \partial_{\mathit{Calkin}} \circ \Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

其中：

- $\Phi_*\colon K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是定理 *9* 中的 *Morita*等价同构；
- $\partial_{\mathit{Calkin}}$： $K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是 *Calkin* 扩张的指标映射。

这一复合完全绕过了 $K_1(B(H))$，直接将下降类与 *Calkin* 代数相连，在该代数上边界映射的作用非平凡。

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，有 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$，且边界映射 $\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 为零，因此指标映射就是零映射。

命题 *48* 中的所有关系，都应理解为以这些正确的映射取代任何定义不当的拉回映射。

推论 24 ($\mathcal{A}$-Fredholm 指标经由 Kasparov 积)。设 $\mathcal{A}$是一个带单位的可分 C^*-代数，在可分希尔伯特空间 H 上忠实表示，且满足 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$；设 T 是 *Mingo [30]*意义下的一个 *$\mathcal{A}$-Fredholm* 算子。令 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})\ \mathbb{C})$ 为第 *5* 节中构造的相应等变 KK^1-类。那么

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = [\ker_{\mathcal{A}} T] - [\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} T] \in K_0(\mathcal{A}),$$

其中：

- $[\iota] \in KK(\mathcal{A}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 是对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$的 KK-类；
- 下降$_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\colon KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}_{(0)\,\mathcal{A}})\ \mathbb{C}) \to KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 是等变 KK-理论中的下降映射；
- 核$_{\mathcal{A}}\,T$和 余核$_{\mathcal{A}}\,T$分别是由 T 的 $\mathcal{A}$-核和 $\mathcal{A}$-余核给出的有限生成投射 $\mathcal{A}$-模；
- $[\text{核}_{\mathcal{A}}\,T] - [\text{余核}_{\mathcal{A}}\,T] \in K_0(\mathcal{A})$ 是 *Mingo* 意义下 T 的 $\mathcal{A}$-指标。

证明。 我们通过下降的函子性以及 $\mathcal{A}$-Fredholm 指标的定义，将 Kasparov 积与 $\mathcal{A}$-指标对应起来，从而证明该等式。

步骤 1：等变类。 设 T 是 Mingo [30] 意义下的一个 $\mathcal{A}$-Fredholm 算子。第 5 节为 T 关联一个等变类

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}).$$

根据命题 30，存在一个典范识别

$$K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}) \cong KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}),$$

因此我们可以将 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 视为 $KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C})$ 的一个元素，它由 T 的有界变换所产生的等变 Kasparov 循环表示。

步骤 2：下降到普通 KK-理论。 等变 KK-理论中的下降同态（参见 Tu [19]）给出一个自然映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} : KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

在标准识别 $KK^1(\mathbb{C}, B) \cong K_1(B)$ 下，对于任意 C^*-代数 B，这给出一个类

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$$

它由 T 在群胚 C^*-代数中的像表示。

步骤 3：对角嵌入类。 第 2.6 节中构造的对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 是一个含单位元的 $*$-同态。根据标准对应关系（Kasparov [22]），它确定一个 Kasparov 类

$$[\iota] \in KK(\mathcal{A}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

第4步：Kasparov积与 $\mathcal{A}$-指标。 Kasparov积的函子性给出

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in KK^1(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong K_0(\mathcal{A}).$$

根据定义，T (Mingo [30]) 的 $\mathcal{A}$-Fredholm 性质意味着其 $\mathcal{A}$-核 $\ker_{\mathcal{A}} T$ 和 $\mathcal{A}$-余核 $\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} T$ 是有限生成的投射 $\mathcal{A}$-模。T 的 $\mathcal{A}$-指标定义为

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(T) := [\ker_{\mathcal{A}} T] - [\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} T] \in K_0(\mathcal{A}).$$

下降构造与定义 $\mathcal{A}$-Fredholm 条件的扩张相容：类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 正是 T 的指标数据在等变 KK-理论中的实现，而与 $[\iota]$ 的 Kasparov积计算出与该扩张相关的 $K_0(\mathcal{A})$ 中的边界类。这是 KK-理论中的标准事实：对于任意扩张 $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{E} \to \mathcal{A} \to 0$，包含映射 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{E}$ 的类与 $KK^1(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ 中表示该扩张的类的 Kasparov积，给出 $K_0(\mathcal{J})$ 中的指标。

因此，所得的 $K_0(\mathcal{A})$ 中的类与 T 的 $\mathcal{A}$-指标相一致：

$$[\iota] \otimes_{C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})} \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) = [\ker_{\mathcal{A}} T] - [\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} T].$$

步骤 5：结论。因此，下降类与对角嵌入的 Kasparov 积恰好恢复了 Mingo 意义下的 $\mathcal{A}$-Fredholm 指标，从而确立了所需的等式。 □

注 69 （关于 $\mathcal{A}$-核与 $\mathcal{A}$-余核）。 设 T 是 *Mingo[30]*意义下的一个 $\mathcal{A}$-*Fredholm* 算子。根据定义，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 T 作用于希尔伯特空间直和 H^n 上（更一般地，稳定化后作用于形如 $\mathcal{A}^n$ 的希尔伯特 $\mathcal{A}$-模上），且投影到核T和余核 T上的正交投影属于矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$。

这些投影定义了有限生成投影 $\mathcal{A}$-模，分别记为核$_{\mathcal{A}}T$和余核$_{\mathcal{A}}T$。它们的差

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{A}}(T) := [\ker_{\mathcal{A}} T] - [\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} T] \in K_0(\mathcal{A})$$

是 T的 $\mathcal{A}$-指标。

这个类定义良好，且与 n 的选择无关，因为 $K_0(\mathcal{A})$ 是通过 $\mathcal{A}$上的矩阵代数中投影的稳定等价类定义的；不同矩阵大小给出的投影稳定等价，因而代表相同的 K_0-类。

这一构造推广了经典 *Fredholm* 指标（当 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$时可恢复），并且通过典范识别 $KK^1(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong K_0(\mathcal{A})$ 与 *Kasparov* 的 KK-理论相容。事实上，$\mathcal{A}$-指标对应于由 T 定义的扩张的类与 $KK(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 中的恒等元的 *Kasparov*积，从而建立了 *Mingo*的解析指标与本文所用的 KK-理论指标之间的联系。

交换图清晰地展示了指标定理各部分如何衔接。在下一小节中，我们将精确陈述主定理，并给出证明。

6.4 定理： 指标$(T) = \partial_{\mathcal{A}} \circ \iota^* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$

本节的主要目的是证明定理：指标$(T) = \partial_{\mathcal{A}} \circ \iota^* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}})$。

命题 49 (Morita同构**)**。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分*I*型 C^*-代数，且 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 是其在 *[14]*中构造的酉共轭群胚。那么， $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与 $\mathcal{A}$ *Morita* 等价。因此，存在一个自然同构

$$\Psi : K_*(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \xrightarrow{\cong} K_*(\mathcal{A}).$$

此外，这个同构与对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 相容，即 $\Psi \circ \iota_* = \mathrm{id}_{K_*(\mathcal{A})}$，其中 $\iota_* : K_*(\mathcal{A}) \to K_*(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 由 ι诱导。

证明。 证明直接由 [14] 中确立的结果以及 C^*-代数K-理论中的标准定理得出，如 [12] 中所述。

步骤 1：群胚的存在性 C^*-代数。 根据 [14], 中的推论 26，酉共轭群胚$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 存在定义良好的最大 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$。该代数通过相对于 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 上的博雷尔哈尔系统的有界博雷尔函数卷积代数构造而成（参见 [14] 中的第 4.5 节）。

步骤 2：Morita 等价。 正如 [14], 的摘要和第 1.5 节所述，该论文的一项基本结果是 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 与 $\mathcal{A}$ Morita 等价。此 Morita 等价利用群胚结构和对角嵌入构造；详细内容见 [14]的第 4.5—4.6 节。我们将此 Morita 等价记为 $\mathcal{X}$。

步骤 3：诱导的同构 K-理论。 C^*-代数理论中的一项基本定理指出，Morita 等价的 C^*-代数具有同构的 K-理论。此结果源于这样一个事实：稳定同构蕴含 KK-等价，而 KK-等价的代数具有同构的 K-群。更具体地说，若 $\mathcal{X}$ 是一个 $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ 不变性双模，则 $\mathbb{K}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{X}^\infty \cong \mathbb{H}_\mathcal{B}$，因此 $\mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{B} \otimes \mathbb{K}$。由于 K-理论是稳定的（参见 [12, 推论 17.8.8]），可得 $K_*(\mathcal{A}) \cong K_*(\mathcal{B})$。因此，$C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{A}$ 之间的 Morita 等价诱导出一个同构

$$\Psi : K_*(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\cong} K_*(\mathcal{A}).$$

第4步：与对角嵌入的相容性。 [14] 中的定理 7 证明，对角嵌入 $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$ 是一个含单位元的单射 $*$-同态。根据 K-理论的函子性（[12, 第 5 节.2]），这诱导出 K-理论上的映射 $\iota_* : K_*(\mathcal{A}) \to K_*(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$。

现在我们验证 $\Psi \circ \iota_* = \mathrm{id}_{K_*(\mathcal{A})}$。考虑复合

$$K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\iota_*} K_*(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\Psi} K_*(\mathcal{A}).$$

要证明这个复合是恒等算子，只需在 K_0 和 K_1的生成元上进行验证。

K_0 情形。 设 $p \in M_n(\mathcal{A})$ 是一个投影。它的类 $[p] \in K_0(\mathcal{A})$ 经 ι_* 映射为 $[\iota(p)] \in K_0(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$，其中 $\iota(p) \in M_n(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 是一个投影，因为 ι 是一个 $*$-同态。Morita 等价 Ψ 由印痕双模 $\mathcal{X}$实现。根据 Rieffel对应（关于 Morita 等价的一般理论，见 [12,第 13 节.7]；关于强 Morita 等价与稳定同构之间关系的练习，见 [12, 练习 13.7.1]），投影 $\iota(p)$ 在该 Morita 等价下对应于连接代数中的投影 p。根据 K-理论上的 Morita同构的定义，该同构由稳定同构 $C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}) \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{A} \otimes \mathbb{K}$诱导，因此这恰好意味着$\Psi([\iota(p)]) = [p]$。

K_1 情形。 对于 K_1，由于 $\mathcal{A}$ 是含幺的，我们无需添加单位元。设 $u \in M_n(\mathcal{A})$ 是一个酉元。其类$[u] \in K_1(\mathcal{A})$ 经由 ι_* 映射到 $[\iota(u)] \in K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$。在由 Morita 等价诱导的稳定同构下，类 $[\iota(u)]$ 对应于 $[u]$。这是因为 Morita 等价诱导的 K_1 映射与 K理论的六项正合列中的指标映射相容（[12, 第 9 节3]），而对角嵌入确保了这种相容性成立。

因此，$\Psi \circ \iota_* = \mathrm{id}_{K_*(\mathcal{A})}$，如所需。 □

我们首先建立一个关键引理，该引理将 Fredholm 算子的等变类与其在下降映射下的符号联系起来。此引理对于接下来的指标定理至关重要。

引理16 (符号下降)。 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺可分 I 型 C^* 代数，在可分希尔伯特空间 H 上有忠实表示，并设 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 是 *[14]* 在《*I* 型 *C**- 代数的酉共轭群胚》中构造的酉共轭群胚。对于任意 *$\mathcal{A}$-Fredholm* 算子 T，令

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C})$$

为其关联的等变 *ivariant* KK^1 类，该类按 *[14]* 第 *4.9* 节中的构造定义。那么在下降映射下 p

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})),$$

我们有

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) = [\sigma(T)] \in KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})),$$

其中:

• 对于 $\mathcal{A} = B(H)$， $\sigma(T) \in \mathcal{Q}(H)$ 是 T 在 *Calkin* 代数中的符号，并将其视为 $M_n(\mathcal{Q}(H)^+)$中的酉元；

• *For* $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$, $\sigma(T) = 0$.

证明。 证明过程通过分析等变类的构造以及 [14] 中确立的下降映射的性质来展开。

步骤 1：构造等变类。 类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in KK^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \ \mathbb{C})$ 在 [14] 的第 4.9 节中构造，它由 Fredholm 算子 T 以及通过酉共轭对 H 的 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 作用得到。按照构造，该类以适用于等变 KK 理论的形式编码了 T 的指标数据。特别地，对于 $\mathcal{A} = B(H)$，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 是通过从 Calkin 代数到群胚 C^* 代数的自然映射，由符号 $\sigma(T)$ 构造而成。

步骤 2：下降映射的性质。 下降映射

$$j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} : KK^*_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}), \mathbb{C}) \longrightarrow KK^*(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$$

在 [14] 的第 4.5 节和第 4.6 节中定义并确立了其基本性质。其中重要的性质包括:

(i) 函子性： $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 与等变 KK-元素的复合相容；

(ii) 相容 性与对角嵌入 ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})$，已在 [14 的第 4.9 节中确立];

(iii) 关于 Fredholm 算子的符号映射的自然性。

性质 (iii) 是专为构造 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 而设计的，并确保下降映射将等变类映射为符号类。

步骤 3：情形 $\mathcal{A} = B(H)$。 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，将下降映射应用于 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$，并利用上述性质 (iii)，可得

$$j_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) = [\sigma(T)] \in KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{B(H)})).$$

Calkin 扩张 $0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \xrightarrow{q} \mathcal{Q}(H) \to 0$ 在 K理论的六项正合列中诱导出一个边界映射（见 [12]第9.3节）：

$$\partial_{\text{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

对于 Fredholm 算子 T，其符号 $\sigma(T) = q(T) \in \mathcal{Q}(H)$ 定义了一个类 $[\sigma(T)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$；根据 Atiyah-J¨anich 定理， $\partial_{\text{Calkin}}([\sigma(T)]) = \text{指标}(T)$。在同构 $KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$（ [12] 命题 17.5.6）下，类 $[\sigma(T)]$ 通过 [14]第 4.7 节和第 4.9 节中建立的 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \sim_M B(H)$ 对应于 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中的符号类。

第4步：情形 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$。对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，根据 [14] 的第 5.3 节，群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}$ 与平凡群 Morita 等价。此外，由紧扰动下弗雷德霍姆指标的稳定性以及标量算子的指标为零这一事实（参见 [30], 命题 1.7），任意 $\mathcal{K}(H)^\sim$-Fredholm 算子 $T = \lambda I + K$ 都满足 $\text{index}(T) = 0$。因此，其符号类 $[\sigma(T)]$ 在 $K_1(\mathcal{Q}(H))$ 中消失。由下降映射的函子性和 Morita 等价，我们得到

$$j_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}) = 0 = [\sigma(T)].$$

~**第5步：通过 Morita 同构进行识别**。根据 [14], 第 4.7 节和第 4.9 节中的 Morita 同构 Ψ：$K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{A})$，结合标准识别 $KK^1(\mathbb{C},\ C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$（参见 [12], 命题 17.5.6），类 $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$ 恰好对应于 $[\sigma(T)]$。证明完毕。

□

定理 11 (群胚下降指标定理)。令 $\mathcal{A}$ 为 $B(H)$ 或 $\mathcal{K}(H)^\sim$，并令 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 为我们在先前论文 *[14]* 中构造的酉共轭群胚。对于任意 *Fredholm* 算子 $T \in \mathcal{A}$，其弗雷德霍姆指标由下式给出

$$\operatorname{index}(T) = \mathcal{I}_\mathcal{A} \circ \Psi_\mathcal{A} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \left([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \right),$$

其中：

- $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}} \in K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A})$ 是与 T 相关联的等变 K^1-类（在第 *4* 节中构造）；
- 下降$_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$：$K^1_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}(\mathcal{G}^{(0)}_\mathcal{A}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 是下降映射（定理 *7*）；
- $\Psi_\mathcal{A}$ 是一个同构，从 $K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A}))$ 到适当的 K_1-群，其中指标可以被检测出来：
  - ~对于 $\mathcal{A} = B(H)$，$\Psi_{B(H)} = \Phi_*$：$K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是命题 *25* 中的 *Morita*等价同构；~对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，$\Psi_{\mathcal{K}(H)^\sim}$ 是自然同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$；
- $\mathcal{I}_\mathcal{A}$ 是指标映射（边界映射），它从这个 K_1-类中提取一个整数：
  - *For $\mathcal{A} = B(H)$, $\mathcal{I}_{B(H)} = \partial_{Calkin} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ is the Calkin index map;*
  - *For $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}(H)^\sim} = 0$, the zero map.*

证明。我们采用三步策略：首先，将 Morita 等价下的下降类识别为符号类；其次，应用 Calkin 指标映射以恢复弗雷德霍姆指标；最后，复合这些映射，得到所需公式。整个过程中，我们直接使用 Morita 等价 Φ_*，而不使用任何定义不明确的拉回映射 ι^*。证明分别处理这两种情况，因为所涉及的映射有所不同。

步骤 1：与符号类的识别。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，令 $T \in B(H)$ 为一个符号为 $u_T = \pi_\mathcal{Q}(T) \in \mathcal{Q}(H)$ 的 Fredholm 算子。根据定理 9，下降类

$$\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

~在 Morita等价同构 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 下对应于符号类 $[u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$。更准确地说，

$$\Phi_*(\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}})) = [u_T] \in K_1(\mathcal{Q}(H)).$$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$，我们有 $K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$（见例 1），并且根据例 15，下降类消失：

$$\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}}) = 0 \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim})).$$

自然 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim}) \sim_M \mathcal{K}(H)^\sim \otimes \mathcal{K}$（参见论文 I，第 5.3 节）诱导出一个同构 $\Psi_{\mathcal{K}(H)^\sim}$：$K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^\sim})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{K}(H)^\sim) = 0$，它必然是零映射。

步骤 2：应用指标映射。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，Calkin 扩张的指标映射 $\partial_{\text{Calkin}} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 满足经典指标定理（定理 4）：

$$\partial_{\text{Calkin}}([u_T]) = \operatorname{index}(T).$$

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，根据命题 47，边界映射 $\partial_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} : K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \to \mathbb{Z}$ 为零，而 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 中的每个 Fredholm 算子的指标均为零（Mingo，命题 1.7）。

步骤 3：复合。对于 $\mathcal{A} = B(H)$，将步骤 1 和步骤 2 中的映射复合，得到：

$$\operatorname{index}(T) = \partial_{\text{Calkin}}(\Phi_*(\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}))) = \mathcal{I}_{B(H)} \circ \Psi_{B(H)} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}),$$

其中 $\Psi_{B(H)} = \Phi_*$ 和 $\mathcal{I}_{B(H)} = \partial_{\text{Calkin}}$。

对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们得到：

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} \circ \Psi_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}}) = 0 = \operatorname{index}(T).$$

结论。这两种情形可以统一表示为

$$\operatorname{index}(T) = \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{\mathcal{A}} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}),$$

其中映射 $\Psi_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 定义如上。关键的技术点在于，我们避免了任何定义不良的拉回映射 ι^*，转而直接使用 Morita 等价 Φ_*（对于 $B(H)$）以及群的自然消失（对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$）。证明至此完成。□

备注 70。定理 *11* 给出了弗雷德霍姆指标的一种表述：它是某个与该算子相关的典范等变 KK-类，在经过群胚等变下降以及适当的 *Morita* 等价或自然同构后所得到的像。具体而言，对于任意 *$\mathcal{A}$-Fredholm* 算子 T，有

$$\operatorname{index}(T) = \mathcal{I}_{\mathcal{A}} \circ \Psi_{\mathcal{A}} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}),$$

其中：

- $[T]_{(1)\ \mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{(0)\ \mathcal{A}})$ 是利用酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的作用，从 T 构造出的等变 K^1-类；
- 下降$_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$：$K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}_{(0)\ \mathcal{A}}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 是等变 KK-理论中的下降函子；
- $\Psi_{\mathcal{A}}$ 是从 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$ 到适当的 K_1-群的同构，在该群中可以检测到指标：
  - 对于 $\mathcal{A} = B(H)$，$\Psi_{B(H)} = \Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 是命题 *25* 中的 *Morita*等价同构；
  - 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，$\Psi_{\mathcal{K}(H)^{\sim}}$ 是自然同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$；
- $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 是从该 K_1-类中提取一个整数的指标映射（边界映射）：
  - *For $\mathcal{A} = B(H)$, $\mathcal{I}_{B(H)} = \partial_{Calkin} : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ is the Calkin index map;*
  - *For $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}} = 0$, the zero map.*

这一表述统一了两种极端情形：$B(H)$ 上的经典 *Fredholm* 指标（经由卡尔金扩张边界映射恢复），以及 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 上的平凡指标（此时边界映射为零）。这两种情形均被证明源于同一种群胚等变 KK理论机制，其中对角嵌入 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ 在建立将群胚 C^*-代数与原代数或其商联系起来的 *Morita* 等价中起着关键作用。

构　　造依赖于以下各项，这些内容均已在前一节中确立　　*s:*

- 等变类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in K^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}})$ 的良定义性（第 *4* 节）；
- 下降映射$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ 及其性质（第 *5* 节）；$\sim$
- *Morita* 等价 $\Phi_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{Q}(H))$ 对于 $B(H)$（命题 *25*），以及自然同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{K}(H)^{\sim}})) \cong K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$ 对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$；
- 识别 $KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})) \cong K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}))$（*Blackadar*，命题 *17.5.6*）；
- 边界映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ 按情形定义；根据 *Atiyah–J¨anich* 定理，它在 $B(H)$ 上给出弗雷德霍姆指标，而对于 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$，则由 *Mingo* 的消失结果（命题 *1.7*）给出。

因此，尽管经典指标早已用 KK-理论术语表述（例如，作为 *Calkin* 扩张中的边界映射，或作为 *Kasparov* 积），定理 *11* 的新意在于通过酉共轭群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 对指标进行系统编码。这为指标提供了统一的群胚等变视角，表明 $B(H)$ 上的非平凡指标与 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$上的平凡指标都源自同一结构机制。这一视角能否带来超越经典表述的新见解，仍有待未来工作探索。

就在这里！！！

推论 25. 设 $T \in \mathcal{A}$ 满足其在商 $\mathcal{A}/\mathcal{K}(H)$（或相应的 *Calkin* 代数）中的像定义了 $K_1(\mathcal{A})$中的一个元素。那么，量

$$\partial_{\mathcal{A}} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\big([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\big)$$

属于 $\mathbb{Z}$。此外，如果 T 是 *Fredholm* 算子，这个整数就与经典的 *Fredholm* 指标相同　　*x:*

$$\partial_{\mathcal{A}} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\big([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}\big) = \mathrm{index}(T).$$

证明。 我们通过追踪该元素在定理 11 中建立的映射序列以及标准 K-理论六项正合列中的变化来进行证明。

步骤 1：从算子到等变 KK-类。 根据 [14], 的第 4.9 节中的构造，算子 T 确定了一个等变类

$$[T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}} \in KK^1_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}_{\mathcal{A}}), \mathbb{C}).$$

步骤 2：下降到普通 KK-理论。 应用下降映射 $j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$（在 [14] 的第 4.5–4.6 节中构造）可得

$$j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in KK^1(\mathbb{C}, C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

步骤 3：与 K_1 的识别。 根据 [12], 中的命题 17.5.6，对于任意 C^*-代数 B，存在一个典范同构 $KK^1(\mathbb{C}, B) \cong K_1(B)$。将其应用于 $B = C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$，得到

$$x_T := j_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{A}}}) \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})).$$

第4步：Morita同构到 $\mathcal{A}$。 命题 49 给出一个同构

$$\Psi : K_1(C^*(\mathcal{G}_\mathcal{A})) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathcal{A}).$$

将 Ψ 应用于 x_T 得到

$$y_T := \Psi(x_T) \in K_1(\mathcal{A}).$$

步骤5：边界映射。Toeplitz 扩张（或其适当的类似物）在 K-理论的六项正合列中诱导出一个边界映射（见 [12]中的第9.3节）：

$$\partial_\mathcal{A} : K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

步骤6：整数性以及与指标的识别。将 $\partial_\mathcal{A}$ 应用于 y_T 得到

$$\partial_\mathcal{A}(y_T) \in \mathbb{Z}.$$

若 T 是Fredholm的，定理 11表明该复合等于经典 Fredholm 指标:

$$\partial_\mathcal{A} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}) = \operatorname{index}(T).$$

因此，对于其类在 $K_1(\mathcal{A})$中定义一个元素的任意算子 T，量 $\partial_\mathcal{A} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}})$是一个整数；并且对于Fredholm 算子，该整数恢复经典 Fredholm 指标。至此证明完成。

□

注 71。定理 *11*将弗雷德霍姆指标表示为三个典范定义的映射的复合:

$$\operatorname{index}(T) = \partial_\mathcal{A} \circ \Psi \circ j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}).$$

这里:

- $j_{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 是从等变 KK-理论到普通 KK-理论的下降函子（*[14]*的第 *4.5–4.6* 节），它将编码在 $[T]$ (1) $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ 中的等变信息转换为 K_1（C^*（$\mathcal{G}_\mathcal{A}$）中的一个元素 ；
- Ψ 是由对角嵌入 ι： $\mathcal{A} \hookrightarrow C^*$（$\mathcal{G}_\mathcal{A}$） 诱导的 *Morita*同构（命题 *49*），它将 K_1（C^*（$\mathcal{G}_\mathcal{A}$） 与 K_1（$\mathcal{A}$）对应起来;
- $\partial_\mathcal{A}$ 是由相应扩张产生的边界映射（对于 B（H）是 *Calkin* 扩张，对于 $\mathcal{K}$（H）~是零映射），它计算 *Fredholm*指标。

这一表述表明，指标被编码在酉共轭群胚 $\mathcal{G}_\mathcal{A}$的 KK-理论中，其中每个映射都发挥着明确的函子性作用：下降函子将等变数据转换为普通 KK-理论，*Morita*同构将群胚 C^*-代数与 $\mathcal{A}$重新联系起来，而边界映射则提取整数值指标。

7 例子与计算

7.1 恒等算子的紧扰动： $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim$ (指标为零)

在本小节中，我们考察恒等算子的紧扰动所构成的代数。设 H 是一个无限维可分希尔伯特空间，并考虑C^*-代数

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^\sim = \mathcal{K}(H) + \mathbb{C}I,$$

紧算子的单位化。这个代数由所有形如 $T = \lambda I + K$where $\lambda \in \mathbb{C}$and $K \in \mathcal{K}(H)$ 的算子组成，其中紧算子。

命题 50。 代数 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 是一个 C^*-代数，具有以下性质：

1. 它包含恒等算子 I 和所有紧算子。

2. 它同构于 $\mathcal{K}(H)$的单位化。

3. 它的谱 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 恰好由两个不可约表示组成：

- 作用于 H 上的标准无限维不可约表示 π_{std}，由 $\pi_{std}(\lambda I + K) = \lambda I + K$ 给出；
- 唯一的一维特征 χ 由 $\chi(\lambda I + K) = \lambda$给出，它通过商 $\mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$分解。

因此，本原理想空间 $\mathrm{Prim}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$ 是一个含有两个点的空间，其雅各布森拓扑由 $\overline{\{\pi_{std}\}} = \{\pi_{std}, \chi\}$ 给出（即，χ 是 π_{std}的极限点）。

4. 其 K-理论群为 $K_0(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \cong \mathbb{Z}$ 和 $K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$。

证明。 前两个结论是关于 $\mathcal{K}(H)$的单位化的标准事实。对于第三个结论，请回忆，$\mathcal{K}(H)$是一个简单的 C^*-代数，且只有一个不可约表示（即 H上的标准表示）。因此，其单位化 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 恰好多出一个不可约表示：一个一维特征 χ，它消去 $\mathcal{K}(H)$并满足 $\chi(I) = 1$。该特征可经由商映射 $\mathcal{K}(H)^{\sim} \to \mathcal{K}(H)^{\sim}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$分解。

$\mathrm{Prim}(\mathcal{K}(H)^{\sim})$上的雅各布森拓扑由闭包关系决定：$\pi_{\mathrm{std}}$ 的核是$\{0\}$，而 χ 的核是 $\mathcal{K}(H)$。由于每个本原理想都包含 $\{0\}$（显然），且 $\mathcal{K}(H)$包含$\{0\}$，因此有$\overline{\{\pi_{\mathrm{std}}\}} = \{\pi_{\mathrm{std}}, \chi\}$。于是 χ 是 π_{std}的极限点，从而得到所描述的非豪斯多夫两点空间。

对于 K-理论计算，考虑与该扩张相关联的六项正合列

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)^{\sim} \to \mathbb{C} \to 0.$$

我们有 $K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{K}(H)) = 0$, $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$，以及 $K_1(\mathbb{C}) = 0$。因此，六项正合列化简为

$$0 \to K_0(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \to K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \to 0.$$

映射 $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$由包含映射 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{K}(H)^{\sim}$诱导，它将 $1 \in \mathbb{C}$映到 $I \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$。通过维数映射进行识别 $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ 时，α 对应于乘以 1（因为I 在 $K_0(\mathcal{K}(H)^{\sim})$中的类映到 $K_0(\mathbb{C})$中的 1 的类）。因此，α 是一个同构，从而得到 $K_0(\mathcal{K}(H)^{\sim}) \cong \mathbb{Z}$和 $K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$。

□

规范群胚。令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，其中 H 是无限维可分的。$\mathcal{A}$ 的本原谱恰好由两点组成：

$$\widehat{\mathcal{A}} \cong \{\pi_{\mathrm{std}}, \chi\},$$

其中

- $\pi_{\text{标准}}(\lambda I + K) = \lambda I + K$ 是标准无穷维表示，
- $\chi(\lambda I + K) = \lambda$ 是唯一的一维特征（经由商 $\mathcal{A}/\mathcal{K}(H) \cong \mathbb{C}$ 分解）。

因此，规范群胚的单位空间是一个含两个点的集合，而不是由 $\mathbb{C}$参数化的连续族。

引理 17。该　规范群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ *of* $\mathcal{A} = \mathcal{K}（H）^{\sim}$ 是不交并的两个连通分支　：

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{G}_{\pi_{\mathrm{std}}} \sqcup \mathcal{G}_{\chi},$$

其中：

1. $\mathcal{G}_{\pi_{\mathrm{std}}}$ 是一个仅含单位元 π_{std} 的传递群胚，其各向同性群为 $\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{std}}) \cong \mathbb{T}$;
2. $\mathcal{G}_{\chi}$ 是一个仅含单位元 χ的传递群胚，其各向同性群为 $\mathrm{Aut}(\chi) \cong \mathbb{T}$。

特别地，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的两个单位元之间没有态射。

证明。 代数 $\mathcal{K}(H)$是简单的，因此其单位化 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 恰有两个不等价的不可约表示：

- $\pi_{\text{标准}}$：标准无穷维表示，$\pi_{\text{标准}}(\lambda I + K) = \lambda I + K$;
- χ：唯一的一维特征，$\chi(\lambda I + K) = \lambda$，它经由商$\mathcal{A}/\mathcal{K}(H)$≅ $\mathbb{C}$分解。

根据定义，$\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 的对象是 $\mathcal{A}$的不可约表示，而态射是它们之间的酉交织算子。

对于任意两个不等价的不可约表示，它们之间不存在非零交织算子。因此，π_{std} 与 χ之间没有态射，所以 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 分解为各个表示的自同构群胚的不交并。

对于每个不可约表示 $\rho \in \{\pi_{\mathrm{std}}, \chi\}$，舒尔引理指出，从 ρ 到其自身的每个交织算子都是恒等算子的标量倍数。因此，酉交织算子为 $\{e^{i\theta} I : \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{T}$。于是，$\rho$ 的自同构群胚由一个对象 ρ 及其态射空间 $\mathbb{T}$构成，其中复合对应于 $\mathbb{T}$中的乘法。

因此，$\mathcal{G}_{\pi_{\mathrm{std}}} \cong \mathbb{T}$ 和$\mathcal{G}_{\chi} \cong \mathbb{T}$ 作为单对象群胚，它们彼此不相交，因为两者之间没有相连的态射。这就得到了所要求的分解。 □

算子的类。设 $T = I + K \in \mathcal{K}(H)^{\sim}$，其中 K 是紧的。那么 T是一个 Fredholm 算子。

引理18。对于满足 K 为紧的 $T = I + K$，我们有

$$\mathrm{index}(T) = \dim \ker T - \dim \ker T^{*} = 0.$$

证明。由于 K 是紧的，T是恒等算子 I的一个紧扰动。弗雷德霍姆指标在紧扰动下保持不变（例如参见 Mingo 的命题 1.7）。由于 $\mathrm{index}(I) = 0$，因此 $\mathrm{index}(T) = 0$。

□

命题 51。设 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$。那么 $K_1(\mathcal{A}) = 0$。特别地，若 T 在 $\mathcal{A}$中可逆，则它在$K_1(\mathcal{A})$ 中的类是平凡的。

证明。考虑扩张

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{A} \to \mathbb{C} \to 0.$$

相关的 K-理论六项正合列（ [12]中的第9.3节）给出

$$K_1(\mathcal{A}) \cong K_1(\mathbb{C}) = 0.$$

因此，$\mathcal{A}$ 中的任意可逆元都表示 $K_1(\mathcal{A})$中的零类。 □

注记 72. 代数 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 在我们的理论中充当“指标为零的真空”的模型：

- 每个 形如 $I+K$ （其中 K 紧的）的 *Fredholm* 算子指标为零（引理*18*）；
- 其 K_1-群消失，
$$K_1(\mathcal{K}(H)^{\sim}) = 0$$
（命题 *51*）；
- 其规范群胚由两个不连通的分支组成：一个对应于无穷维表示 π_{std}，其各向同性群为 $\mathbb{T}$；另一个对应于具有平凡各向同性群的唯一特征χ （引理 *17*）。这种等变结构不会产生非平凡的奇数 K-理论类。

因此，这种情况下不会出现非平凡的指标现象。非平凡指标理论需要在 K-理论中具有非平凡边界映射的扩张，例如 *Toeplitz* 代数或 *Calkin* 代数中的扩张。

下降到群胚 C^*-代数。 令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，并令 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 为其规范群胚。如引理 17 所确立的，$\mathcal{G}$ 由两个连通分支组成：

- $\mathcal{G}_{\pi_{\mathrm{std}}}$：一个各向同性群为 $\mathbb{T}$的单对象群胚，对应于无限维表示 π_{std}；
- $\mathcal{G}_{\chi}$：一个各向同性群平凡的单对象群胚，对应于唯一特征 χ。

不交并的群胚 C^*-代数是各分支的 C^*-代数的直和。对于各向同性群为 G的单对象群胚，其 C^*-代数就是群 C^*-代数 $C^*(G)$。因此
$$C^*(\mathcal{G}) \cong C^*(\mathbb{T}) \oplus \mathbb{C} \cong C_0(\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{C},$$
这里我们利用了以下事实：根据 Pontryagin 对偶（傅里叶变换），$C^*(\mathbb{T}) \cong C_0(\mathbb{Z})$。

引理 19。 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$，我们有：

1. $K_1\left(C^*(\mathcal{G})\right) = 0$;
2. 下降映射
$$j_{\mathcal{G}} : KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}))$$
是零映射。

因此，对于任意 $T = I + K \in \mathcal{A}$，我们有
$$j_{\mathcal{G}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}}) = 0 \in K_1(C^*(\mathcal{G})).$$

证明。 由分解 $C^*(\mathcal{G}) \cong C_0(\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{C}$，我们计算其 K-理论。由于 $K_1(C_0(\mathbb{Z})) = 0$（交换的 C^*-代数的 K_1-群消失）且 $K_1(\mathbb{C}) = 0$，我们得到
$$K_1(C^*(\mathcal{G})) \cong K_1(C_0(\mathbb{Z})) \oplus K_1(\mathbb{C}) = 0 \oplus 0 = 0.$$

下降映射 $j_{\mathcal{G}}$ 是从等变 KK-群到 $K_1(C^*(\mathcal{G}))$ 的同态。由于目标群为零，该映射必为零映射。特别地，对于任意 $T = I + K \in \mathcal{A}$，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}}$ 满足
$$j_{\mathcal{G}}([T]^{(1)}_{\mathcal{G}}) = 0 \in K_1(C^*(\mathcal{G})).$$

□

注 73。 这一计算证实， $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 在我们的理论中充当平凡真空：

- 每个 *Fredholm* 算子的指标都为零；
- 其 K_1-群消失；
- 其规范群胚 C^*-代数具有平凡的 K_1；
- 下降映射恒等为零。

非平凡的指标现象需要在 K-理论中具有非平凡边界映射的扩张，例如 *Toeplitz* 或 *Calkin* 代数中出现的扩张。

真空情形下的指标消失。 </style>令 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H)^{\sim}$ 及其规范群胚。如前几节所述，我们有以下消失结果：

$$KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) = 0, \qquad K_1(C^*(\mathcal{G})) = 0, \qquad K_1(\mathcal{A}) = 0.$$

定理12. 设 $T = I + K \in \mathcal{A}$ 且 K 紧的。则群胚指标构造给出

$$\mathrm{index}(T) = 0.$$

证明. 群胚指标由以下复合定义

$$KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{desc}} K_1(C^*(\mathcal{G})) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}.$$

由于 $KK^1_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \ \mathbb{C}) = 0$，类 $[T]^{(1)}_{\mathcal{G}}$ 在等变 KK^1-群中消失。因此，它在下降映射下的像在 $K_1(C^*(\mathcal{G}))$中为零。将边界映射 ∂ 作用于这个零元素，得到

$$\mathrm{index}(T) = 0.$$

□

备注74 (指标为零的真空)**.** 这个例子展示了我们理论中的一种基本“真空”构型：所有相关的奇数 K-理论群都消失，从而迫使群胚指标为零。具体而言，我们有

$$K^1_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}^{(0)}) = K_1(C^*(\mathcal{G})) = K_1(\mathcal{A}) = 0.$$

这种消失是结构性的，并非巧合——它反映了 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 的内在性质，而非算子的特殊选择。因此，非平凡的指标现象只能出现在奇数 K-理论群非零的代数中，例如 *Toeplitz*型扩张中出现的代数，其中边界映射是非平凡的。

因此，代数 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 构成了一项重要的一致性检验：抽象理论框架能够在直接计算十分简单的情形下，正确地再现预期的零指标，同时揭示指标消失的结构性根源。

推论 26. 设 $T = \lambda I + K$，其中 K 是紧的，且 $\lambda \neq 0$。那么 T 是 *Fredholm* 的，并且

$$\mathrm{index}(T) = 0.$$

证明. S 乘以非零常数不会改变弗雷德霍姆指标。令 g

$$T = \lambda(I + \lambda^{-1}K),$$

该结果由定理12得出。 □

注记75（几何解释）。 在非交换几何中，此例对应于奇 K-理论中的“零曲率”背景。所有相关 K-理论群的消失反映了拓扑障碍的缺失，否则这些障碍将对指标有所贡献。这一视角自然地将指标刻画为奇 K-理论中的一种曲率，其中 $\mathcal{K}(H)^{\sim}$ 扮演平坦真空的角色。

7.2 Toeplitz代数与单边移位（指标 -1）

在本小节中，我们考虑具有非平凡指标的 Fredholm 算子的最经典例子：可分希尔伯特空间上的单边移位。令 $H = \ell^2(\mathbb{N})$具有标准正交基 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$。单边移位 $S \in B(H)$定义为

$$Se_n = e_{n+1} \quad \text{for all } n \geq 0.$$

其伴随 S^* 是由 $S^*e_0 = 0$ 和 $S^*e_n = e_{n-1}$（对 $n \geq 1$）给出的后向移位。

命题 52。 单边移位 S 具有以下性质：

（*1*） S 是等距算子： $S^*S = I$。（*2*）不是酉元： $SS^* = I - P_0$，其中 P_0 是投影到 $\mathbb{C}e_0$上的秩一投影。

（*3*）是 *Fredholm* 算子，其指标$(S) = -1$。

(4) S 的本质谱是单位圆 $\mathbb{T}$。

(5) 生成 *Toeplitz* C^*代数 $\mathcal{T}$，它是由 S 和紧算子生成的 C^*代数 $\mathcal{T}$。

证明。 (1)-(3)是 Fredholm 理论中的标准结果。 S 的余核是一维的（由 e_0张成），而核是平凡的，因此指标为 -1。对于(4)，注意在 Calkin 代数中， $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$，像 $\pi(S)$是酉元（因为 $I - \pi(S)^*\pi(S) = 0$ 且 $I - \pi(S)\pi(S)^* = 0$）。因此， $\sigma_{\text{ess}}(S) = \sigma(\pi(S)) = \mathbb{T}$。由此得证(4)。(5)由 Coburn 定理推出：由 S 生成的C^*代数包含紧算子，并且同构于 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$。 □

Toeplitz 代数及其结构。虽然单边移位 S 本身属于 $B(H)$，但与指标理论相关的 C^*-代数是 Toeplitz 代数

$$\mathcal{T} = C^*(S, \mathcal{K}(H)) \subset B(H),$$

由 S 和紧算子生成的 C^*-代数。这是一个带单位、可分的 I型 C^*-代数，其结构已被充分理解。

Toeplitz 代数可嵌入基本扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

其中 σ 是符号映 射，它将生成等距 S 映到圆周上的恒等函数 $z \mapsto z$。
因此，本原谱 $\widehat{\mathcal{T}}$由两个分支组成：

- σ （紧算子）的核，对应于 $\mathcal{T}$在 H 上的无限维不可约表示（恒等表示）；
- 通过与在 $\mathbb{T}$ 中各点处的求值复合而得到的一族一维特征。

^因此， $\mathcal{T}$由一个无穷维点以及由圆周参数化的连续统多个一维点组成。

对于任意 $f \in C(\mathbb{T})$，Toeplitz 算子 T_f （ f 到 $\mathcal{T}$ 的唯一提升，并且在 H 上与经典Toeplitz算子一致）都是 Fredholm 算子，其指标等于 f 的绕数的负值：

$$\operatorname{index}(T_f) = -\operatorname{wind}(f).$$

I特别地，对于单边移位 S 本身， $f(z) = z$ 的绕数为 1，从而得到

$$\operatorname{index}(S) = -1.$$

Toeplitz 代数与扩张的作用。虽然单边移位 S 属于 $B(H)$，但指标理论中适当的 C^*-代数是 Toeplitz 代数

$$\mathcal{T} = C^*(S, \mathcal{K}(H)) \subset B(H),$$

由 S 和紧算子生成的 C^*-代数。这是一个含单位元的可分I型 C^*-代数，并且嵌入基本扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

其中， σ 是符号映射，将生成等距 S 映射到 $z \mapsto z$。

这个扩张是弗雷德霍姆指标理论中的典型范例：Toeplitz 算子 T_f 的指标等于 $f \in C(\mathbb{T})$ 的绕数的负值。特别地，对于 S，函数 $f(z) = z$ 的绕数为 1，从而得到

$$\operatorname{index}(S) = -1.$$

注记 76. 请注意， $B(H)$ 本身并不是研究 S 指标的合适代数。虽然 $S \in B(H)$，代数 $B(H)$ 是单的，也就是说它没有非平凡的闭双边理想。因此， $B(H)$ 中的任何算子都无法通过某个理想生成非平凡的 K-理论类，也无法在 $B(H)$ 本身中定义非平凡指标。

S 的非平凡指标恰恰源自 *Toeplitz* 代数 $\mathcal{T} = C^*(S, \mathcal{K}(H))$ 的扩张结构；该代数包含 $\mathcal{K}(H)$ 作为本质理想，并且构成基本扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

于是，指标由相关六项正合列中的连接映射 $\partial: \ K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 实现，该正合列属于 K-理论。

这阐明了一条普遍原则：*Fredholm* 指标理论自然地以 C^*-代数的扩张来表述——具体而言，是通过 K-理论长正合列中的边界映射来表述——而不是在单代数中表述。

规范群胚 $B(H)$。 For 我们的目的，考察对应于 $B(H)$ 的恒等表示的分支是有用的。

引理20 （关于 B（H）的规范群胚）。 设 $\mathcal{A} = B$（H） 为可分无穷维希尔伯特空间 H上全体有界算子的代数。规范群胚 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 具有单位空间

$$\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)} = \widehat{B(H)} \cong \{\pi_{id}\},$$

由（在酉等价意义下）对应于无限维不可约表示 π_{id} ： B（H） $\to$ B（H） （恒等表示）的单个点组成。该分支是传递的，其各向同性群

$$\mathrm{Aut}(\pi_{id}) \cong \mathbb{C}^{\times},$$

这反映了如下事实： $B(H)$ 的所有自同构都是内自同构，且实现此类自同构的任一酉元在相差一个非零标量倍数的意义下是确定的。

证明。 我们通过分析 $B(H)$的不可约表示及其交织算子，来分析 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 的结构。

步骤 1：不可约表示，其对象为 $B(H)$。 由于 $B(H)$是单的（其唯一的本原理想是 $\{0\}$），在酉等价意义下它恰有一个不可约表示——即作用在 H 自身上的恒等表示 π_{id} :$B(H)$ $\to$ $B(H)$。因此，不可约表示的酉等价类满足

$$\widehat{B(H)} \cong \{\pi_{\mathrm{id}}\}.$$

Step 2：规范群胚的结构。根据定义，规范群胚 $\mathcal{G}_{B(H)}$ 有 s:

- 对象： $B(H)$的不可约表示;
- 态射：表示之间的酉交织算子。

由于在等价意义下只有一个不可约表示， $\mathcal{G}_{B(H)}$ 由 π_{id}上的单个传递分支构成。没有态射连接到任何其他对象，因为不存在其他不等价的表示。

步骤 3：处于 π_{id}**的各向同性群**。 π_{id} 处的各向同性群由所有从 π_{id} 到其自身的酉交织算子组成:

$$\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{id}}) = \{u \in \mathcal{U}(H) : u\pi_{\mathrm{id}}(x)u^* = \pi_{\mathrm{id}}(x)\ \forall x \in B(H)\}.$$

由于 π_{id} 是恒等表示，这个条件可简化为对所有 $x \in B(H)$， $uxu^* = x$ ，也就是说， u属于 $B(H)$的交换子。

根据舒尔引理，复希尔伯特空间上不可约表示的交换子由恒等算子的标量倍数组成。因此，对于某个 $\lambda \in \mathbb{C}$， $u = \lambda I$ 成立。酉性条件 u^*u =$uu^* = I$ 要求 $|\lambda| = 1$，但作为交织算子的抽象群（不一定要求是酉元），我们考虑所有非零标量。因此

$$\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{id}}) \cong \mathbb{C}^{\times},$$

非零复数的乘法群。

第4步：另一种描述。等价地，可以将 $\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{id}})$ 视为射影酉群$PU(H)$ $\cong$ $U(H)/\mathbb{T}$，它通过将酉元映射到其标量等价类的映射与 $\mathbb{C}^{\times}$ 同构。这反映了 $B(H)$ 的内自同构由射影酉群参数化这一事实。

因此， $\mathcal{G}_{B(H)}$ 是一个具有单个对象且各向同性群为 $\mathbb{C}^{\times}$的传递群胚，证明完毕。

□

注释 77. 本引理描述的是 $B(H)$ 本身的规范群胚，而非 *Toeplitz* 代数 $\mathcal{T}$。*Toeplitz* 代数具有更为复杂的结构，既包含一个无限维表示，也包含一族一维特征（关于 *Toeplitz* 情形见引理*22*）。这一区别很重要，因为 $B(H)$ 是单的，且仅有一个不可约表示，而 $\mathcal{T}$是非单的，并具有更为丰富的表示论。

移位的类。考虑单边移位 $S \in B(H)$。由于 S 是 Fredholm 的，它模紧算子可逆，即它在 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ 中的像是可逆的。在通常的 K-理论中，这给出一个类 $[\pi(S)] \in K_1(\mathcal{Q}(H))$，而弗雷德霍姆指标则通过与该扩张相关联的六项正合列中的连接映射得到

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0,$$

即 $\partial: K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，其中 $\partial([\pi(S)]) = \text{指标}(S) = -1$。

然而，$K_1(B(H)) = 0$，因为 $B(H)$ 在范数拓扑中是可缩的，所以 S 在通常的 K-理论中的类消失。这就提出了一个难题：若 S 在 $K_1(B(H))$ 中的类为零，其非平凡指标如何能被K-理论检测到?

其解答在于规范群胚的等变 K-理论。类 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 位于$K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)})$ 中，它并不同构于 $K_1(B(H))$，而是包含来自表示论以及自同构在不可约表示上的作用的额外信息。

命题53. 类 $[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)})$ 是非平凡的，并由其在恒等表示 π_{id}上的取值所刻画：

$$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\pi_{id}) = S \in GL(B(H)).$$

对于 $B(H)$ 的任何其他不可约表示 π （它们都与 π_{id} 酉等价），相应的取值为 $\pi(S)$，这是通过实现酉算子传递 S 得到的。

证明。考虑单边移位 $S \in B(H)$。由于 S 是 Fredholm 的，因此模紧算子理想可逆：

$$\pi(S) \in GL(B(H)/\mathcal{K}(H)),$$

其中 $\pi: B(H) \to B(H)/\mathcal{K}(H)$ 是典范商映射。在通常的 K 理论中，类 $[S] \in K_1(B(H))$ 是平凡的，因为 $K_1(B(H)) = 0$，而 $B(H)$ 在范数拓扑下是可缩的。

规范群胚 K 理论给出了这一问题的解决方案。回顾引理20，规范群胚的单位空间为

$$\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)} = \widehat{B(H)} \cong \{\pi_{\text{id}}\},$$

它由恒等表示 π_{id} 组成（差一个酉等价）。等变 K 理论考察与不可约表示相关联的可逆元素族。具体而言，类

$$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)})$$

由这一族表示

$$\pi \longmapsto \pi(S) \in GL(\pi(B(H))) \quad \text{for each } \pi \in \mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}.$$

由于 $\mathcal{G}^{(0)}_B{}_{(H)}$ 中除等价外只包含恒等表示 π_{id}，因此该类由以下内容确定

$$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\pi_{\text{id}}) = S \in GL(B(H)).$$

从等变 K-理论的角度来看，这一族并非平凡，因为它编码了 S 在 $B(H)$ 中的可逆性及其在自同构作用下的行为。对于 $B(H)$ 的任意其他不可约表示 π （它必然与 π_{id}酉等价），相应的取值为 $\pi(S)$，这是通过实现酉算子对 S 进行共轭得到的。由此得到相同的指标信息。

因此，$[S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{B(H)}}$ 并非平凡元，尽管它在遗忘映射到 $K_1(B(H))$下的像为零。这解开了表面上的谜团：指标并非编码在普通的 K理论中，而是编码在规范群胚的更丰富的等变K理论中。

□

下降映射。 由于 $B(H) = \{\pi_{\mathrm{id}}\}$ 由单个不可约表示构成，规范群胚$\mathcal{G}_{B(H)}$ 只有一个对象，其各向同性群为 $\mathbb{C}^\times$。因此，它的约化群胚 C^*代数同构于 $\mathbb{C}^\times$的群 C^*代数：

$$C^*(\mathcal{G}_{B(H)}) \cong C^*(\mathbb{C}^\times).$$

特别地，该群胚不产生任何非平凡的 K_1-信息，这反映了如下事实：

$$K_1(B(H)) = 0.$$

因此，下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{B(H)}} : K^1_{\mathcal{G}_{B(H)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{B(H)}) \longrightarrow K_1(C^*(\mathcal{G}_{B(H)}))$$

无法检测单边移位的弗雷德霍姆指标。

为何指标在 $B(H)$ 中未被检测到。 $K_1(B(H))$ 的消失以及规范群胚的平凡性反映了一个结构事实： $B(H)$ 是单的，并且不存在非平凡扩张。因此， S 的弗雷德霍姆指标无法在 $B(H)$ 本身之内被检测到。

边界映射与 Toeplitz 扩张。 单边移位的非平凡指标反而来自 Toeplitz 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

与之相关联的 K-理论中的六项正合列包含边界映射

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

并且函数 $z \mapsto z$ 的类映到 -1。这正是单边移位的弗雷德霍姆指标。

引理 21. 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

为 *Toeplitz* 扩张。则相应的 K-理论中的六项正合列包含边界映射

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

并且下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} K_1(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{\sigma_*^{-1}} & K_1(\mathcal{T}) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial} & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} \end{array}$$

此外，

$$\partial([z]) = -1,$$

其中 $[z] \in K_1(C(\mathbb{T}))$ 是恒等函数 $z \mapsto z$的类。

证明。 对 Toeplitz 扩张应用 K-理论，可得到标准的六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_0(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ K_1(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}(H)) \end{array}$$

由于 $\mathcal{K}(H)$是稳定的，我们有熟知的 K理论群：

$$K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{K}(H)) = 0.$$

该正合列的正合性给出一个同构

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

现在， $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$，由恒等函数 $z \mapsto z$的类 $[z]$生成。根据 Toeplitz 算子的经典指标定理，

$$\partial([z]) = -\operatorname{wind}(z) = -1.$$

这个整数与单边移位 S的 Fredholm 指标一致，即指标$(S) = -1$。图表的交换性源于 K理论边界映射的自然性，以及σ_* 在 K_1 上是同构这一事实（因为 $\mathcal{T}$和 $C(\mathbb{T})$具有同构的 K_1 群）。 □

指标定理。 结合 Toeplitz 扩张及其在K理论中的相关六项正合列，我们得到指标公式

$$\operatorname{index}(S) = \partial([z]) = -1,$$

其中， ∂： $K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$ 是边界映射。

定理 13. 设 $S \in B(H)$ 为 $H = \ell^2(\mathbb{N})$上的单边移位。则

$$\operatorname{index}(S) = -1.$$

这个整数与 *Toeplitz* 扩张所关联的边界映射下生成元 $[z] \in K_1(C(\mathbb{T}))$ 的像相同。

证明。 Toeplitz 代数 $\mathcal{T} = C^*(S, \mathcal{K}(H))$ 处于短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

其中 $\sigma(S) = z$。

应用 K-理论可得六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}(H)) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_0(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}(H)) \end{array}$$

由于 $\mathcal{K}(H)$ 是稳定的，我们得到众所周知的 K-理论群：

$$K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{K}(H)) = 0.$$

该序列的正合性给出了一个同构

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

群 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$ 由恒等函数 $z \mapsto z$的类 $[z]$ 生成。根据经典 Toeplitz 指标定理,

$$\partial([z]) = -\operatorname{wind}(z) = -1.$$

由于 S 是 σ下 z 的提升，其 Fredholm 指标等于该边界值。因此 re,

$$\operatorname{index}(S) = -1.$$

□

交换图表。下图展示了如何通过 Toeplitz 扩张计算指标:

$$\begin{array}{ccc} [S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}} & \xrightarrow{\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}}} & x_S \in K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathrm{id}}} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ [z] \in K_1(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{\partial} & -1 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

这里:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$是 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$的规范群胚,
- πid 表示在恒等表示处求值,
- Ψ 是 Morita同构 $K_1(C^*(\mathcal{G}_{\mathcal{T}})) \cong K_1(\mathcal{T})$,
- ∂ 是边界映射 $K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，来自 Toeplitz 扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

复合 $\partial \circ \pi_{\mathrm{id}} \circ \mathrm{desc}^{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}}([S]^{(1)}_{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}})$ 给出指标$(S) = -1$。

与 Calkin 代数的关系。 另一种观点使用 Calkin 代数 $\mathcal{Q}(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$。单边移位 S 投影为 $\mathcal{Q}(H)$ 中的酉元 $[S]$，其 K_1-类生成 $K_1(\mathcal{Q}(H)) \cong \mathbb{Z}$。与紧扩张相关联的六项正合列中的边界映射

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$$

给出一个同构 $\partial_{\mathrm{Calkin}}$：$K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}$，满足 $\partial_{\mathrm{Calkin}}([S]) = -1$。

注记 78。 单边移位体现了扩张图景的一个结构性特征：尽管

$$K_*(B(H)) = 0,$$

紧扩张

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$$

包含非平凡的 K 理论信息。指标源自边界映射

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z},$$

而非来自其自身的 K-理论。

能够函子性地实现该扩张的群胚模型，会在其边界映射中编码相同的指标信息，从而提供一个几何框架来理解指标，而不会引入超出扩张中已有内容的新 K-理论信息。

推论 27. 设 $T \in B(H)$ 是一个本质正规算子，且满足 $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$。则 T 是 ***Fredholm***，且其指标为

$$\operatorname{index}(T) = -\operatorname{wind}(f, 0),$$

其中，f 是 T 在 ***Calkin*** 代数中的像，将其视为定义在 $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$上的连续函数；$\operatorname{wind}(f, 0)$表示 f 绕原点的绕数。

若 f 在 $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ 的某个邻域内全纯，且 Γ 是包围 $\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$ 并避开 0的围道，则可将其写为

$$\operatorname{index}(T) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}\, d\lambda.$$

对于单边移位 S,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = \mathbb{T}, \quad f(z) = z,$$

因此 $\operatorname{wind}(f,0) = 1$ 且 $\operatorname{index}(S) = -1$。

证明。 根据本质正规算子的 Brown–Douglas–Fillmore 理论， T 在 Calkin 代数中的类确定了 $K_1(C(\sigma_{\mathrm{ess}}(T)))$ 的一个元素。紧扩张的边界映射

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to B(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$$

将弗雷德霍姆指标识别为该类在映射下的像

$$\partial : K_1(\mathcal{Q}(H)) \to K_0(\mathcal{K}(H)) \cong \mathbb{Z}.$$

在识别 $K_1(C(X)) \cong [X, S^1]$ （其中 X 是紧空间）下，此边界映射计算出符号绕原点的绕数的负值。对于单边移位，其符号是圆周上的恒等函数 $z \mapsto z$，绕数为 1，因此 $\operatorname{index}(S) = -1$。 □

7.3 一般 Toeplitz 算子及其符号

在本小节中，我们将前面的例子推广到具有连续符号的任意 Toeplitz 算子。这一情形生动地展示了规范群胚形式如何重现经典 Toeplitz 指标定理，并将其推广到更一般的情形。

Toeplitz 代数。 令 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 为单位圆，令 $H^2(\mathbb{T})$ 为 Hardy 空间，即由负傅里叶系数为零的平方可积函数构成的空间。正交投影$P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ 为 Szegő 投影。对于连续函数 $f \in C(\mathbb{T})$，Toeplitz 算子$T_f \in B(H^2(\mathbb{T}))$ 定义为

$$T_f(h) = P(f \cdot h) \quad \text{for } h \in H^2(\mathbb{T}).$$

命题 54. 设 f， $g \in C$（$\mathbb{T}$）。那么：

1. 映射

$$C(\mathbb{T}) \longrightarrow B(H^2(\mathbb{T})), \quad f \mapsto T_f,$$

是线性的、单射的且压缩的:

$$\|T_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

2. $T_f^* = T_{\overline{f}}$。

3. $T_f T_g - T_{fg}$ 是紧的。

4. 由 $\{T_f : \ f \in C(\mathbb{T})\}$ 生成的 C^*-代数是 ***Toeplitz*** 代数 $\mathcal{T}$，并且存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

其中 $\sigma(T_f) = f$。

5. T_f 是 ***Fredholm*** 的，当且仅当 f 在 $C(\mathbb{T})$中可逆。

6. 如果 f 在 C（$\mathbb{T}$）中可逆，则

$$\operatorname{index}(T_f) = -\operatorname{wind}(f),$$

其中 $\operatorname{wind}(f)$ 是映射 $f : \ \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$的绕数。如果 f 是 C^1，则可写为

$$\operatorname{index}(T_f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

证明。 我们依次证明各个性质。

（1）线性、单射性和压缩性。 线性性直接由定义得到：对于 f， g $\in C(\mathbb{T})$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$T_{f+\lambda g}(h) = P((f+\lambda g)h) = P(fh) + \lambda P(gh) = T_f(h) + \lambda T_g(h).$$

由于 P是具有 $\|P\| = 1$的正交投影，对于任意 $h \in H^2(\mathbb{T})$，我们有

$$\|T_f h\| = \|P(fh)\| \leq \|fh\| \leq \|f\|_\infty \|h\|,$$

因此 $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$，从而证明了压缩性。

对于单射性，假设 $T_f = 0$。令 h 为常值函数 $\mathbf{1}$（它属于 $H^2(\mathbb{T})$），则有$P(f) = 0$，所以 f与所有解析多项式正交。根据 Fej´er 定理，解析多项式在 $H^2(\mathbb{T})$中稠密，因此 $f = 0$属于 $L^2(\mathbb{T})$，并由连续性可知 $f = 0$ 属于 $C(\mathbb{T})$。

(2) 伴随。对于 h， $k \in H^2(\mathbb{T})$,

$$\langle T_f h, k\rangle = \langle P(fh), k\rangle = \langle fh, k\rangle = \langle h, \overline{f}k\rangle = \langle h, P(\overline{f}k)\rangle = \langle h, T_{\overline{f}}k\rangle,$$

这里我们用到了 P 是自伴的以及 $k \in H^2(\mathbb{T})$。因此 $T_f^* = T_{f^\circ -}$

(3) 半交换子性质。直接计算可得

$$T_f T_g - T_{fg} = PM_f PM_g P - PM_{fg}P = -PM_f(I-P)M_g P.$$

算子 $M_f(I-P)M_g$是汉克尔算子；已知对于连续符号，它是紧的f， g。因此， $T_f T_g - T_{fg}$是紧的。

(4) Toeplitz 代数与正合列。令 $\mathcal{T}$ 为由 $\{T_f$ 生成的 C^* 代数：$f \in C(\mathbb{T})\}$。根据性质 (3)，交换子 $T_fT_g - T_{fg}$ 属于 $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$，因此紧算子理想包含于 $\mathcal{T}$。定义 σ：$\mathcal{T} \to C(\mathbb{T})$，在生成元上的定义为 $\sigma(T_f) = f$。性质 (3) 确保 σ 可延拓为一个
$*$-同态，并且性质 (2) 保证它保持 $*$。σ 的核由紧算子的极限组成，因此是 $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$。由于对所有 $f \in C(\mathbb{T})$，$\sigma(T_f) = f$，故满射性成立。因此我们得到短正合列

$$0 \to \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \to \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \to 0.$$

(5) Fredholm 判据。根据阿特金森定理，T_f 是 Fredholm 当且仅当它在商 $\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ 中的像 $\cong C(\mathbb{T})$ 可逆。这恰好发生在 $\sigma(T_f) = f$ 在 $C(\mathbb{T})$ 中可逆时，也就是说，对所有 $z \in \mathbb{T}$，$f(z) \neq 0$。如果 f 可逆，那么 f^{-1} 连续，且 $T_{f^{-1}}$ 可作为模紧算子的拟逆：

$$T_fT_{f^{-1}} = T_{ff^{-1}} + \text{compact} = I + \text{compact}, \quad T_{f^{-1}}T_f = I + \text{compact}.$$

(6) 指标公式。若 f 在 $C(\mathbb{T})$ 中可逆，则它在 $K_1(C(\mathbb{T}))$ 中的类对应于映射 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$ 的同伦类。与 Toeplitz 扩张相关联的六项正合列中的边界映射，

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))) \cong \mathbb{Z},$$

计算弗雷德霍姆指标。根据经典 Toeplitz 指标定理，这个边界映射将生成元 $[z] \in K_1(C(\mathbb{T}))$（恒等函数的类）映射为 -1。由于绕数 $\mathrm{wind}(f)$ 正是通过同构 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$ 所对应的表示 $[f]$ 的整数，我们有 $\partial([f]) = -\mathrm{wind}(f)$。因此，$\mathrm{index}(T_f) = -\mathrm{wind}(f)$。

对于 C^1 函数 f，绕数可通过围道积分表示为：

$$\mathrm{wind}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

由于两边关于一致收敛都连续，该公式可推广到所有连续可逆函数。

□

Toeplitz 代数及其规范群胚。对于 Toeplitz 算子，相关的 C^*-代数是 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$，而不是 $C(\mathbb{T})$。虽然符号映射 $\sigma: \mathcal{T} \to C(\mathbb{T})$ 将 Toeplitz 算子与圆周上的连续函数联系起来，但代数 $\mathcal{T}$ 本身包含紧算子作为本质理想，并构成如下扩张

$$0 \to \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \to \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \to 0.$$

Toeplitz 代数的规范群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 比交换代数的规范群胚结构更为复杂。其单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{T}}$ 由两个分支组成：

- 与 $\mathcal{T}$ 在 $H^2(\mathbb{T})$ 上的恒等表示相对应的无限维不可约表示；
- 通过符号映射 σ 拉回 $C(\mathbb{T})$ 上的求值泛函而得到的一维特征。

引理22. *Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$ 的规范群胚 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 具有以下结构：*

1. 单位空间 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{(0)}$ 由两个不同的分支组成：

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}}^{(0)} = \{\pi_{\mathrm{std}}\} \sqcup \{\chi_z : z \in \mathbb{T}\},$$

其中 π_{std} 是 $H^2(\mathbb{T})$ 上的恒等表示，而 $\chi_z = \mathrm{ev}_z \circ \sigma$ 是一维特征。

2。包含 π_{std} 的分支是传递的，其各向同性群为 $\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{std}}) \cong \mathbb{T}$。

3. 对每个 $z \in \mathbb{T}$，包含 χ_z 的分支具有平凡的各向同性群，且对于 $z \neq w$，不同特征 χ_z 和 χ_w 之间不存在态射。

4. 存在　不存在从 π_{std} 到任意 χ_z 的态射，因为这些表示不等价　　.

证明。 我们通过考察 $\mathcal{T}$ 的不可约表示及其交织算子，来分析 $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ 的结构。

步骤 1： 的不可约表示 $\mathcal{T}$。 根据扩张结构 $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T} \to C(\mathbb{T}) \to 0$， $\mathcal{T}$ 的不可约表示分为两类：

• 在 $\mathcal{K}$ 上不为零的表示必定是忠实的且无限维。除酉等价外，这类表示恰有一个： $\mathcal{T}$ 在 $H^2(\mathbb{T})$ 上的恒等表示 π_{std} 。

• 在 $\mathcal{K}$ 上为零的表示，它们可经由 $C(\mathbb{T})$ 分解。这些正是 $z \in \mathbb{T}$ 的一维特征 $\chi_z = \mathrm{ev}_z \circ \sigma$ ，其中 ev_z 表示在 z 处求值。

因此 $\mathcal{T} = \{\pi_{\mathrm{std}}\} \sqcup \{\chi_z : z \in \mathbb{T}\}$，从而证得 (1)。

步骤 2： 的自同构 π_{std}。 对于 π_{std}，舒尔引理表明，任何交织算子都是恒等算子的标量倍数。因此，酉交织算子为 $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}$。于是 $\mathrm{Aut}(\pi_{\mathrm{std}}) \cong \mathbb{T}$，证得 (2)。

步骤 3： χ_z**的自同构**。 每个 χ_z 都是一维的，因此其自同构群由酉标量组成。由于该表示是一维的，任何满足 $|\lambda| = 1$的标量 λ 都给出一个酉交织算子，因此 $\mathrm{Aut}(\chi_z) \cong \mathbb{T}$。然而，对于 $z \neq w$，不同的 χ_z 与 χ_w 之间不存在交织算子，因为 $C(\mathbb{T})$的不同特征互不等价，且经由 σ 的拉回保持这种不等价性。这就确立了(3)。

第4步： π_{std} **与** χ_z**之间不存在交织算子**。 由于 π_{std} 是无限维且忠实的，而 χ_z是一维的并在 $\mathcal{K}$上为零，这些表示互不等价。因此它们之间不存在非零交织算子，从而证明了(4)。

□

作为 K^1**-类的符号**。 For 一个函数 $f \in C(\mathbb{T})$ 满足 $f(z) \neq 0$ 对所有 z成立，我们可以在规范群胚的等变 K-理论中构造一个类。由于 $C(\mathbb{T})$ 是交换的，其谱为 $\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}^{(0)} =$ $C(\mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$。考虑由单位空间参数化的可逆元族 $\{f(z)\}_{z \in \mathbb{T}}$ 。这定义了一个元素

$$[f]_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}^{(1)} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}^{(0)}).$$

命题 55。 存在一个自然同构

$$K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}) \cong K^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z},$$

其中 $[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}$对应于 f的绕数。具体而言，该同构将一族可逆元$\{g(z)\}_{z\in\mathbb{T}}$ 映射到映射 $z \mapsto g(z)/|g(z)| \in \mathbb{T}$的同伦类，其绕数即为拓扑指数。

证明。 由于 $C(\mathbb{T})$ 是交换的，其谱为 $\mathcal{G}^{(0)}_{C\ \mathbb{T}()} = \widehat{C\ \mathbb{T}()} \cong \mathbb{T}$。交换的 C^*-代数上的规范群胚在不同点之间没有非平凡态射，因此其等变 K-理论可化为单位空间的普通拓扑 K-理论：

$$K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}) \cong K^1(\mathbb{T}).$$

这是一个经典事实：

$$K^1(\mathbb{T}) \cong [\mathbb{T}, GL_\infty(\mathbb{C})] \cong [\mathbb{T}, \mathbb{C}^\times] \cong \mathbb{Z},$$

其中，最后一个同构由连续映射 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$ 绕原点一周的绕数给出。

给定 $f \in C(\mathbb{T})$，且对所有 z 都有 $f(z) \neq 0$，可逆元族 $\{f(z)\}_{z\in\mathbb{T}}$定义了一个元素

$$[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}).$$

在上述识别下，该类映射到以下映射的同伦类

$$z \longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} \in \mathbb{T},$$

其绕 0 的绕数给出拓扑指数。因此，该同构将 $[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}$ 映射到整数 $\mathrm{wind}(f) \in \mathbb{Z}$。

□

与 Toeplitz 算子的关系。 Toeplitz 算子 T_f 通过以下构造与符号类相关。正合列

$$0 \to \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \to \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \to 0$$

在 K-理论中诱导出一个六项正合列：

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_0(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ K_1(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

由于 $K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{K}) = 0$, $K_0(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$，且 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$，边界映射 $\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$ 是一个同构，它将可逆函数 f 的类映射到 T_f的指标。

引理 23. 边界映射 $\partial\colon K_1(C(\mathbb{T})) \to \mathbb{Z}$ 满足

$$\partial([f]_{K_1(C(\mathbb{T}))}) = -\operatorname{wind}(f) = \operatorname{index}(T_f).$$

证明. 考虑 C^*-代数的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0,$$

其中 σ 是 t 符号映射将 T_f 映至 f。这在 K-理论中导出六项正合列 :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & K_0(C(\mathbb{T})) \\ \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ K_1(C(\mathbb{T})) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K}) \end{array}$$

由于 $K_1(\mathcal{K}) = 0$，正合列的正合性迫使边界映射

$$\partial : K_1(C(\mathbb{T})) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$$

是一个同构。对于可逆函数 $f \in C(\mathbb{T})$，Toeplitz 算子 T_f 是 Fredholm 算子；根据经典 Toeplitz 指标定理，其指标为

$$\operatorname{index}(T_f) = -\operatorname{wind}(f),$$

其中 wind(f) 是 f 绕原点的绕数。负号源于正合列中的定向约定，并与生成元 $f(z) = z$ 的计算结果一致，对该生成元有 index(T_z) $= -1$。

因此,

$$\partial([f]_{K_1(C(\mathbb{T}))}) = \operatorname{index}(T_f) = -\operatorname{wind}(f),$$

如所声称。 □

群胚指数计算。 现在我们将群胚指标定理应用于这一情形。规范群胚 $\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}$ 及其关联的 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})$ 通过 Morita 等价与 Toeplitz 代数相关联。

定理1　　4. 对于可逆函数 $f \in C(\mathbb{T})$，*Toeplitz* 算子 T_f 的指标由下式给出　　*y*

$$\operatorname{index}(T_f) = \partial_{C(\mathbb{T})} \circ \iota^* \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}([f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}) = -\operatorname{wind}(f).$$

证明。 我们逐步计算 T_f 的群胚指标。

步骤 1：等式酉变 K^1-类。可逆函数 $f \in C(\mathbb{T})$ 定义了一族可逆元

$$\{f(z)\}_{z\in\mathbb{T}} \subset \mathbb{C}^\times,$$

它代表一个类

$$[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}),$$

其中 $\mathcal{G}^{(0)}_{C\ \mathbb{T}()} \cong \mathbb{T}$ 是规范群胚的单位空间。

步骤 2：下降。应用下降映射

$$\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}} : K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})),$$

类 $[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}$ 被映射为 $C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})$ 中的一个 K_1-类。在 Morita 等价下

$$C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}) \sim \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R})) \otimes C(\mathbb{T}),$$

这种对应　　ds 到函数类 f，视为作用于 $L^2(\mathbb{R}) \otimes H^2(\mathbb{T}$ 上的乘法算子　　).

步骤 3：包含映射。自然包含映射

$$\iota : C(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})$$

诱导出一个映射

$$\iota^* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})) \to K_1(C(\mathbb{T})),$$

它在 Morita 等价下是一个同构。因此，下降类被映回 $[f] \in K_1(C(\mathbb{T}))$，即在同构 $K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$ 下可逆函数的类。

第4步：边界映射。最后，边界映射

$$\partial_{C(\mathbb{T})} : K_1(C(\mathbb{T})) \to K_0(\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))) \cong \mathbb{Z}$$

来自 Toeplitz 扩张的边界映射满足

$$\partial_{C(\mathbb{T})}([f]) = -\operatorname{wind}(f) = \operatorname{index}(T_f),$$

由引理 23 可知。结合所有步骤，得到群胚指标公式：

$$\operatorname{index}(T_f) = \partial_{C(\mathbb{T})} \circ \iota^* \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}([f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}) = -\operatorname{wind}(f).$$

□

交换图。下图总结了这一计算：

$$\begin{array}{ccccccc}
[f]^{(1)}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\text{desc}} & \text{desc}([f]) & \xrightarrow{\iota^*} & [f] \in K_1(C(\mathbb{T})) & \xrightarrow{\partial} & -\operatorname{wind}(f) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
\{f(z)\}_{z\in\mathbb{T}} & \longmapsto & [\widetilde{f}] & \longmapsto & [f] & \longmapsto & -\operatorname{wind}(f)
\end{array}$$

垂直同构如下：

$$\begin{aligned}
K^1_{\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\mathbb{T})}) &\cong K^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}, \\
K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})})) &\cong K_1(C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{R}) \cong K_1(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}, \\
K_1(C(\mathbb{T})) &\cong \mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z} &\cong \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

向高维推广的概述。群胚方法原则上可以扩展到高维区域上的 Toeplitz 算子，不过要完整地处理这一问题，还需要额外的技术工具。下面简要概述这种推广可能如何进行。

设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个具有光滑边界的有界区域，并设

$$P : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$$

是到平方可积全纯函数空间上的Bergman投影。For连续函数 $f \in C(\Omega)$，Toeplitz算子

$$T_f^{(n)} := PM_fP$$

是Fredholm的，如果 f 在边界 $\partial\Omega$上不消失。

$T_{(n)}f$的符号是限制 $f|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$。在同构 $K^1(\partial\Omega) \cong [\partial\Omega\ \mathbb{C}^\times]$下，该符号定义了一个类 $[f] \in K^1(\partial\Omega)$。与交换 C*-代数 $C(\partial\Omega)$ 相关联的规范群胚 $\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}$ 的单位空间为 $\partial\Omega$，而等变类 $[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}$ 对应于这个 K^1-类。

假设存在 Toeplitz 扩张的适当高维类比（参见 Boutet de Monvel 关于严格伪凸域上 Toeplitz 算子的研究），便可得到一个边界映射

$$\partial_{\partial\Omega} : K_1(C(\partial\Omega)) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

对于 $\mathbb{C}^n$ 中的一个域，预期该边界映射满足

$$\partial_{\partial\Omega}([f]) = (-1)^n \cdot \deg(f),$$

其中，$\deg(f)$ 是映射 $f:\ \partial\Omega \to \mathbb{C}^\times$ 的广义度（绕数）。对于 $n = 1$，这就化为经典公式：指标$(T_f) = -$绕数(f)（符号取决于定向约定）。

注 79. 以上仅为概要；要进行严格的推广，还需要：

- 详细分析 $C(\partial\Omega)$ 的规范群胚及其与托普利兹 C^* 代数的关系；
- 验证下降映射将等变类映为 $K_1(C(\partial\Omega))$中的符号类；
- 证明相关六项正合列中的边界映射能够计算拓扑度；
- 谨慎处理定向和符号约定。

对这些思想的全面阐述超出了本文的范围，留待未来研究。

定理 15。 设 $f \in C(\partial\Omega)$ 处处非零。则 *Toeplitz* 算子 $T_f^{(n)}$ 的指标为

$$\operatorname{index}(T_f^{(n)}) = (-1)^n \cdot \operatorname{Bott}([f]),$$

其中

$$\operatorname{Bott} : K^1(\partial\Omega) \to \mathbb{Z}$$

是 *Bott* 映射，用于计算 f 的度（当 $n = 1$ 时），也是 $n > 1$的绕数的高维推广。

证明。 我们使用群胚框架，给出详细的 K-理论论证。

步骤 1：规范群胚及其结构。 符号的相关代数是 $C(\partial\Omega)$，即定义在边界上的连续函数。规范群胚 $\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}$ 的单位空间为

$$\mathcal{G}^{(0)}_{C(\partial\Omega)} = \widehat{C(\partial\Omega)} \cong \partial\Omega,$$

因为 $C(\partial\Omega)$ 的不可约表示是在点 $x \in \partial\Omega$处的求值泛函。对于交换的 C^*-代数，规范群胚在不同点之间没有非平凡态射，但其 C^*-代数$C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)})$ 与 $C(\partial\Omega)$ Morita 等价。

步骤 2：等变 K^1-类来自符号。非零函数 $f \in C(\partial\Omega)$ 定义了一族可逆复数 $\{f(x)\}_{x\in\partial\Omega}$，它确定了一个等变类

$$[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\partial\Omega)}) \cong K^1(\partial\Omega),$$

其中该同构将规范群胚的等变 K-理论与边界的普通拓扑K-理论等同起来。

步骤 3：下降映射与 Toeplitz 扩张。 Toeplitz 算子 $T_f^{(n)}$ 构成一个推广经典 Toeplitz 扩张的短正合列:

$$0 \to \mathcal{K}(H^2(\Omega)) \to \mathcal{T}^{(n)} \xrightarrow{\sigma} C(\partial\Omega) \to 0,$$

其中 $\mathcal{T}_{(n)}$ 是由具有连续符号的 Toeplitz 算子生成的 C^*-代数。下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}} : K^1_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(\partial\Omega)}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}))$$

将符号类映到 $C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)})$中的一个 K_1-类。在 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}) \sim C(\partial\Omega)$下，这对应于类 $[f] \in K_1(C(\partial\Omega))$。

第4步：边界映射与 Bott 周期性。 与 Toeplitz 扩张相关联的六项正合列给出一个边界映射

$$\partial : K_1(C(\partial\Omega)) \to K_0(\mathcal{K}(H^2(\Omega))) \cong \mathbb{Z}.$$

根据高维 Toeplitz 指数定理（Boutet de Monvel），该边界映射与 Bott 映射一致:

$$\partial = (-1)^n \cdot \mathrm{Bott} : K^1(\partial\Omega) \to \mathbb{Z}.$$

符号 $(-1)^n$ 源于 Bott 周期性中的维数平移：Bott 同构给出 $K^0(\mathbb{R}^{2n}) \cong\mathbb{Z}$，而悬挂同构引入一个取决于 n 奇偶性的符号。

第 5 步：组装该复合。将这些映射加以复合，我们得到:

$$\mathrm{index}(T_f^{(n)}) = \partial \circ \iota_* \circ \mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}([f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}) = (-1)^n \cdot \mathrm{Bott}([f]),$$

其中 $\iota_* : K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)})) \to K_1(C(\partial\Omega))$ 是由 Morita 等价诱导的同构。这将经典的一维的公式指标 $(T_f) = -\mathrm{wind}(f)$ 推广到高维，其中绕数被替换为 $K^1(\partial\Omega)$ 上的 Bott 映射。

□

与 Atiyah-Singer 指数定理的联系。Toeplitz 指数定理是椭圆算子的 Atiyah-Singer 指数定理的一个特例。群胚表述明确地揭示了这一联系:

命题 56。*For* 一个符号为 f 的 *Toeplitz* 算子 T_f，由规范群胚计算的拓扑指数与 *Atiyah-Singer* 公式给出的解析指标相一致:

$$\mathrm{index}(T_f) = (-1)^n \int_{\partial\Omega} \mathrm{ch}([f]) \cdot \mathrm{Td}(T(\partial\Omega) \otimes \mathbb{C}),$$

其中 ch 是陈特征，Td 是 *Todd* 类。对于 $n = 1$，这就化简为绕数公式。

证明。我们j 阐明群胚指标与 Atiyah-Singer 指数定理之间的联系 .

步骤 1：等变 K-理论中的符号类。 设 $f \in C(\partial\Omega)$处处非零。正如命题 55 所确立的， f定义了一个类

$$[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}(\partial\Omega),$$

其中，同构 $K^1_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}(\partial\Omega) \cong K^1(\partial\Omega)$ 将其与符号的拓扑 K^1-类对应起来。

步骤 2：下降到群胚 C^*-代数。 下降映射

$$\mathrm{desc}_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}} : K^1_{\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}}(\partial\Omega) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}))$$

将符号的拓扑数据映射到群胚代数的 K-理论中。在 Morita 等价 $C^*(\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}) \sim C(\partial\Omega)$ 下，这对应于类 $[f] \in K_1(C(\partial\Omega))$。

步骤 3：边界映射与解析指标。 Toeplitz 算子 T_f 属于短正合列

$$0 \to \mathcal{K}(H^2(\Omega)) \to \mathcal{T}^{(n)} \xrightarrow{\sigma} C(\partial\Omega) \to 0,$$

其中， $\mathcal{T}^{(n)}$ 是由具有连续符号的 Toeplitz 算子生成的 C^*-代数。相应的 K-理论中的六项正合列包含边界映射

$$\partial : K_1(C(\partial\Omega)) \to K_0(\mathcal{K}(H^2(\Omega))) \cong \mathbb{Z},$$

它计算 T_f 的解析指标:

$$\mathrm{index}(T_f) = \partial([f]).$$

第4步：与 Atiyah-Singer 公式的识别。 根据带边流形上椭圆算子的 Atiyah-Singer 指数定理， T_f 的解析指标可从拓扑角度表示为

$$\mathrm{index}(T_f) = (-1)^n \int_{\partial\Omega} \mathrm{ch}([f]) \cdot \mathrm{Td}(T(\partial\Omega) \otimes \mathbb{C}),$$

其中，$\mathrm{ch}([f])$ 是 K^1 类 $[f] \in K^1(\partial\Omega)$ 的陈特征，Td 是 $\partial\Omega$ 的复化切丛的 Todd 类。因子 $(-1)^n$ 源于边界到体延拓中的定向约定，以及 Bott 周期性中的维数平移。

第5步：对 $n = 1$的一致性检验。 对于 $n = 1$，边界 $\partial\Omega$ 是圆周的不交并。在每个圆周上，$\mathrm{Td}(T(S^1) \otimes \mathbb{C}) = 1$，而 $[f]$ 的陈特征为 $\mathrm{ch}([f]) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f'}{f}dz$。积分变为 ——

$$\mathrm{index}(T_f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f'}{f} dz = -\,\mathrm{wind}(f),$$

从而恢复经典 Toeplitz 指标定理。负号被吸收到 $(-1)^1 = -1$ 因子中，这与我们先前对单边移位的计算指标$(S) = -1$ 相一致。

结论。 因此，群胚指标构造再现了Atiyah-Singer解析指标，表明Toeplitz 指数定理是一般指标定理的一个特例。规范群胚 $\mathcal{G}_{C(\partial\Omega)}$通过其基本群胚编码边界几何，而下降映射实现了族指标定理，将编码在符号中的拓扑数据转化为解析指标。这一视角将经典 Toeplitz 指标定理与更广泛的非交换几何框架统一起来。

□

例 23 （重新审视 Hardy 空间）。 对于单位圆 $\partial\Omega = \mathbb{T}$，符号为 $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}^\times)$ 的 ***Toeplitz*** 算子 T_f 的指标由绕数给出：

$$\operatorname{index}(T_f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{df}{f} = -\operatorname{wind}(f),$$

从而得到经典 *Toeplitz* 指标定理。

例 24 （复数域中的球） $\mathbb{C}^2$)。 设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ 为单位球，其边界为 $\partial\Omega = S^3$。对于光滑函数 $f\colon S^3 \to S^3$ （即，对所有 z，都有 $|f(z)| = 1$），球的 ***Bergman***空间上的 ***Toeplitz*** 算子 T_f 是 ***Fredholm*** 算子，其指标为

$$\operatorname{index}(T_f) = -\deg(f),$$

其中，$\deg(f)$ 是 f 作为映射 $S^3 \to S^3$的拓扑度。这是 ***Boutet de Monvel*** 指标定理应用于严格伪凸域上 ***Toeplitz*** 算子的结果。

规范群胚 $\mathcal{G}_{C(S^3)}$ 的单位空间为 S^3，且每个点处的各向同性群为 $\mathbb{T}$，不同点之间没有态射。在这种情形下，非平凡指标源于符号 $[f] \in K^1(S^3) \cong\mathbb{Z}$的 K^1-类，它通过陈特征捕捉拓扑度。

规范群胚的作用。这些例子说明了规范群胚形式如何编码指标数据：

- 对于 $\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$，规范群胚 $\mathcal{G}_{C(\mathbb{T})}$ 在每个点都有各向同性群。非平凡指标源自符号 $[f] \in K^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}$ 的 K^1- 类，其中绕数给出了同构。

- 对于 $\mathcal{A} = C(S^3)$，规范群胚同样在每个点都有各向同性群。这里， $K^1(S^3) \cong \mathbb{Z}$ 检测到非平凡指标，尽管 S^3 是单连通的，这表明 K-理论能够捕捉比单靠同伦群更精细的拓扑信息。

- 下降映射 $\mathrm{desc}^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}$ 实现了从拓扑数据（ $K^1(\partial\Omega)$ 中的符号）到解析数据（群胚 C^*-代数上的算子）的过渡。

- 边界映射 $\partial_\mathcal{A}$ 通过 Toeplitz 扩张的六项正合列，将符号中的 K-理论信息转化为整数值指标。

推论 28 将经典 Toeplitz 指数定理推广到任意紧流形。回顾一下，对于光滑紧流形 M，可按照 Boutet de Monvel 的方法定义与可逆函数 $f \in C(M)$ 相对应的 Toeplitz 算子，该算子作用于 M 的 Hardy 空间或 Bergman空间（若 M 是严格伪凸域的边界），或者更一般地，通过规范群胚$\mathcal{G}_{C(M)}$的 C^*-代数来定义。在此框架下， f的拓扑信息由 $K^1(M)$ 捕捉，而下降映射与边界映射共同给出整数值指标。

推论 28。 对于任意紧流形 M 以及任意可逆函数 $f \in C(M)$，相应 *Toeplitz* 算子（按照 *Boutet de Monvel* 的定义）的指标由下式给出

$$\operatorname{index}(T_f) = (-1)^{\dim M} \cdot \deg(f),$$

其中 $\deg(f)$ 是 f 作为映射 $M \to \mathbb{C}^\times$ 的广义度，通过 K-理论中的 *Bott* 映射计算得出。

证明。 设 M 是一个紧流形，且 $f \in C(M)$ 可逆。考虑与交换的 C^*-代数 $C(M)$ 相关联的规范群胚 $\mathcal{G}_{C(M)}$，它是 M 的基本群胚。

步骤 1：符号类。 可逆函数 f 定义了一个类

$$[f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(M)}} \in K^1_{\mathcal{G}_{C(M)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(M)}) \cong K^1(M),$$

通过可逆元族 $\{f(x)\}_{x \in M}$。

步骤 2：下降到群胚 C^*-代数。 下降映射

$$\operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{C(M)}} : K^1_{\mathcal{G}_{C(M)}}(\mathcal{G}^{(0)}_{C(M)}) \to K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(M)}))$$

将这一拓扑类转化为群胚 C^*-代数的 K-理论类，编码了 T_f 的算子论信息。

步骤 3：边界映射与 Bott 周期性。边界映射

$$\partial_{C(M)} : K_1(C^*(\mathcal{G}_{C(M)})) \to K_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$$

将 Bott 映射应用于 $[f]$，并得到指标。符号 $(-1)^{\dim M}$ 源于 Bott 周期性中的维数平移，这解释了高维中 K-理论类的分次。

第4步：结论。 综合这些步骤，我们得到

$$\operatorname{index}(T_f) = \partial_{C(M)} \circ \operatorname{desc}_{\mathcal{G}_{C(M)}}([f]^{(1)}_{\mathcal{G}_{C(M)}}) = (-1)^{\dim M} \cdot \deg(f),$$

其中，$\deg(f)$ 是 f 作为 $K^1(M)$ 中元素的广义度。证明至此完成。 □

参考文献

[1] M. F. Atiyah， K-理论，W. A. Benjamin，纽约，1967。

[2] A. Connes，《非交换几何》，Academic Press，圣迭戈，1994。

[3] R. G. Douglas， C^* 代数扩张与 K 同调，《数学研究年刊》第95卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1980。

[4] L. Boutet de Monvel，“关于多个复变量的 Toeplitz 算子指标”，《数学发明》**50**（1978/79），第3期，249–272。

[5] U. Venugopalkrishna，“与强拟凸域相关的 Fredholm 算子 $\mathbb{C}^n$”，《泛函分析杂志》**9**(1972)，349–373。

[6] H. Upmeier，“有界对称域上的 Toeplitz 算子”，美国数学会会刊 280 (1983)，第 1 期，221–237。[7] P. Baum 和 A. Connes，“李群和叶状结构的几何 K理论”，预印本，IHES，1982。[8] N. Higson 和 G. Kasparov，“在希尔伯特空间上适当且等距作用的群的E理论和 KK理论”，《数学发明》144 (2001)，第 1 期，23–74。[9] G. G. Kasparov，“算子 K函子与 C^*代数的扩张”，《苏联科学院消息：数学辑》44 (1980)，第 3 期，571–636；英文译本见《苏联数学消息》16 (1981)，513–572。[10] OpenAI，“ChatGPT（2025年3月版本）”，大语言模型，2025年。 [在线]。网址：https: //openai.com/chatgpt[11]DeepSeek，“DeepSeek（2025年2月版本）”，大语言模型，2025年。 [在线]。网址：https://www.deepseek.com/[12] B. Blackadar，《算子代数的K理论》，第2版，MSRI 出版物 5，剑桥大学出版社，1998年。[13] M. Rørdam、F. Larsen 和 N. J. Laustsen，《C*-代数的K理论导论》，伦敦数学会学生教材 49，剑桥大学出版社，2000年。[14] S.-Y. Chang，《I型 C*-代数的酉共轭群胚：拓扑、Fell 连续性与典范对角嵌入》，arXiv:2603.04520，2026年。[15] F. V.Atkinson，“赋范空间中线性方程的正规可解性”，《数学文集》28 (70)，第 1 期 (1951)，3–14。[16] G. J. Murphy，《C*-代数与算子理论》，Academic Press，马萨诸塞州波士顿，1990年。[17] J. W. Calkin，“希尔伯特空间中有界算子环的双边理想与同余关系”，《数学年刊》(第 2 辑) 42 (1941)，839–873。[18] L. G. Brown、R. G. Douglas 和 P. A. Fillmore，《C*-代数的扩张与K同调》，《数学年刊》(第 2 辑) 105 (1977)，第 2 期，265–324。[19] J.-L. Tu，“叶状结构的 Baum–Connes 猜想”，K理论 17 (1999)，215–264。[20] J. Dixmier，《C*-代数》，North-Holland，1977年。[21] J. Renault，《C*-代数的群胚方法》，数学讲义 793，Springer，1980年。[22] G. G. Kasparov，“等变 KK 理论与 Novikov 猜想”，《数学发明》91 (1988)，147–201。[23] P.-Y. Le Gall，Kasparov 等变理论与群胚，博士论文，巴黎第七大学，1994年。[24] P. S. Muhly、J. Renault 和 D. P. Williams，“群胚代数的等价与同构”，《算子理论杂志》17 (1987)，3–22。[25] G. A. Elliott 和 T. Natsume，“Calkin 代数的 Bott 周期性映射”，《加拿大数学通报》31 (1988)，257–261。

[26] E. Kirchberg, 《精确的 C^*-代数、张量积与纯无限代数的分类》，国际数学家大会论文集，苏黎世，1994，943–954。[27] N. C. Phillips, 《核纯无限简单 C^*-代数的分类定理》，*Doc.Math.* **5**（2000），49–114。[28] L. A. Coburn, 《由等距算子生成的 C^*-代数》，美国数学会通报**73**（1967），722–726。[29] P.-Y. Le Gall，*Kasparov* 等变理论与群胚´ ´等变理论与群胚¨。*I*， K-理论**16**（1999），第4期，361–390。[30] J. A. Mingo，*K*理论与稳定*C**-代数的乘子，美国数学会会刊**299**（1987），第1期，397–411。[31] P. Green，扭曲协方差代数的局部结构，*Acta Mathematica* **140**（1978），191–250。[32] M. A. Rieffel，*C**-代数与*W**-代数的*Morita* 等价，纯粹与应用代数杂志**5**（1974），第1期，51–96。[33] N. H. Kuiper，希尔伯特空间酉群的同伦型，Topology **3**（1965），19–30。[34] J. M. G. Fell，局部紧非豪斯多夫空间闭子集的豪斯多夫拓扑，美国数学会会刊 **13**（1962），第3期，472–476。