arXiv:2603.07407v1 [math.CA] 8 Mar 2026

骤降区之前局部化算子特征值的精确估计

Aleksei Kulikov

摘要。我们研究两种密切相关但又有所不同的局部化算子：作用于区间对 $S_{I,J} = P_I\mathcal{F}^{-1}P_J\mathcal{F}P_I$的时频局域化算子，以及将相干态变换局部化到正方形 L_Q的算子。两者的特征值都呈现相同的相变：如果 $|I||J| = |Q| = c$，那么前 $\approx c$ 个特征值非常接近 1，接下来有 $o(c)$ 个中间特征值，其余特征值则非常接近 0。此外，对于这两种算子，如果 $n < (1-\varepsilon)c$，且 $\varepsilon > 0$ 固定，那么特征值与 1 的距离呈指数级小。本文旨在当 n 接近 c时，为这些特征值建立精确的一致界，并考察 $S_{I,J}$ 与 S_Q的谱之间是否存在定性差异。我们证明，对于 $n < c - c^{0.99}$，例如，在时频局域化情形下有 $-\log(1-\lambda_n(c)) \asymp \frac{c-n}{c-n}\log(\frac{2c}{c-n})$；而在相干态变换情形下有 $-\log(1-\mu_n(c)) \asymp (\sqrt{c}-\sqrt{n})^2$, 。当 $c-n = o(c)$时，后者小得多，因此这两种情形确实存在差异。证明的关键在于这些局部化算子的复解析解释。

1. 引言与主要结果

1.1. 时频局部化算子。 对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^d$， P_A 表示乘法算子；对于一对集合 A, $B \subset \mathbb{R}^d$，我们定义与之关联的时频局部化算子为 $S_{A,B} = P_A\mathcal{F}^{-1}P_B\mathcal{F}P_A$，其中 $\mathcal{F}$ 是傅里叶变换

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

对于任意集合 A, B，算子 $S_{A,B}$ 是自伴且半正定的。若 A 和 B的测度有限，则 $S_{A,B}$ 是迹类算子，且 $\mathrm{tr}(S_{A,B}) = |A||B|$，特别地，它是紧算子。因此，它具有一列特征值

$$1 > \lambda_1(A,B) \geq \lambda_2(A,B) \geq \ldots \geq 0.$$

注意到，第一个特征值严格小于 1，因为不存在非零函数 $\hat{f}$ 使得 f 和 f 的支撑具有有限测度——这被称为 Benedicks 和 Amrein–Berthier 的不确定性原理 [2, 1]。Landau、Pollak 和 Slepian [24, 15, 16] 通过一系列论文开启了对 $S_{A,B}$ 谱性质的研究。此外

近期还有关于 $S_{A,B}$ 特征值分布的一致估计，这些估计基于对集合 A, B 及其边界的各种几何假设，参见例如 [19]。

本文将聚焦于最基本且研究最充分的情形： $d = 1$ 和A， B 是实数轴上的两个区间。利用线性变量变换不难看出，若平移集合 A或 B中的任意一个，或将（A， B）替换为（rA， $r^{-1}B$），特征值 λ_n（A， B）都不会改变（当然，特征函数会在这些变换下发生变化）。因此，对于两个区间的情形，特征值只取决于它们长度的乘积 $c = |A||B|$，于是我们得到一个序列

$$1 > \lambda_1(c) > \lambda_2(c) > \ldots > 0.$$

我们关注参数 c 较大的情形。结果表明，此时特征值会发生相变：首先有 $\approx c$ 个特征值非常接近 1（但根据前述不确定性原理，它们严格小于 1），接着只有$\asymp \log c$ 个中等大小的特征值，它们构成所谓的骤降区，其余特征值则迅速衰减至零。

衰减区是与应用最为相关的区域，其中特征值的行为已经得到了相当深入的理解。在 [25] Widom 对固定的 c 情况下建立了特征值的精确衰减规律，特别证明了 $\lambda_n(c)$ 关于 n 超指数级衰减；随后，人们开展了一系列工作，以建立该区域中特征值的一致估计，其中尤其包括 Osipov [22]以及 Bonami、Jaming 和 Karoui [3], 的工作，最终由 Bonami 和 Karoui [4]给出了 $n \geq c$ 时特征值的极其精确的近似。

定理 1.1 （[4, 定理 1]）。 对所有 $n \geq c \geq 10$， 我们都有

$$\lambda_n(c) = \exp\left(-\frac{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}\int_{\Phi\left(\frac{c}{n+\frac{1}{2}}\right)}^{1}\frac{1}{tE(t)^2}dt + O(\log(n))\right),$$

其中 $E(t) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2x^2}{1-x^2}}dx$ 是第二类椭圆积分，而 Φ 是函数 $t \to \frac{t}{E(t)}$ 的反函数。

注 1.2. 在本节以及以下引用的部分结果中，定理的精确表述可能与已发表版本略有不同，因为这些版本采用了不同的傅里叶变换归一化方式。

在骤降区中，第一个基本估计由 Slepian [23] 发现，并由 Landau 和 Widom [17], 严格证明，为骤降区宽度是对数级这一说法提供了一种量化方式。

定理 1.3。 对于固定的 $b \in \mathbb{R}$ ， 我们有

$$\lim_{c\to\infty} \lambda_{n(c,b)}(c) = (1+e^b)^{-1},$$

wh其中 $n(c, b) = [c + \frac{1}{\pi^2} b \log(c)]$ ， 且 $[t]$ 是不大于.....的最大整数 t.

由于定理 1.3 中对 b 的依赖是指数级的，若转而考虑集合 $\Lambda_\varepsilon(c) = \{n : 1-\varepsilon > \lambda_n(c) > \varepsilon\}$ 的计数函数，那么对 ε 的依赖将是对数级的。然而，由于定理 1.3 b 要求固定（且 [17] 中的证明不允许 b 变化），因此关于 $|\Lambda_\varepsilon(c)|$ 的一致上界问题值得研究。在 [9] ，Israel 证明，对于任意 $\eta > 0$ ，存在 A_η ，使得对所有 $c > 10$ 和 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ，都有 $|\Lambda_\varepsilon(c)| \le A_\eta \log^{2+\eta}(c\varepsilon^{-1})$。最近，Karnik、Romberg 和 Davenport [10] 将其改进为近乎最优的上界，并证明了以下结果。

定理 1.4 ([10, 定理 3])。 对于所有 $c > 0$ 和 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ， 我们有

$$|\Lambda_\varepsilon(c)| \le \frac{2}{\pi^2} \log(50c+25) \log\left(\frac{5}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right) + 7.$$

请注意，这里对 c 和 ε 的依赖是对数级的，正如预期；常数 $\frac{2}{\pi^2}$ 是最佳可能的，这可由定理 1.3 看出（该常数为 $\frac{2}{\pi^2}$ ，而不是 $\frac{1}{\pi^2}$，因为我们必须同时覆盖较大的正 b 和较大的负 b ）。

本文将研究骤降区之前的特征值 $\lambda_n(c)$的行为，也就是当 $n < c$时的情况。对于固定的 n ， Fuchs [6] 证明这些特征值满足

$$1 - \lambda_n(c) \sim 4\sqrt{2} \frac{(4\pi)^n}{n!} c^{n-\frac{1}{2}} e^{-\pi c},$$

特别是，它们与 1 指数级接近。Bonami、Jaming 和 Karoui [3] 将这种指数级接近性推广到了 $n < 0.58c$ ，随后作者 [13] 又将其推广到任意 $\delta > 0$ 下的 $n < (1-\delta)c$ ，但代价是当 $\delta \to 0$时指数变差。

定理 1.5。 对于任意 $\delta > 0$ ， 存在 $\gamma = \gamma(\delta) < 1$ ， 使得对于所有足够大的 c 以及所有 $n < (1-\delta)c$ ， 均有

$$\lambda_n(c) \ge 1 - \gamma^c.$$

本工作的主要目标是探究定理 1.5 中纯指数级的逼近如何转变为定理 1.3 和定理 1.4 中带有额外 $\log(c)$ 因子的指数级逼近。我们证明，连接这两种情形的因子是 $\log(\frac{2c}{c-n})$：当 $n < (1-\delta)c$ 时，它是常数；而当 $n - c$ 很小时，它的表现类似于 $\log(c)$。具体而言，我们证明以下两个定理，分别给出 $n < c$ 的特征值的下界和上界。

定理 1　　.6. 存在数 $c_0, \eta > 0$，使得对于 $c > c_0$ 和 $n < c$，我们有

$$\lambda_n(c) > 1 - \exp\left(-\eta \frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}\right).$$

定理 1.7. 存在数 c_0、$\kappa > 0$，使得对 $c > c_0$ 以及 $n < c - \log^2(c)$，我们有

$$\lambda_n(c) < 1 - \exp\left(-\kappa \frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}\right).$$

备注 1.8. 条件 $n < c - \log^2(c)$ 对应于如下事实：在我们的证明中多处出现关于 c 的多项式损失，因此我们要求定理中的指数因子至多是 c 的某个负幂，这意味着我们需要 $c-n$ 至少是 $\log^2(c)$ 的某个倍数。事实上，我们仅对 $n < c - c^{7/8}$ 证明了定理 *1.6*，并通过结合定理 *1.3* 与定理 *1.4* 来涵盖其余情形。我们猜想，尽管无法证明，定理 *1.7* 中的 $\log^2(c)$ 项同样可以去掉。

备注 1.9. 最近，*Martin DamLarsen* 与作者 [14] 在研究任意维数集合的特征值 $\lambda_n(A, B)$ 分布的过程中，用完全不同的、纯粹的傅里叶分析方法证明了定理 *1.6*。

1.2. **相干态变换**。在时域和频域中局部化函数的另一种方法，是考察它的相干态变换；在信号处理文献中，这也称为短时傅里叶变换。为此，我们固定一个 L^2 归一化的窗函数 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 并考察函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 与 φ 的时频平移之间的内积：

$$V_\varphi f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\varphi_{x,\omega}(t)}dt,$$

其中 $\varphi_{x,\omega}(t) = \varphi(t-x)e^{2\pi i t\cdot\omega}$。关于这一对象在物理学中的应用，参见 [11]。在信号处理中，Daubechies [5] 引入了短时傅里叶变换，用以捕捉函数 f 的相空间图像。由柯西–施瓦茨不等式可立即得出，$|V_\varphi f(x,\omega)| \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$；并且已知 $V_\varphi f$ 是连续函数，$\|V_\varphi f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$，此外还有如下恒等算子的分解

$$f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} V_\varphi f(x,\omega)\varphi_{x,\omega}dxd\omega.$$

关于这些事实的证明以及相关理论的更详细阐述，参见例如 [7, 第 3] 章。得到恒等算子的这一表示后，为了获得局部化[4]

算子，我们自然要限制积分所涉及的区域。具体而言，对于可测集 $Q \subset \mathbb{R}^{2n}$，我们考虑

$$L_Q f = \int_Q V_\varphi f(x,\omega)\varphi_{x,\omega} dx d\omega.$$

这是一个自伴、半正定算子，且具有 $L_Q \leq$Id。不过，与时频局部化算子的情形不同，通常 $V_\varphi L_Q f$ 的支撑会遍及整个 $\mathbb{R}^{2n}$。

注意， L_Q 也取决于窗函数 φ。本文中，我们只考虑一维高斯函数 $\varphi(t) = 2^{1/4}e^{-\pi x^2}$ 的情形，这也是 [5] 所考虑的情形，且目前已有的大多数结果都针对这一情形，因此我们省略对 φ 的依赖。若 Ω 的测度有限，则 L_Q 是迹类算子，且 $\mathrm{tr}(L_Q) = |Q|$ （例如参见 [20, 命题 3.1]）。该文还证明，在测度给定的集合中，圆盘使 L_Q 的希尔伯特–施密特范数达到最大。因此，它是一个紧算子，因而具有一列特征值

$$1 > \mu_1(Q) \geq \mu_2(Q) \geq \ldots \geq 0.$$

这里，与时频局部化的情形一样，可以证明第一个特征值严格小于 1（否则， $V_\varphi f$ 必须在 Q 外为 0，这将与例如我们稍后要用到的关于$V_\varphi f$ 的复解析解释的唯一性定理相矛盾）。

如果集合 Q 是以原点为中心的圆盘，那么厄米函数就是 L_Q 的特征函数（如果 Q 是径向对称的，这一结论仍然成立，但特征值的顺序不那么容易确定，关于这一问题的研究见 [8] ）。特别是，在这种情况下可以得到非常精确的特征值估计。不过，从与时频局部化算子进行比较的角度来看，值得关注的是 Q 为面积 c 的正方形的情形。在这种情况下，特征值 $\mu_n(c)$ 呈现出与时频局部化算子相似的相变：先是 $\approx c$ 个特征值接近 1，接着是 $o(c)$ 个中间特征值，随后特征值迅速趋于 0。然而，这里的骤降区宽得多，其宽度为 $\sqrt{c}$ 量级，而不是 $\log(c)$ 量级，见 [21] （该文假设区域为 C^2，但其证明同样适用于正方形。此外，该文并未用到 φ 为高斯函数这一假设，其论证适用于许多不同的区域和窗函数）。

除了像定理 1.3 和定理 1.4 那样关于骤降区宽度的一般估计之外，此前关于特征值 $\lambda_n(c)$ 的所有下界，都或隐式或显式地经由某个区域 Q （圆盘或正方形）上的算子 L_Q 得到，

非正式地说，当 $n < c$ 时， $\mu_n(c)$ 给出了 $\lambda_n(c)$ 的一个下界。特别地，当 $n < (1-\varepsilon)c$ 时， $\mu_n(c)$ 也以指数方式接近 1。因此，自然产生的问题是：当 n 接近 c 时，$\mu_n(c)$ 与 $\lambda_n(c)$ 是否接近。我们证明情况并非如此，并且当 $c-n$ 很小时， $1-\mu_n(c)$ 显著大于 $1-\lambda_n(c)$。

定理 1.10. 存在数 c_0、$\eta > 0$，使得对所有 $c > c_0$ 和 $n < c - c^{0.99}$，我们有

$$\mu_n(c) > 1 - \exp(-\eta(\sqrt{c} - \sqrt{n})^2).$$

定理 1.11. 存在数 c_0、$\kappa > 0$，使得对所有 $c > c_0$ 和 $n < c - \sqrt{c\log(c)}$，我们有

$$\mu_n(c) < 1 - \exp(-\kappa(\sqrt{c} - \sqrt{n})^2).$$

特别地，定理 1.11 与定理 1.6 共同表明，若 $c - n = o(c)$，则 $1-\mu_n(c)$ 与 $1-\lambda_n(c)$ 之间存在渐近分离。

注 1.12. 条件 $n < c - \sqrt{c\log(c)}$ 出现的原因与定理 *1.7* 中相同——我们存在一些关于 c 的多项式损失，必须对它们加以补偿。出现 $c^{0.99}$ 项的原因在于我们依赖于引理 *4.1* 中的圆盘堆积；特别地，我们的论证从根本上不允许 c 的幂为 $\frac{1}{2}$，甚至不允许为 $\frac{1}{2}+o(1)$，因此我们并未试图优化幂 0.99。

1.3. **证明策略**。 定理 1.6 和定理 1.10 的证明，以及定理 1.7 和定理 1.11 的证明，遵循相同的基本思路：我们首先从适当的一侧出发，采用一种简单的泛函分析的方法来界定特征值，然后在各自的情形中加以实施，而这构成了主要的工作量。

对于定理 1.6 和定理 1.10，我们使用特征值的极小极大刻画

$$\lambda_n(c) = \sup_{\dim V = n} \inf_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|S_{I,J} v\|}{\|v\|}$$

以及关于 L_Q 的类似公式。为了从下方界定这个表达式，我们必须构造一个维数为 n 的子空间，使其给出所需的下界。要构造一个维数为 n 的子空间，自然的方法是取 n 个线性无关的向量 v_1， v_2，……， v_n 并令 V 为它们的线性张成。由此要得到第 n 个特征值的下界，只需满足以下两个条件

(i) 对于所有 $k = 1, 2, \ldots, n$，比值 $\frac{\|Sv_k\|}{\|v_k\|}$ 接近 1；(ii) 任意线性组合 $\sum_{k=1}^n c_k v_k$，$c_k \in \mathbb{C}$ 的范数都不会比各项 $\sum_{k=1}^n |c_k| \|v_k\|$ 的 ℓ^1-范数小太多。6

如果满足这两个条件，那么我们可以证明，对于任意 $v = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$，比值 $\frac{\|Sv\|}{\|v\|}$ 也接近 1。在这两个条件中，第二个显然更难满足，因为它涉及所有可能的线性组合，而不仅仅是 n 个不同的数（当然，第一个条件也是必要的）。因此，我们的做法是先确保满足第二个条件，然后再看第一个条件能得到什么界。

满足第二个条件最简单的方法是要求 v_k 两两正交；在这种情况下，我们甚至可以得到 $\|\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\|$ 的精确公式。 [3] 采用了这种方法，他们考察了厄米函数，并由此得到了关于 $n < 0.58c$ 的指数界。然而，要满足第二个条件，并不需要精确正交性，只需具有几乎正交性 $\langle v_k, v_l \rangle \approx \delta_{k,l}$ 即可。 [13] 通过考察厄米函数的时频平移，将这一界推进到了任意 $\delta > 0$ 下的 $n < (1-\delta)c$。事实证明，经过大量优化，同样的方法也适用于定理 1.10；但我们必须更谨慎地选择所考察的时频平移集合（借助引理 4.1），转而使用一个略小的子正方形，以便在较大正方形之外获得更强的集中界，并且在建立内积 $\langle v_k, v_l \rangle$ 的上界时更加小心。定理 1.10 是我们的四个结果中唯一一个证明与文献中先前出现的某项结果有些相似的结果。

对于定理 1.6，（近似）正交序列的方法似乎并不足够，因此我们必须另辟蹊径来确保第二个条件。我们将借助双正交序列的一个技巧：如果我们有另一个向量序列 w_k，使得 $\langle v_k, w_l \rangle = \delta_{k,l}$ 那么根据柯西–施瓦茨不等式，我们可以看出

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\| \geq \max_k \frac{|c_k|}{\|w_k\|}.$$

时频局部化算子的自然背景是 Paley–Wiener 空间，而在这个空间中，双正交向量 w_k 有众所周知的候选者——再生核；与它们的内积给出函数在各点处的取值。最简单的方法是直接取 $v_k = \sin(\pi x)\, x-k$，它甚至构成一个正交序列，但遗憾的是，其集中性很差，因此无法满足第一个条件。我们可以考虑 $v_k = \sin(a^{-1}\pi x)\, x-ak$ $h(x-ak)$ 来对其进行修正，其中 $a > 1$，而函数 h负责控制衰减。这个序列与点 $ak, k \in \mathbb{Z}$ 处的再生核系统双正交，并且我们还有一个参数 a 可以调整（a 越接近 1，我们能保证函数 h具有的衰减就越弱）。遗憾的是，即使进行最优调整，

a 这种方法最多也只能得到与定理 1.10 相同的界，远不及我们在定理 1.6 中所声称的结果。

这种失效的原因在于，虽然对于靠近区间端点的点，这个界是最优的，但在区间中心附近，我们所需的集中性远不如实际情况那么强。因此，我们不再考虑等差数列 ak, $k \in \mathbb{Z}$ 而是考虑一个在区间中心附近更密集、并且在接近端点时密度逐渐降低的点集。问题在于，我们很难找到一个在所有这些点上都为零的函数序列，因此难以满足双正交条件。导出定理 1.6 证明的关键思想是，我们其实不必做到这一点——和之前一样，近似双正交条件 $\langle v_k, w_l \rangle \approx \delta_{k,l}$ 就足以满足我们的需求。再生核对应的点集将是定义在该区间的二进子区间上的等差数列之并，并且越靠近端点，这些数列就越稀疏。在每个二进子区间内部，各序列都是双正交的；对于不同子区间之间的情形，我们则利用函数 h 的衰减，确保内积足够小，即使它们未必恰好为 0。

对于定理 1.7 和定理 1.11，我们将使用线性代数中的另一个事实：如果我们有一个维数为 n 的向量空间 V，以及定义在其上的 $n-1$ 个线性泛函，那么就能找到一个非零向量 $v \in V$，使所有这些泛函的取值都为 0。因此，我们取前 n 个特征函数的线性张成，并取它们的一个线性组合，使其在这些泛函下的取值为零（根据极小极大原理，这个线性组合仍具有集中性）。对于定理 1.11，我们将取与较小正方形 Q' 上的局部化算子 $L_{Q'}$ 的前 $n-1$ 个特征函数的内积作为线性泛函。于是，根据简单的迹界，所得向量 v 将有很大一部分 L^2 质量集中在 $Q \backslash Q'$ 中，同时在 $\mathbb{R}^2 \backslash Q$ 中几乎没有 L^2 质量。如果 $\mathbb{R}^2 \backslash Q$ 中的 L^2 质量足够小，我们就可以利用相关解析函数的对数的次调和性导出矛盾（详情见第 2 节）。

对于定理 1.7 中的情形，我们通过这种策略所能证明的最佳结果（采用子区间而非子正方形）是如下形式的上界

$$\lambda_n(c) \leq 1 - \exp(-\kappa(c-n))$$

这比定理 1.7 中的界更弱。相反，我们将考虑一个向量 v，它与我们在定理 1.6 的证明中所考虑的相同再生核正交。在这里，仅利用对数的次调和性并不足够，我们将采用一个更精细的界；这个界来自詹森公式，用于估计

某点处解析函数的对数值，并将零点纳入考量，从而得到我们在定理 1.7 中所声称的界。

最后，我们还要指出，我们将经常不加说明地使用算子 $S_{I、J}$ 和 L_Q的以下性质：它们都具有 X^*X 的形式，其中 X是某个算子，具体而言

$$S_{I,J} = (P_J \mathcal{F} P_I)^*(P_J \mathcal{F} P_I)$$

and

$$L_Q = (P_Q V_\varphi)^*(P_Q V_\varphi).$$

算子 X^*X 的特征值与 X的奇异值的平方相同，而后者可以通过对表达式 $\frac{\|Xv\|^2}{\|v\|^2}$ 采用相同的极小极大过程来计算。

1.4. 论文结构。 在第 2 节中，我们陈述 Bargmann–Segal–Fock 空间及其与相干态变换之间关系的相关事实。在第 3 节中，我们证明定理 1.11。在第 4 节中，我们证明定理 1.10。在第 5 节中，我们回顾将要用到的 Paley–Wiener 空间的基本性质。在第 6 节中，我们证明定理 1.7。在第 7 节中，我们证明定理 1.6。最后，在第 8 节中，我们提出一些关于 $n < c$ 的特征值 $\lambda_n(c)$ 和 $\mu_n(c)$ 以及我们的方法对于 $n > c$能够给出什么结果的尚未解决的问题。

2. Bargmann transform

对于函数 $\varphi(x) = 2^{1/4} e^{-\pi x^2}$，我们有

$$V_\varphi f(x,\omega) = 2^{1/4} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi(t-x)^2} e^{-2\pi i t\omega} dt =$$

$$2^{1/4} e^{-\pi i x\omega} e^{-\frac{\pi}{2}(x^2+\omega^2)} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi t(x-i\omega) - \frac{\pi}{2}(x-i\omega)^2 - \pi t^2} dt.$$

对于一个函数 f，我们定义它在点 $z = x - i\omega \in \mathbb{C}$ a 处的巴格曼变换 s

$$\mathcal{B}f(z) = 2^{1/4} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi t z - \frac{\pi}{2} z^2 - \pi t^2} dt.$$

通过在积分号下求导，很容易看出这是关于 z 的全纯函数；根据上述计算，我们有 $|V_\varphi f(x,\ \omega)| = |\mathcal{B}f(x - i\omega)| e^{-\frac{\pi}{2}(x^2+\omega^2)}$。因此，巴格曼变换是从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 Bargmann–Segal–Fock空间的等距映射

$$\mathfrak{F} = \{F \in Hol(\mathbb{C}) : \|F\|_{\mathfrak{F}}^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz < \infty\},$$

其中， dz 是 $\mathbb{C}$ 上的勒贝格测度。事实上， $\mathcal{B}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 与 $\mathfrak{F}$ 之间的双射（证明方法之一是说明厄米函数 H_k 被映射为 $\sqrt{\pi^k}_k! \, z^k$，它们构成了 $\mathfrak{F}$ 的标准正交基）。关于巴格曼变换的这一点及其他性质，参见例如 [7, 第 3 节4]。

函数 f 的时频平移对应于复平面上的平移。它们在空间 $\mathfrak{F}$上有一族相应的等距变换：对于函数 $F \in \mathfrak{F}$ 和 $w \in \mathbb{C}$，函数

$$T_w F(z) = F(z-w)e^{\pi z\bar{w} - \frac{\pi}{2}|w|^2}$$

也属于 $\mathfrak{F}$、 $\|F\|_{\mathfrak{F}} = \|T_w F\|_{\mathfrak{F}}$ ，此外，这一变换仅仅将 $|F(z)|e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}$的分布进行平移。由此不变性，尤其容易看出，特征值 $\mu_n(c)$并不取决于我们所考虑的面积为 c 的哪个正方形（其边平行于实轴和虚轴，不过也可以证明其在旋转下保持不变），因此我们始终考虑以原点为中心的正方形。

我们需要的最后一个事实是 $\mathfrak{F}$中函数值的逐点估计，这一估计源于相干变换的逐点估计：对于所有 $F \in \mathfrak{F}$ 和$z \in \mathbb{C}$，都有 $|F(z)| \leq e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}\|F\|_{\mathfrak{F}}$。

3. 定理 1.11 的证明

假设对于某个足够大的 c，以及某个 $n < c - \sqrt{c}\log(c)$，我们有 $1 - \mu_n(c) \leq \exp(-\kappa(\sqrt{c} - \sqrt{n})^2)$。考虑面积为 $n-1$ 的正方形 Q' 及其对应的算子$L_{Q'}$ （若 $n = 1$，则 $Q' = \{0\}$）。我们取 L_Q 的前 n 个特征函数的一个归一化线性组合 f，使其与 $L_{Q'}$ 的前 $n-1$ 个特征函数正交。于是，由极小极大原理可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} |V_\varphi f(x,\omega)|^2 dx d\omega = 1,$$

$$\int_{Q'} |V_\varphi f(x,\omega)|^2 dx d\omega \leq \mu_n(n-1),$$

$$\int_{Q} |V_\varphi f(x,\omega)|^2 dx d\omega \geq \mu_n(c)$$

我们希望由此导出矛盾。令 $F = \mathcal{B}f$，则其满足

$$\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz = 1,$$

$$\int_{Q'} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz \leq \mu_n(n-1),$$

$$\int_Q |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz \geq \mu_n(c).$$

首先，我们需要对 $\mu_n(n-1)$ 给出一个非常简单的上界：由于 $\mathrm{tr} L_{Q'} = n-1$，我们有

$$n-1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(n-1) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu_k(n-1) \geq n\mu_n(n-1),$$

因此 $\mu_n(n-1) \leq \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{1}{c}$。这意味着

$$\int_{\mathbb{C}\setminus Q'} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz > \frac{1}{c}.$$

我们还有

$$\int_{\mathbb{C}\setminus Q} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz \leq 1 - \mu_n(c).$$

因此，

$$\int_{Q\setminus Q'} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz > \frac{1}{c} - \exp(-\kappa(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2).$$

如果 $\kappa \geq 10$ 和 c 足够大，那么这里的第二项至多为 c^{-2}（这是需要 $n < c - \sqrt{c}\log(c)$ 的地方之一）。因此，若 $c > 2$，我们有

$$\int_{Q\setminus Q'} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz > \frac{1}{2c}.$$

这意味着存在 $z_0 \in Q\setminus Q'$，使得 $|F(z_0)|^2 e^{-\pi|z_0|^2} > \frac{1}{2c|Q\setminus Q'|}$。我们将直接用 $|Q| = c$ 从上方估计 $|Q\setminus Q'|$，于是 $|F(z_0)|^2 e^{-\pi|z_0|^2} > \frac{1}{2c^2}$。注意，$Q\setminus Q'$ 是四个矩形（并非互不相交）的并：右侧一个、左侧一个、上方一个和下方一个。我们假设 z_0 属于右侧矩形；其余三种情况的处理完全类似。这意味着 $\mathrm{Re}\, z_0 \geq \frac{\sqrt{n}-1}{2}$。

令 $r = 10(\sqrt{c}-\sqrt{n})$，并考虑以 z_0 为中心、半径为 r 的圆。若 c 足够大，则该圆右侧 $\frac{1}{100}$ 部分上的点满足 $\mathrm{Re}\, z \geq \frac{\sqrt{c}}{2} + 1$（事实上，还可以得到更强的界 $\frac{\sqrt{c}}{2} + \sqrt{\frac{\log(c)}{10}}$，但对我们而言并无必要）。函数 $\log |F(z)|$ 是次调和的，因此我们有

$$\log|F(z_0)| \leq \int_0^1 \log|F(z_0 + re^{2\pi it})| dt. \tag{3.1}$$

对于圆上除第 $\frac{1}{100}$ 个圆弧之外的所有部分，我们将在右侧使用逐点界

$$|F(z_0 + re^{2\pi it})| \leq e^{\frac{\pi}{2}|z_0 + re^{2\pi it}|^2}.$$

对于圆上右侧的1/100部分，我们将得到关于 $|F(w)|$的更强界。注意，以 w 为圆心、半径为 1 的圆盘仍在 Q之外，因此其上的积分至多为$1-\mu_n(c)$。考虑函数 $G=T_wF$，我们有 $|G(0)|=|F(w)|e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2}$并且

$$\int_{|z|\le 1}|G(z)|^2e^{-\pi|z|^2}dz\le 1-\mu_n(c).$$

我们有 $e^{-\pi|z|^2}\ge e^{-\pi}$ 对于 $|z|\le 1$，因此

$$\int_{|z|\le 1}|G(z)|^2dz\le\frac{1-\mu_n(c)}{e^{-\pi}}.$$

函数 $G(z)$ 是解析的，因此 $|G(z)|^2$ 是次调和的。因此，

$$|G(0)|^2\le\frac{1}{\pi}\int_{|z|\le 1}|G(z)|^2dz\le\frac{1-\mu_n(c)}{\pi e^{\pi}}\le\frac{\exp(-\kappa(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2)}{\pi e^{-\pi}}.$$

取对数，除以 2，并回忆 $|G(0)|=|F(w)|e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2}$，我们得到

$$\log|F(w)|\le\frac{\pi}{2}|w|^2-\frac{\kappa}{2}(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2+2.$$

将我们的逐点界代入 (3.1)，得到

$$\log|F(z_0)|\le\int_0^1\frac{\pi}{2}|z_0+re^{2\pi it}|^2dt-\frac{1}{100}\left(\frac{\kappa}{2}(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2-2\right).$$

第一个积分等于 $\frac{\pi}{2}|z_0|^2+\frac{\pi}{2}r^2$。将其与我们对 $|F(z_0)|$的下界结合，得到

$$\frac{\kappa}{200}(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2\le\frac{\pi}{2}r^2+\log(c)+10.$$

回忆起 $r=10(\sqrt{c}-\sqrt{n})$，我们得到

$$(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2\left(\frac{\kappa}{200}-50\pi\right)\le\log(c)+10$$

当 κ 足够大时，这显然不成立（再次强调，这里需要 $c-n\ge\sqrt{c\log(c)}$大于右侧的 $\log(c)$ 项）。

注 3.1. 在时频局域化的情形下，我们可以尝试采用类似的论证：取 $J'=[-\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}]$ 的一个子区间，并考虑$S_{I,J}$ 的特征函数的线性组合，使其与$S_{I,J'}$的前 $n-1$ 个特征函数正交。不幸的是，这只能给出某个 $\delta>0$ 的上界 $\lambda_n(c)\le 1-\exp(-\delta(c-n))$，因为 *Paley–Wiener* 空间中的函数在长度为 r 的区间内，其大小最多只能下降一个指数级的 r 因子。

4. 定理 1.10 的证明

我们从 Lieb 和 Lebowitz 的以下圆盘打包引理开始 [18].

引理 4.1 ([18, 引理 4.1])。 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，都存在一个有限的两两不相交的圆盘集合 D_1、D_2、...、$D_N \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$，其并集的测度至少为 $1-\varepsilon$，且这些圆盘中每个圆盘的半径至少为 ε^{22}。

注 4.2。 在 [18] 中，作者明确构造了这样一个圆盘族，并且通过简单的代数运算即可验证：如果将这些圆盘按半径递减的顺序排列，它们就给出了所声称的界（事实上，他们的证明允许使用任意大于 $\log(0.1)\ \log(0.9) \approx 21.85$的幂）。另一方面， ε 的某个正幂是不可避免的，因为如果最小半径为 r，那么每个角点的 $\frac{r}{\sqrt{2}}$-邻域都没有被任何圆盘覆盖，因此 $r \leq \sqrt{\varepsilon}$。

注 4.3. [13] 中也用到了一个类似的引理。不过，他们不需要估计最小半径，只需存在任意这样的互不相交的有限个圆盘之并即可。

正如我们在引言中提到的，我们将利用极小极大原理得到特征值$\mu_n(c)$ 的下界。由于巴格曼变换是从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $\mathfrak{F}$ 的等距映射，我们将构造 $\mathfrak{F}$ 的一个维数为 n 的子空间 V，使得其中所有函数 $F \in V$ 大部分集中在正方形 $\left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$ 中。我们将构造的空间是由形如 $T_w\left(\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k\right)$ 的函数线性张成的，其中参数 $w \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}_0$ 取不同值。这些函数在逆 Bargmann 变换下对应于厄米函数的时频平移，但在证明中我们不需要用到它们与厄米函数的这一关系。

设 $\theta = \sqrt[5]{\frac{n}{c}} < 1$ 和 $\varepsilon = 1 - \theta > 0$。注意到 $\varepsilon \leq \frac{c-n}{c} \leq 5\varepsilon$。根据引理 4.1，我们不妨假设 $\varepsilon < \varepsilon_0$。如果 $\varepsilon \geq \varepsilon_0$，我们将选取满足 $1 - \sqrt[5]{\frac{n_0}{c}} < \varepsilon_0$的最小 n_0；对 n_0 的估计表明，对于某个仅依赖于 ε_0的绝对常数 $\delta > 0$，有 $1 > \mu_n(c) \geq \mu_{n_0}(c) > 1 - \exp(-\delta c)$，因此，为了得到对 $\mu_n(c)$的估计，只需减小定理 1.10 中的 η，使其小于 δ。

我们考虑由引理 4.1 为我们的 ε 所提供的圆盘集合，使得它们的总面积至少为 $1-\varepsilon = \theta$。设圆盘 D_m 的半径为 r_m，中心为 $z_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$，我们将其视为复数。我们定义一个新的圆盘族 B_m，其中心为 $w_m = \sqrt{c}\theta z_m$，半径为 $R_m = \sqrt{c}\theta^2 r_m$。注意，由于 $\theta < 1$，这些圆盘仍然互不相交，且它们的总面积至少为 $c\theta^5 = n$。此外，若 r 是 r_m 中最小的（我们知道它至少为 ε^{22}），则这些圆盘中任意两个之间的距离至少为 $2\sqrt{c}\theta r(1-\theta)$。

我们将考虑的函数集合为

$$\mathcal{W} = \bigcup_{m=1}^{N} \left\{ T_{w_m} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k \mid 0 \le k \le \pi R_m^2 \right\}.$$

注意，它至少有 n 个元素。我们希望证明其中的函数对正方形 $\left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$ 具有强集中，并且它们几乎正交。为此，我们将使用如下估计，该估计本质上表明 $\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k$ 在面积为 k的圆盘之外具有高斯衰减。

命题 4.4. 对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 以及所有 $R \ge 1$，我们有

$$\int_{|z|>\sqrt{\frac{k}{\pi}}+R} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} |z|^k e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} dz \le (2 + 2\sqrt{k}) e^{-\frac{\pi R^2}{2}}. \tag{4.1}$$

证明。 我们首先假设 $k \ge 1$。对 $r = \sqrt{\frac{k}{\pi}} + t$，我们有

$$k \log(r) - \frac{\pi}{2} r^2 = k \log\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) + k \log\left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{k}} t\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{\pi} + 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} t + t^2\right) \le k \log\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) - \frac{k}{2} - \frac{\pi t^2}{2},$$

其中，我们在第二步使用了不等式 $\log(1+x) \le x$。对于因子 $\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}}$，我们使用一个熟知的不等式 $k! \ge \left(\frac{k}{e}\right)^k$，从而对 $|z| = \sqrt{\frac{k}{\pi}} + t$得到

$$\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} |z|^k e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} \le e^{-\frac{\pi t^2}{2}}.$$

注意，这一估计对 $k = 0$ 同样成立，因此从现在起我们假设 $k \ge 0$。我们在极坐标下考虑(4.1)左端的积分，并结合这一上界得到

$$2\pi \int_R^\infty \left(t + \sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) e^{-\frac{\pi t^2}{2}} dt \le 2\pi \left(1 + \sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) \int_R^\infty t e^{-\frac{\pi t^2}{2}} dt = \left(2 + 2\sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) e^{-\frac{\pi R^2}{2}},$$

其中第一步使用了估计式 $\sqrt{\frac{k}{\pi}} \le t\sqrt{\frac{k}{\pi}}$，该估计式由于 $t \ge R \ge 1$ 而成立。为了得到界（4.1），还需注意到 $\pi \ge 1$。□

现在，我们转而估计我们的函数的内积和集中性。我们先讨论前者。取指标 $1 \le m, l \le N$ 以及次数 $0 \le k \le \pi R_m^2$、$0 \le s \le \pi R_l^2$。我们希望对其进行界定：

$$\int_{\mathbb{C}} \left(T_{w_m} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k \right) \overline{\left(T_{w_l} \sqrt{\frac{\pi^s}{s!}} z^s \right)} e^{-\pi|z|^2} dz.$$

若 $l = m$，则当 $k = s$ 时该积分等于 1，当 $k \neq s$ 时等于 0；这通过改用极坐标即可轻易看出。对于 $l \neq m$，我们将绝对值移到积分号内。由于圆盘 B_m 与 B_l 之间的距离至少为 $2\sqrt{c}\theta r(1-\theta)$，因此该积分的上界为

$$\int_{|z-w_m| > R_m + \sqrt{c}\theta r(1-\theta)} + \int_{|z-w_l| > R_l + \sqrt{c}\theta r(1-\theta)}.$$

对于第一个积分，我们将使用逐点界 $\left| T_{w_l} \sqrt{\frac{\pi^s}{s!}} z^s \right| \le e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}$；对于第二个积分，则使用逐点界 $\left| T_{w_m} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k \right| \le e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}$。第一个积分可得

$$\int_{|z-w_m| > R_m + \sqrt{c}\theta r(1-\theta)} \left| T_{w_m} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k \right| e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} dz$$

另一项积分也有类似的表达式。由于 T_{w_m} 是等距映射，且保持 $|F(z)|e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}$ 的分布不变，因此该积分等于

$$\int_{|z| > R_m + \sqrt{c}\theta r(1-\theta)} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} |z|^k e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} dz.$$

由于 $R_m \ge \sqrt{\frac{k}{\pi}}$，由 (4.1) 可知，这至多为 $(2 + 2\sqrt{k}) e^{-\frac{\pi}{2} c\theta^2 r^2 (1-\theta)^2}$（此处我们假设 $\sqrt{c}\theta r(1-\theta) \ge 1$，这在我们的假设 $n \le c - c^{0.99}$ 下对足够大的 c 成立，并将从以下推理中看出）。注意，我们所有的圆盘都确实位于正方形 $\left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2} \right)^2$ 内，因此它们的面积至多为 c，故 $k \le c$。对足够大的 c，我们将用 $\frac{c}{2}$ 从上界估计 $(2 + 2\sqrt{k})$。必要时，我们也可以通过减小 ε_0 来假设 $\theta \ge 0.99$（因为 $1 - \theta = \varepsilon < \varepsilon_0$），从而 $\theta^2 > \frac{2}{\pi}$。综合以上各项，并回顾 $1 - \theta = \varepsilon$ 与 $r > \varepsilon^{22}$，我们得到

$$\left| \int_{\mathbb{C}} \left(T_{w_m} \sqrt{\frac{\pi^k}{k!}} z^k \right) \overline{\left(T_{w_l} \sqrt{\frac{\pi^s}{s!}} z^s \right)} e^{-\pi|z|^2} dz \right| \le c e^{-c\varepsilon^{46}}.$$

回顾 $c-n\geq c^{0.99}$。因此， $\varepsilon\geq {}^{c^{-0.01}}_{5}$ 。利用这个界，我们得

$$\left|\int_{\mathbb{C}}\left(T_{w_m}\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}}z^k\right)\overline{\left(T_{w_l}\sqrt{\frac{\pi^s}{s!}}z^s\right)}e^{-\pi|z|^2}dz\right|\leq ce^{-5^{-46}c^{1-0.46}}\leq\frac{1}{2c}$$

当 c 足够大时（这里我们也得到 $\sqrt{c}\theta r(1-\theta)\geq 1$ 在 c 足够大时成立）。这是我们的论证中唯一用到 0.99 次幂的地方。事实上，任何大于 $1-\frac{1}{46}$ 的次幂都可以。

现在，我们来估计集中性。我们关注的是

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\left(-\frac{\sqrt{c}}{2},\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2}\left|T_{w_m}\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}}z^k\right|^2e^{-\pi|z|^2}dz.$$

我们注意到，圆盘 B_m 位于正方形 $\left(-\frac{\theta\sqrt{c}}{2},\frac{\theta\sqrt{c}}{2}\right)^2$ 内部，因此它与 $\mathbb{C}\setminus\left(-\frac{\sqrt{c}}{2},\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$ 至少相距 $\frac{(1-\theta)}{2}\sqrt{c}$。利用界 $\left|T_{w_m}\sqrt{\frac{\pi^k}{k!}}z^k\right|\leq e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}$ 去掉正方形，并结合 $e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2}$，我们可以再次应用 (4.1)，得到该积分至多为 $ce^{-\frac{\pi\varepsilon^2c}{8}}$。我们注意到

$$\frac{\pi\varepsilon^2c}{8}\geq\frac{(c-n)^2}{100c}\geq\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2}{100}.$$

由于 $n-c\geq c^{0.99}$，我们有

$$ce^{-\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2}{100}}\geq\frac{1}{2c}e^{-\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2}{200}}$$

对于足够大的 c （事实上，这里估计 $c-n\geq 10^{100}\sqrt{c\log(c)}$ 就已经足够了）。

接下来只需结合所有估计并应用极小极大原理。我们从 $\mathcal{W}$ 中选取一个子集 $\mathcal{V}=\{F_1,F_2,\ldots,F_n\}$，其中恰有 n 个元素，并令 V 为它们在 $\mathfrak{F}$ 中的线性张成。我们要证明 $\mathcal{V}$ 线性无关，并且对任意 $F\in V\setminus\{0\}$，都有

$$\frac{\int_{\left(-\frac{\sqrt{c}}{2},\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2}|F(z)|^2e^{-\pi|z|^2}dz}{\int_{\mathbb{C}}|F(z)|^2e^{-\pi|z|^2}dz}\geq 1-\exp(-\kappa(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2).$$

将其从 1 中减去后，这等价于

$$\frac{\int_{\mathbb{C}\setminus\left(-\frac{\sqrt{c}}{2},\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2}|F(z)|^2e^{-\pi|z|^2}dz}{\int_{\mathbb{C}}|F(z)|^2e^{-\pi|z|^2}dz}\leq\exp(-\kappa(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2).$$

设 $F=\sum_{k=1}^n c_kF_k$，其中某个 $c_k\in\mathbb{C}$。我们有

$$\|F\|_{\mathfrak{F}}^2=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_k\bar{c_l}\langle F_k,F_l\rangle=\sum_{k=1}^n|c_k|^2+\sum_{k\neq l}c_k\bar{c_l}\langle F_k,F_l\rangle.$$

这些内积的绝对值都至多为 $\frac{1}{2c}$，因此我们得到

$$\left| \|F\|_{\mathfrak{F}}^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right| \le \frac{1}{2c} \left(\sum_{k=1}^n |c_k| \right)^2 \le \frac{n}{2c} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right) \le \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right),$$

其中第二步使用了柯西–施瓦茨不等式（或算术平均数与平方平均数之间的不等式）。这意味着 $\|F\|_{\mathfrak{F}}^2 \ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |c_k|^2$，特别是$F_k$线性无关。现在，对于在 $\mathbb{C} \setminus \left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2} \right)^2$ 上的积分，再次逐点使用不等式 $|\sum_{k=1}^n b_k|^2 \le c \sum_{k=1}^n |b_k|^2$，得到$\eta = \frac{1}{200}$

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2} \right)^2} |F(z)|^2 e^{-\pi |z|^2} dz \le c \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \int_{\mathbb{C} \setminus \left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2} \right)^2} |F_k(z)|^2 e^{-\pi |z|^2} dz \le$$

$$\frac{1}{2} \exp(-\eta(\sqrt{c} - \sqrt{n})^2) \sum_{k=1}^n |c_k|^2.$$

因此，该比值

$$\frac{\int_{\mathbb{C} \setminus \left(-\frac{\sqrt{c}}{2}, \frac{\sqrt{c}}{2} \right)^2} |F(z)|^2 e^{-\pi |z|^2} dz}{\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi |z|^2} dz}$$

至多为 $\exp(-\eta(\sqrt{c} - \sqrt{n})^2)$，如所需。

注 4.5。 定理 *1.11* 和定理 *1.10* 都适用于远多于正方形的区域，例如紧分段 C^1区域的缩放（也可以采用弱得多的条件）。定理 *1.11* 要求找到一个子区域，使其占据足够大的测度份额，且区域之差的直径较小；例如，可以考察边界的管状邻域来实现这一点。对于定理 *1.10*，我们也需要找到一个合适的子区域，然后用圆盘几乎覆盖它；这既可以通过仿照 [18] 中引理 *4.1* 的证明来完成，也可以先对该子区域进行惠特尼分解，再利用引理 *4.1* 填满分解得到的每个正方形。

5. Paley–Wiener 空间

我们将研究空间 PW_π，它定义为满足 $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 的函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 的集合。根据傅里叶反演，来自 PW_π 的函数在整个复平面上都是整函数，并且它们满足以下逐点界：x，$y \in \mathbb{R}$

$$|f(x+iy)| \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{\pi |y|},$$

特别是， $f(z)e^{i\pi z}$ 在上半平面内有界。此外，由于 $\widehat{f'}(x) = 2\pi i x f(x)$，我们还有以下界：$x \in \mathbb{R}$

$$|f'(x)| \le \frac{2\pi}{\sqrt{12}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

与 Bargmann–Segal–Fock空间类似，平移将 PW_π 映射到自身，而且这里甚至无需添加任何校正因子：如果 $z_0 \in \mathbb{C}$ 且 $f \in PW_\pi$，那么 $f(\cdot - z_0) \in PW_\pi$。然而，范数相等 $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f(\cdot - z_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ 仅在 $z_0 \in \mathbb{R}$ 时成立（这也是我们唯一会用到的情况）。

最后，我们将用到这样一个事实：两个或更多函数相乘，在傅里叶变换一侧对应于卷积，而卷积不会使支撑变得太大。具体而言，如果对 $k = 1, \dots, N$，有 $\operatorname{supp} f_k \subset [-r_k, r_k]$，那么

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}(f_1 f_2 \dots f_N) \subset \left[-\sum_{k=1}^{n} r_k, \sum_{k=1}^{n} r_k \right].$$

6. 定理 1.6 的证明

我们先处理 $c - n \le c^{7/8}$ 的情形，这可由定理 1.3 与定理 1.4 结合推出。若 $c - n \le 10^{100} \log(c)$，则定理 1.3 告诉我们，$\lambda_n(c)$ 与 0 保持一定距离，因此必要时减小 η，即可确保该范围内的估计成立。对于 $10^{100} \log(c) \le c - n \le c^{7/8}$，我们首先注意到，$\log\left(\frac{2c}{c-n}\right)$ 至少为 $\frac{1}{8}\log(c)$，所以该因子仍是关于 c 的对数级。由定理 1.3 可知，对于 $\varepsilon < \frac{1}{3}$，例如当 c 足够大时，点 $n = [c]$ 位于区域 $\{n : \varepsilon < \lambda_n(c) < 1 - \varepsilon\}$ 内。由于该集合显然是连续整数构成的集合（因为 $\lambda_n(c)$ 关于 n 单调递减），且 $n_c = [c]$ 位于此区域内，若我们考虑 $n = [c] - |\{n : \varepsilon < \lambda_n(c) < 1 - \varepsilon\}|$，它便不再属于该集合，因此 $\lambda_n(c) \ge 1 - \varepsilon$。对于 $\varepsilon = \exp(-\frac{9\eta}{\log(c)}(c-n))$，利用定理 1.4 对 $|\{n : \varepsilon < \lambda_n(c) < 1 - \varepsilon\}|$ 的估计；若在此范围内 η 足够小，即可得到所需的界。因此，接下来我们假设 $c - n > c^{7/8}$。最后，我们还假设 $n \ge 0.99c$，否则就可以像定理 1.10 的证明中那样，利用 $\lambda_n(c)$ 的单调性以及 $n = [0.99c] + 1$ 的情形，因为该界总是关于 c 指数级的（这一范围是我们在 $\log\left(\frac{2c}{c-n}\right)$ 中需要 2 的唯一原因，从而对数至少为 $\log(2) > 0$）。

—

由于特征值仅依赖于这些区间长度的乘积，我们从现在起假设 $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 与 $J = [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$。令 $r = 0.01 \cdot \frac{c-n}{\log\left(\frac{2c}{c-n}\right)}$，并考虑 J 直至尺度 r 的惠特尼分解：我们对 $1 \le k \le l$ 令 $J_k = [\frac{c}{2} - \frac{c}{2^k}, \frac{c}{2} - \frac{c}{2^{k+1}}] = [L_k, R_k]$、$J_{-k} = -J_k$，其中 l 满足 $\frac{c}{2} - r \in J_l$，从而 $2^l r \le c \le 2^{l+1} r$。对于

每个 $k=1,2,\dots,l$，令 $\gamma_k=\left(1-\frac{r2^{k-10}}{c}\right)^{-1}>1$，并设 $A_k=[L_k+c^{6/8},R_k-c^{6/8}]\cap\gamma_k\mathbb{Z}$、$A_{-k}=-A_k$。首先，我们将计算 $\cup_{k=1}^{l}A_k$中点的总数。我们有

$$\sum_{k=1}^{l}|A_k|\geq\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{c}{\gamma_k 2^{k+1}}-(2c^{6/8}+2)\right)=-l(2c^{6/8}+2)+\sum_{k=1}^{l}\frac{c}{2^{k+1}}\left(1-\frac{r2^{k-10}}{c}\right)=$$

$$\frac{c}{2}-\frac{c}{2^{l+1}}-l(2c^{6/8}+2+r2^{-11})\geq\frac{c}{2}-r-\frac{lr}{200}\geq\frac{c}{2}-\frac{lr}{100},$$

其中第一个不等式利用了：对区间 W，$|W\cap\gamma_k\mathbb{Z}|$ 至少为 $\frac{|W|}{\gamma_k}-2$；最后两步则利用了：当 c 足够大时，$r\geq 10^{10}c^{6/8}$ 与 $l\geq 200$（此处我们使用假设 $c-n\geq c^{7/8}$）。

我们有 $l\leq 2\log(\frac{c}{r})$。因此 $\frac{lr}{100c}\leq\frac{1}{50}\frac{r}{c}\log(\frac{c}{r})$。令 $x=\frac{r}{c}<y=\frac{c-n}{c}<0.1$，我们知道

$$x=0.01\frac{y}{\log(\frac{2}{y})}.$$

由于 y很小，已知我们可以估计 $y\geq 10x\log(\frac{1}{x})\geq 20xl$。因此，

$$\frac{lr}{100}=\frac{cxl}{100}\leq\frac{cy}{2}=\frac{c-n}{2}.$$

因此，$A=\bigcup_{k=1}^{l}A_k\cup A_{-k}$ 中点的总数至少为$2(\frac{c}{2}-\frac{c-n}{2})=n$。我们的目标是为每个 $p\in A$关联一个函数 $f_p\in PW_\pi$，使得对所有 $p,\ q\in A$，我们有 $f_p(q)\approx\delta_{p,\ q}$，并且所有函数 f_p对区间 $[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$具有强集中。对于$p\in A_k\cup A_{-k}$，函数 f_p 将具有如下形式

$$f_p(x)=\frac{\sin(\frac{\pi(x-p)}{\gamma_k})}{\frac{\pi(x-p)}{\gamma_k}}g_k(x-p)h_k(x-p),$$

其中 h_k 和 g_k 是待选函数，使得 $h_k(0)=g_k(0)=1$。正弦函数负责保证 $q\in A_k\cup A_{-k}$ 的精确双正交性，从而使 $f_p(q)=\delta_{p,\ q}$。函数 g_k 负责保证 $q\in A\backslash(A_k\cup A_{-k})$的近似双正交性。为此，我们将使其局部化到 $c^{6/8}$ 尺度（这就是我们从区间 J_k两侧各截去这么多的原因）。不过，由于这里会有很大的余量，函数g_k 在这三者中远没有其他两个重要。最后，函数 h_k 负责将 f_p局部化到区间 $[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$。由于任意 $p\in A_k\cup A_{-k}$到 $\mathbb{R}\backslash[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$的距离都与 $\frac{c}{2^k}$成正比，我们将使 h_k局部化在这一尺度上。

构造一个集中在某个尺度上的函数，最直接的方法竟然是取时频局部化算子的第一个特征函数，并应用

Fuchs [6]的估计。不过，为了使本文这部分内容自成一体，我们将显式构造这样一个集中性良好的函数。

命题 6.1. 设 $T, W > 0$ 满足 $TW \geq 1$。函数

$$f_{T,W} = \mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2 \frac{W}{T}} \chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}(x)\right)$$

满足

$$\int_{|t|>\frac{W}{2}} |f_{T,W}(t)|^2 dt \leq \sqrt{\frac{T}{W}} 10 e^{-\frac{\pi TW}{2}},$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{T,W}(t)|^2 dt \leq \sqrt{\frac{T}{W}},$$

$$f_{T,W}(0) \geq \frac{1}{10}\sqrt{\frac{T}{W}},$$

$$|f_{T,W}(t)| \leq f_{T,W}(0), t \in \mathbb{R}.$$

证明. 首先注意到，所有估计在变量作线性变量变换 $t \to qt$ 后仍成立，因此不失一般性，我们可以假设 $T = W \geq 1$。在这种情况下，由于 $e^{-\pi x^2}$ 是其自身的傅里叶变换，我们得到

$$f_{T,T} = \mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}\right) = e^{-\pi x^2} - \mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\chi_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}\right).$$

这意味着，利用三角不等式和帕塞瓦尔定理，可得

$$\int_{|t|>\frac{W}{2}} |f_{T,T}(t)|^2 dt \leq 8\int_{\frac{T}{2}}^{\infty} e^{-2\pi x^2} dx.$$

这是高斯函数的尾部，其精确估计已广为人知，但对我们而言，一个简单的界就足够了：

$$\int_{\frac{T}{2}}^{\infty} e^{-2\pi x^2} dx \leq \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\infty} x e^{-2\pi x^2} dx = \frac{1}{2\pi T} e^{-\frac{\pi T^2}{2}} \leq e^{-\frac{\pi T^2}{2}},$$

其中最后一步用到了 $T \geq 1$。

第二个估计最容易，因为它直接由帕塞瓦尔定理得出：

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{T,T}(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\pi x^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

对于 0 处的值，我们有

$$f_{T,T}(0) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\pi x^2} dx \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\pi x^2} dx \geq e^{-\frac{\pi}{4}} \geq \frac{1}{e} > \frac{1}{10}.$$

最后，估计式$|f_{T,T}(t)| \le f_{T,T}(0)$由$f_{T,T}$ 的傅里叶变换非负这一事实得出。□

注释 6.2. 注意，指数 $e^{-\frac{\pi TW}{2}}$ 对应于 $e^{-\frac{\pi}{2}c}$，这比 *Fuchs* 给出 $e^{-\pi c}$ 的估计差两倍。

我们所需的最后一个要素，是一种从 L^2-界得到逐点界的方法。尽管对于我们的显式函数可以获得显式逐点界，但我们将改用下面的引理，它在 L^2-界与导数的 L^∞-界之间进行插值，特别是因为它也将用于特征值上界的证明。

引理 6.3. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 为一条射线（即集合 $[x_0,+\infty)$、$(x_0,+\infty)$、$(-\infty,x_0)$或 $(-\infty,x_0]$ 之一），并设 $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ 是一个属于 $L^2(\Gamma)$ 的 C^1-函数。则对所有 $t \in \Gamma$，我们有

$$|f(t)| \le 3^{1/3}\|f\|_{L^2(\Gamma)}^{2/3} \sup_{x\in\Gamma} |f'(x)|^{1/3}.$$

证明. 我们只考虑情形 $\Gamma = [x_0,+\infty)$，其余三种情形完全类似。设 $C = \sup_{x\in\Gamma}|f'(x)|$，并考虑区间 $U = \left[t, t + \frac{|f(t)|}{C}\right] \subset \Gamma$。对$x \in U$，由微积分基本定理和三角不等式，我们有

$$|f(x)| \ge |f(t)| - C(x-t).$$

将此估计两边平方（注意右端在 U 上非负），并在 U 上积分，得到

$$\int_\Gamma |f(x)|^2dx \ge \int_U |f(x)|^2dx \ge \int_t^{t+\frac{|f(t)|}{C}} (|f(t)| - C(x-t))^2dx = \frac{|f(t)|^3}{3C},$$

两边乘以 $3C$ 后再开立方，即得到所需的估计。 □

注释 6.4. 事实上，这个引理是 *Landau–Kolmogorov*不等式的一个特例。作者在 [12] 中使用了这个不等式的一个更一般的版本，其中关于特征值 $\lambda_n(c)$ 的估计被用于傅里叶插值问题。

现在，我们终于可以选取函数 g_k 和 h_k了。令 $\delta_k = \frac{1-\gamma_k^{-1}}{2} = \frac{r2^{k-11}}{c}$。注意，当 c 足够大时， $\delta_k \ge \delta_1 \ge c^{-2/8}$。我们设

$$g_k(x) = \frac{f_{\delta_k,c^{6/8}}(x)}{f_{\delta_k,c^{6/8}}(0)}, \quad h_k = \frac{f_{\delta_k,\frac{c}{2^k}}(x)}{f_{\delta_k,\frac{c}{2^k}}(0)}.$$

首先注意， $g_k(0) = h_k(0) = 1$ 且 $\operatorname{supp} \widehat{g}_k = \operatorname{supp} \widehat{h}_k = [-\frac{\delta_k}{4}, \frac{\delta_k}{4}]$，因此 f_p 的傅里叶变换的支撑包含于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$。还要注意，$\delta_k \frac{c}{2^k} \geq \delta_k r \geq \delta_k c^{6/8} \geq c^{1/2}$，所以当 c 足够大时，我们可以将命题 6.1 应用于 g_k 和 h_k。

我们先估计 $f_p(q)$，其中 $q \in A \backslash (A_k \cup A_{-k})$。第一项和第三项的绝对值至多为 1，因此我们将忽略它们。对于第二项，由于 $|q-p| \geq c^{6/8}$，我们可以对 $g_k(q-p)$ 应用命题 6.1 和引理 6.3，得到

$$|g_k(q-p)| \leq \frac{1}{f_{\delta_k, c^{6/8}}(0)} 3^{1/3} \left(\sqrt{\frac{\delta_k}{c^{6/8}}} 10 e^{-\frac{\pi \delta_k c^{6/8}}{2}} \right)^{2/3} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'_{\delta_k, c^{6/8}}(x)|^{1/3}.$$

我们可以通过粗略地指出，$f_{\delta_k,\ c^{6/8}}$ 的傅里叶变换包含于 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，从而利用函数的 L^2-范数来对导数作上界估计；而在 0 处的取值，则利用命题 6.1 作下界估计。结合界 $1 \geq \delta_k \geq c^{-2/8}$，可以看出，当 c 足够大时，除指数项之外的所有项相乘至多为 c^{10}。因此，我们得到

$$|g_k(q-p)| \leq c^{10} e^{-\frac{\pi \delta_k c^{6/8}}{3}} \leq c^{10} e^{-\delta_k c^{6/8}} \leq c^{10} e^{-c^{1/2}} \leq c^{-10}$$

当 c 足够大时。

最后，我们需要估计 $[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$ 之外的 L^2-范数。为此，我们改为将 f_p 定义中的前两项估计为 1，只关注第三项。我们注意到，从 $A_k \cup A_{-k}$ 到 $\mathbb{R} \backslash [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$ 的距离至少为 $\frac{c}{2^{k+1}}$，这恰好是函数 $f_{\delta_k,\ \frac{c}{2^k}}$ 集中所在的半径。因此，我们可以应用命题 6.1，得到

$$\int_{\mathbb{R} \backslash [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]} |f_p(t)|^2 dt \leq 100 \frac{\frac{c}{2^k}}{\delta_k} \sqrt{\frac{\delta_k}{\frac{c}{2^k}}} 10 e^{-\frac{\pi \delta_k \frac{c}{2^k}}{2}} \leq c^{10} e^{-\frac{r}{2^{11}}} \leq c^{-10} e^{-\frac{r}{10000}},$$

其中我们关键地用到了 $\delta_k \frac{c}{2^k} = \frac{r}{2^{11}}$ 以及 $r \geq 10^{100} \log(c)$（这对应于 $c - n \geq 10^{100} \log^2(c)$）。

接下来只需将极小极大原理应用于这些函数的线性张成。取大小为 n 的 $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset A$，并令 V 为 $f_{p_k}, k = 1, \ldots, n$ 的线性张成。任取一个线性组合 $f = \sum_{k=1}^n c_k f_{p_k}$，并令 $|c_m|$ 为所有 $|c_k|$ 中最大的。那么

$$|f(p_m)| = |c_m - \sum_{k \neq m} c_k f_{p_k}(p_m)| \geq |c_m| (1 - \sum_{k \neq m} |f_{p_k}(p_m)|) \geq |c_m| (1 - c c^{-10}) \geq \frac{|c_m|}{2},$$

因此，由逐点界 $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{|c_m|}{2}$，特别地 $\dim V = n$。接下来，正如定理 1.10 的证明中一样，我们希望估计比值

$$\frac{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]} |f(t)|^2 dt}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}.$$

我们已经从下方估计了分母。对于分子，我们只需使用三角不等式，即可得到它至多为

$$n\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]} |f_{p_k}(t)|^2 dt \leq c^{-8} e^{-\frac{r}{10000}} \max_k |c_k|^2.$$

综合以上各项，得到

$$\frac{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]} |f(t)|^2 dt}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \leq e^{-\frac{r}{10000}},$$

所以 $\lambda_n(c) \geq 1 - e^{-\frac{r}{10000}}$。还需回顾一下，$r = 0.01 \frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}$，因此我们得到了所需的估计。

注记 6.5. 唯一需要像 $c - n \geq c^{7/8}$ 这样强界的地方，是对 $f_p(q)$ 在 $p \neq q$ 情形下的估计；集中性部分只需要 $c - n \geq 10^{100}\log^2(c)$。经过更仔细的分析，这部分在 $c - n \geq c^{1/2+\varepsilon}$ 时也成立，但我们无法通过简单的显式构造突破这一障碍。不过，利用指数型整函数理论，我们可以替换 f_p 定义中的第一个因子，使得 $f_p(q) = \delta_{p,q}$ 不仅对 $q \in A_k$ 成立，也对 $q \in A_{k-1}$ 和 $q \in A_{k+1}$ 成立；而对于其他 q，可以验证 $c - n \geq 10^{100}\log^2(c)$ 就足够了。不过，既然无论如何都要用定理 *1.3* 和定理 *1.4* 覆盖 $0 < c - n < 10^{100}\log^2(c)$ 区间，我们决定将它们用于更大范围的 n，这样对于剩余的 n，我们的构造便完全是显式的。

注记 6.6。 我们可以用类似的论证来证明定理 *1.10*（常数略差于0.99）：在每个圆盘上放置魏尔斯特拉斯 *sigma* 函数的部分乘积除以一个零点后的平移，而不是单项式的平移，然后考察线性组合在相应点处的取值。不过，这需要多得多的工作，且结果更差，因此我们不予展示。

7. 定理 1.7 的证明

首先，我们再次假设 $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 且 $J = [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$经过缩放。我们先注意到，$S_{I、J}$ 的正特征值对应的特征函数必然23

支撑于 I 上。特别地，它们的傅里叶变换逐点有定义。我们将取这些特征函数的一个归一化线性组合 $f=\sum_{k=1}^{n}c_kf_k$，使得 $\hat{f}(z)=0,\ z\in A$ 其中 $A\subset\mathbb{R}$ 是一个大小至多为 $n-1$ 的集合。这个集合 A 将与上一节构造的集合类似，但我们不再令所有常数都取较小的正值，而是令它们取较大的正值，这样 A 中的点总数就会略少于 n，而不会更多。最后，目前我们先假设 $c-n\le 10^{-1000}c$，并将在证明末尾处理其余的 n。

令 $r=10^{100}\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}$，并考虑 J 的惠特尼分解，直至尺度 $\mathbf{r}$：设 $J_k=[\frac{c}{2}-\frac{c}{2^k},\frac{c}{2}-\frac{c}{2^{k+1}}]=[L_k,R_k]$，$J_{-k}=-J_k$，其中 $1\le k\le l$，且 l 满足 $\frac{c}{2}-r\in J_l$，从而 $2^lr\le c\le 2^{l+1}r$。根据上述假设，$l\ge 10$。对于每个 $k=1,2,.....,l$，令 $\gamma_k=\left(1-\frac{r2^{k-10}}{c}\right)^{-1}>1$，并令 $A_k=[L_k,R_k]\cap\gamma_k\mathbb{Z}$ 和 $A_{-k}=-A_k$。注意，我们不再从 $[L_k,R_k]$ 的两端切去长度为 $c^{6/8}$ 的线段，否则在两个这样的区间之间的边界处就无法获得足够强的集中性。我们有

$$\sum_{k=1}^{l}|A_k|\le\sum_{k=1}^{l}\frac{c}{\gamma_k2^{k+1}}+2=2l+\sum_{k=1}^{l}\frac{c}{2^{k+1}}\left(1-\frac{r2^{k-10}}{c}\right)=2l+\frac{c}{2}-\frac{c}{2^{l+1}}-\frac{lr}{2^{11}},$$

其中第一步用到了 $|A_k|\le\frac{R_k-L_k}{\gamma_k}+2$。因此，对于 $A=\bigcup_{k=1}^{l}A_k\cup A_{-k}$，我们有

$$|A|<4l+c-\frac{lr}{2^{10}}.$$

我们要证明 $|A|<n$。为此，只需证明

$$\frac{lr}{2^{10}}\ge 4l+(c-n).$$

回忆一下，$c-n\ge\log^2(c)$。因此特别有 $r\ge 10^{100}\log(c)\ge 10^{100}$。于是，右边的项 $4l$ 很容易由左边项的一半控制。对于 $c-n$ 项，我们要证明

$$\frac{10^{100}}{2^{11}}\frac{l(c-n)}{\log(\frac{2c}{c-n})}\ge c-n$$

这等价于

$$\frac{10^{100}}{2^{11}}l\ge\log\left(\frac{2c}{c-n}\right).$$

我们有

$$2l\ge l+1\ge\frac{1}{2}\log\left(\frac{c}{r}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{c}{c-n}}{\log(\frac{2c}{c-n})}\right).$$

与上一节一样，令 $y = \frac{c-n}{c} < 10^{-1000}$。于是所需的不等式可写成

$$\frac{10^{100}}{2^{13}} \log\left(\frac{1}{y}\log\left(\frac{2}{y}\right)\right) \geq \log\left(\frac{2}{y}\right)$$

这对 $y < 0.01$ 成立。

因此， $|A| < n$ ，我们可以取前 n 个特征函数的线性组合 f ，使得 $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ 且 $f(z) = 0$， $z \in A$。为简便起见，记 $g = f \in PW_\pi$。由极小极大原理可得

$$\int_{|x|>\frac{c}{2}} |g(x)|^2 dx \leq 1 - \lambda_n(c).$$

因此，由引理 6.3 以及函数 g 在 $\mathbb{R}$ 上的导数估计，我们得到

$$|g(x)| \leq 10(1-\lambda_n(c))^{1/3}, |x| > \frac{c}{2}.$$

我们的下一个目标是据此得到关于 $|g(x+iy)|$ 的估计，其中 $x \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$ 满足 $\min\left(|x-\frac{c}{2}|, |x+\frac{c}{2}|\right) < 10|y|$，且该估计优于对所有 x， $y \in \mathbb{R}$ 均成立的一致估计 $e^{\pi|y|}$。我们只考虑 $y > 0$， $x > 0$ 的情形，其余三种情形的证明完全类似。

回顾一下， $g(z)e^{i\pi z}$ 是上半平面中的有界解析函数，因此其绝对值的对数在该处是次调和的，并且任意点 $x+iy, y>0$处的值都由泊松积分从上方界定：

$$\log|g(x+iy)e^{-\pi y}| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \log|g(t)|dt.$$

对于 $t \leq \frac{c}{2}$，我们将 $\log|g(t)|$ 从上方估计为 0；对于 $t > \frac{c}{2}$，我们利用逐点界从上方估计 $\log|g(t)|$，得到

$$\log|g(x+iy)| \leq \pi y + \log(10(1-\lambda_n(c)^{1/3})\frac{1}{\pi}\int_{\frac{c}{2}}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

对于 $|x-\frac{c}{2}| < 10|y|$，不难看出，只需考察满足 $\frac{c}{2} \leq t \leq \frac{c}{2}+y$的 t，即可得到该积分至少为 10^{-10}。因此，对于$x \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$和 $\min\left(|x-\frac{c}{2}|, |x+\frac{c}{2}|\right) < 10|y|$，我们得到关于 $|g(x+iy)|$ 的如下估计：

$$\log|g(x+iy)| \leq \pi|y| + 10^{-10}\log(10(1-\lambda_n(c))^{1/3}).$$

现在，我们想将这个界与以下已知条件结合起来 $g(z) = 0, z \in A$ 从而得到 $g(x)$ $x \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$的估计。需要考虑两种情况： $x \in J_k \cup J_{-k}$对于某个 $1 \leq k < l$或者 $x \in [\frac{c}{2} - \frac{c}{2^l}, \frac{c}{2}] \cup [-\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}+\frac{c}{2^l}]$。我们先讨论较简单的第二种情况，

在这种情况下，无需用到关于零点的事实。其论证与定理 1.11 的证明中所用的一个论证类似。

设 $x \in [\frac{c}{2} - \frac{c}{2^l}, \frac{c}{2}]$（另一种情况完全类似）。考虑一个中心为$x$ 、半径为 r的圆。由于 $\log|g(z)|$ 是次调和函数，其在该圆上的积分至少为 $\log|g(x)|$:

$$\log|g(x)| \leq \int_0^1 \log|g(x + re^{2\pi it})|dt.$$

由于 $|\frac{c}{2} - x| \leq 4r$，对于该圆的上、下四分之一部分，$|g(a+ib)|$ 适用更强的逐点界；而对于其他点，我们将使用界 $|g(a+ib)| \leq e^{\pi|b|}$。代入可得

$$\begin{aligned}\log|g(x)| &\leq \frac{1}{2}10^{-10}\log(10(1-\lambda_n(c))^{1/3} + \int_0^1 \pi r|\sin(2\pi t)|dt \\ &= \frac{1}{2}10^{-10}\log(10(1-\lambda_n(c))^{1/3} + 2r.\end{aligned}$$

如果假设对于足够大的 κ，$\lambda_n(c) \geq 1 - \exp\left(-\kappa^{c-n_{\log(\frac{2c}{c-n})}}\right)$，那么该估计特别意味着 $\log|g(x)| \leq -r$（回顾一下，我们知道 r 足够大，因此可以吸收所有常数）。

接下来，我们转向 $x \in J_k \cup J_{-k}$ 的情形，其中 $1 \leq k < l$。再一次，我们只讨论 $x \in J_k = [L_k, R_k]$的情形，另一种情形的证明完全类似。我们考虑一个以 x 为中心、半径为 $R = \frac{c}{2^{k+2}}$的圆。这里，仅利用 $\log|g(z)|$ 的次调和性是不够的，我们将运用詹森公式的全部威力:

$$\log|g(x)| = \int_0^1 \log|g(x + Re^{2\pi it})|dt + \sum_{|x-z_m|<R} \log\frac{|x-z_m|}{R},$$

其中求和遍及 g 的零点 z_m。对于积分项，按照前一种情形进行相同的计算，可得

$$\int_0^1 \log|g(x + Re^{2\pi it})|dt \leq 2R + \frac{1}{2}10^{-10}\log(10(1-\lambda_n(c))).$$

对于零点之和，我们只保留 $z_m \in A$，这显然只会使和变大。我们还会去掉满足 $|x - z_m| < 1$ 的零点。注意，剩余零点位于 $A_{k-1} \cup A_k \cup A_{k+1}$ 中，且它们之间的间距至多为 $\gamma_{k+1} < 2$，但区间 J_{k-1}, J_k, J_{k+1} 边界处的四个零点除外（若 $k = 1$，则我们必须考虑 A_{-1}, J_{-1}，而不是 A_0, J_0，但推理过程相同）。这四个缺失点中的每一个至多使我们损失 $\log(R) \leq \log(c)$。我们将剩余零点分成大于和小于 x 的两组，并分别用以下函数的积分来估计两组的和:

由于函数 $\log(s)$ 单调递增，我们对 $\log(\frac{t}{R})$ 从 0 到 $R-2\gamma_{k+1}$ 进行积分。此外，再添加至多四个点（每个点至多使我们额外损失 $\log(c)$），我们也可以将积分上限延伸至 R。于是得到

$$\sum_{|x-z_k|<R} \log\frac{|x-z_k|}{R} \le 8\log(c)+\frac{2}{\gamma_{k+1}}\int_0^R \log\left(\frac{t}{R}\right)dt = 8\log(c)-\frac{2R}{\gamma_{k+1}}$$
$$= 8\log(c)-2R+\frac{Rr2^{k-9}}{c} = 8\log(c)-2R+\frac{r}{2^{11}}.$$

综合以上结果，我们得到

$$\log|g(x)| \le 8\log(c)+\frac{1}{2}10^{-10}\log(10(1-\lambda_n(c)))+\frac{r}{2^{11}}.$$

与之前一样，若我们假设 $\lambda_n(c) \ge 1-\exp\left(-\kappa^{\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}}\right)$，且 κ 足够大，并且 $c-n \ge \log^2(c)$ 满足 $r \ge \log(c)^4$，那么此估计表明 $\log|g(x)| \le -r$。

对于一开始略去的情形 $c-n \ge 10^{-1000}c$，我们可以忽略函数 g 的所有零点，并对所有 $x\in[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}]$ 直接计算积分：取中心为 x、半径为 $\frac{c}{2}$ 的圆，便可得到相同的界 $\log|g(x)| \le -r$，只要 $\lambda_n(c) \ge 1-\exp\left(-\kappa^{\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}}\right)$，且 κ 足够大。

为了导出矛盾，我们注意到，若 $\lambda_n(c) \ge 1-\exp\left(-\kappa^{\frac{c-n}{\log(\frac{2c}{c-n})}}\right)$，且 κ 足够大，那么显然，当 $c-n \ge \log^2(c)$ 且 c 足够大时，$\lambda_n(c) \ge \frac{1}{2}$。因此，

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} |g(x)|^2dx \ge \frac{1}{2}.$$

另一方面，由我们的估计可得

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} |g(x)|^2dx \le \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} e^{-2r} \le ce^{-2r}$$

其小于 $\frac{1}{2}$，因为 $c-n \ge \log^2(c)$ 且 $r \ge 10^{\frac{c-n}{\log(c)}}$。

注 7.1。我们可以尝试在相干态变换情形下采用类似的论证：构造平面的一个适当子集，并考察在其中所有点均为零的特征函数线性组合。这种方法实际上给出了正确的阶 $1-\exp(-\kappa(\sqrt{c}-\sqrt{n})^2)$，但对应的 n 区域更差，其量级为 $c-n \ge c^{0.9}$。鉴于这一点，并且由于该论证比定理 *1.11* 的证明技术性强得多，我们不再给出它。

8. 结语

在本文中，我们确立了 $1-\lambda_n(c)$ 和$1-\mu_n(c)$ 关于 $n<c$的渐近行为。当然，这仍有许多工作有待完成。其中最具雄心的目标或许是，在定理 1.1 的精神下，以较小的误差项获得 $\log(1-\lambda_n(c))$ 和 $\log(1-\mu_n(c))$ 关于 $n<c$ 的积分近似。特别是，若能求出对于 $0<\varepsilon<1$ 的极限，将会非常有趣:

$$\gamma_\varepsilon=-\lim_{c\to\infty}\frac{\log(1-\lambda_{(1-\varepsilon)c}(c))}{c},\delta_\varepsilon=-\lim_{c\to\infty}\frac{\log(1-\mu_{(1-\varepsilon)c}(c))}{c}.$$

根据目前的研究我们知道，如果它们存在，对于较小的 $\varepsilon>0$ ，它们应当表现为 $\gamma_\varepsilon\sim\frac{\varepsilon}{\log(1/\varepsilon)}$ 和 $\mu_\varepsilon\sim\varepsilon^2$，但其精确值可能涉及一些含特殊函数的积分。

另一个有趣的问题是扩大 n 的适用范围。在时频局域化情形下，自然边界是 $c-n\sim\log(c)$；在相干态变换情形下，则是 $c-n\sim\sqrt{c}$ ，此时特征值与 1 和 0 均保持有界距离。然而，我们只有借助定理 1.4，才能在定理 1.6 中将范围推进到如此接近的程度；在其他所有结果中，我们至少必须补偿 c 中的多项式损失，从而导致 n 中更差的范围。

最后，我们简要谈谈 $n>c$ 情形下会发生什么。在时频局域化情形下，定理 1.3、定理 1.4 和定理 1.1 给出了极其精确的估计，但值得一提的是，第 7 节的方法可以给出 $c+10^{100}\log^2(c)<n<10^{100}c$ 的特征值上界，其渐近行为与我们在定理 1.1 中得到的 $\log(\lambda_n(c))$ 相同。

在相干态变换的情形下，这些方法还可以为区域 $c+c^{0.9}<n<10c$ 给出预期量级的上界，见注 7.1（通过与圆盘的情形比较，也可以将此结果推广到所有 $n\geq10c$ ）。对于下界，仿照第 3 节的做法，但改为取一个更大的正方形，并利用其特征函数进行极小极大过程，我们可以得到 $\mu_n(c)$ 的预期量级下界，其量级为 $n>c+\sqrt{c}\log(c)$。这些计算的细节将在别处给出。

致谢。 感谢 Fedor Nazarov 在时频局部化算子方面给予我的帮助。我还要感谢 Aleksandr Logunov 与我讨论调和测度和对数积分，感谢 Jan Philip Solovej 告诉我有关论文 [18] 的情况，并感谢 Mikhail Sodin 对詹森公式提出的宝贵意见。本研究得到 BSF 资助 2020019、ISF 资助 1288/21 以及 The Raymond 和

贝弗利·萨克勒博士后奖学金的资助，并得到 VILLUM 量子理论数学卓越中心（QMATH）资助编号10059的支持。

参考文献

[1] W. O. Amrein、A. M. Berthier，“论 L_p-函数的支撑性质及其傅里叶变换”，《泛函分析杂志》，24 (1977)，258–267.[2] M. Benedicks，“关于支撑在有限勒贝格测度集合上的函数的傅里叶变换”，《数学分析及其应用杂志》，106 (1985)，180–183.[3] A. Bonami、Ph. Jaming、A. Karoui，“sinc核算子谱的非渐近行为及相关应用”，《数学物理学杂志》，62，033511 (2021)。[4] A. Bonami、A. Karoui，“时频限制算子的谱衰减”，《应用与计算调和分析》，42 (2017)，1–20.[5] I. Daubechies，“时频局部化算子：一种几何相空间方法”，《*IEEE*信息论汇刊》，34 (1988)，第4期，605–612.[6] W. H. Fuchs，“论带限信号理论中出现的一个积分方程的特征值”，《数学分析及其应用杂志》9 (1964)，317–330.[7] K. Gr¨ochenig，《时频分析基础》，Birkh¨auser，马萨诸塞州波士顿，2001.[8] S. Halvdansson，“时频局部化算子的经验跃迁曲线”，《应用与计算调和分析》，71，(2026)，101825.[9] A. Israel，“时频局部化算子的特征值分布”，arXiv:1502.04404.[10] S. Karnik、J. Romberg、M. A. Davenport，“长椭球波函数与离散长椭球序列特征值的改进界”，《应用与计算调和分析》，55(1):97-128.[11]J. R. Klauder、B. S. Skagerstam，《相干态——在物理学与数学物理中的应用》，世界科技出版社，新加坡，(1985)。[12] A. Kulikov，“傅里叶插值与时频局域化”，《傅里叶分析与应用杂志》，27，58 (2021)。[13] A. Kulikov，“骤降区之前时频局部化算子特征值的指数下界”，《应用与计算调和分析》，71，(2024)，101639.[14] A. Kulikov、M. D. Larsen，“局部化算子特征值的精确估计及其在面积定律中的应用”，撰写中。[15] H. J. Landau、H. O. Pollak，“长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性，II”，《贝尔系统技术杂志》，40，65-84 (1961)。[16] H. J. Landau、H. O. Pollak，“长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性，III”，《贝尔系统技术杂志》，41，1295-1336 (1962)。[17] H. J. Landau、H. Widom，“时频限制的特征值分布”，《数学分析及其应用杂志》，77 (1980)，469–481.[18] E. H. Lieb、J. L. Lebowitz，“物质的构成：由电子与原子核组成的系统中热力学的存在性”，《数学进展》，9，316-398 (1972)。[19] F. Marceca、J. L. Romero、M. Speckbacher，“两个区域上傅里叶集中算子的特征值估计”，《理性力学与分析档案》，248，35 (2024)。

[20] F. Nicola、F. Riccardi，“局部化算子希尔伯特–施密特范数的定量等周不等式”，《傅里叶分析与应用杂志》，31，12 (2025)。[21] J. P. Oldfield，“广义反 Wick 算子的两项Szeg˝o定理”，《谱理论杂志》，5 (2015)，751–781.[22] A. Osipov，“与长椭球波函数相关的特征值的若干上界”，《应用与计算调和分析》，35 (2013)，309–340.[23] D. Slepian，“长椭球波函数的若干渐近展开”，《数学物理学杂志》，44 (1965)，99-140.[24] D. Slepian、H. O.Pollak，“长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性，I”，《贝尔系统技术杂志》，40，43-64 (1961)。[25] H. Widom，“某些积分方程特征值的渐近行为. II”，《理性力学与分析档案》，17 (1964)，215–229.

Aleksei Kulikov，哥本哈根大学，数学科学系，Universitetsparken 5，2100 哥本哈根，丹麦，lyosha.kulikov@mail.ru