arXiv:2603.07450v1 [eess.SP] 8 Mar 2026

驯服贝塞尔景观：流体 MIMO 系统中用于空间去相关的联合天线位置优化

Tuo Wu、Kai-Kit Wong（IEEE 会士）、Baiyang Liu、
Kin-Fai Tong（IEEE 会士）和 HyundongShin（IEEE 会士）

摘要——将流体天线系统（FAS）的概念应用于多输入多输出（MIMO）系统，便形成了 MIMO-FAS，又称流体 MIMO。在丰富散射条件下，空间相关矩阵由零阶贝塞尔函数 $J_0(\cdot)$ 决定，其形式取决于可连续调节的天线位置，从而形成一个局部最优点不断变化、极具非凸性的优化景观——贝塞尔景观。本文通过塑造这一景观，研究流体 MIMO 中发射端（TX）与接收端（RX）天线位置的联合优化问题，以最大化遍历容量。利用Kronecker信道分解，我们首先推导出一系列解析结果，揭示该问题的内在结构：(i) 高信噪比（SNR）下的容量近似，可将目标函数分解为发射端和接收端相关矩阵 R_T 和 R_R的可分对数行列式项；(ii) 闭式容量损失界，将 $\det(\mathrm{R}_T)$ $\det(\mathrm{R}_R)$ 与相对于独立同分布（i.i.d.）理想 MIMO 信道的性能差距联系起来；(iii) 当发射端的流体天线单元数量为 $N = 2$ 时，使阵元间距达到全局最优的取值为 J_0的第一个零点。基于这些发现，我们在交替优化（AO）框架下提出两种算法。第一种是结合粒子群优化（PSO）的 AO 算法，它利用粒子群在贝塞尔景观中进行全局探索，无需梯度信息。第二种方法则采用逐次凸近似（SCA），通过 $J_1(\cdot)$ 以闭式形式获得梯度，并构造凸代理问题，从而实现数量级上的收敛加速。两种算法 AO-PSO 和 AO-SCA 均可证明单调收敛。仿真结果表明，所提方案的性能非常接近 i.i.d. 容量上界，优于在高信噪比下，固定位置天线（FPA）的部署性能提升超过 7 比特/秒/赫兹，而 AO-SCA 的性能与 AO- 粒子群优化相同，且加速倍数超过 10^5。

索引词——流体天线系统（FAS）、空间相关性、多输入多输出、多输入多输出-流体天线系统、遍历容量、粒子群优化（PSO）、交替优化（AO）。

一、引言

FROM [1] 1994 1996 [2], Paulraj 和 Kailath 的首项专利于，而 Foschini 关于多输入多输出（MIMO）天线系统的开创性论文则发表于此后。自第三代移动通信（3G）以来，MIMO 天线系统一直是推动移动通信发展的关键技术，直至如今的第五代移动通信（5G）。MIMO 有望通过空间分集大幅提升通信可靠性 [3], [4], [5] 和频谱效率[6] 。此外，MIMO 已发展为多用户 MIMO [7], [8], [9], [10], [11], [12],, 后者是 5G 物理层的支柱 [13]。人们对 MIMO 的兴趣有增无减，许多人认为，为满足日益增长的性能需求，天线数量将持续增加 [14]。然而，在实际应用中，盲目扩大阵列尺寸或许并非正确的发展方向，因为这会带来高昂的硬件成本、外形尺寸限制以及信道获取开销。另一个日益受到关注的问题是：当天线数量变得极大时，功耗会急剧增加，而峰均功率比（PAPR）也会严重降低功率放大器的效率 [15]。

展望第六代移动通信（6G）[16], 技术，能够在不一定增加天线数量的情况下提升多输入多输出性能的技术将至关重要。为此，可重构天线展现出巨大潜力，但其能力尚未转化为系统级性能增益 [17]。原因之一是，人们尚不清楚如何在现实约束下，将可用的控制手段（状态、方向图、调谐范围、切换粒度）转化为吞吐量、可靠性或覆盖范围方面可重复、可测量的增益。天线领域推动的研发往往与移动系统的实际需求脱节，因而产生了一些令人瞩目的原型，但其可重构性难以在端到端链路中有效利用，或者其优势在理想化场景之外难以维持。

为弥补这一差距，Wong 等人提出了流体天线系统（FAS）的概念[18], [19]。FAS 是一种硬件无关系统概念，将天线视为可重构的物理层资源，以拓展系统设计和网络优化的空间，并强调形状和位置灵活性 [20],[21], [22], [23], [24]。实际的 FAS 可采用多种可重构天线技术，例如可移动单元 [25], 液体基天线 [26], [27], 可重构

（通信作者：Kai-Kit Wong。）Thi s研究 T. W

由香港研究资助局在卓越学科领域计划下资助，资助编号为AoE/E- 101/23-N。K. K. Wong的工作得到工程与自然科学研究理事会（EPSRC）项目EP/W026813/1的支持。K.-F.Tong与Baiyang Liu的研究工作部分由香港研究资助局在卓越学科领域计划下资助，资助编号为AoE/E-101/23-N，以及香港都会大学教职员研究启动基金：FRSF/2024/03。H. Shin的工作得到韩国国家研究基金会（NRF）的资助，该资助由韩国政府（MSIT）提供（RS-2025-00556064和RS-2025-25442355），并由韩国科学技术信息通信部（MSIT）在信息技术研究中心（ITRC）支持计划（IITP-2025-RS- 2021-II212046）下提供支持，由信息通信技术规划与评估研究院（IITP）监督。

T. Wuis 现任香港城市大学电气工程系成员，地址为中国香港（电子邮箱：tuowu2@cityu.edu.hk）。

K. K. Wong 任职于英国伦敦 WC1E 7JE 伦敦大学学院电子与电气工程系，同时也任职于韩国京畿道龙仁市 17104 庆熙大学电子工程系（电子邮箱：kai-kit.wong@ucl.ac.uk）。

B. Liu 和 K.-F.Tong 任职于中国香港特别行政区香港都会大学科学与技术学院（电子邮箱：{byliu, ktong}@hkmu.edu.hk）。

H. Shin 任职于韩国京畿道龙仁市 17104 庆熙大学电子与信息融合工程系（电子邮箱：hshin@khu.ac.kr）。

像素 [28], [29], [30], 基于超材料的天线 [31], [32],等。在 [33], Tong 等人 讨论了 FAS 的多种实现技术，并进行了比较分析。

与传统的固定位置天线（FPA）不同，流体天线系统（FAS）的定位可重构性为在空间域中获取分集增益提供了全新途径，从而带来额外的自由度（DoF）。近年来，FAS 受到越来越多的研究关注，相关研究成果迅速增加。例如，研究人员致力于准确刻画流体天线系统信道之间的空间相关性 [34], [35] ，并研究其分集性能 [36], [37]。Copula 技术已成功用于分析 FAS 的性能 [38], [39]。在 [40], Ram´ırez-Espinosa 等人提出了块相关模型（ BCM），该模型在保证可处理性的同时，能够高精度地分析 FAS 的性能。随后， [41]采用具有可变相关参数的模型研究 FAS。在 FAS 中寻找最优端口位置是一项重要的设计问题。例如， [42] 研究了仅能获取少量信道状态信息（CSI）观测值时的端口选择问题。多输入多输出与 FAS 相结合（又称 MIMO-FAS 或流体多输入多输出），产生了联合端口选择与波束成形问题，该问题已在 [43], [44], [45], [46]中得到研究。FAS 还被用于提升频谱感知[47], 、通感一体化（ISAC） [48], [49], [50], [51], 、非正交多址接入（NOMA） [52], [53], [54], 以及可重构智能表面（RIS）的性能 [55], [56], [57], [58], [59], [60]。此外，可扩展 FAS 能够显著提升定位性能 [61], [62]。此外，FAS 所带来的额外自由度也有助于保密通信 [63], [64], [65],[66], [67], [68] 和活动监测 [69]。

此外，FAS 提供了一种新的多址接入方式，表明仅在接收机侧利用位置可重构性，即可在无需预编码和干扰管理的情况下，实现同一信道上的多用户通信 [70]。快速流体天线多址接入（FAMA） [71], 慢速流体天线多址接入（慢速 FAMA） [72], [73], [74], [75], [76], 紧凑型超大规模阵列（CUMA）[77], 编码流体天线多址接入（编码 FAMA） [78], [79],涡轮流体天线多址接入（涡轮 FAMA） [80], [81] 已于近期提出。FAS 中的信道状态信息对于利用自由度至关重要，且文献 [82], [83], [84], [85], [86]已对信道状态信息估计问题进行了研究。

总体而言，FAS 研究正迅速发展。然而，尽管相关文献不断增加，现有大多数工作仍聚焦于采用单个射频（RF）链的端口选择分集，并依赖简化的空间相关模型。对于在发射机和接收机两侧均部署多个流体天线的流体 MIMO 系统，其相关的设计与优化问题仍基本未得到解决，这也促成了我们的研究。表 I 总结了相关文献，并将我们的贡献置于现有研究工作的背景下。

具体而言，流体多输入多输出带来了一个根本性的机遇：在丰富散射环境下，由天线位置参数化的空间相关矩阵——通过 Jakes（Clarke）零阶贝塞尔函数 $J_0(\cdot)$ [20, Section II], [87] 表示——将成为显式设计变量。矩阵元素随位置呈振荡变化，形成一个非凸的贝塞尔景观，可通过对其进行塑造来最大化遍历容量。然而，要实现这一机遇仍面临若干严峻挑战。

首先，相关核 $J_0(2\pi d/\lambda)$关于阵元间距 d呈振荡且非凸的特性，随着天线位置连续变化，会形成崎岖的遍历容量曲面，其中存在许多局部最优点。其次，发射端（TX）和接收端（RX）的位置通过克罗内克相关模型 $\mathrm{R} = \mathrm{R}_R \otimes \mathrm{R}_T$ 相互耦合，导致需要对 $N+M$ 个连续变量进行联合优化，且目标函数无法进行简单分解，其中N 和 M 分别表示发射端和接收端的流体天线数量。第三，实际应用中的约束——有限孔径和最小间距要求——使可行集本质上呈非凸，因此无法直接使用标准的凸优化方法。此外，现有的相关性表征框架（如 BCM [40], [56] 和可变 BCM（VBCM） [41], [68],）主要是为端口选择分析而开发，并未涉及流体多输入多输出中的多天线位置优化。

为克服这些困难，我们首先建立一组解析结果，以揭示该问题的内在结构。特别地，遍历容量的高信噪比（SNR）近似（命题 1）表明，目标函数可分解为发射端（TX）和接收端（RX）相关矩阵的对数行列式项之和，$\log_2\det(\mathbf{R}_T)$ 和$\log_2\det(\mathbf{R}_R)$，从而证明了原始耦合表述中被掩盖的可分离结构。接下来，闭式容量损失界（推论 1）以比特/秒/赫兹为单位刻画了相对于独立同分布（i.i.d.）MIMO基准而言空间相关性造成的确切损失，并将性能差距明确关联至$\det(\mathbf{R}_T)\det(\mathbf{R}_R)$。对于 $N=2$这一特殊情形，我们进一步以闭式形式推导出全局最优阵元间距，即 J_0 的第一个正零点（命题2），从而得到一条基本设计准则：将两根天线放置在约 0.383λ 处即可实现完全去相关。总体而言，这些洞见提供了工程直觉，并直接推动了下文所提出的算法分解策略。

基于可分离性，我们提出了一种交替优化（AO）框架，将发射端-接收端位置设计分解为一系列单侧子问题：在每一步中，优化一侧的天线位置，同时固定另一侧。针对每个子问题，我们提出两种互补的求解器。第一种采用粒子群优化（PSO），它维持多样化的候选位置向量种群，在无需梯度信息的情况下并行探索振荡的贝塞尔景观，从而对局部最优点具有较强的鲁棒性。第二种基于逐次凸近似（SCA）：通过利用由一阶贝塞尔函数 $J_1(\cdot)$表示的$\log_2$ det(R)的闭式梯度，我们在每次迭代中构造凹二次代理函数，并将子问题归结为一系列可高效求解的凸规划。AO-PSO与AO-SCA均引入基于投影的可行性机制，以强制满足有限孔径和最小间距约束，并且我们证明了所得目标序列的单调收敛。数值结果表明，AO-SCA在达到与AO-PSO相当的容量的同时，实现了数量级的运行时间节省，从而为实际部署提供了有吸引力的复杂度与性能权衡。

表 I 代表性 FAS 研究对比

参考文献	系统	流体天线单元	设计变量	相关模型	关键分析结果
[18], [19]	SISO	单一	端口选择	Jakes（精确）	容量与中断界
[34]	SISO	单一	端口选择	Jakes（精确）	相关参数
[40], [56]	单输入单输出可重构智能表面	单个	端口选择	BCM	中断概率
[41], [68]	SISO	单个	端口选择	VBCM	中断与保密性
[37]	MIMO	多个	端口选择	Jakes（精确）	分集复用折衷，q-中断容量
[45]	多用户多输入单输出	多个	位置（瞬时信道状态信息）	—	和速率优化
[51]	ISAC	多个	位置（瞬时信道状态信息）	—	信干噪比优化
本文	**MIMO**	多个	位置（统计信道状态信息）	Jakes（精确）	容量近似、损失界、最优间距

我们的主要贡献总结如下：

- 我们针对 Jakes模型下具有位置相关 Kronecker 结构空间相关性的流体多输入多输出系统，在孔径和最小间距约束下，建立了最大化遍历容量的问题。
- 我们推导出一种高信噪比遍历容量近似，将容量分解为发射端和接收端相关矩阵的对数行列式函数（命题 1），建立了闭式容量损失界（推论 1），并针对 $N=2$ 情形以闭式形式求得最优天线间距（命题 2）。
- 我们提出 AO-PSO 来求解该非凸问题，并证明其单调收敛。该算法通过带有可行性投影机制的粒子群优化，交替优化发射端和接收端天线位置。
- 我们开发了 AO-SCA，将位置优化转化为一系列凸子问题。通过利用一阶贝塞尔函数 $J_1(\cdot)$ 推导 $\log_2\det(\mathrm{R}_T)$ 的梯度，我们得到了一种投影梯度上升算法，其速度比 AO-PSO 快数个数量级，同时达到相同的容量。
- 我们的蒙特卡洛仿真验证了分析结果，表明 AO-PSO 和 AO-SCA 均显著优于 FPA、单侧FAS优化和随机布置方案，且性能接近独立同分布 MIMO 容量上界。

II. 系统模型

A. 天线配置

我们考虑一个点对点窄带流体多输入多输出系统，其中发射端和接收端均配备流体天线系统。发射端在长度为 $A\lambda$ 的线性区域内布置 N 个流体天线单元，其中 λ 为载波波长。发射端沿阵列轴的天线位置构成向量 $\mathbf{t}=[t_1,t_2,\ldots,t_N]^T\in\mathbb{R}^N$，且对于所有 i，均有 $t_i\in[0,A\lambda]$。类似地，接收端在长度为 $B\lambda$ 的线性空间内布置 M 个流体天线单元，其位置向量为 $\mathbf{r}=[r_1,r_2,\ldots,r_M]^T\in\mathbb{R}^M$，且对于所有 j，均有 $r_j\in[0,B\lambda]$。每个流体天线都连接到专用射频链，并对位置 (t,r) 进行联合优化，以优化系统性能。

B. 信道模型

1) 多径传播：我们采用包含 L 条散射路径的基于几何的随机信道模型。从发射端到接收端的物理信道矩阵表示为

$$\mathbf{H}(\mathbf{t},\mathbf{r})=\sqrt{\frac{C_0 d^{-\alpha}}{L}}\sum_{\ell=1}^{L} g_\ell\,\mathbf{b}(\phi_\ell,\mathbf{r})\,\mathbf{a}^H(\theta_\ell,\mathbf{t}),\qquad(1)$$

其中，C_0 是单位距离处的参考信道功率增益，d 是链路距离，α 是路径损耗指数，$g_\ell\sim\mathcal{CN}(0,1)$ 是独立同分布的复路径增益，发射端和接收端的场响应向量（FRV）为

$$\mathbf{a}(\theta_\ell,\mathbf{t})=\left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}t_1\cos\theta_\ell},\ldots,e^{j\frac{2\pi}{\lambda}t_N\cos\theta_\ell}\right]^T\in\mathbb{C}^N,\qquad(2)$$

$$\mathbf{b}(\phi_\ell,\mathbf{r})=\left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}r_1\cos\phi_\ell},\ldots,e^{j\frac{2\pi}{\lambda}r_M\cos\phi_\ell}\right]^T\in\mathbb{C}^M.\qquad(3)$$

其中，θ_ℓ 和 ϕ_ℓ 分别表示第 ℓ 条路径的出发角（AoD）和到达角（AoA）。

2) Jakes 散射下的空间相关性：在 Jakes（Clarke）各向同性散射模型 [87]，下，出发角 $\{\theta_\ell\}$ 和到达角 $\{\phi_\ell\}$ 在 $[0,\pi]$ 上独立且均匀分布。对随机角度和独立同分布的路径增益 $\{g_\ell\}$ 求期望，可计算出位置分别为 t_i 和 $t_{i'}$ 的两个发射端阵元，以及位置分别为 r_j 和 $r_{j'}$ 的两个接收端阵元之间的空间协方差：

$$\mathbb{E}\left[H_{j,i}\,H^*_{j',i'}\right]=C_0 d^{-\alpha}\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(t_i-t_{i'})\cos\theta}\right]}_{[\mathbf{R}_T(\mathbf{t})]_{ii'}}\times\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(r_j-r_{j'})\cos\phi}\right]}_{[\mathbf{R}_R(\mathbf{r})]_{jj'}},\qquad(4)$$

其中，$H_{j,i}$ 表示 H 的第（j，i）个元素。由于 $\theta\sim\mathcal{U}[0,\pi]$，该期望的结果恰为零阶第一类贝塞尔函数 [34]：

$$\mathbb{E}\left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\cos\theta}\right]=J_0\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\right),\qquad(5)$$

从而得到与位置相关的发射端和接收端空间相关矩阵

$$[\mathbf{R}_T(\mathbf{t})]_{ii'}=J_0\left(\frac{2\pi|t_i-t_{i'}|}{\lambda}\right),\ i,i'=1,\ldots,N,\qquad(6)$$

$$[\mathbf{R}_R(\mathbf{r})]_{jj'}=J_0\left(\frac{2\pi|r_j-r_{j'}|}{\lambda}\right),\ j,j'=1,\ldots,M.\qquad(7)$$

$\mathrm{R}_T\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 和 $\mathrm{R}_R\in\mathbb{R}^{M\times M}$ 均为实对称半正定矩阵，其元素分别由天线位置向量t和r决定。注意，由于 $J_0(\cdot)$为实值，尽管相关矩阵源自复信道模型，它们仍为实矩阵。

注释 1（贝塞尔相关函数的性质）：零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 决定了（6）和（7）中的空间相关性，并具有若干对位置优化问题至关重要的性质：

(i) 单调包络衰减：对于 $x>0$，$|J_0(x)|$ 受限于 $\sqrt{2/(\pi x)}$，这意味着相关幅度会随着阵元间距增大而减小。

(ii) 振荡零点：$J_0(x)$ 有可数个正零点，分别位于 $x_1\approx2.405$、$x_2\approx5.520$、$x_3\approx8.654$、……，因此在离散的间距下可实现零相关

$d_k = x_k\lambda/(2\pi)$、$k = 1$、2、.....。第一个零点出现在 $d_1 \approx 0.383\lambda$，明显小于通常采用的半波长间距。

（iii）非单调性：$J_0(x)$既取正值也取负值，因此增大间距并不总能降低相关性，使得优化问题呈现多模态。

（iv）半正定性：对于任意一组位置 $\{t_i\}$，$\mathbf{R}_T$ 是半正定的，因为 $J_0(\cdot)$ 是 $[0,\pi]$ [34]上均匀分布的特征函数。

3）相关矩阵的特征值结构：令$\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_N \geq 0$表示 R_T 的特征值；由于 $\mathrm{tr}(\mathrm{R}_T) = N$，因此有 $\sum_k \mu_k = N$。两个极端情况尤其值得关注：

- 满秩（$\mathrm{R}_T = \mathrm{I}_N$）：所有 $\mu_k = 1$，对应于完全独立的空间信道。当所有两两相关性均为零时，即可实现这种情况。
- 秩亏（$\mathrm{R}_T \to \mathbf{1}\mathbf{1}^T/N$）：$\mu_1 \to N$，$\mu_k \to 0$，对于$k > 1$。当所有天线都共址时，就会出现这种情况，使 MIMO 系统退化为单天线链路。

条件数 $\kappa(\mathrm{R}_T) = \mu_1/\mu_N$ 量化了特征值的分散程度：$\kappa(\mathrm{I}_N) = 1$ （最优）；对于秩亏矩阵，则为 $\kappa \to \infty$。具体而言，位置优化的目标可以理解为使 κ 趋近于 1。

4) 克罗内克相关信道模型：根据（1）–（7），多输入多输出信道可进行如下克罗内克分解：

$$\mathbf{H}(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \mathbf{R}_R^{1/2}(\mathbf{r})\,\mathbf{G}\,\mathbf{R}_T^{1/2}(\mathbf{t}), \tag{8}$$

其中，$\mathrm{G} \in \mathbb{C}^{M\times N}$的条目为独立同分布，服从 $\mathcal{CN}(0, C_0 d^{-\alpha})$，表示去相关的（虚拟）信道系数；$\mathrm{R}_T^{1/2}$、$\mathrm{R}_R^{1/2}$是空间相关矩阵唯一的厄米半正定平方根。

克罗内克模型（8） [37] 假设发射端和接收端的散射环境在统计上相互独立；当阵列相对于链路距离较小时，这一假设成立。该模型将发射端和接收端的相关性分离，从而将信道统计特性简化为一对（$\mathbf{R}_T$，$\mathbf{R}_R$）。

注2（作为位置函数的相关性）：与R_T 和R_R 固定不变的固定位置天线系统不同，在流体天线系统中，它们通过(t,r)成为显式优化变量。这一额外自由度使物理层能够通过优化天线间距，直接塑造相关矩阵的特征值谱，并使其趋向于I（最大空间自由度）。

C. 信号模型与遍历容量

接收端的接收信号向量由下式给出

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{t},\mathbf{r})\,\mathbf{x} + \mathbf{n}, \tag{9}$$

其中，$\mathrm{x} \in \mathbb{C}^N$ 表示满足$\mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = (P/N)\mathrm{I}_N$的发射信号向量，$P$为总发射功率，$\mathrm{n} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2\mathrm{I}_M)$为加性高斯白噪声。假设采用高斯信号传输，且信道状态信息仅在接收机端已知（接收端信道状态信息，CSIR），则瞬时互信息为

$$I(\mathbf{t},\mathbf{r};\mathbf{H}) = \log_2\det\left(\mathbf{I}_M + \frac{P}{N\sigma^2}\mathbf{H}(\mathbf{t},\mathbf{r})\,\mathbf{H}^H(\mathbf{t},\mathbf{r})\right). \tag{10}$$

将 (8) 代入 (10)，并对随机信道$\mathbf{G}$取期望，可得遍历容量

$$C(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \mathbb{E}_{\mathbf{G}}\left[\log_2\det\left(\mathbf{I}_M + \frac{P}{N\sigma^2}\mathbf{R}_R^{1/2}\mathbf{G}\,\mathbf{R}_T\,\mathbf{G}^H\mathbf{R}_R^{1/2}\right)\right]. \tag{11}$$

注意，C(t,r)仅通过R_T(t)和R_R(r)的特征值分布依赖于(t,r)，从而使相关结构成为待优化的基本量。

注3（蒙特卡洛容量估计）：式（11）中的期望不存在闭式表达式，我们通过蒙特卡洛平均对其进行估计：

$$\hat{C}(\mathbf{t},\mathbf{r}) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\log_2\det\left(\mathbf{I}_M + \frac{P}{N\sigma^2}\mathbf{H}_s\mathbf{H}_s^H\right), \tag{12}$$

其中，$\mathrm{H}_s = \mathrm{R}_R^{1/2}\,\mathrm{G}_s\mathrm{R}_T^{1/2}$ 与 $\{\mathrm{G}_s\}_{s=1}^S$ 为独立同分布样本。我们使用 $S = 200$ 进行优化，并使用 $S = 1500$ 进行最终评估。在每次交替优化迭代中，所有位置候选点共享相同的 $\{\mathrm{G}_s\}$，以保证比较的公平性。

III. 问题表述

我们寻求使遍历容量最大化的天线位置向量 $(\mathbf{t},\ \mathbf{r})$，并满足天线位置的实际约束。11）即，

$$\max_{\mathbf{t},\mathbf{r}} \quad C(\mathbf{t},\mathbf{r}) \tag{13a}$$
$$\text{s.t.} \quad t_i \in [0,\,A\lambda], \quad \forall i = 1,\ldots,N, \tag{13b}$$
$$r_j \in [0,\,B\lambda], \quad \forall j = 1,\ldots,M, \tag{13c}$$
$$|t_i - t_{i'}| \geq d_{\min}, \quad \forall i \neq i', \tag{13d}$$
$$|r_j - r_{j'}| \geq d_{\min}, \quad \forall j \neq j', \tag{13e}$$

其中，(13b)（分别为 (13c)）将每个发射端（分别为接收端）天线限制在阵列的物理孔径内。约束 (13d) 和 (13e) 强制要求最小阵元间距 $d_{\min}$，以避免互耦并确保机械可行性。

A. 可行性分析

问题 (13) 可行，当且仅当

$$A\lambda \geq (N-1)d_{\min} \quad \text{and} \quad B\lambda \geq (M-1)d_{\min}. \tag{14}$$

发射端位置的可行集可表示为

$$\mathcal{T} \triangleq \left\{\mathbf{t} \in [0,A\lambda]^N : t_1 < \cdots < t_N,\ t_{i+1} - t_i \geq d_{\min}\right\}, \tag{15}$$

它是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个紧致多面体，因此保证存在全局最大值点。

B. 优化问题的性质

注 4（非凸性）：问题（13）是非凸的，因为（i）$J_0(\cdot)$具有振荡性，会产生多个局部最优点；（ii）间距约束定义了一个非凸可行集（由多个互不相连的凸区域组成，每种天线排序对应一个区域）。

注释5（容量界）：遍历容量 C(t,r) 的界为

$$C_{\mathrm{FPA}} \leq C^* \leq C_{\mathrm{iid}}, \tag{16}$$

其中 C^{*} =最大$_{(\mathbf{t},\mathbf{r})\in\mathcal{T}\times\mathcal{R}}\,C(\mathbf{t},\mathbf{r})$ 为全局最优容量， C_{FPA} 为采用固定均匀 $d_{\min}$间距阵列时的容量（式（13）的一个可行点），而 $C_{\mathrm{iid}}=\mathbb{E}[\log_2\det(\mathbf{I}_M+\frac{P}{N\sigma^2}\mathbf{G}\mathbf{G}^H)]$ 为在 $\mathbf{R}_T=\mathbf{R}_R=\mathbf{I}$时达到的独立同分布 MIMO 容量上界。

注释 6（解耦的发射/接收结构）：目标函数 (11) 仅分别通过 $\mathbf{R}_T(\mathbf{t})$ 和 $\mathbf{R}_R(\mathbf{r})$ 依赖于 t 和 r。在高信噪比下，容量趋近于 $\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}[\log_2(1+\frac{P}{N\sigma^2}\mu_k\nu_k)]$，其中 $\{\mu_k\}$ 和 $\{\nu_k\}$ 是 $\mathbf{R}_T$ 和 $\mathbf{R}_R$ 的特征值。这种可分离结构促使我们在第五节中构建交替优化框架。当 $N=M$ 和 $A=B$ 时，由对称性可知 $\mathbf{t}^{*}=\mathbf{r}^{*}$。

IV. 性能分析

本节推导刻画天线位置与遍历容量之间关系的解析表达式，为所提出的优化算法提供设计见解和可验证的基准。

A. 高信噪比容量近似

我们首先给出一个适用于高信噪比区域的渐近容量表达式，该表达式揭示了遍历容量对空间相关结构的明确依赖关系。

命题1（高信噪比容量近似）：对于具有 $M=N$ 且 G 的元素服从独立同分布 $\mathcal{CN}(0,1)$ 的流体 MIMO 系统，当 γ时， $P/(N\sigma^2)\to\infty$，遍历容量具有如下近似

$$C(\mathbf{t},\mathbf{r})\approx N\log_2\gamma+\log_2\det\big(\mathbf{R}_T(\mathbf{t})\big)+\log_2\det\big(\mathbf{R}_R(\mathbf{r})\big)+\kappa_N,\quad(17)$$

其中与 (t, r) 无关的常数 κ_N由下式给出

$$\kappa_N=\frac{1}{\ln 2}\sum_{m=1}^{N}\psi(m),\quad(18)$$

且 $\psi(\cdot)$表示双伽马函数。

证明：在高信噪比（$\gamma\gg 1$）下，其中的单位矩阵变得 (11) 可忽略，从而得到

$$C\approx\mathbb{E}\Big[\log_2\det\Big(\gamma\,\mathbf{R}_R^{1/2}\mathbf{G}\,\mathbf{R}_T\,\mathbf{G}^H\mathbf{R}_R^{1/2}\Big)\Big].\quad(19)$$

由于 $M=N$，乘积的行列式可分解为

$$\det\Big(\gamma\,\mathbf{R}_R^{1/2}\mathbf{G}\,\mathbf{R}_T\,\mathbf{G}^H\mathbf{R}_R^{1/2}\Big)=\gamma^N\det(\mathbf{R}_R)\det(\mathbf{R}_T)\,|\det(\mathbf{G})|^2.\quad(20)$$

取 $\log_2(\cdot)$ 并求期望后，前三项是确定性的。剩余项 $\mathbb{E}[\log_2|\det(\mathbf{G})|^2]=\mathbb{E}[\log_2\det(\mathbf{G}\mathbf{G}^H)]$ 涉及复 Wishart 矩阵 $\mathbf{W}=\mathbf{G}\mathbf{G}^H\sim\mathcal{CW}_N(N,\mathbf{I}_N)$，对此有 [37]

$$\mathbb{E}[\ln\det(\mathbf{W})]=\sum_{m=1}^{N}\psi(m).\quad(21)$$

合并并通过因子 $\log_2$ 转换为 $1/\ln 2$ 可得（17）和（18），证明完毕。■

命题 1 表明，在高信噪比下，遍历容量由两个相互独立的项决定： $\log_2\det(\mathbf{R}_T)$ 和$\log_2\det(\mathbf{R}_R)$。这促使我们对空间相关性造成的容量损失作如下刻画。

B. 空间相关性导致的容量损失

推论1（容量损失）：定义相关性导致的容量损失为 $\Delta C=C_{\mathrm{iid}}-C(\mathbf{t},\mathbf{r})$，其中 C_{iid} 表示独立同分布 MIMO 容量（$\mathbf{R}_T=\mathbf{R}_R=\mathbf{I}$）。在高信噪比下，

$$\Delta C\approx-\log_2\det\big(\mathbf{R}_T(\mathbf{t})\big)-\log_2\det\big(\mathbf{R}_R(\mathbf{r})\big)\ge 0,\quad(22)$$

当且仅当 $\mathbf{R}_T=\mathbf{R}_R=\mathbf{I}_N$ 时等号成立。

证明：对于独立同分布情形，$\det(\mathbf{R}_T)=\det(\mathbf{R}_R)=1$；因此，$C_{\mathrm{iid}}\approx N\log_2\gamma+\kappa_N$。两边减去（17）得（22）。非负性由 Hadamard不等式 得出：对于任意对角线元素为 1 的半正定 $\mathbf{R}$，$\det(\mathbf{R})\le\prod_{i=1}^{N}[\,]_{ii}=1$ $\mathbf{R}$；因此，$\log\det(\mathbf{R})\le 0$。当且仅当 $\mathbf{R}$ 为对角矩阵时等号成立，即 $\mathbf{R}=\mathbf{I}_N$。■

注7（行列式最大化解释）：推论 1 表明，在高信噪比区域，（13）渐近等价于

$$\max_{\mathbf{t},\mathbf{r}}\ \det\big(\mathbf{R}_T(\mathbf{t})\big)\det\big(\mathbf{R}_R(\mathbf{r})\big),\quad(23)$$

满足约束（13b）–（13e）。由于相关矩阵的行列式等于其特征值的乘积，最优位置应使特征值尽可能均匀分布，从而使 $\mathbf{R}_T$和 $\mathbf{R}_R$ 趋近单位矩阵。

C. $N=2$的最优间距分析

对于特殊情况 $N=2$，我们可以推导出闭式的阵元间最优间距。

命题2（$N=2$的最优间距）：考虑 $N=M=2$，其孔径为 $A\lambda\ge d_{\min}$。发射端相关矩阵可写为

$$\mathbf{R}_T=\begin{bmatrix}1 & J_0\big(\frac{2\pi d}{\lambda}\big)\\ J_0\big(\frac{2\pi d}{\lambda}\big) & 1\end{bmatrix},\quad(24)$$

其中 $d=|t_1-t_2|$ 为天线间距。其行列式为

$$\det(\mathbf{R}_T)=1-J_0^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right).\quad(25)$$

当间距取最优值时，行列式达到最大（即 $\det(\mathbf{R}_T)=1$ 且 $\mathbf{R}_T=\mathbf{I}_2$）

$$d^{*}=\frac{x_1\lambda}{2\pi}\approx 0.383\lambda,\quad(26)$$

其中 $x_1\approx 2.4048$ 是 $J_0(x)$的第一个正零点。

证明：我们有 $\det(\mathbf{R}_T)=1-\rho^2(d)$，其中 $\rho(d)=J_0(2\pi d/\lambda)$。由于 $|\rho(d)|\le 1$，$\det(\mathbf{R}_T)\le 1$，当且仅当 $\rho(d)=0$ 时等号成立，即 $J_0(2\pi d/\lambda)=0$。$J_0(x)$ 的第一个正零点出现在 $x_1\approx 2.4048$，因此 $d^{*}=x_1\lambda/(2\pi)\approx 0.383\lambda$。在此间距下，$\mathbf{R}_T=\mathbf{I}_2$，，实现完全去相关并消除容量损失。■

备注 8（超越 $N=2$）：对于 $N>2$，实现 $\mathbf{R}_T=\mathbf{I}_N$需要对所有 $i\ne i'$ 满足 $J_0(2\pi|t_i-t_{i'}|/\lambda)=0$。采用均匀间距 d 时，成对距离为 d、$2d$、$3d$、……、$(N-1)d$。虽然 $d^{*}=0.383\lambda$ 会使距离为 d 时的 J_0 归零，但贝塞尔函数 $J_0(2\pi\cdot 2d^{*}/\lambda)=J_0(2x_1)\approx -0.178\ne 0$。因此，在 d^{*} 采用均匀间距无法实现 $\mathbf{R}_T=\mathbf{I}_N$。这一根本局限促使我们在下一节开发 AO-PSO，以优化非均匀天线间距，使 $\det(\mathbf{R}_T)$ 最大化。

D. 低信噪比区域分析

命题 1 中的高信噪比近似在 $\gamma = P/(N\sigma^2)$ 较小时会变得不准确。在低信噪比区域，容量随天线位置变化的规律截然不同。

命题3（低信噪比容量近似）：在低信噪比（$\gamma \to 0$）下，遍历容量满足

$$C(\mathbf{t},\mathbf{r}) \approx \frac{\gamma}{\ln 2}\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}_T(\mathbf{t})\big)\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}_R(\mathbf{r})\big) = \frac{NM\gamma}{\ln 2}, \tag{27}$$

其与天线位置无关。

证明：利用一阶泰勒展开$\log_2\det(\mathbf{I}+\gamma\mathbf{A}) \approx \frac{\gamma}{\ln 2}\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 对于 $\gamma \to 0$，并将其代入（11）得到

$$C \approx \frac{\gamma}{\ln 2}\mathbb{E}\big[\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}_R^{1/2}\mathbf{G}\,\mathbf{R}_T\,\mathbf{G}^H\mathbf{R}_R^{1/2}\big)\big] = \frac{\gamma}{\ln 2}\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}_R\big)\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}_T\big), \tag{28}$$

其中最后一个等式由 $\mathbb{E}[\mathrm{G}\,\mathrm{R}_T\mathrm{G}^H] = \mathrm{tr}(\mathrm{R}_T)\mathrm{I}_M$ 对独立同分布的G成立这一事实得出。由于无论天线位置如何均有$\mathrm{tr}(\mathrm{R}_T) = N$且$\mathrm{tr}(\mathrm{R}_R) = M$，故结论成立。∎

注9（FAS的信噪比相关收益）：命题3揭示了一个根本二分：在低信噪比下，容量仅由总接收功率（$NM\gamma$）决定，且对空间相关结构不敏感，因此所有布置方案表现相似。在高信噪比下，复用增益占主导地位，并取决于 $\det(\mathbf{R}_T)\cdot\det(\mathbf{R}_R)$（命题1）。因此，FAS位置优化在中高信噪比区域收益最大，此时相关性引起的容量损失 ΔC 在（22）中最为显著。

E. 容量随孔径大小的变化

命题 4（完全去相关的最小孔径（$N = 2$））：对于 $N = 2$，完全去相关的最小孔径为 $A_{\min}\lambda = d^* \approx 0.383\lambda$。对于 $N > 2$，通常无法实现完全去相关，但随着孔径增大，ΔC 单调递减，因为当 $A_1 > A_0$ 时，$\mathcal{T}(A_1) \supset \mathcal{T}(A_0)$，且 $|J_0(x)| \le \sqrt{2/(\pi x)}$ 可确保当 $A \to \infty$ 时 $\det(\mathrm{R}_T) \to 1$。在实际应用中，对于中等 N，$A = 2\lambda$–3λ 已足够。

V. 所提出的AO-PSO算法

我们提出一种交替优化框架，将（13）分解为两个子问题，并分别通过一个粒子群优化子程序求解。粒子群优化是一种无导数全局优化器，可通过轻量级投影步骤，在边界和间距约束下处理经蒙特卡罗估计、不可微的适应度景观。

A. 交替优化框架

从一个可行初始点开始，交替优化执行以下步骤：

步骤1（发射端更新）：固定 $\mathbf{r}$，求解 ve

$$\mathbf{t}^{(k+1)} = \arg\max_{\mathbf{t}}\ C(\mathbf{t},\mathbf{r}^{(k)})\ \ \text{s.t.}\ \ (13b),\ (13d). \tag{29}$$

步骤 2（接收端更新）：固定 $\mathbf{t}^{(k+1)}$，求解

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \arg\max_{\mathbf{r}}\ C(\mathbf{t}^{(k+1)},\mathbf{r})\ \ \text{s.t.}\ \ (13c),\ (13e). \tag{30}$$

算法1 用于联合FAS位置优化的 AO-PSO

输入：孔径 A, B；天线数量 N, M；功率 P；间距 $d_{\min}$；蒙特卡洛样本 S；粒子群优化参数 $(Z,\ I_{\mathrm{PSO}},\ w_{\max},\ w_{\min},\ c_1,\ c_2)$；交替优化容差 ε。

输出：优化位置 $\mathbf{t}^*$、$\mathbf{r}^*$。

1：在 $[0, A\lambda]$ 和 $[0, B\lambda]$ 中以均匀间距初始化 $\mathbf{t}^{(0)}$、$\mathbf{r}^{(0)}$，分别。

2：设置 $k \leftarrow 0$, $C^{(-1)} \leftarrow 0$。

3：重新吃

4：　$\mathbf{t}^{(k+1)} \leftarrow \mathrm{PSO}\big(\mathbf{r}^{(k)},\ \text{TX side}\big)$　▷ solve (29)

5：　$\mathbf{r}^{(k+1)} \leftarrow \mathrm{PSO}\big(\mathbf{t}^{(k+1)},\ \text{RX side}\big)$　▷ solve (30)

6：　$C^{(k)} \leftarrow C(\mathbf{t}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)})$ 通过 (31)

7：　$k \leftarrow k + 1$

8：直到 $\big|C^{(k)} - C^{(k-1)}\big| \le \varepsilon$

9：$\mathbf{t}^* \leftarrow \mathbf{t}^{(k)}$，$\mathbf{r}^* \leftarrow \mathbf{r}^{(k)}$。

B. 各子问题的PSO子程序

这里介绍用于发射端子问题的粒子群优化子程序（29）；接收端子问题的处理方式相同，只需使用$\mathbf{t} \leftrightarrow \mathbf{r}$、$N \leftrightarrow M$和 $A \leftrightarrow B$。

1）粒子表示与初始化：每个粒子$z \in \{1,\dots,Z\}$ 表示一个候选位置向量 $\mathbf{t}_z \in \mathbb{R}^N$。我们通过从 $[0, A\lambda]$ 上的均匀分布中抽取 N 个次序统计量，然后对其排序来初始化位置，从而自动满足间距约束：

$$t_{z,1}^{(0)} < t_{z,2}^{(0)} < \cdots < t_{z,N}^{(0)}, \quad t_{z,i+1}^{(0)} - t_{z,i}^{(0)} \ge d_{\min}.$$

所有粒子速度均初始化为零：$\mathbf{v}_z^{(0)} = \mathbf{0}$。

2）适应度函数评估：迭代 ℓ 时，粒子 z 的适应度为固定接收端相关矩阵 R_R（取自当前交替优化迭代）下估算的遍历容量：

$$f\big(\mathbf{t}_z^{(\ell)}\big) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\log_2\det\Big(\mathbf{I}_M + \tfrac{P}{N\sigma^2}\mathbf{R}_R^{\frac{1}{2}}\mathbf{G}_s\mathbf{R}_T\big(\mathbf{t}_z^{(\ell)}\big)\mathbf{G}_s^H\mathbf{R}_R^{\frac{1}{2}}\Big), \tag{31}$$

其中，$\{\mathrm{G}_s\}_{s=1}^S$ 是同一交替优化迭代中所有粒子共享的相同独立同分布 $\mathcal{CN}(0,\ C_0 d^{-\alpha}\mathrm{I})$实现。

3) 速度与位置更新：在每次粒子群优化迭代 ℓ 中，个体最优和全局最优更新如下：

$$\mathbf{p}_z^{(\ell)} = \arg\max\big\{f(\mathbf{t}_z^{(0)}),\dots,f(\mathbf{t}_z^{(\ell)})\big\}, \tag{32}$$

$$\mathbf{g}^{(\ell)} = \arg\max_{z}\ f\big(\mathbf{p}_z^{(\ell)}\big). \tag{33}$$

粒子 z 的速度通过线性递减的惯性权重 $w^{(\ell)}$ 更新：

$$w^{(\ell)} = w_{\max} - \frac{(w_{\max}-w_{\min})\ell}{I_{\mathrm{PSO}}}, \tag{34}$$

$$\mathbf{v}_z^{(\ell+1)} = w^{(\ell)}\mathbf{v}_z^{(\ell)} + c_1\varepsilon_1\odot(\mathbf{p}_z^{(\ell)} - \mathbf{t}_z^{(\ell)}) + c_2\varepsilon_2\odot(\mathbf{g}^{(\ell)} - \mathbf{t}_z^{(\ell)}), \tag{35}$$

其中，c_1 和 c_2 分别为认知学习因子和社会学习因子，ε_1、$\varepsilon_2 \sim \mathcal{U}[0,1]^N$ 为逐元素随机向量，$\odot$表示哈达玛积。位置更新如下：

$$\tilde{\mathbf{t}}_z^{(\ell+1)} = \mathbf{t}_z^{(\ell)} + \mathbf{v}_z^{(\ell+1)}. \tag{36}$$

算法2 粒子群优化子程序（发射端）

输入：固定的 $\mathbf{R}_R$；信道样本 $\{\mathbf{G}_s\}$；参数 $Z, I_{\mathrm{PSO}}, w_{\max}, w_{\min}, c_1, c_2$。输出：优化后的发射端位置 $\mathbf{t}^*$。

```
通过排序均匀采样初始化 {t_z^(0)}；v_z^(0) ← 0，p_z ← t_z^(0)，g ← argmax_z f(t_z^(0))。
对于 ℓ = 0、1、……、I_PSO − 1，执行
    从 z = 1 到 Z 执行
        绘制 ε1, ε2 ~ U[0,1]^N。
        通过（35）更新速度。
        通过（36）更新位置。
        投影：t_z^(ℓ+1) ← P2(P1(t̃_z^(ℓ+1)))。
        通过（31）计算 f(t_z^(ℓ+1))
        若 f(t_z^(ℓ+1)) > f(p_z)，则
            p_z ← t_z^(ℓ+1)。
        结束条件判断
    结束循环
    g ← arg max_z f(p_z)。
结束循环
t* ← g。
```

4）可行性投影：为在位置更新后恢复可行性，我们分两个阶段应用投影算子 $\mathcal{P}(\cdot)$：

- 边界裁剪：将每个坐标裁剪至 $[0, A\lambda]$：

$$[\mathcal{P}_1(\tilde{\mathbf{t}})]_i = \min\big(A\lambda,\ \max(0, \tilde{t}_i)\big). \tag{37}$$

- 间距约束：将裁剪后的向量按升序排序，然后迭代地将重叠的天线彼此推开，直到对于所有 i，$t_{i+1} - t_i \geq d_{\text{最小}}$：

$$\mathbf{t}_z^{(\ell+1)} = \mathcal{P}_2\big(\mathcal{P}_1(\tilde{\mathbf{t}}_z^{(\ell+1)})\big). \tag{38}$$

PSO子程序总结于算法 2。

C. 收敛性与复杂度分析

1）收敛：

命题5（单调收敛）：由算法 $\{C(\mathbf{t}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})\}_{k\geq 0}$ 生成的序列 1 单调不减，且以上界 i.i.d. 多输入多输出容量 C_{iid} 为界；因此该序列收敛至极限 $C^{\infty} \leq C_{\mathrm{iid}}$。

证明：考虑第 k 次迭代中的发射端更新步骤。由于当前迭代点 $\mathbf{t}^{(k)}$ 包含在粒子群优化中（作为一个热启动粒子），因此粒子群全局最优解满足

$$C\big(\mathbf{t}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)}\big) \geq C\big(\mathbf{t}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)}\big). \tag{39}$$

根据同样的论证，对于接收端更新：

$$C\big(\mathbf{t}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)}\big) \geq C\big(\mathbf{t}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k)}\big). \tag{40}$$

综合以上结果，我们有 $C^{(k+1)} \geq C^{(k)}$。上界由备注 5得出：$C(\mathbf{t},\mathbf{r}) \leq C_{\mathrm{iid}}$ 对于任意$(\mathbf{t},\mathbf{r})$。由于 $\{C^{(k)}\}$ 单调不减且有上界，根据单调收敛定理，它必定收敛。∎

备注10（收敛至局部最优）：命题5保证目标序列收敛，但并不保证收敛至全局最优解。交替优化框架收敛至逐坐标驻点。为降低陷入较差局部最优点的风险，我们采用：(i) 多样化的粒子群初始化；(ii) 从当前交替优化迭代结果出发，对一个粒子进行热启动。实践中，不同初始化得到的解几乎相同（第VII节），这表明优化景观较为有利，显著的局部最优点较少。

2) 计算复杂度：令 I_{AO} 表示 AO 外层迭代的次数。每次外层迭代的主要开销包括两次粒子群优化运行（一次用于发射端，一次用于接收端），每次运行在 I_{PSO} 次迭代中评估 Z 个粒子。每次适应度评估都需要计算相关矩阵 $\mathbf{R}_T$（或 $\mathbf{R}_R$）、执行 Cholesky 分解，并对 S 个容量样本取平均值。具体而言：

- 相关矩阵计算：$\mathbf{R}_T(\mathbf{t})$ 需要进行 $N(N-1)/2$ 次贝塞尔函数计算和一次 $N\times N$ 乔列斯基分解，计算开销为 $\mathcal{O}(N^3)$。
- 单样本容量计算：对于每个蒙特卡洛样本 s，构造 $\mathbf{H}_s = \mathbf{R}_R^{1/2}\mathbf{G}_s\mathbf{R}_T^{1/2}$ 的计算量为 $\mathcal{O}(MN^2+M^2N)$，而通过 Cholesky 分解计算 $\det(\mathbf{I}_M+\gamma\mathbf{H}_s\mathbf{H}_s^H)$ 的计算量为 $\mathcal{O}(M^3)$。
- 总计：经过 $I_{\text{粒子群优化}}$ 粒子群优化迭代、Z 个粒子、S 个蒙特卡洛样本，以及每个外循环两次交替优化半步后，总复杂度可估算为

$$\mathcal{O}\big(I_{\mathrm{AO}}\cdot I_{\mathrm{PSO}}\cdot Z\cdot S\cdot(M^3+N^3+MN\max(M,N^{)})\big)\big). \tag{41}$$

对于仿真中使用的默认参数（$I_{\mathrm{AO}}=12$、$I_{\mathrm{PSO}}=60$、$Z=20$、$S=200$、$M=N=6$），总运算量约为 6.2×10^9 次标量乘法；在配备 MATLAB 的现代工作站上，完成计算约需 3–5 分钟。

VI. 基于 SCA 的替代方案

AO-PSO 需要通过蒙特卡洛适应度评估承担显著的计算开销。本节提出一种替代性的 SCA 方法，利用高信噪比结构构造一系列易于处理的凸子问题。

A. 高信噪比等价重构

根据命题 1 以及式（23）中的行列式最大化解释，在高信噪比下，式（13）等价于

$$\max_{\mathbf{t},\mathbf{r}} f(\mathbf{t}) + f(\mathbf{r}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{t}\in\mathcal{T},\ \mathbf{r}\in\mathcal{R}, \tag{42a}$$

其中 $f(\mathbf{t}) \triangleq \log_2\det(\mathbf{R}_T(\mathbf{t}))$。目标函数关于 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{r}$ 可分离，因此可以分别独立优化。然而，由于映射 $\mathbf{t}\mapsto\mathbf{R}_T(\mathbf{t})$ 通过振荡的 $J_0(\cdot)$ 呈非线性，$f(\mathbf{t})$ 是非凸的。

B. 基于贝塞尔恒等式的闭式梯度

我们推导 $f(\mathbf{t})$ 关于各个位置t_n的梯度。根据矩阵函数的链式法则，

$$\frac{\partial f}{\partial t_n} = \frac{1}{\ln 2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_T^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}_T}{\partial t_n}\right). \tag{43}$$

利用贝塞尔导数恒等式 $J_0'(x) = -J_1(x)$，可求得非对角雅可比项为

$$\frac{\partial[\mathbf{R}_T]_{nj}}{\partial t_n} = -\frac{2\pi}{\lambda}J_1\left(\frac{2\pi|t_n-t_j|}{\lambda}\right)\mathrm{sgn}(t_n-t_j), \tag{44}$$

算法3：用于联合FAS位置优化的 AO-SCA

输入：孔径 A, B；数量 N, M；间距 $d_{\min}$；步长 η_0；
SCA迭代次数 I_{SCA}；AO迭代次数 I_{AO}；容差 ε。
输出：优化位置 $\mathbf{t}^*, \mathbf{r}^*$。
1：通过均匀间距初始化 $\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)}$ 。
2: 对于 $k = 0, 1, \ldots, I_{\mathrm{AO}} - 1$，执行
3: 发射端更新：固定 $\mathbf{r}^{(k)}$。
4: 对于 $\ell = 0, 1, ..., I_{\mathrm{SCA}} - 1$，执行
5: 通过乔列斯基分解计算 $\mathrm{R}_T(\mathbf{t}^{(\ell)})$ 和 R_T^{-1} 。
6: 计算 $\nabla_{\mathbf{t}} f$ 通过 (45)。
7: 回溯搜索：找到满足以下条件的 η： $f(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\mathbf{t}^{(\ell)} + \eta \nabla f)) > f(\mathbf{t}^{(\ell)})$。
8: $\mathbf{t}^{(\ell+1)} \leftarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}}(\mathbf{t}^{(\ell)} + \eta \nabla f)$。
9: 结束循环
10: $\mathbf{t}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{t}^{(I_{\mathrm{SCA}})}$。
11: **RX** 更新：重复上述 for $\mathbf{r}$ with $f(\mathbf{r}) = \log_2 \det(\mathrm{R}_R(\mathbf{r}))$。
12: 结束循环

对于 $j \neq n$，其中 $\partial[\mathrm{R}_T]_{nn}/\partial t_n = 0$。完整的梯度分量由下式给出

$$\frac{\partial f}{\partial t_n} = -\frac{4\pi}{\lambda \ln 2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} [\mathbf{R}_T^{-1}]_{nj} \, J_1\left(\frac{2\pi |t_n - t_j|}{\lambda}\right) \operatorname{sgn}(t_n - t_j). \tag{45}$$

计算 $\nabla_{\mathbf{t}} f \in \mathbb{R}^N$ 需要一次 $N \times N$ 矩阵求逆和 $N(N-1)/2$ 次 $J_1(\cdot)$求值，耗时为 $\mathcal{O}(N^3)$，且无需进行蒙特卡洛采样。

备注 11（梯度解释）：项 $[\mathrm{R}_T^{-1}]_{nj}$反映了 $\log \det(\mathrm{R}_T)$ 对第 (n, j) 个相关性条目的敏感度。由于当 x 较小时， $J_1(x) > 0$ ，梯度会推动间距较近的天线彼此远离，以降低相关性。在间距较大时，梯度则会微调位置，使其落在 J_0 的零点上。

C. 投影梯度上升与 SCA 框架

SCA 在第 $\mathbf{t}^{(k)}$次迭代处构造一阶替代函数：

$$\hat{f}(\mathbf{t}; \mathbf{t}^{(k)}) = f(\mathbf{t}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{t}^{(k)})^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^{(k)}), \tag{46}$$

该函数关于 $\mathbf{t}$ 是仿射的（因此是凸函数）。我们不求解由此得到的关于 $\mathcal{T}$ 的线性规划（它会产生极端点解，且可能引起振荡），而是采用近端投影梯度上升步骤：

$$\mathbf{t}^{(k+1)} = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}\left(\mathbf{t}^{(k)} + \eta \nabla f(\mathbf{t}^{(k)})\right), \tag{47}$$

其中 $\eta > 0$ 为步长， $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$为对 $\mathcal{T}$的投影（边界裁剪 + 间距约束，与（37）和（38）相同）。对 η 进行回溯线搜索，以确保 f（$\mathbf{t}^{(k+1)}$） $\geq f$（$\mathbf{t}^{(k)}$）。AO-SCA（算法 3）在发射端和接收端更新之间交替进行，每次均通过 I_{SCA} 对对数行列式目标函数执行投影梯度上升。

D. 收敛与复杂度比较

命题6（AO-SCA 收敛性）：采用回溯线搜索时，AO-SCA 算法会生成单调非递减序列 $\{f(\mathbf{t}^{(k)}) + f(\mathbf{r}^{(k)})\}$，该序列收敛到（42）的逐坐标驻点。

证明：每次带回溯搜索的投影梯度步都保证 $f(\mathbf{t}^{(\ell+1)}) \geq f(\mathbf{t}^{(\ell)})$。经过 I_{SCA}次内部迭代后， $f(\mathbf{t}^{(k+1)}) \geq f(\mathbf{t}^{(k)})$。接收端同样如此更新。由于对于任意 $\mathbf{t}$ 都有 $f(\mathbf{t}) \leq 0$ （Hadamard不等式），该序列有上界，因此收敛。 ■

AO-SCA的每次迭代复杂度估算为

$$\mathcal{O}(I_{\mathrm{SCA}} \cdot N^3), \tag{48}$$

这与蒙特卡洛样本量 S无关。相比之下，AO-PSO在每个交替优化步骤中的开销为 $\mathcal{O}(I_{\mathrm{PSO}} \cdot Z \cdot S \cdot N^3)$。对于典型参数（$I_{\mathrm{PSO}} = 60$、 $Z = 20$、 $S = 200$），AO-SCA在每次交替优化迭代中大约快 2.4×10^5 倍。

表II 默认仿真参数

参数	符号	值
发射/接收天线数量	N, M	6
发射/接收孔径	$A\lambda, B\lambda$	2λ
最小间距	$d_{\min}$	0.3λ
噪声功率	σ^2	1
PSO种群规模	Z	20
PSO迭代次数	I_{PSO}	60
惯性权重	$w_{\max}, w_{\min}$	0.9, 0.4
学习因子	c_1, c_2	1.5, 1.5
蒙特卡洛样本（优化）	S	200
蒙特卡洛样本（评估）	S_{eval}	1500
AO迭代次数	I_{AO}	12
AO收敛阈值	ε	10^{-3}

注释12（SCA与PSO的权衡）：AO-SCA是一种局部优化器：它从给定初始化收敛到最近的驻点。AO-PSO是一种全局优化器：随机粒子群广泛探索搜索空间，对初始化不太敏感。此外，AO-SCA优化的是高信噪比代理指标 $\log_2 \det(\mathbf{R}_T)$ 而非精确的遍历容量，因此其解在中等信噪比下可能是次优的。实际上，如第VII节所示，AO-SCA在高信噪比下可达到与AO-PSO近乎相同的容量，同时快几个数量级，但AO-PSO在中等信噪比以及初始化较差时更为稳健。

VII. 仿真结果

除非另有说明，默认参数列于表 II。信道遵循式（8），其中 $\mathbf{G} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$。

A. 收敛行为

图 1 展示了采用较小 PSO 预算（$Z = 10$， $I_{\mathrm{PSO}} = 20$）时的收敛性能。可以看到，容量单调不减（命题 5），前3–5 次迭代便获得了大部分增益。增益随信噪比增大而扩大（在 10 分贝时为 ∼2 比特/秒/赫兹，在 30 分贝时为 >7 比特/秒/赫兹），这与命题 1 和 3的预测结果一致。采用默认参数时，经过 3–5 次迭代即可收敛。

B. 遍历容量与信噪比

图2 比较了五种方案在不同信噪比下的遍历容量 $\in [0, 30]$ 分贝：(i) 独立同分布MIMO上界：$\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_R = \mathbf{I}$，代表信道完全独立的理想情形；(ii) *AO-PSO*：联合优化发射端和接收端的位置（所提方案）；(iii) 仅TX-FAS：仅通过粒子群优化发射端天线，接收端固定为均匀 $d_{\min}$间距；(iv) 随机FAS：在发射端和接收端的50种随机可行配置中选择最佳配置；(v) *FPA*：发射端和接收端均固定为均匀 $d_{\min}$ 间距。

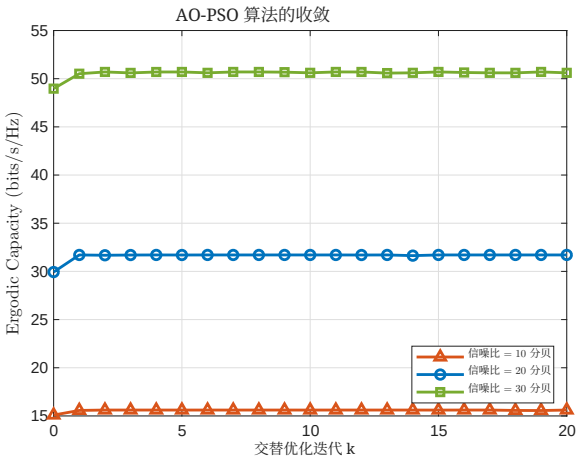


图1. 所提出的 AO-PSO 算法在三个信噪比水平（10、20和30 分贝）下的收敛情况。纵 x轴从 $k=0$开始，表示在进行任何优化之前，初始均匀间距位置处的遍历容量。采用减弱的粒子群优化参数（$Z=10$ 个粒子，$I_{\mathrm{PSO}}=20$ 每个交替优化步骤迭代5–8次后，算法逐步改进并趋于稳定，证实了命题1所保证的单调收敛。此外，在较高信噪比下，由于容量对 $\mathbf{R}_T$ 和 $\mathbf{R}_R$ 的特征值分布更加敏感，因此优化带来的绝对增益更大。

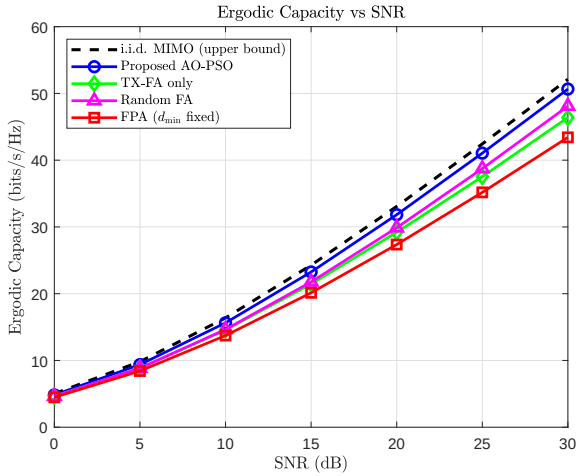


图2. 遍历容量随信噪比变化的五种方案：独立同分布MIMO上界（$\mathrm{R}=\mathrm{I}$）、所提出的采用联合发射端+接收端FAS优化的AO-PSO、仅TX-FAS（接收端固定于 $d_{\min}$ 间距）、随机FAS（50次随机可行布置中的最佳结果），以及FPA（发射端与接收端均固定于 $d_{\min}$ 间距）。所提出的AO-PSO始终优于所有其他实际方案，且在较高信噪比下性能差距进一步扩大。

图中的结果显示出一致的性能层级：

$$C_{\mathrm{iid}} > C_{\text{AO-PSO}} > C_{\text{TX-FAS}} \geq C_{\text{Random}} > C_{\text{FPA}}。$$

（i）AO-PSO与独立同分布上界：所提出的AO-PSO方法紧密贴近独立同分布MIMO界，差距仅为 $\sim$0.5比特/秒/赫兹，在信噪比 $=$ 30 分贝时。该残余差距对应于不可消除的相关性损失 $\Delta C_{\text{AO-PSO}} \approx$1.5 比特/秒/赫兹（推论1），因为完全去相关无法实现，对于 $N=6$ 处于 2λ 孔径之内的情形（注8）。

（ii）AO-PSO 与 FPA：在 10 分贝时，AO-PSO 比 FPA 高出 $\sim$2 比特/秒/赫兹；在 30 分贝时，高出 7+ 比特/秒/赫兹。推论1预测了差距会不断扩大：ΔC 与信噪比无关，因此 FPA惩罚在高信噪比下会越来越显著。在低信噪比下，所有方案都如命题3所预测的那样趋于一致。（iii）仅 TX-FAS：仅优化发射端位置，就能获得 FPA 与 AO-PSO 之间约一半的增益，

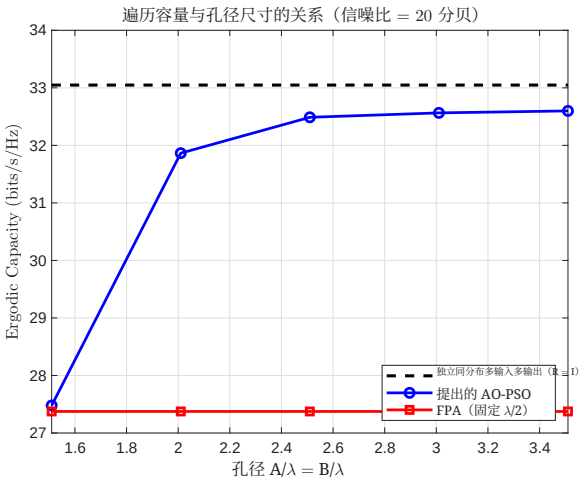


图 3. 信噪比为 $=$ 20 分贝时，遍历容量与归一化孔径尺寸 $A/\lambda = B/\lambda$ 的关系。独立同分布多输入多输出上界（虚线）表示 $\mathrm{R}_T = \mathrm{R}_R = \mathrm{I}$ 时可达到的容量。随着孔径增大，AO-PSO 和 FPA 的性能均有所提升，但 AO-PSO 能更快达到上界，因为它可以分散天线以最大限度地减小空间相关性。

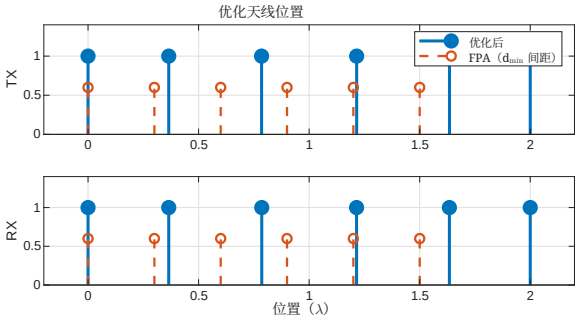


图4. 信噪比为 $=20$ $A/\lambda =$ 分贝时，优化天线位置（蓝色实心标记）与均匀 $d_{\min}=0.3\lambda$ 间距（橙色虚线标记）的对比，。AO-PSO 算法将天线分布在整个孔径上，以最大化阵元间距并降低空间相关性。

$B/\lambda = 2$

这与式（22）中的乘法结构一致：优化一侧可消除 $-\log_2 \det(\mathbf{R}_T)$，但保留 $-\log_2 \det(\mathbf{R}_R)$。

（iv）随机FAS：50种随机配置中表现最佳者与仅使用TX-FAS的效果相当，这表明非结构化搜索无法媲美系统性优化。

C. 遍历容量与孔径尺寸

图 3 展示了信噪比为 $=20$ 分贝时，随着 $A/\lambda = B/\lambda$从 1。5 增加到 3。5时的容量。

(i) 小孔径（$A/\lambda \leq 1.5$）：在最小可行孔径下，所有天线都紧密排列在 $d_{\min}$，没有可用于优化的空间；AO-PSO 和 FPA 的表现完全相同。

(ii) 中等孔径（$1.5 < A/\lambda \leq 3$）：AO-PSO 迅速逼近 C_{iid}（在 $A/\lambda = 2$ 时相差 1–2 比特/秒/赫兹），而 FPA 的容量始终较低，因为它没有利用可用空间。在 $A/\lambda = 2$ 时，两者差距超过 5 比特/秒/赫兹。

(iii) 大孔径（$A/\lambda > 3$）：交替优化-粒子群优化方法的容量在 C_{iid}附近趋于饱和，正如命题4所预测的那样。孔径超过 3λ 后，$N=6$的收益递减，为实际应用提供了设计指南。

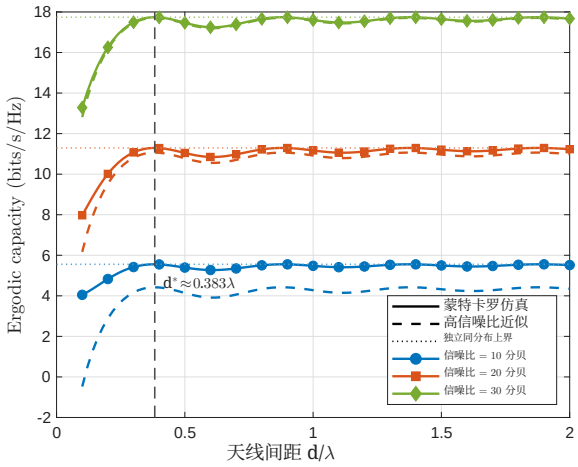


图5. 遍历容量与天线间距的关系 d/λ，对应 $N = M = 2$ 在信噪比 $\in \{10, 20, 30\}$ 分贝下。实线和标记：蒙特卡洛仿真（$S = 3000$）。虚线：命题 1中的高信噪比近似。点状水平线：独立同分布MIMO上界。竖直虚线标示命题 $d^* \approx 0.383\lambda$ 中的最优间距 2。

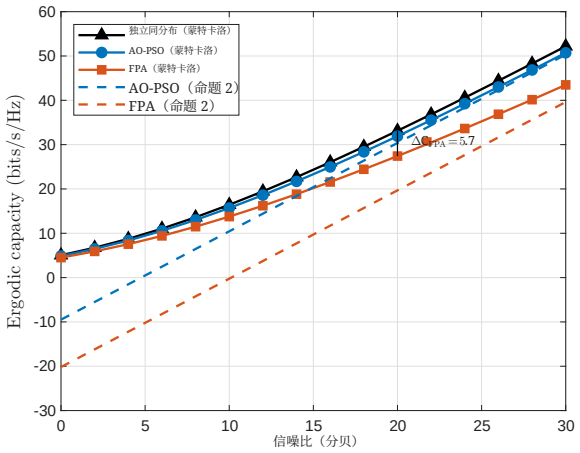


图 6. $N = M = 6$下 $A/\lambda = B/\lambda = 2$的遍历容量与信噪比的关系。实线带标记：蒙特卡洛仿真。虚线：高信噪比近似（17）。AO-PSO 优化方案实现了 $\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.59$ $\Delta C \approx 1.5$ ），将相关性引起的损失降至 比特/秒/赫兹，而 FPA 为 $\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.015$，其 $\Delta C \approx 12.2$ 比特/秒/赫兹。

D. 优化天线位置

图4 展示了信噪比为 $= 20$ 分贝时优化后的发射端和接收端天线位置。与FPA（仅占据1.5λ 2λ 孔径）相比，优化后的位置分布于整个孔径范围内，阵元间距约为 0.4λ。

(i) 近似均匀分布：优化后的间距约为 $|t^*_{i+1} - t^*_i| \approx A\lambda/(N-1) = 0.4\lambda$，接近第一个贝塞尔函数零点 $d^* \approx 0.383\lambda$（命题 2），这证实该算法能够最小化主要的两两相关性。

(ii) 发射端–接收端对称性：发射端和接收端的位置几乎相同（$\mathbf{t}^* \approx \mathbf{r}^*$），这与备注6的预期一致。

(iii) 相关矩阵质量：对于 FPA，$\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.015$且 $\kappa > 100$ （严重病态）。优化后，$\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.59$ 且 $\kappa < 5$，表明空间自由度显著提升，并通过推论1 将其直接转化为图2 和6中的容量增益。

E. 高信噪比近似的验证（$N = M = 2$）

图5验证了命题1和2（ $N = M = 2$）。

(i) 高信噪比近似精度：当信噪比为 $= 30$ 分贝时，式（17）给出的解析曲线与蒙特卡洛结果高度吻合，验证了其紧致性。当信噪比为= 10 分贝时，由于 $\gamma \gg 1$ 精度较低，出现了明显的偏差。

（ii）最优间距：容量在 $d^* \approx 0.383\lambda$处达到尖锐峰值，其中 $\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_R = \mathbf{I}_2$ （零相关），且容量与独立同分布上界（命题 2）一致。

（iii）振荡行为：超过 d^*后，容量由于 $J_0(\cdot)$ 而发生振荡，并在后续零点处达到次峰。这一景观凸显了（13）的非凸性。

F. 容量损失表征（$N = M = 6$）的验证

图 6 验证了推论 1 在 $N = M = 6$ 设置下的结论。对于 AO-PSO （ $\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.59$ ），当信噪比高于 ≈ 15 分贝时，高信噪比近似变得精确，这证实了良态相关矩阵在中等信噪比下即可达到高信噪比区域。对于 FPA（$\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.015$）病态矩阵则需要信噪比达到 > 25 分贝才能收敛。

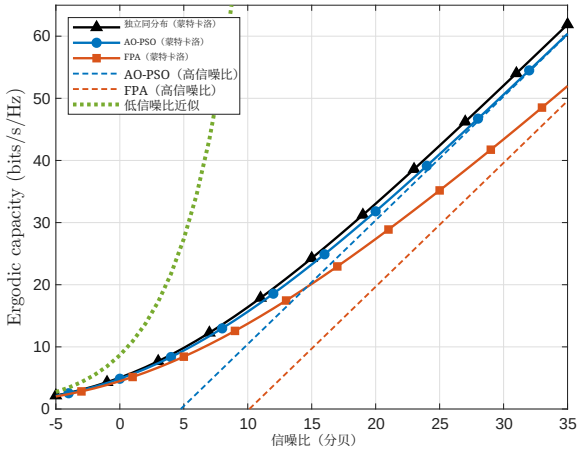


图 7. 遍历容量与信噪比的关系，其中 $N = M = 6$， $A/\lambda = B/\lambda = 2$。带标记的实线：蒙特卡洛仿真。虚线：高信噪比近似（17）（命题 1）。绿色点线：低信噪比近似（27）（命题 3）。低信噪比曲线适用于所有方案，而高信噪比曲线则根据 $\det(\mathbf{R}_T)\det(\mathbf{R}_R)$而有所区别。

推论 1 预测 $\Delta C_{\text{FPA}} \approx 12.2$比特/秒/赫兹且 $\Delta C_{\text{AO-PSO}} \approx 1.5$ 比特/秒/赫兹。在信噪比为 $= 30$ 分贝时，蒙特卡洛结果表明， $C_{\text{iid}} - C_{\text{FPA}} \approx 7.2$ 比特/秒/赫兹；由于有限信噪比修正，该值低于渐近预测。对于 AO-PSO 方法，差距则接近预测值 1。5 比特/秒/赫兹，这证实了该算法有效地最大化了 $\det(\mathbf{R}_T)\det(\mathbf{R}_R)$。

G. 低信噪比和高信噪比近似的验证

图 7 全面验证了两种近似在整个信噪比范围内的准确性，该范围从 -5 到 35 分贝。

(i) 低信噪比区域（信噪比 < 5 分贝）：低信噪比曲线$C \approx NM\gamma/\ln 2$与命题 3给出的结果高度吻合所有三条蒙特卡罗曲线，这证实容量对天线位置不敏感。该区域受功率限制，FAS优化并无明显收益。

（ii）高信噪比区域（信噪比 > 15 分贝）：高信噪比近似，（17）收敛至蒙特卡洛结果。对于 AO-PSO（$\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.59$），该近似在

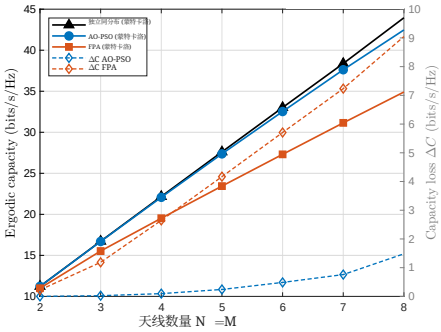


图8. 遍历容量（左轴，实线）和容量损失 $\Delta C = C_{\text{iid}} - C$ （右轴，虚线）随流体天线数量 $N = M$ 在信噪比 $= 20$ 分贝、孔径 $A/\lambda = B/\lambda = 3$ 下的变化。AO-PSO方案在所有 N下均保持接近独立同分布 MIMO 容量，而FPA容量损失随 N迅速增大。

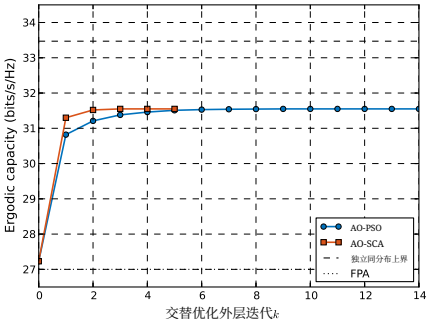


图9. AO-PSO（$Z = 15$， $I_{\text{PSO}} = 40$）与AO-SCA（$I_{\text{SCA}} = 50$， $\eta_0 = 0.02\lambda$）在信噪比 $= 20$ 分贝、 $N = M = 6$条件下的收敛性比较。所有容量值均使用 $S = 1000$ 个固定蒙特卡洛样本重新评估。水平线：独立同分布MIMO上界（虚线）和固定位置天线基线（点线）。

高于 ∼15 分贝时准确。对于 FPA（$\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.015$），病态矩阵需要信噪比达到 > 25 分贝才能收敛。

(iii) 过渡区域（5–15 分贝）：两种近似都不够精确；随着系统从功率受限运行转向自由度受限运行，两条曲线开始分离。

H. 多天线扩展（$N = M \in \{2, \ldots, 8\}$）

图 8 研究了以下情况下的可扩展性： $N = M \in \{2, \ldots, 8\}$，其中 $A/\lambda = 3$，信噪比为 $= 20$ 分贝。

(i) 容量线性增长：所有方案均随 N 近似线性增长（源于 ($N \log_2 \gamma$ 项，见式 (17)），但 AO-PSO 曲线紧密跟随 C_{iid}，而 FPA 增长较慢。在 $N = 8$时，AO-PSO 达到 42.5 比特/秒/赫兹，而 FPA 为34.9 比特/秒/赫兹，差距为 7.6 比特/秒/赫兹。

(ii) 容量损失扩展：FPA 损失 ΔC_{FPA} 迅速增大：从 0.2 比特/秒/赫兹（$N = 2$）增至 9.1 比特/秒/赫兹（$N = 8$），这是由 $\det(\mathbf{R}_T)$ ($\approx 10^{-4}$ 在$N = 8$) 的指数衰减所致。相比之下，即使在 $\Delta C < 1.5$ 比特/秒/赫兹和 $\det(\mathbf{R}_T) > 0.5$ 时，AO-PSO 仍能保持 $N = 8$。对于 $N = 2$，可实现完全去相关（命题 2）。

（iii）实际意义：对于较大的 N，FAS优化最为关键，因为此时FPA损失会变得难以承受。经验法则： $A/\lambda \geq 0.5N$ 即可获得近乎最优的性能。

I. 收敛性比较：AO-PSO 与 AO-SCA

图 9 比较了在信噪比 $= 20$ 分贝下 AO-PSO 和 AO-SCA 方法的收敛轨迹。所有容量值均使用固定的一组 $S = 1000$ 蒙特卡洛样本进行评估，以确保比较公平且平滑。

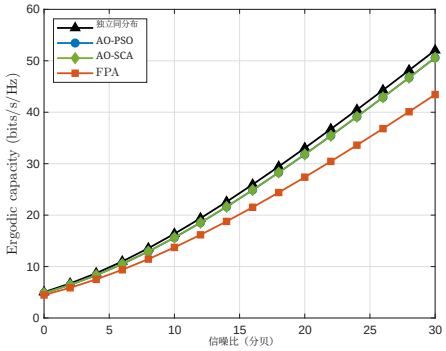


图 10 $N = M = 6$ $A/\lambda = B/\lambda =$ 。，的遍历容量与信噪比的关系。AO-PSO、AO-SCA（优化 $\log_2 \det(\mathbf{R}_T)$）、FPA 与独立同分布MIMO上界的比较。在整个信噪比范围内，AO-SCA 和 AO-PSO 曲线几乎无法区分。

（i）AO-SCA 收敛速度： AO-SCA 仅需2–3 次 AO 外层迭代即可收敛，大部分增益在第一次迭代中获得。这得益于闭式梯度（45），其能够在无噪声的情况下提供精确的上升方向。

（ii）AO-PSO 收敛行为：AO-PSO 在 5–8 次迭代内收敛。使用默认参数（$Z = 20$、 $I_{\text{PSO}} = 60$）时，可在 3–5 次迭代内实现收敛。

（iii）相同的收敛解： 两种算法均收敛至 $\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.587$，这证实了该景观具有唯一的主导吸引域。这验证了备注 10：尽管 AO-SCA 是局部优化器，但其找到的解与全局粒子群搜索得到的解相同。

J. 容量比较：AO-PSO vs. AO-SCA vs. FPA

图 10 比较了 AO-PSO、AO-SCA 和 FPA 在不同信噪比下的遍历容量 $\in [0, 30]$ 分贝。

(i) AO-PSO 与 AO-SCA：两者几乎无法区分（相差 < 0.1 比特/秒/赫兹），这表明高信噪比代理指标 $\log_2 \det(\mathbf{R}_T)$ 即使在中等信噪比下也能很好地近似遍历容量。由于最优位置取决于与信噪比无关的相关结构，在高信噪比极限下优化得到的位置在所有信噪比水平下仍接近最优。

(ii) 计算优势：AO-SCA 在现代工作站上仅需 <0.1 秒即可完成，而 AO-PSO 需要 3–5 分钟，且两者实现的容量相同。

(iii) AO-PSO 与 AO-SCA 对比 FPA：两者的表现均优于 FPA，提升了>7 比特/秒/赫兹，信噪比为= 30 分贝，这与推论 1一致。随着信噪比升高，差距进一步扩大，证实位置优化在高信噪比区域最为有益。

(iv) 实际建议：鉴于容量几乎相同，而计算效率显著更高，建议将 AO-SCA 作为主要优化方法。对于初始化不佳或存在多个局部最优点的情况，可将 AO-PSO 作为补充工具。

K. 性能与复杂度总结

表III 汇总了默认设置（$N = M = 6$，$A/\lambda = B/\lambda = 2$，信噪比为 $= 30$ 分贝）下所有方案的关键性能与复杂度指标。所提出的 AO-PSO 和 AO-SCA 均实现了 $\det(\mathbf{R}_T) \approx 0.59$，将容量

表 III $N = M = 6$、$A/\lambda = B/\lambda = 2$、信噪比为 $= 30$ 分贝时的性能与复杂度比较

方案	$\det(\mathrm{R}_T)$	与独立同分布界的差距 (比特/秒/赫兹)	交替优化迭代次数	运行时间
独立同分布上界	1.000	0	—	—
AO-PSO（所提方法）	0.587	$\sim$0.5	5–8	3–5 分钟
AO-SCA（所提方法）	0.587	$\sim$0.5	2–3	$<$0.1 秒
仅 TX-FAS	0.587†	$\sim$3.9	5–8	1–2 分钟
随机FAS	不定	$\sim$4.0	—	可忽略
FPA	0.015	$\sim$7.2	—	—

†仅发射端；接收端仍为 $\det(\mathrm{R}_R) = 0.015$（FPA）。

与独立同分布多输入多输出界的差距缩小至仅 $\sim$0.5 比特/秒/赫兹——相比 FPA（差距为 $\sim$7.2 比特/秒/赫兹）提升了一个数量级。AO-SCA 变体在实现相同去相关效果的同时，运行速度提升超过 10^5 倍。

VIII. 结论

本文研究了流体 MIMO 系统的空间相关性优化，其中发射端和接收端均在一个线性孔径上采用多个流体天线。在Jakes模型和 Kronecker信道分解的基础上，我们推导了与位置相关的相关矩阵，并构建了遍历容量最大化问题。通过分析，我们得到了高信噪比近似，明确揭示了 $\det(\mathrm{R}_T)$ $\det(\mathrm{R}_R)$ 的作用；还推导出闭式容量损失界，并为双天线情形给出了全局最优间距准则。针对一般情形，我们开发了两种求解器：用于全局探索的 AO-PSO，以及 AO-SCA；后者利用梯度 $J_0'(x) = -J_1(x)$，通过求解一系列凸代理问题来获得解。仿真结果表明，相较于 FPA 阵列，优化后的流体 MIMO 可实现显著增益，其容量性能接近独立同分布容量。

参考文献

[1] A. J. Paulraj、Thomas Kailath，“利用分布式发射/定向接收（DTDR）提高无线广播系统容量”，美国专利5,345,599，1994年。[2] G. J. Foschini，“衰落环境下采用多元天线的无线通信分层空时架构”，贝尔实验室技术期刊，第1卷，第2期，第41–59页，1996年秋季。[3] E. Telatar，“多天线高斯信道的容量”，欧洲电信汇刊，第10卷，第6期，第585–595页，1999年。[4] V. Tarokh、N. Seshadri和A. R. Calderbank，“面向高数据速率无线通信的空时码：性能准则与码构造”，IEEE信息论汇刊，第44卷，第2期，第744–765页，1998年3月。[5] V. Tarokh、H. Jafarkhani和A. R. Calderbank，“基于正交设计的空时分组码”，IEEE信息论汇刊，第45卷，第5期，第1456–1467页，1999年7月。[6] G. G. Raleigh和J. M. Cioffi，“面向无线通信的空时编码”，IEEE 通信汇刊，第46卷，第3期，第357–366页，1998年3月。[7] K. K. Wong、R. D. Murch、R. S.-K. Cheng和K. B. Letaief，“多用户MIMO智能天线系统频谱效率的优化”，见IEEE无线通信与网络会议（WCNC）论文集，第1卷，第426–430页，2000年9月23–28日，美国伊利诺伊州芝加哥。[8] K. K. Wong、R. D. Murch和K. B. Letaief，“多用户MIMO无线通信系统的性能增强”，IEEE 通信汇刊，第50卷，第12期，第1960–1970页，2002年12月。[9] K. K. Wong、R. D. Murch和K. Ben Letaief，“面向多用户MIMO天线系统的联合信道对角化”，IEEE 无线通信汇刊，第4卷，第2期，第773–786页，2003年7月。[10] S. Vishwanath、N. Jindal和A. Goldsmith，“高斯MIMO广播信道的对偶性、可达速率与和速率容量”，IEEE信息论汇刊，第49卷，第10期，第2658–2668页，2003年10月。[11] Lai-U Choi和R. D. Murch，“一种基于分解方法的多用户MIMO系统发射预处理技术”，IEEE 无线通信汇刊，第3卷，第1期，第20–24页，2004年1月。[12] Q. H. Spencer、A. L. Swindlehurst 和 M. Haardt，“用于多用户MIMO信道下行空间复用的迫零方法”，IEEE 信号处理汇刊，第52卷，第2期，第461–471页，2004年2月。[13] D. A. U. Villalonga、H. OdetAlla、M. J. Fern´andez-Getino Garc´ıa 和 A. Flizikowski，“非理想信道知识条件下单用户和多用户场景中预编码5G-NR的频谱效率：全面的实施指南”，Electronics，第11卷，第24期，第4237页，2022年12月。[14] Z. Wang 等，“面向第六代移动通信的超大规模MIMO教程：基础、信号处理与应用”，IEEE 通信调查与教程，第26卷，第3期，第1560–1605页，2024年第三季度。[15] Y.-C. Hung 和 S.-H. L. Tsai，“波束成形MIMO OFDM系统的峰均功率比分析与抑制算法”，IEEE 无线通信汇刊，第13卷，第5期，第2588–2600页，2014年5月。[16] F. Tariq 等，“关于第六代移动通信的推测性研究”，IEEE 无线通信，第27卷，第4期，第118–125页，2020年8月。[17] J. T. Bernhard，《可重构天线》，天线综合讲义，2007年。[18] K. K. Wong、A. Shojaeifard、K.-F. Tong 和 Y. Zhang，“流体天线系统的性能极限”，IEEE 通信快报，第24卷，第11期，第2469–2472页，2020年11月。[19] K. K. Wong、A. Shojaeifard、K.-F. Tong 和 Y. Zhang，“流体天线系统”，IEEE 无线通信汇刊，第20卷，第3期，第1950–1962页，2021年3月。[20] W. K. New 等，“面向第六代移动通信网络的流体天线系统教程：涵盖通信理论、优化方法与硬件设计”，IEEE 通信调查与教程，第27卷，第4期，第2325–2377页，2025年8月。[21] W.-J. Lu 等，“流体天线：重塑内在特性，实现智能无线网络中的灵活辐射特性”，IEEE 通信杂志，第63卷，第5期，第40–45页，2025年5月。[22] H. Hong 等，“流体天线系统当代综述：基础与组网视角”，IEEE 网络科学与工程汇刊，第13卷，第2305–2328页，2026年。[23] W. K. New 等，“流体天线系统：重新定义可重构无线通信”，IEEE 通信领域精选期刊，第44卷，第1013–1044页，2026年。[24] T. Wu 等，“赋能第六代移动通信的流体天线系统：原理、应用与研究方向”，即将在 IEEE 无线通信发表，DOI:10.1109/MWC.2025.3629597，2025年。[25] L. Zhu 和 K. K. Wong，“流体天线与可移动天线的历史回顾”，arXiv预印本，arXiv:2401.02362v2，2024年。[26] Y. Shen 等，“面向未来无线通信的毫米波表面波流体天线设计与实验验证”，即将在 IEEE 天线与无线传播快报发表，DOI:10.1109/LAWP.2026.3657059，2026年。[27] R. Wang 等，“用于无线通信的电磁可重构流体天线系统：设计、建模、算法、制造与实验”，IEEE 通信领域精选期刊，第44卷，第1464–1479页，2026年。[28] J. Zhang 等，“一种应用于流体天线系统、具有高速切换能力的新型基于像素的可重构天线”，IEEE 天线与传播开放期刊，第6卷，第1期，第212–228页，2025年2月。[29] B. Liu、T. Wu、K. K. Wong、H. Wong 和 K. F. Tong，“宽带基于像素的流体天线系统：面向智慧城市的天线设计”，IEEE 物联网期刊，第13卷，第4期，第6850–6862页，2026年2月。[30] K. K. Wong、C. Wang、S. Shen、C.-B. Chae 和 R. Murch，“可重构像素天线与流体天线系统相遇：电磁信号与信息处理的范式转变”，IEEE 无线通信，第33卷，第1期，第191–198页，2026年2月。[31] S. Zhang 等，“可重构全息表面赋能的流体天线系统：波束成形设计与实验验证”，IEEE 通信领域精选期刊，第44卷，第1417–1431页，2026年。[32] B. Liu、K.-F. Tong、K. K. Wong、C.-B. Chae 和 H. Wong，“ 用于快变无线信道空间复用的可编程超材料流体天线 ”，Optics Express，第33卷，第13期，第28898–28915页，2025年。[33] K. F. Tong、B. Liu 和 K. K. Wong，“流体天线系统硬件的设计与挑战”，Electronics，第14卷，第7期，第1458页，2025年。[34] K. K. Wong、K.-F. Tong、Y. Chen 和 Y. Zhang，“用于流体天线系统性能分析的空间相关参数闭式表达式”，IET 电子快报，第58卷，第11期，第454–457页，2022年5月。[35] M. Khammassi、A. Kammoun 和 M.-S. Alouini，“流体天线系统信道的新型解析近似”，IEEE 无线通信汇刊，第22卷，第12期，第8843–8858页，2023年12月。

[36] W. K. New、K. K. Wong、H. Xu、K.-F. Tong 和 C.-B. Chae，“流体天线系统：关于中断概率与分集增益的新见解”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第1期，第128–140页，2024年1月。[37] W. K. New、K. K. Wong、H. Xu、K.-F. Tong 和 C.-B. Chae，“MIMO-FAS的信息论刻画：优化、分集复用权衡与 q-中断容量”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第6期，第5541–5556页，2024年6月。[38] F. R. Ghadi 等，“任意衰落信道下流体天线系统的基于Copula的性能分析”，IEEE 通信快报，第27卷，第11期，第3068–3072页，2023年11月。[39] F. Rostami Ghadi 等，“流体天线系统性能分析的高斯Copula方法”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第11期，第17573–17585页，2024年11月。[40] P. Ramˊırez-Espinosa、D. Morales-Jimenez 和 K. K. Wong，“流体天线系统的新型空间块相关模型”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第11期，第15829–15843页，2024年11月。[41] X. Lai 等，“重新审视流体天线系统的空间块相关模型：从恒定相关到可变相关”，IEEE 通信领域精选期刊，第44卷，第1335–1351页，2026年。[42] Z. Chai、K. K. Wong、K. F. Tong、Y. Chen 和 Y. Zhang，“流体天线系统的端口选择”，IEEE 通信快报，第26卷，第5期，第1180–1184页，2022年5月。[43] X. Lai 等，“采用最大比合并的流体天线系统性能”，IEEE 通信快报，第28卷，第2期，第402–406页，2024年2月。[44] H. Qin 等，“流体天线辅助多用户下行通信的天线定位与波束成形设计”，IEEE 无线通信快报，第13卷，第4期，第1073–1077页，2024年4月。[45] L. Zhu、W. Ma、B. Ning 和 R. Zhang，“通过天线位置优化增强多用户通信的可移动天线”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第7期，第7214–7229页，2024年7月。[46] Y. Chen 等，“近场流体天线系统的联合波束成形与天线设计”，IEEE 无线通信快报，第14卷，第2期，第415–419页，2025年2月。[47] J. Yao 等，“面向认知无线电网络的流体天线系统频谱感知”，IEEE 物联网期刊，第12卷，第5期，第6046–6049页，2025年3月。[48] C. Wang 等，“深度强化学习赋能流体天线系统，释放通感一体化多用户MIMO的潜能”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第9期，第10879–10894页，2024年9月。[49] J. Zou 等，“利用流体天线系统改变通感一体化权衡”，IEEE 无线通信快报，第13卷，第12期，第3479–3483页，2024年12月。[50] L. Zhou、J. Yao、M. Jin、T. Wu 和 K. K. Wong，“流体天线辅助通感一体化系统”，IEEE 无线通信快报，第13卷，第12期，第3533–3537页，2024年12月。[51] S. Yang 等，“迈向智能天线定位：利用深度强化学习赋能的流体天线系统辅助通感一体化系统”，IEEE 物联网期刊，第14卷，第7期，第2029–2033页，2025年7月。[52] W. K. New 等，“流体天线系统增强正交与非正交多址接入”，IEEE 通信快报，第28卷，第1期，第218–222页，2024年1月。[53] J. Yao 等，“探索流体天线系统辅助通信系统的公平性：从非正交多址接入到正交多址接入”，IEEE 无线通信汇刊，第24卷，第4期，第3433–3449页，2025年4月。[54] T. Wu 等，“释放流体天线系统的更多潜能：流体天线系统协作非正交多址接入系统框架”，IEEE 通信汇刊，第74卷，第4820–4836页，2026年。[55] F. Rostami Ghadi 等，“RIS辅助流体天线系统的性能”，IEEE 无线通信快报，第13卷，第8期，第2175–2179页，2024年8月。[56] X. Lai 等，“FAS-RIS：块相关模型分析”，IEEE 车辆技术汇刊，第74卷，第2期，第3412–3417页，2025年2月。[57] J. Yao 等，“FAS-RIS通信：模型、分析与优化”，IEEE 车辆技术汇刊，第74卷，第6期，第9938–9943页，2025年6月。[58] J. Yao 等，“FAS与ARIS：哪一个对FAS-ARIS通信系统更重要？”，IEEE 无线通信汇刊，第25卷，第2075–2091页，2026年。[59] T. Wu 等，“面向车联网的FAS-RIS：利用有限元实现真实的性能分析”，IEEE 车辆技术汇刊，DOI:10.1109/TVT.2025.3647789，2025年。[60] H. Chen 等，“FAS-ARIS：将多径挑战转化为定位机遇”，IEEE 网络科学与工程汇刊，第13卷，3772，2026年3756页。

[61] H. Xu等人，“未来是流动的：利用稀疏流体天线革新DOA估计”，IEEE 无线通信汇刊，第25卷，第11546–11561页，2026年。[62] T. Wu等人，“可扩展流体天线系统：阵列信号处理的新范式”，即将发表于IEEE精选信号处理专题期刊，arXiv:2508 10831，2026年。[63] B. Tang等人，“实现保密通信的流体天线”，IEEE 通信快报，第27卷，第6期，第1491–1495页，2023年6月。[64] J. D. Vega-Sˊanchez、L. F. Urquiza-Aguiar、H. R. C. Mora、N. V. O. Garzˊon和D. P. M. Osorio，“流体天线系统：保密中断概率分析”，IEEE 车辆技术汇刊，第73卷，第8期，第11458–11469页，2024年8月。[65] F. Rostami Ghadi等人，“流体天线系统上的物理层安全：保密性能分析”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第12期，第18201–18213页，2024年12月。[66] J. Yao等人，“用于安全与隐蔽通信的流体天线系统”，IEEE 物联网期刊，第12卷，第11期，第18414–18418页，2025年6月。[67] J. Zheng等人，“借助块相关模型开展FAS-RIS安全性分析”，IEEE 无线通信快报，第14卷，第7期，第2029–2033页，2025年7月。[68] T. Wu等人，“面向流体天线系统保密性分析的可变块相关建模与优化”，arXiv预印本，arXiv:2510.03594，2025年。[69] J. Yao等人，“流体天线系统中通过干扰实现主动监测”，IEEE 通信快报，第28卷，第7期，第1695–1702页，2024年7月。[70] K. K. Wong和K. F. Tong，“流体天线多址接入”，IEEE 无线通信汇刊，第21卷，第7期，第4801–4815页，2022年7月。[71] K. K. Wong、K. F. Tong、Y. Chen和Y. Zhang，“实现海量连接的快速流体天线多址接入”，IEEE 通信快报，第27卷，第2期，第711–715页，2023年2月。[72] K. K. Wong、D. Morales-Jimenez、K. F. Tong和C.-B. Chae，“慢速流体天线多址接入”，IEEE 通信汇刊，第71卷，第5期，第2831–2846页，2023年5月。[73] J. P. Gonzˊalez-Coma和F. J. Lˊopez-Martˊınez，“采用多端口接收机的慢速流体天线多址接入”，IEEE 无线通信快报，第15卷，第1280–1284页，2026年。[74] X. Yuan、N. Guo、Y. Hu、R. Schober和A. Schmeink，“流体天线多址接入网络中的最优天线配置筛选与联合功率控制”，IEEE通信选域期刊，第44卷，第1227–1242页，2026年。[75] D. Dinis和R. Wichman，“s-FAMA-GP：一种采用干扰插值的低复杂度慢速FAMA”，IEEE 无线通信快报，第15卷，第1727–1731页，2026年。[76] Z. Zhang等人，“论面向无源随机接入的慢速流体天线多址接入基本极限”，IEEE 无线通信快报，第14卷，第11期，第3455–3459页，2025年11月。[77] K. K. Wong、C. B. Chae和K. F. Tong，“紧凑型超大规模天线阵列：一种简单的开环海量连接方案”，IEEE 无线通信汇刊，第23卷，第6期，第6279–6294页，2024年6月。[78] H. Hong、K. K. Wong、K. F. Tong、H. Shin和Y. Zhang，“快衰落信道上的编码流体天线多址接入”，IEEE 无线通信快报，第14卷，第4期，第1249–1253页，2025年4月。[79] H. Hong等人，“5G-NR系统中的下行链路OFDM-FAMA”，IEEE 无线通信汇刊，第24卷，第12期，第10116–10132页，2025年12月。[80] N. Waqar、K. K. Wong、C.-B. Chae和R. Murch，“涡轮增速流体天线多址接入”，IEEE 无线通信汇刊，第25卷，第4038–4052页，2025年。[81] N. Waqar、K. K. Wong、C.-B. Chae和R. Murch，“注意力Copula辅助的涡轮流体天线海量接入”，即将发表于IEEE 无线通信快报，DOI:10.1109/LWC.2026.3665494，2026年。[82] H. Xu等人，“流体天线系统辅助的多用户毫米波系统的信道估计”，IEEE 通信快报，第28卷，第3期，第632–636页，2024年3月。[83] H. Zhang等人，“基于非对称图掩码自编码器的流体天线系统学习驱动信道外推”，IEEE 无线通信快报，第13卷，第6期，第1665–1669页，2024年6月。[84] W. K. New等人，“流体天线系统中的信道估计与重构：过采样至关重要”，IEEE 无线通信汇刊，第24卷，第1期，第309–322页，2025年1月。[85] Z. Zhang、J. Zhu、L. Dai和R. W. Heath Jr，“流体天线系统信道估计的逐次贝叶斯重构器”，IEEE 无线通信汇刊，第24卷，第3期，第1992–2006页，2025年3月。[86] B. Xu、Y. Chen、Q. Cui、X. Tao和K. K. Wong，“基于稀疏贝叶斯学习的流体天线系统信道估计”，IEEE 无线通信快报，第14卷，第2期，第325–329页，2025年2月。[87] W. C. Jakes，《微波移动通信》。纽约，NY，美国：Wiley，1974年。