arXiv:2603.07491v1 [math.OA] 8 Mar 2026

正则性性质的保持性 II

HYUN HO LEE

Abstract. 本文研究单含幺 C^*-代数的拓扑维数与代数维数类性质的遗传性。当一对含幺 C^*-代数（A, B）通过一个 $*$-同态 ϕ： $A \to B$ 建立联系，且该同态由零阶映射迹序列分裂时，我们证明，在对A 或 B，或对 A 和 B同时施加适当假设的条件下

- 迹 m-比较性质从 B 传递到 A;
- 迹 m-近乎可除性从 B 传递到 A;
- 迹核维数小于 m 的性质从 B 传递到 A。

1. Introduction

Elliott 开创的单核 C^*-代数分类纲领，在有限核维数代数的分类完成后，迎来了一个重要里程碑 [3, 5]。这一成就的核心是 Toms-Winter 猜想。该猜想指出，对于单、可分、含幺且核的 C^*-代数， $\mathcal{Z}$-稳定性、正元素的严格比较以及有限核维数这几个条件彼此等价 [16, 19]。

在研究这些正则性时，一个反复出现的主题是：它们在交叉积、包含和张量积等结构运算下的遗传性。Barlak 和 Szab´o [2],提出了一种极为成功的遗传性研究方法，他们利用序贯分裂 $*$-同态的概念 ϕ： $A \to B$ ，证明正则性可以从 B 传递到 A。然而，在许多重要的动力系统情形中——尤其是涉及迹 Rokhlin 性质或大子代数 [15]的情形——分裂映射往往只能在迹意义下获得。

在本研究的第一部分 [8], ，我们开始探讨这些遗传性结果的迹类比。我们着重研究由迹序贯分裂的 *-同态连接的成对代数 (A, B)。尽管我们成功证明了 $\mathcal{Z}$-吸收性和严格比较的遗传性，但 Toms-Winter 猜想的第三大支柱——核维数——仍难以处理。主要的技术障碍在于无法将迹意义下的小部分转移到范数部分。随后，在 [9] 中，我们改进了框架，要求迹分裂按照 Winter 和 Zacharias [20]的意义，由完全正压缩零阶映射实现。零阶映射本质上是从代数锥到代数的 *-同态，因此是保持正交性和 Cuntz 半群数据的“正确”映射类别。

2010年 数学主题分类。 主分类号：46L55。次分类号：47C15, 46L35。关键词和短语。 迹意义下由零阶顺序分裂，Cuntz半群，迹核维数，m-比较。

通过要求该映射由零阶映射迹序列分裂，我们建立了一个统一的概念框架，涵盖以下两方面：

(1) 具有弱迹 Rokhlin 性质的有限群作用，以及 (2) 带有条件期望 $E : A \to P$ 的 C^*-代数 $P \subset A$ 的包含具有弱迹 Rokhlin 性质

尽管有限核维数是一种刚性的结构性质，迹核维数则专为处理迹可忽略余项而设计。由于这一目标与我们的框架完全契合，这一不变量的遗传性自然也是可预期的结果。我们的主要结果表明，若 B 是具有迹 m-比较、迹 m-几乎可除性或至多为 m 的迹核维数的单幺 C^*-代数，那么只要 A 在 B 中通过一个零阶映射迹序列分裂地嵌入，这些性质就会传递到 A 。值得注意的是，迹 m-比较和 m-几乎可除性是衡量 C^*-代数结构正则性的代数指标。尽管这些代数不变量的遗传性提供了必要的基础，但迹核维数的证明在技术上颇为复杂；它需要在迹超幂中精巧地协调零阶分裂与正交提升，以在避免维数膨胀的同时保持拓扑复杂度。因此，这项工作有效地弥合了我们框架中代数与拓扑两方面之间的鸿沟，完成了始于 [9] 的迹正则性计划。

本文组织如下。第 2 节回顾 Cuntz 次等价和零阶序映射结构所需的背景知识 [20]。第 3 节证明主要的遗传性定理，为经典的 Barlak-Szab´o 框架提供全面的迹版本，并进一步巩固正则性在 Elliott 计划中的稳定性。

2. Preliminaries

本节回顾本研究所需的基本工具和记号。首先回顾 Cuntz 次等价的定义及其基本性质，它为 Cuntz 半群提供了主要的序结构。此外，我们还介绍完全正压缩零阶映射（c.p.c.）的技术背景，因为其结构刚性对于我们在遗传性结果中采用的提升论证至关重要。

定义 2.1。 设 A 是一个 C^*-代数。对于正元素 $a, b \in A_+$，若存在一个序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 使得 a ***Cuntz*** 次等价 于 b，记作 $a \lesssim b$，则称

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^* b v_n - a\| = 0.$$

定义 2.2 （ $M_\infty(A)$中的维数无关性）。 设 $M_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(A)$是关于 A 在左上角包含 $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$下矩阵代数的代数极限。对于 $a \in M_n(A)_+$ 和 $b \in M_m(A)_+$，关系 $a \lesssim b$ 定义如下：

(1) 令 $k \geq \max(n, m)$。令 $\iota_n : M_n(A) \to M_k(A)$ 和 $\iota_m : M_m(A) \to M_k(A)$ 为自然嵌入。

(2) 我们定义 $a \lesssim b$ 当且仅当 $\iota_n(a) \lesssim \iota_m(b)$ 在 C^*-代数 $M_k(A)$ 中成立。此关系与 $k \in \mathbb{N}$ 的选择无关。

命题 2.3（矩形矩阵刻画）。对于 $a \in M_n(A)_+$ 与 $b \in M_m(A)_+$，下列陈述等价：

- $a \lesssim b$ 属于 $M_\infty(A)$。
- 存在一列矩形矩阵 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M_{m,\,n}(A)$ 使得 $v_k^* b v_k \to a$ 依范数成立。
- 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $v \in M_{m,\,n}(A)$ 使得 $(a-\varepsilon)_+ = v^* b v$。

定义 2.4（Cuntz 等价）。两个正元素 $a,\ b \in M_\infty(A)_+$ 称为 *Cuntz* 等价，记作 $a \sim b$，如果

$$a \lesssim b \quad \text{and} \quad b \lesssim a.$$

这是集合 $M_\infty(A)_+$ 上的一个等价关系。

以下引理借自 [15, 引理 1.4]，并总结了关于 Cuntz 次等价的一些众所周知的事实。我们用 A^+ 表示 C^*-代数 A 的单位化。

引理 2.5. 设 A 为一个 C^*-代数。

(1) 设 a、$b \in A_+$。若 $\overline{a} \in \overline{bAb}$，则 $a \lesssim b$。*(2)* 设 $a \in A_+$，并设 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为满足 $f(0) = 0$ 的连续函数。则 $f(a) \lesssim a$。*(3)* 设 $a \in A_+$，并设 $f\colon [0, \|a\|] \to [0,\infty)$ 为满足 $f(0) = 0$ 且对 $\lambda > 0$ 有 $f(\lambda) > 0$ 的连续函数。则 $f(a) \sim a$。*(4)* 设 $c \in A$。则 $c^*c \sim cc^*$。*(5)* 设 $a \in A_+$，并设 $u \in A$ 为酉元。则 $uau^* \sim a$。*(6)* 设 $c \in A$，并设 $\alpha > 0$。则 $(c^*c - \alpha)_+ \sim (cc^* - \alpha)_+$。*(7)* 设 $v \in A$。则存在同构 $\phi\colon v^*vAv^*v \to vv^*Avv^*$，使得对每个正元素 $z \in v^*vAv^*v$，有 $z \sim \phi(z)$。*(8)* 设 $a \in A_+$，并设 ε_1、$\varepsilon_2 > 0$。则 ~~$((a-\varepsilon_1)_+ - \varepsilon_2)_+ = (a - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2))_+$~~。*(9)* 设 a、$b \in A_+$ 满足 $\overline{a} \lesssim \overline{b}$，并设 $\delta > 0$。则存在 $v \in A$ 使得 $v^*v = (a-\delta)_+$ 且 $vv^* \in \overline{bAb}$。*(10)* 设 a、$b \in A_+$。则 $\|a-b\| < \varepsilon$ 蕴含 $(a-\varepsilon)_+ \lesssim b$。*(11)* 设 a、$b \in A_+$。以下各项等价：*(a)* $a \lesssim b$。*(b)* 对所有 $\varepsilon > 0$，$(a-\varepsilon)_+ \lesssim b$。*(c)* 对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $(a-\varepsilon)_+ \lesssim (b-\delta)_+$。*(12)* 设 a、$b \in A_+$。则 $a + b \lesssim a \oplus b$。*(13)* 设 a、$b \in A_+$ 正交（即 $ab = 0$）。则 $a + b \sim a \oplus b$。*(14)* 设 a_1、a_2、b_1、$b_2 \in A_+$。若 $a_1 \lesssim a_2$ 且 $b_1 \lesssim b_2$，则 $a_1 \oplus b_1 \lesssim a_2 \oplus b_2$。

定义 2.6（半群 $W(A)$）。A 的 *Cuntz* 半群 记作 $W(A)$，它是 $M_\infty(A)$ 中正元素的 Cuntz 等价类集合：

$$W(A) := M_\infty(A)_+ / \sim = \{\langle a \rangle : a \in M_\infty(A)_+\}.$$

集合 $W(A)$ 配备了以下结构：

(1) **加法：** 对于 $\langle a\rangle,\ \langle b\rangle \in W(A)$，加法通过直和定义 m:

$$\langle a\rangle + \langle b\rangle := \langle a \oplus b\rangle,$$

其中 $a \oplus b = \mathrm{diag}(a,\ b) \in M_{n+m}(A)$，其中 $a \in M_n(A)$ 和 $b \in M_m(A)$。

(2) 偏序： $W(A)$ 是一个有序阿贝尔半群，其序由次等价关系诱导：

$$\langle a\rangle \leq \langle b\rangle \iff a \lesssim b.$$

命题 2.7 (良定义性)。 上述定义的运算是良定义的：

- 如果 $a_1 \sim a_2$ 且 $b_1 \sim b_2$，那么 $a_1 \oplus b_1 \sim a_2 \oplus b_2$。
- 加法在 $W(A)$ 中满足结合律和交换律。
- 零元是 $\langle 0\rangle$，即零矩阵的等价类。

定义 2.8. 对于含幺 C^*-代数 A，我们用 $\mathrm{QT}(A)$ 表示 A 上归一化的 2-拟迹的集合。当 A 稳定有限时，我们定义 $d_\tau :\ M_\infty(A)_+ \to [0,\infty)$，使得 $d_\tau(a) = \lim_{n\to\infty} \tau(a^{1/n})$ 对于 $a \in M_\infty(a)_+$，其中 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$。

命题 2.9. 设 A 是稳定有限的含幺 C^*-代数。那么，定义 *2.8* 中的 d_τ 在 $W(A)$ 上定义良好。也就是说，若 $a, b \in M_\infty(A)_+$ 满足 $a \sim b$，则 $d_\tau(a) = d_\tau(b)$。

从现在起，我们只讨论恰当的 C^*-代数 A 类，因此在这种情况下，$\mathrm{QT}(A) = \mathrm{T}(A)$ 是 A 的迹态集合。

定义 2.10. (Winter-Zacharias) 设 A 与 B 为 C^*-代数。一个完全正收缩（c.p.c.）映射 $\phi :\ A \to B$ 若保持正交性，则称为零阶 的。也就是说，对任意 $a, b \in A_+$,

$$a \cdot b = 0 \implies \phi(a) \cdot \phi(b) = 0.$$

我们将把完全正收缩零阶映射简称为零阶序映射而不致混淆。下面的定理是关于零阶序映射的结构的。

定理 *2.11.* [20, 推论 *4.*1] 设 A 与 B 为 C^*-代数，且 $\phi :\ A \to B$为一个零阶序映射。则由 $\varrho_\phi(id_{(0,1]} \otimes a) := \phi(a)$ 给出的映射诱导一个 $*$-同态 $\varrho_\phi :\ C_0((0,1]) \otimes A \to B$。反之，任意 $*$-同态 $\varrho : C_0((0,1]) \otimes A \to B$ 诱导一个零阶序映射 $\phi_\varrho(a) := \varrho(id_{(0,1]} \otimes a)$。

这些相互赋值在从 A 到 B 的完全正压缩零阶映射空间与从 $C_0((0,1]) \otimes A$到 B的 $*$-同态空间之间建立了典范对应。

全文中，我们固定 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子 ω，并回顾一下，$l^\infty(\mathbb{N}, A) = \prod_{n=1}^\infty A$ 表示从 $\mathbb{N}$ 到 A的所有有界函数构成的 C^*-代数。我们定义 $l^\infty(\mathbb{N}, A)$的一个闭理想如下：

$$c_\omega(\mathbb{N}, A) = \{(a_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}, A) \mid \lim_\omega \|a_n\| = 0\}.$$

于是，我们用 $A^\omega = \prod_{n=1}^\infty A/c_\omega(\mathbb{N},\ A)$ 表示相对于滤子 ω 的 A 的超幂 C^* 代数，其赋予的范数为 $\|a\| = \lim_\omega \|a_n\|$ （对于 $a = [(a_n)_n] \in A^\omega$）。此外，我们用 π_ω 表示从 $\prod_{n=1}^\infty A$

到 A^ω 的典范商映射。注意，我们可以将 A 嵌入 A^ω，将其视为常值序列，并将 A 的中心超幂代数称为 $A^\omega \cap A'$。

由于 $\|a\| = \lim_\omega \|a_n\|$ 对于 $a = [(a_n)_n] \in A^\omega$，对于任意非零投影 $p = [(p_n)] \in A^\omega$，我们可以假设每个 p_n 都是 A中的非零投影。类似地，对于任意非零正元素 $a \in A^\omega$，我们可以将其表示为 $a = [(a_n)_n]$，其中每个 a_n都是 A 中的非零正元素，且 $\{\|a_n\| \mid n = 1, 2, \dots\}$ 与零一致地保持距离。

文献 [9] 中提出了一个统一的概念框架，涵盖有限群作用的弱迹 Rokhlin 性质以及 C^*-代数的包含；这一框架的提出受到了 [2, 8] 的启发。

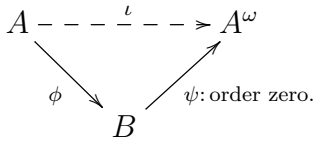
定义 2.12. [9, 定义 3.1] 若一个 *-同态 $\phi : A \to B$ 满足以下条件，则称其由零阶映射迹顺序分裂：对于每个非零正元素 $z \in A^\omega$，都存在一个零阶 c.p.c 映射 $\psi : B \to A^\omega$ 和一个非零压缩正元素 $g \in A^\omega \cap A'$，使得

(1) $\psi(\phi(a)) = ag$ 对于所有 $a \in A$,

(2) $1_{A^\omega} - g \lesssim z$ 属于 A^ω。

我们称 ψ 为迹近似左逆。

我们用下图表示 ϕ 由零阶映射迹序列分裂，且其迹近似左逆为 ψ;



以下命题提供了一种机制，可将性质从矩阵扩张层次 $M_n(A)$ 转移回底层的 C^*-代数 A。

命题 2.13。 [9, 命题 3。3] 设 A 是一个含幺无限维单 C^*-代数，且 B 是一个含幺 C^*-代数。假设 $\phi : A \to B$ 由零阶映射迹序列分裂且保持单位元。那么，对任意$n \in \mathbb{N}$，其放大映射$\phi \otimes \mathrm{id}_{M_n} : A \otimes M_n \to B \otimes M_n$ 也由零阶映射迹序列分裂。

在建立了关于 Cuntz 次等价以及完全正压缩零阶映射技术性质的必要背景后，我们现在可以考察它们的整体影响。下一节将证明，B 的正则性性质可通过迹分裂映射传递给 A。我们从 m-比较开始，它为我们框架的稳定性提供了一个范例。

3. Main results

本节中，我们证明三项遗传性结果，它们是本文的主要结果：第一，迹 m 比较；第二，迹 m 几乎可除性；第三，迹核维数。它们都与 Winter 和 Zacharias [21] 的核维数 C^*-代数 A 有关，记为 $\dim_{\mathrm{nuc}} A$。这些结果都表明，B 所具有的性质会通过 ϕ 传递到 A：$A \to B$，即由零阶映射迹序列分裂。

定义 3.1。 [19, 定义 2.1-(i)] 设 A 是一个可分、单、含幺的 C^*-代数，且 $m \in \mathbb{N}$。若对于任意非零正压缩元 a， b_0，……， $b_m \in M_\infty(A)$，我们有

$$a \lesssim b_0 \oplus \cdots \oplus b_m$$

每当

$$d_\tau(a) < d_\tau(b_i)$$

对每个 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$ 和 $i = 0$，……， m。根据 [19, 命题 2.3],，我们也称 A 具有迹 m-比较性质，若 A 具有 m-比较性质。

注 3.2。 已知，根据 [10, 定理 1]，若 A 是一个拓扑维数为 $\dim_{\mathrm{nuc}} A \leq m$ 的可分 C^*-代数，则 A 具有 m-比较性质。因此， m-比较性质可以看作拓扑维数的一种代数表达。

定理 3.3。 设 A 和 B 是可分、稳定有限、单且含幺的 C^*-代数，并且ϕ： $A \to B$ 是一个由零阶映射迹序列分裂的 $*$-同态。若B 满足 *W. Winter* 意义下的迹 m-比较性质，则 A也满足该性质。

证明。 根据命题 2.13，我们可以假设 a， b_0， $\ldots b_m \in A$。假设对每个 $i = 0$， 1，……， m

$$d_\tau(a) < d_\tau(b_i) \quad \forall \tau \in T(A).$$

我们希望得出

$$a \lesssim b_0 \oplus b_1 \oplus \cdots \oplus b_m.$$

由于对于 $i = 0$，…， m， B满足 m-比较，因此

$$\phi_{m+1}(a) \lesssim \phi_{m+1}(b_0 \oplus \cdots \oplus b_m).$$

如果 A中的至少一个 b_i是纯正的，那么 $\oplus_{i=0}^m b_i$ 在 $M_{m+1}(A)$ 中是纯正的。因此，由 [8, 命题 2.18] 可得 $a \lesssim b_0 \oplus \cdots \oplus b_m$。如果 b_i中没有一个 b_i是纯正的，那么我们可以假设每个 b_i 都与一个投影 q_i Cuntz 等价，并分两种情形讨论：

情形 1：如果 a 不是纯正的，即 a与A中的一个投影 p Cuntz 等价，注意，对于每个 $i = 0$，…， m，函数 $\tau \ni T(B) \to d_\tau(\phi(b_i)) - d_\tau(\phi(a))$ 连续且为正。由于 $T(B)$ 是 w*- 紧的，因此

$$\rho_i = \inf_{\tau \in T(A)} (d_\tau(p) - d_\tau(q_i)) > 0. \tag{3.1}$$

那么，根据引理 [8, Lemma 2.21]，我们可以找到 $c_i \in W(A)^+$，使得 $d_\tau(p) < d_\tau(b_i) - \rho < d_\tau(c_i)$，且 $c_i \lesssim b_i$。
现在，对于每个 $i = 0$， 1，……， m，我们都处于这样的情形：

$$d_\tau(a) < d_\tau(c_i) \quad \forall \tau \in T(A),$$

其中 c_i 均为纯正，且对所有 i， $c_i \lesssim b_i$ 。再次根据 [8, 命题 2.18]，我们有

$$a \lesssim c_0 \oplus \cdots \oplus c_m \lesssim b_0 \oplus \cdots \oplus b_m.$$

情形 2：如果 a 是纯正的，我们要证明对于任意 $\epsilon > 0$

$$(a - \epsilon)_+ \lesssim b_0 \oplus \cdots \oplus b_m.$$

给定 $\epsilon > 0$，考虑函数 $f\colon [0,\infty) \to [0,1]$，使得 $f(\lambda) > 0$，当 $\lambda \in (0,\epsilon)$ 时成立，并且 $f(\lambda) = 0$，当 $\lambda \in \{0\} \cup [\epsilon,\infty)$ 时成立。于是 $f(a) \neq 0$，且 $f(a) \perp (a-\epsilon)_+$。因此，$\rho = \int\{d_\tau(f(a)) \mid \tau \in T(A)\}$严格为正。

$$\begin{aligned} d_\tau((a-\epsilon)_+) + \rho &\leq d_\tau((a-\epsilon)_+) + d_\tau(f(a)) \\ &= d_\tau((a-\epsilon)_+ + f(a)) \leq d_\tau(a) < d_\tau(b_i). \end{aligned}$$

再次，我们使用 [8, 引理 2.21] 来找到 $c_i \in W(A)^+$，使得 $c_i \lesssim b_i$ 且 $d_\tau(c_i) > d_\tau(b_i) - \rho > d_\tau((a-\epsilon)_+)$。因此，

$$d_\tau(\phi(a-\epsilon)_+) < d_\tau(\phi(c_i)) \quad \text{for all } \tau \in T(B)$$

其中 c_i 为纯正。根据上文中的同一论证

$$(a-\epsilon)_+ \lesssim c_0 \oplus \cdots \oplus c_m \lesssim b_0 \oplus \cdots \oplus b_m$$

□

定义 3.4. [19, 定义 2.5-(ii)] 设 A 为一个含幺的精确 C^*-代数，且 $m \in \mathbb{N}$。称 A是迹地 m-几乎可除的，如果对任意正压缩元$a \in M_\infty(A)$、$\epsilon > 0$ 和 $0 \neq k \in \mathbb{N}$，存在一个完全正收缩零阶映射

$$\psi : M_k \to \mathrm{her}(a) \subset M_\infty(A)$$

使得

$$\tau(\psi(\mathbf{1_k})) \geq \frac{1}{m+1} \cdot \tau(a) - \epsilon$$

对所有 $\tau \in T(A)$。

注 3.5. 在 [19, 命题 3.7]中亦知，若 A 是可分、单、非初等且含幺的 C^*-代数，且 $\dim_{\mathrm{nuc}} A \leq m$，则 A 对某个 $\widetilde{m} \in \mathbb{N}$ 具有迹 $\widetilde{m}$- 几乎可除性。因此，迹 m- 几乎可除性可被视为拓扑维数的另一种代数表达。

定理 3.6. 设 A 与 B 为单的精确幺正 C^*-代数，且 $\phi : A \to B$为一个 *-同态，其由零阶映射迹序列分裂。则若 B 是迹 m-几乎可除的，则 A亦然。

证明. 鉴于命题 2.13，对于 $a \in A \setminus \{0\}$、$\epsilon > 0$ 与 $0 \neq k \in \mathbb{N}$，只需证明存在一个完全正压缩零阶映射 $\nu : M_k \to her(a) \subset A$，使得$\tau(\nu(\mathbf{1_k})) \geq \frac{1}{m+1}\tau(a) - \epsilon$对所有 $\tau \in T(A)$成立。 我们考虑一个三元组 $\phi(a) \in B$、$\epsilon > 0$与$0 \neq k \in \mathbb{N}$。由于 B 是迹 m-几乎可除的，存在一个完全正收缩零阶映射$\mu : M_k \to her(\phi(a)) \subset B$，使得

$$\tau(\mu(\mathbf{1_k})) \geq \frac{1}{m+1}\tau(\phi(a)) - \frac{\epsilon}{4} \tag{3.2}$$

对所有 $\tau \in T(B)$。对于单元素集合 $\{a\}$，由假设存在一个完全正收缩零阶映射$\psi : B \to A^\omega$使得 $\psi(\phi(a)) = ag$，其中 $\psi(\mathbf{1_B}) = g \in A^\omega \cap A'$且 $\widetilde{\tau}(a(1-g)) < \epsilon/4$对所有 $\widetilde{\tau} \in T(A^\omega)$。考虑 $\psi \circ \mu : M_k \to A^\omega$，它是完全正收缩零阶的。若以 $\pi : \prod_{i=1}^\infty A \to A^\omega$ 表示自然商映射，则可写成 $\psi \circ \mu = \pi \circ \prod_{i=1}^\infty \kappa_i$，其中对每个 i，由 [?TWW, 引理 2.1]，$\kappa_i : M_k \to A$ 是一个完全正收缩零阶映射。注意 $\psi \circ \mu : M_k \to \mathsf{her}(a) \subset A^\omega$，从而 $\kappa_i : M_k \to \mathsf{her}(a) \subset A$ 对每个 i。F

或 $\tau \in T(A)$，考虑 $\tau^\omega : A^\omega \to \mathbb{C}$其由 $\tau^\omega([a_n]) = \lim_{n\to\omega} \tau(a_n)$ 给出。该 n

$$\tau^\omega((\psi \circ \mu)(\mathbf{1_k})) = \lim_{n\to\omega} \tau(\kappa_n(\mathbf{1_k}))$$

但是，根据 (3.2)

$$\begin{aligned}\tau^\omega\circ\psi(\mu(\mathbf{1_k}))&\geq\frac{1}{m+1}(\tau^\omega\circ\psi)(\phi(a))-\frac{\epsilon}{4}\\\lim_{n\to\omega}\tau(\kappa_n(\mathbf{1_k}))&\geq\frac{1}{m+1}\tau^\omega(ag)-\frac{\epsilon}{4}\\&\geq\frac{1}{m+1}(\tau^\omega(a)-\tau^\omega(a(1-g)))-\frac{\epsilon}{4}\\&\geq\frac{1}{m+1}\tau(a)-\frac{\epsilon}{4}-\frac{\epsilon}{4}\\&\geq\frac{1}{m+1}\tau(a)-\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

另一方面，存在一个无限集 $\mathcal{U}\in\omega$，使得对所有 $n\in\mathcal{U}$，$\tau(\kappa_n(\mathbf{1_k}))>\lim_{n\to\omega}\tau(\kappa_n(\mathbf{1_k}))-\frac{\epsilon}{2}$。取 $n\in\mathcal{U}$，则 $\kappa_n\colon M_k\to A$ 满足以下条件；

$$\tau(\kappa_n(\mathbf{1_k}))>\frac{1}{m+1}-\epsilon.$$

因此，我们取 $\nu=\kappa_n$，并完成证明。 □

前面的结果着重于 Cuntz 半群的代数序，而现在我们转而关注这些代数的拓扑复杂度。迹核维数的保持需要更精巧的提升论证。具体而言，我们必须确保 B 的有限维逼近能够转化为 A，同时不丧失其正交性。这是通过引理 3.8 和引理 3.9 中发展的正交提升技术实现的。

定义 3.7。 [6, 定义 7.6] 设 A 是一个含幺单 C^*-代数，且 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。若对任意有限子集 $\mathcal{F}\subset A$、任意 $\epsilon>0$ 和任意 $a\in A_+\setminus\{0\}$，均存在一个有限维 C^*-代数 F、一个完全正压缩映射 $\alpha\colon A\to F$、一个非零的分段压缩 n-可分解完全正映射 $\beta\colon F\to A$，以及一个完全正压缩映射 $\gamma\colon A\to A\cap\beta(F)^\perp$，使得

(1) $\|x-(\gamma(x)+\beta\circ\alpha(x))\|<\epsilon$ 对所有 $x\in\mathcal{F}$ 成立，

且 (2) $\gamma(\mathbf{1_A})\lesssim a$ 属于 A。

在这种情况下，我们记 $\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}}\mathrm{id}_A=\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}}A\leq n$。

处理超幂时，一项重要工具是重索引论证；如果对于任意给定的容差，都能找到超幂中的元素近似满足某个给定条件，那么这种论证就能帮助我们找到精确满足该条件的超幂元素。

引理 *3.8*。（*Kirchberg* ϵ-检验）[4, 引理 *1.*8] [7, 引理 *A.*1] 设 $X_1,X_2,\ldots$ 为一列非空集，并且对每个 $k,n\in\mathbb{N}$，设 $f_n^{(k)}\colon X_n\to[0,\infty)$ 为一个函数。定义 $f_\omega^{(k)}\colon\prod_{n=1}^\infty X_n\to[0,\infty]$，令 $f_\omega^{(k)}((s_n)_{n=1}^\infty):=\lim_{n\to\omega}f_n^{(k)}(s_n)$ *for* $(s_n)\in\prod_{n=1}^\infty X_n$。假设对所有 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\epsilon>0$，都存在 $(s_n)_{n=1}^\infty\in\prod_{n=1}^\infty X_n$，使得 $f_\omega^{(k)}((s_n))<\epsilon$ 对 $k=1,\ldots,m$ 成立。那么存在 $(t_n)_{n=1}^\infty\in\prod_{n=1}^\infty X_n$，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$，$f_\omega^{(k)}((t_n))=0$ 成立。

引理 3.9。（完全正压缩映射的正交提升）设 A 为可分核幺 C^*-代数，F 为有限维 C^*-代数，且 $\beta^\omega\colon F\to A^\omega$ 为非零的分段压缩 m-可分解完全正映射。令 $D^\omega := A^\omega \cap \beta^\omega(F)^\perp$。若 $\Gamma^\omega\colon A\to D^\omega$ 是完全正压缩映射，则存在一列完全正压缩映射 $\Gamma_n\colon A\to A$，使得

(1) $[\Gamma_n(x)]=\Gamma^\omega(x)$ 对所有 $x\in A$成立；
(2) $\Gamma_n(A)\subset A\cap \beta_n(F)^\perp$ 对所有 n成立

其中，对每个 n，$\beta^\omega=[\prod_{n=1}^\infty \beta_n]$ 和 $\beta_n\colon F\to A$ 是完全正映射。

证明。 证明的思路是结合引理 3.8，以及通过支撑投影进行截降；该支撑投影在乘法中起着单位元的作用。细节如下。记 $\Gamma^\omega=[(\Gamma_n)]$ 和 $\beta^\omega=[(\beta_n)]$。由给定条件可得，

$$\lim_{n\to\omega}\|\Gamma_n(a)\beta_n(e_{jk}^i)\|=0 \tag{3.3}$$

其中，对所有 $a\in A$，$\{e_{jk}^i\}$是 $F=\oplus_{i=1}^m F^i$的 F^i的矩阵单位。为了采用 Kirchberg ϵ-检验来寻找完全正映射序列，我们需要对每个 n设置从 A 到 A}的 $X_n=${完全正压缩映射。令 $S_A=\{a_j\mid j=1,2,\dots\}$为 A的可数稠密子集，$B_F=\{e_{k,l}^i\mid i,j,k\}$为 F的一个基。为满足条件 (1) 和 (2)，我们需要两个分别度量提升和正交性的函数，并将它们合并为一个函数。对于k，$n\in\mathbb{N}$ 我们定义

$$f_n^{(k)}(\psi):=\|\psi(a_k)-\Gamma_n(a_k)\|+\sum_{b\in B_F}\|\psi(a_k)\beta_n(b)\|$$

注意，后者是有限和。
现在，给定 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，令 $h_n=\beta_n(\mathbf{1_F})\in A$。则 $H:=$ her(h_n) 且$g_n:=(f_\sigma($ $h_n))^{1/2}\in H$，其中

$$f_\sigma(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \dfrac{(t-\sigma)_+}{t}, & t>0.\end{cases}$$

并且 σ 将在稍后选取。

令 $\Gamma_n^1(x)=(1-g_n)\Gamma_n(x)(1-g_n)$。我们估计初始提升$\Gamma_n$的距离：对于 $x\in A$，有

$$\Gamma_n(x^*)\Gamma_n(x)\le\|\Gamma_n(1)\|\Gamma_n(x^*x).$$

对两边取范数，得到

$$\|\Gamma_n(x)\|^2\le\|\Gamma_n(1)\|\|x\|^2$$

因为 Γ_n 是一个完全正压缩映射。于是

$$\begin{aligned}\|\Gamma_n^1(x)-\Gamma_n(x)\|&\le\|g_n\Gamma_n(x)\|+\|(1-g_n)\Gamma_n(x)g_n\|\\&\le\|x\|\|\Gamma_n(1_A)^{1/2}g_n\|+\|1-g_n\|\|x\|\|\Gamma_n(1_A)^{1/2}g_n\|\\&\le 2\|x\|\|g_n\Gamma_n(1_A)g_n\|^{1/2}\end{aligned}$$

由于 $\Gamma^\omega\perp\beta^\omega$，我们有 $\lim_{n\to\omega}\|\Gamma_n(1_A)\beta_n(1_F)\|=0$。因为 g_n 支撑在$\beta_n(1_F)$上，所以 $\lim_{n\to\omega}\|g_n\Gamma_n(1_A)g_n\|=0$。因此

$$\lim_{n\to\omega}\|\Gamma_n^1(x)-\Gamma_n(x)\|=0.$$

对于任意 $b \in F$，第二项由 $(1-g_n)$ 与 β_n 的像之间的相互作用控制：

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{n,\perp}(x)\beta_n(b)\| &= \|(1-g_n)\Gamma_n(x)(1-g_n)\beta_n(b)\| \\ &\leq \|\Gamma_n(x)\|\|(1-g_n)\beta_n(b)\|\end{aligned}$$

根据 $g_n = f(\beta_n(\mathbf{1_F}))$ 的定义以及函数演算的性质（$\sqrt{t}-\sqrt{t-\sigma}$） $\leq \sqrt{\sigma}$，我们有：

$$\|(1-g_n)\beta_n(b)\|^2 \leq \sqrt{\sigma}\|b\|.$$

如果我们选择 $\sigma > 0$ 使得 $\sigma \leq \left(\frac{\varepsilon}{\sum_{l=1}^{M}\|b_l\|}\right)^2$，

$$\lim_{n\to\omega}\sum_{l=1}^{M}\|\Gamma_n^1(a_j)\beta_n(b_l)\| \leq \sqrt{\sigma}\sum_{l=1}^{M}\|b_l\| < \varepsilon.$$

因此，对于 $k = 1,\ldots,m$， $f_\omega^{(k)}((\Gamma_n^1)) < \varepsilon$。根据 Kirchberg ε-测试，存在一个由完全正压缩映射组成的序列 $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$，使得对于所有 k， $f_\omega^{(k)}((\Gamma_n)) = 0$，同时满足提升和极限正交性要求。

为了在序列层面实现精确正交性，我们进行如下最终压缩：令 $e_n \in A^{**}$ 为 h_n 的支撑投影，该投影由 Borel函数演算根据 $1_{(0,1]}(h_n)$ 得到。由于 F 是有限维的，$(1-e_n)$ 充当 β_n 的像的严格零化子。注意， $H_n := \mathrm{her}^{\perp}(h_n)$ 也是 A 中对应于开投影（$1-e_n$）的一个遗传 C^*-子代数，特别地，它在范数下闭合 [15]，并且 $\beta_n(F) \subset \mathrm{her}(b_n)$。对于每个 n，令 $\mathcal{F}_n := \{a_1,\ldots,a_n\} \subset S_A$。

由于

$$\lim_{n\to\omega}\operatorname{dist}(\Gamma_n(a_i), H_n) = 0,$$

我们考虑 $y_{n,i} \in H_n$ 使得 $\|\Gamma_n(a_i) - y_{n,i}\| < \delta_n$ 其中 $\delta_n \to 0$ 沿着超滤子 ω。令 $(u_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ 为 H_n 中的拟中心近似单位。于是

$$\lim_{k\to\infty}\max_{1\leq i\leq n}\{\|u_{n,k}y_{n,i}u_{n,k} - y_{n,i}\|\} = 0$$

如果我们取足够大的 $k = k(n)$，使得 $\|u_{n,k(n)}y_{n,i}u_{n,k(n)} - y_{n,i}\| < \delta_n$ 对于 $1 \leq i \leq n$，

$$\begin{aligned}\max_{i\leq n}\|u_{n,k(n)}\Gamma_n(a_i)u_{n,k(n)} - \Gamma_n(a_i)\| \max_{i\leq n} &\leq \|u_{n,k(n)}\Gamma_n(a_i)u_{n,k(n)} - u_{n,k(n)}y_{n,i}u_{n,k(n)}\| \\ &+ \max_{i\leq n}\|u_{n,k(n)}y_nu_{n,k(n)} - y_{n,i}\| + \max_{i\leq n}\|y_{n,i} - \Gamma_n(a_i)\| \\ &\leq 3\delta_n.\end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{n\to\omega}\max_{1\leq i\leq n}\|u_{n,k(n)}\Gamma_n(a_i)u_{n,k(n)} - \Gamma_n(a_i)\| = 0.$$

注意到 $u_{n,k(n)}\Gamma_n(x)u_{n,k(n)} \in H_n$，因此 $u_{n,k(n)}\Gamma_n(x)u_{n,k(n)}\beta_n(F) = 0$。通过对稠密序列进行标准的 3ϵ-论证，我们得到一列完全正压缩映射 $\Gamma_n(x) := u_{n,k(n)}T_n(x)u_{n,k(n)}$，将 A 映射到 H_n，并满足 $[\Gamma_n] = [T_n] = \Gamma^{\omega}$。□

定理3.10. 设 A为一个核型单的含幺无限维 C^*-代数，且B 为一个单的核型含幺 C^*-代数，并且 $\phi : A \to B$ 为一个由零阶映射迹序列分裂的 *-同态。若$\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}}\, B \leq m$，则$\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}}\, A \leq m$。

证明。给定有限集 $\mathcal{F} \subset A$、$\epsilon > 0$、$a_0 \in A_+ \setminus \{0\}$，考虑两个非零正元 a_1，$a_2 \in \mathrm{her}(a_0)$，使得 $a_1 \perp a_2$ 且 $a_1 \sim a_2$。考虑由下式定义的函数 h

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x \le \eta \\ \frac{x-\eta}{\eta} & \text{if } \eta \le x \le 2\eta \\ 1 & \text{if } x \ge 2\eta \end{cases}$$

其中 $\eta > 0$ 稍后确定。设 $z := h(a_1) \in A^+$。于是利用该假设，我们可以取一个完全正压缩零阶映射 $\psi\colon B \to A^\omega$ 和 $\psi(\mathbf{1_B}) = g \in A^\omega \cap A'$，使得$\psi(\phi(a)) = ag$, $1 - g \lesssim z \lesssim a_1$，因为 $z \in \mathrm{her}(a_1)$。我们还考虑稍后确定的 $0 < \delta < \epsilon$。设 $\mathcal{G} = \phi(\mathcal{F}) \subset B$, $\epsilon/6$，以及 $b_0 = f(\phi(a_2))$，其中 $f \ge 0$是满足 $f(0) = 0$的连续函数，且 $f(t) > 0$适用于 $t > 0$。由于 $\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}} B \le m$，存在一个有限维 C^*-代数 F_0、一个完全正压缩映射 $\alpha_B\colon B \to F$、一个非零分段 m-可分解完全正映射 $\beta_B\colon F \to B$，以及一个完全正压缩映射 $\gamma_B\colon B \to B \cap \beta(F)^\perp$，使得

(1) $\|y - (\gamma_B(y) + \beta_B \circ \alpha_B(y))\| < \epsilon/6$ for all $y \in \mathcal{G}$, and
(2) $\gamma_B(\mathbf{1_B}) \lesssim b_0$ in A.

将 ϕ 和 ψ 与这些映射结合起来，我们定义 $\alpha\colon A \to F$，通过 $\alpha := \alpha_B \circ \phi$、$\beta^\omega\colon F \to A^\omega$，通过 $\beta^\omega := \psi \circ \beta_B$，以及 $\gamma^\omega\colon A \to A^\omega$，通过 $\gamma^\omega := \psi \circ \gamma_B \circ \phi$。由于 ψ 是零阶的，因此可得

$$\gamma^\omega(A) \perp \beta^\omega(F).$$

由（1）可知，对于任意 $y \in \mathcal{G}$

$$\|\psi(y) - (\psi(\gamma_B(y)) + \psi(\beta_B(\alpha_B(y))))\| < \frac{\epsilon}{6}. \tag{3.4}$$

因此，对于任意 $x \in \mathcal{F}$

$$\|\psi(\phi(x)) - (\psi(\gamma_B(\phi(x))) + \psi(\beta_B(\alpha_B(\phi(x)))))\| < \frac{\epsilon}{6} \tag{3.5}$$

从而，对于任意 $x \in \mathcal{F}$

$$\|xg - (\gamma^\omega(x) + \beta^\omega(\alpha(x)))\| < \frac{\epsilon}{6} \tag{3.6}$$

若记 $x = xg + x(1-g)$，则现在得到新的余项 $\gamma^\omega(x) + x(1-g)$，其在原定义中取代了 γ 的作用。于是问题在于，映射 $x \mapsto \gamma^\omega(x) + x(1-g) \in A^\omega$ 可能不与 $\beta^\omega(F)$ 正交。令 $b := \beta^\omega(\mathbf{1_F}) \in A_+^\omega \setminus \{0\}$，以及 $e = s(b)$ 为 b 在 $(A^\omega)^{**}$ 中的支撑。众所周知，$\mathrm{her}(b) = A^\omega \cap e(A^\omega)^{**}e$ 以及她的$^\perp(b) = A^\omega \cap (1-e)(A^\omega)^{**}(1-e) = \overline{\{x \in A^\omega \mid xb = bx = 0\}}^{\|\cdot\|}$

由 Akemann 和 Pedersen 提出。后者也是一个遗传 C^*-子代数。注意到 b属于 ψ 的值域，这意味着 $b \in \mathrm{her}(\psi(\mathbf{1_B})) = \mathrm{her}(g)$，因此 $b = gc^{**}g$，其中某个 $c^{**} \in (A^\omega)^{**}$。由此可得 $b(1-g) = (1-g)b = 0$。事实上，对于每个 $x \in A$ $x(1-g) = (1-g)x \in \mathrm{her}^\perp(b)$，特别是 $1 - g \in \mathrm{her}^\perp(b)$。令$f_\eta(t) = \max\{0, t - \eta\}$，则 $q := f_\eta(1-g) \in \mathrm{her}^\perp(b)$ 且 $\|(1-g) - q\| \le \eta$。若定义 $R^\omega(x)$: $= q^{1/2}xq^{1/2} = qx$ for $x \in A$并令 $\eta = \frac{\epsilon}{6}\max_{\{\|x\| \mid x \in \mathcal{F}\}}$，便可轻易推出

$$\|x - (\gamma^\omega(x) + R^\omega(x) + (\beta^\omega \circ \alpha)(c))\| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.7}$$

对所有 $x \in \mathcal{F}$ 均成立。此外，不难证明 $R^\omega(x) \in \mathrm{her}^\perp(b)$ 且 $\mathrm{Image}(\beta^\omega) \subset \mathrm{her}(b)$。因此 $R^\omega(A) \perp \beta^\omega(F)$。

另一方面，由于 ψ 是零阶的，

$$\gamma^\omega(\mathbf{1_A}) = \psi(\gamma_B(\mathbf{1_B})) \lesssim \psi(f(\phi(a_2))) = f(a_2 g) \in \mathrm{her}(a_2).$$

因此，

$$\gamma^\omega(\mathbf{1_A}) \lesssim a_2. \tag{3.8}$$

此外，

$$R^\omega(\mathbf{1_A}) = q \leq 1 - g \lesssim a_1 \tag{3.9}$$

因此，若我们定义 $\Gamma^\omega := \gamma^\omega + R^\omega$，则得到如下结果；

$$\|.x - (\Gamma^\omega(x) + \beta^\omega \circ \alpha(x))\| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.10}$$

$$\Gamma^\omega(A) \perp \beta^\omega(F) \tag{3.11}$$

$$\Gamma^\omega(\mathbf{1_A}) \lesssim a_1 + a_2 \lesssim a_0 \tag{3.12}$$

在 A^ω中。

由于 A 是核的，我们可以将 Γ^ω 提升到 $\Gamma\colon\ A \to \prod_{i=1}^\infty A$，并写作 $\Gamma = \prod_{n=1}^\infty \Gamma_n$，其中$\Gamma_n\colon\ A \to A$ 由 Choi-Effros 定理可知是一个完全正映射。此外，由于 F 也是核的，我们可以将 β^ω 提升到 $\beta\colon\ F \to \prod_{n=1}^\infty A$，并写作 $\beta = \prod_{n=1}^\infty \beta_n$，其中 $\beta_n\colon\ F \to A$ 是一个完全正收缩映射。当我们写作 $F = \oplus_{i=1}^m F_i$时，对于每个 i，限制映射 $\beta^\omega|_{F_i}$ 都是完全正收缩零阶映射，因此我们可以将完全正收缩映射 $\beta_n = \sum_i \beta_{n,\ i}$ 写作 $\beta_{n,\ i}$，其中 $\beta_{n,\ i}\colon\ F_i \to A$ 也是完全正收缩零阶映射。结合 (3.11) 与引理 3.9，我们假设对所有 n，$\Gamma_n(A) \perp \beta_n(F)$。

由 (3.12)，对每个 $k \in \mathbb{N}$，存在 $r^{(k)} = [(r_n^k)_{n=1}^\infty] \in A^\omega$，使得

$$\|(r^{(k)})^* a_0 r^{(k)} - \Gamma(\mathbf{1_A})\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{in. } A^\omega.$$

等价地，

$$\lim_{n\to\omega} \|(r_n^k)^* a_0 r_n^k - \Gamma_n(\mathbf{1_A})\|_A < \frac{1}{2^k}$$

因此，$S_k := \{j \in \mathbb{N} \mid \|(r_j^k)^* a_0 r_j^k - \Gamma_j(\mathbf{1_A})\|_A < \frac{1}{2^k}\} \in \omega$。注意，对每个 k，S_k 都有无穷多个元素。对每个 $x \in \mathcal{F}$, from (3.10),

$$\lim_{n\to\omega} \|x - (\Gamma_n(x) + \beta_n \circ \alpha(x))\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

因此集合 $U_x = \{n \mid \|x - (\Gamma_n(x) + \beta_n \circ \alpha(x))\| < \frac{\epsilon}{3}\} \in \omega$。令

$$U := \bigcap_{x\in\mathcal{F}} U_x \in \omega.$$

任取 $\sigma > 0$（稍后选定），并选择 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-k} < \sigma$。由于 $U \in \omega$ 也成立，我们有 $U \cap S_k \in \omega$，因此可以取 $n \in U \cap S_k$。于是

$$\|(r_n^{(k)})^* a_0 r_n^{(k)} - \Gamma_n(\mathbf{1_A})\| < 2^{-k} < \sigma.$$

由于 $(r_n^{(k)})^* a_0 r_n^{(k)} \precsim a_0$ 属于 A，标准的从扰动到 Cuntz 子等价的估计给出

$$(\Gamma_n(\mathbf{1_A}) - \delta_1)_+ \precsim (r_n^k)^* a_0 r_n^k \precsim a_0.$$

此外，

$$\|x - (\Gamma_n(x) + \beta_n \circ \alpha(x))\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{3.13}$$

现在，对于我们的选择 n，令 $\beta = \beta_n$, $\Gamma = \Gamma_n$。

现在我们需要将 Γ 变形为 γ，使得对所有 $x \in \mathcal{F}$，$\gamma(\mathbf{1_A}) = (\Gamma(\mathbf{1_A}) - \sigma)_+$ 且 $\|\gamma(x) - \Gamma(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$。以下方法或许对专家而言已属熟知；首先，令

$$H := \mathrm{her}(h) \subset D_n = A \cap \beta_n(F)^\perp$$

其中 $\Gamma(\mathbf{1_A}) = h$。令 $k_\sigma := (f_\sigma(h))^{1/2} \in H$，其中

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \dfrac{(t-\sigma)_+}{t}, & t > 0. \end{cases}$$

我们定义

$$\gamma(x) := k_\sigma \, \Gamma(x) \, k_\sigma \quad (x \in A).$$

(1) 由于 γ 是通过对 Γ 进行收缩算子的双边乘法得到的，因此它是完全正且压缩的，并且由 $k_\sigma \in H \subset D_n$ 可知 $\gamma(A) \subset D_n$。

(2) 由于 k_σ 与 h对易，我们有

$$\gamma(1_A) = k_\sigma \, h \, k_\sigma = g_\sigma(h) \, h.$$

对于 $t \geq 0$，有 $g_\sigma(t)\, t = (t-\sigma)_+$，故由函数演算

$$\gamma(1_A) = (h - \sigma)_+.$$

(3) 固定 $x \in A$。设 $\Gamma(x) = V^* \pi(x) V$ 为 Stinespring 膨胀，使得 $h = \Gamma(1_A) = V^* V$。对 $\varepsilon > 0$ 定义有界算子

$$W_\varepsilon := V \, (h + \varepsilon)^{-1/2}.$$

Then

$$W_\varepsilon^* W_\varepsilon = (h+\varepsilon)^{-1/2} V^* V (h+\varepsilon)^{-1/2} = (h+\varepsilon)^{-1/2} h (h+\varepsilon)^{-1/2} \leq 1,$$

故 $\|W_\varepsilon\| \leq 1$。令

$$y_{x,\varepsilon} := W_\varepsilon^* \pi(x) W_\varepsilon,$$

其满足$\|y_{x,\varepsilon}\| \leq \|x\|$。

定义

$$s_\varepsilon := h^{1/2} (h+\varepsilon)^{-1/2} \in C^*(h), \qquad 0 \leq s_\varepsilon \leq 1.$$

直接计算可得

$$s_\varepsilon \, \Gamma(x) \, s_\varepsilon = h^{1/2} y_{x,\varepsilon} h^{1/2}.$$

此外，$s_\varepsilon \to 1$ 在 $\mathrm{Ran}(h)$ 上强成立，因此

$$\|s_\varepsilon \Gamma(x) s_\varepsilon - \Gamma(x)\| \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

由于 k_σ 与 h 可交换，并且

$$k_\sigma h^{1/2} = (h - \sigma)_+^{1/2}$$

根据函数演算，我们有

$$\gamma(x) = k_\sigma\, h^{1/2} y_{x,\varepsilon} h^{1/2} k_\sigma = (h-\sigma)_+^{1/2} y_{x,\varepsilon} (h-\sigma)_+^{1/2}.$$

设 $d := h^{1/2} - (h-\sigma)_+^{1/2}$。则

$$h^{1/2} y_{x,\varepsilon} h^{1/2} - (h-\sigma)_+^{1/2} y_{x,\varepsilon} (h-\sigma)_+^{1/2} = d\, y_{x,\varepsilon}\, h^{1/2} + (h-\sigma)_+^{1/2} y_{x,\varepsilon}\, d.$$

取范数并使用 $\|h^{1/2}\| \le 1$ 和 $\|(h-\sigma)_+^{1/2}\| \le 1$,

$$\|h^{1/2} y_{x,\varepsilon} h^{1/2} - (h-\sigma)_+^{1/2} y_{x,\varepsilon} (h-\sigma)_+^{1/2}\| \le 2\|d\|\, \|y_{x,\varepsilon}\|.$$

对于 $t \in [0,1]$，有

$$0 \le \sqrt{t} - \sqrt{(t-\sigma)_+} \le \sqrt{\sigma},$$

因此根据函数演算有 $\|d\| \le \sqrt{\sigma}$。由于 $\|y_{x,\ \varepsilon}\| \le \|x\|$，我们得到

$$\|h^{1/2} y_{x,\varepsilon} h^{1/2} - (h-\sigma)_+^{1/2} y_{x,\varepsilon} (h-\sigma)_+^{1/2}\| \le 2\sqrt{\sigma}\, \|x\|.$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，得到

$$\|\Gamma(x) - \gamma(x)\| \le 2\sqrt{\sigma}\, \|x\|,$$

如所要求。现在，若 $M := \max\{\|x\| \mid x \in \mathcal{F}\} > 0$，并且我们选择 $0 < \sigma < \frac{\varepsilon^2}{144 M^2}$，则

$$\|\Gamma(x) - \gamma(x)\| < \frac{\varepsilon}{6} \tag{3.14}$$

对所有 $x \in \mathcal{F}$ 均成立。结合估计式 (3.13) 和 (3.14)，我们得到

$$\|x - (\gamma(x) + \beta \circ \alpha(x))\| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

对所有 $x \in \mathcal{F}$ 均成立。因此，对于给定的有限集 $\mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ 和非零正元素 $a_0 \in A$，我们已证明存在有限维 C^*-代数 F、完全正压缩映射 $\alpha\colon A \to F$、非零分段压缩 m-可分解完全正映射 $\beta\colon F \to A$，以及完全正压缩映射 $\gamma\colon A \to A \cap \beta(F)^\perp$，使得

(1) $\|x - (\gamma(x) + \beta \circ \alpha(x))\| < \epsilon$ for all $x \in \mathcal{F}$, and
(2) $\gamma(\mathbf{1_A}) \lesssim a_0$ in A.

因此，$\mathrm{Trdim}_{\mathrm{nuc}}\, A \le m$。 □

注记3.11. 定理3.10证明的结论标志着在 [8]中启动的迹永久性纲领的完成。通过确立迹核维数的遗传性，我们证明了全部三项基本正则性——m-比较、 m-几乎可除性以及核维数——在迹序列分裂性的框架内表现一致。在Toms-Winter猜想的更广泛背景下，这些结果证实，正则性支柱的迹版本在同时涵盖弱迹Rokhlin作用与包含的统一框架下是稳健的。

References

[1] B. Blackadar，算子代数，《数学科学百科全书》，第122卷，Springer.[2] S. Barlak, G.Szab´o， C^*-代数之间的序列分裂 $*$-同态，Internat. J. Math. 27(2016)，第13期，1650105，48页.[3] J. Castillejos，S. Evington，A. Tikuisis，S. White与W. Winter，单C^*-代数的核维数，Invent. Math. 224 (2021)，第1期，245–290.[4] M.-D. Choi与E. G. Effros， C^*-代数的完全正提升问题，Ann. of Math. (2) 104 (1976)，第3期，585–609.[5] G. A. Elliott，G. Gong，H. Lin与Z. Niu，关于具有有限分解秩的单顺从 C^*-代数的分类，II，预印本(2015)，arXiv:1507.03437.[6] X. Fu与H. Lin，单 C^*-代数中的迹逼近，Can. J. Math. 74(2022)，942 – 1004.[7] E. Kirchberg,[8] H. Lee与H. Osaka， C^*-代数之间的迹序列分裂 *-同态，Ann. Funct. Anal. 12 (2021)，37，doi:10.1007/s43034-021-00115-y.[9] H. Lee与H. Osaka，关于正则性的遗传性，J. Top. Anal. 17(2025)，第1期，35–54.[10] R. Leonel，核维数与 n-比较，M´'unster J. Math. 4(2011)，65–72.[11] H. Osaka与T. Teruya， C^*-代数包含的Jiang-Su 吸收性，Canad. J. Math. 70 (2018)，第2期，400 – 425.[12] H. Osaka与T. Teruya，勘误： C^*-代数包含的Jiang-Su 吸收性，Canad. J. Math. 73(2021) 第1期，293–295，DOI:https://doi.org/10.4153/S0008414X20000310.[13] H. Osaka与T. Teruya， C^*-代数包含的Rokhlin 性质，Rocky Mount. J. Math. 50 (2020)，第5期，1785 –1792.[14] H. Osaka，K. Kodaka与T. Teruya，具有有限 Watatani 指数的 C^*-代数包含的 Rokhlin 性质，Contem. Math. 503(2009)，177–195.[15] N. C. Phillips，大子代数，arXiv:1408.5546v1.[16] M. Rørdam，核单 C^*-代数的分类，《数学科学百科全书》126，Springer-Verlag，柏林，海德堡，2002[17] A. Tikuisis，S. White与W. Winter，核 C^*-代数的拟对角性，Ann. of Math. (2) 185 (2017)，第1期，229–284.[18]A. Toms，S. White与W. Winter， $\mathcal{Z}$-稳定性与有限维迹边界，I.M.R.N. 2015(2015)，第10期，2702 – 2727 https://doi.org/10.1093/imrn/rnu001[19] W. Winter，纯 C^*-代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性，Invent. Math.，187:259 – 342，2012.[20] W. Winter与J. Zacharias，零阶完全正映射，M¨unster J. Math. 2(2009)，311–324.[21] W. Winter与J. Zacharias， C^*-代数的核维数，Adv. Math. 224 (2010年)，第2期，461–498.

Department of Mathematics, University of Ulsan, Ulsan, 44610 South Korea电子邮件地址: hadamard@ulsan.ac.kr