arXiv:2603.07503v1 [math.FA] 8 Mar 2026

斯捷潘诺夫远程几乎周期函数的积分

DAVID CHEBAN

Abstract. 本文旨在研究斯捷潘诺夫远程几乎周期函数的积分问题。我们证明，任何具有极小 ω-极限集的斯捷潘诺夫远程几乎周期函数的紧原函数都是远程几乎周期函数。这一事实证明了作者先前提出的猜想。

1. Introduction

本文继续开展作者在 [10, 13] 中的研究，这些工作研究了远程几乎周期函数。设 $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$、 $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{B}$ 为域 P ($P = \mathbb{R}$ 或全体复数 $\mathbb{C}$)上的巴拿赫空间，且 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$为全体连续映射$\varphi : \mathbb{T} \to \mathfrak{B}$ 组成的空间，赋予紧开拓扑。记($C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ $\mathbb{T}, \sigma$)为 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$上的移位动力系统，其中 σ 是从 $\mathbb{T} \times C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$到$C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$的映射，定义为 $\sigma(h, \varphi) := \varphi^h$，且对所有$(t, \varphi) \in \mathbb{T} \times C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$， $\varphi^h(t) := \varphi(t + h)$。

若存在正数 l，使得对于所有 $a \in \mathbb{T}$， $[a, a + l] \bigcap A \neq \emptyset$，其中 $[a, a + l] := \{t \in \mathbb{T} | \ a \leq t \leq a + l\}$，则称 A from $\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{T}$ 中的相对稠密子集。

回顾一下，函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$称为：

(i) 若对于每个正数 ε ，集合

$$\mathcal{P}(\varepsilon, \varphi) := \{\tau \in \mathbb{T} | \ |\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| < \varepsilon \ \text{ for all } \ t \in \mathbb{T}\}$$

在 $\mathbb{T}$中相对稠密；

(ii) 若存在两个函数 $p, r \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$，满足以下两个条件，则称为渐近几乎周期：

(a) 对所有 $t \in \mathbb{T}$， $\varphi(t) = p(t) + r(t)$；(b) 函数 p 是几乎周期的，且 $r \in C_0(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$，其中 $C_0(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$表示所有在 $+\infty$处趋于零的、从 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$出发的函数所构成的族，即$|r(t)| \to 0$ 当 $t \to +\infty$时；

(iii) 远程几乎周期：对于每个 $\varepsilon > 0$ ，存在一个在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密的子集 $\mathcal{P}$（ε， φ），使得对于每个 $\tau \in \mathcal{P}$（ε， φ），我们都有一个正的

Date: 2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 34C27; 37B20; 37B55。
Key words and phrases. 远程几乎周期解；非自治动力系统；余循环；斯捷潘诺夫几乎周期函数。

数 $L(\varepsilon,\ \varphi,\ \tau)$，使得

$$|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|<\varepsilon$$

对所有 $|t|\geq L(\varepsilon,\ \varphi,\ \tau)$。

Sarason [19] 引入并研究了标量函数在实轴 $\mathbb{R}:=(-\infty,\ +\infty)$ 上的远程几乎周期性。回顾一下，若连续有界函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足：对每个$\varepsilon>0$，都存在一个正数 l，使得在每个区间段 $[a,a+l]\subset\mathbb{R}$ 上至少存在一个数 $\tau\in[a,a+l]$，满足

$$d_\infty(f^\tau,f)<\varepsilon,\quad \text{where}\quad d_\infty(f,g):=\limsup_{|t|\to+\infty}|f(t)-g(t)|$$

且对所有 $t\in\mathbb{R}$，$f^\tau(t):=f(t+\tau)$。远程几乎周期（RAP）函数构成 BUC 的一个闭子代数 RAP（ $\mathbb{R}$ 上取值于复数的有界一致连续函数代数）。Sarason 的主要结果是，RAP 作为巴拿赫代数由 AP（Bohr 几乎周期函数代数）和另一个代数 SO （由在 ∞ 缓慢振荡的函数组成）生成。

取值于巴拿赫空间的半轴 $\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$ 上的远程几乎周期函数由 Ruess 和 Summers [18] 引入（另见 Baskakov[1] 和 [6]-[10]）。

设 $\varphi\in C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$ 是一个远程几乎周期函数，并且

$$\Phi(t)=\int_0^t\varphi(s)ds$$

是函数 φ 的一个紧原函数，即 $Q:=\varphi(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{T}$ 的一个紧子集。

如果巴拿赫空间 $\mathfrak{B}$ 是一维的，那么紧原函数 Φ 也是远程几乎周期的 [25]。

设 c_0 是所有收敛到 0 的数值序列 $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ 构成的巴拿赫空间，其范数为 $\|\xi\|:=\sup\{|\xi_k|\mid k=1,2,\ldots\}$。

我们称巴拿赫空间 $\mathfrak{B}$ 不含 c_0，如果它没有与 c_0 同构的子空间。

在文献 [24]中建立了以下结果：渐近几乎周期函数 φ 的有界原函数 Φ 是远程几乎周期的，当且仅当巴拿赫空间 $\mathfrak{B}$ 不包含 c_0。

作者在论文 [10] 中证明了渐近几乎周期函数 φ 的紧原函数 Φ具有远程几乎周期性。

文献 [10]中提出了以下猜想。

猜想。设 $\varphi\in C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$是远程几乎周期函数（分别为远程 τ-周期函数或远程平稳函数）。假设满足以下条件：

(i) 函数 φ 是正向拉格朗日稳定的，即集合$\Sigma_\varphi^+:=\{\varphi^h\mid h\geq 0\}$在 $C(\mathbb{T},\mathfrak{B})$中是相对紧的；

(ii) 函数 φ的 ω-极限集ω_φ 是移位动力系统$(C(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$的一个极小集。

那么，函数 φ 的紧原函数 Φ 是远程几乎周期的（分别为远程 τ-周期的或远程平稳的）。

本文的主要结果对上述猜想给出了肯定的回答。

本文研究斯捷潘诺夫远程几乎周期函数的积分问题。本研究延续了作者的一系列工作，这些工作致力于研究动力系统的远程几乎周期运动以及微分方程的解 [4],[6]-[8] 和 [11, 12]。

本文结构如下。第二节汇集了本文所用的动力系统的一些已知概念，以及有关远程几乎周期运动和远程几乎周期函数的一些事实。第三节给出本文的主要结果，专门研究斯捷潘诺夫远程几乎周期函数的积分问题。我们证明，斯捷潘诺夫远程几乎周期函数 φ 的每个紧原函数，只要其具有极小的 ω-极限集ω_φ，就是远程几乎周期的。

2. Preliminary

2.1. 动力系统的远程几乎周期运动。设 (X,ρ_X) 和 (Y,ρ_Y) 是两个完备度量空间，其距离分别为 ρ_X 和 ρ_Y[1]，。令 $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$，$\mathbb{Z}:=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$，$\mathbb{S}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{S}_+=\{t\in\mathbb{S}|\ \ t\geq 0\}$和 $\mathbb{S}_-=\{t\in\mathbb{S}|\ \ t\leq 0\}$。设 $\mathbb{T}\in\{\mathbb{S},\ \mathbb{S}_+\}$ 和 $(X,\mathbb{S}_+,\pi)$（分别地，$(Y,\mathbb{S},\sigma)$）是定义在 X （分别地，Y）上的自治单侧（分别地，双侧）动力系统。

设 $(X,\ \mathbb{T},\ \pi)$ 为一个动力系统。

定义 2.1。 **</style}点（相应地，运动** (t,x) **）称为**:

- 平稳的，若对每个 $t\in\mathbb{T}$ 都有 $\pi(t,x)=x$；- τ-周期的（$\tau>0$ 和 $\tau\in\mathbb{T}$），若 $\pi(\tau,x)=x$；- 渐近平稳的（相应地，渐近 τ-周期的），若存在一个平稳的（相应地，τ-周期的）点 $p\in X$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\pi(t,x),\pi(t,p))=0.$$

定理 2.2。 [4, Ch.I] 点 $x\in X$ 渐近 τ-周期，当且仅当序列 $\{\pi(k\tau,x)\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛。

定义 2.3。 点 $\widetilde{x}\in X$ 称为 $x\in X$ 的 ω-极限（相应地，α-极限），若存在一个序列 $\{t_k\}\subset\mathbb{S}_+$（相应地，$\{t_k\}\subset\mathbb{S}_-$），使得 $t_k\to+\infty$（相应地，$-\infty$），且当 $k\to\infty$ 时，$\pi(t_k,x)\to\widetilde{x}$。

用 ω_x（分别用 α_x）表示 $x\in X$的所有 ω-极限点（分别为 α-极限点）的集合。

[1]下文中，在使用记号 ρ_X（分别为 ρ_Y）时，若省略索引 X（分别为 Y）不会引起误解，我们将省略该索引。

定义 2.4. 若点 $x \in X$ （分别地，运动 $\pi(t,x)$）是远程τ-周期的（$\tau \in \mathbb{T}$ 且 $\tau > 0$）， 则称其为

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(\pi(t+\tau, x), \pi(t,x)) = 0. \tag{1}$$

注2.5。 具有性质（*1*）的动力系统的运动曾在 *Cryszka* [14] 和 *Pelczar* [17]的著作中得到研究。

定义2.6。 如果半轨道$\Sigma_x^+ := \{\pi(t, x) \mid t \in \mathbb{S}_+\}$ 是 X的预紧子集，则称点 x 为正向拉格朗日稳定。

定理2.7。 [5, Ch.I] 设 $x \in X$ 为正向拉格朗日稳定，且 $\tau \in \mathbb{T}$ （$\tau > 0$）。则以下陈述等价:

a. 运动 $\pi(t, x)$ 是远程 τ-周期的; b. 每个点 $p \in \omega_x$ 都是 τ-周期的。

定义2.8。 如果一个点 x （相应地，一个运动 $\pi(t, x)$ ）对每个 $\tau \in \mathbb{T}$都是远程 τ-周期的，则称其为远程平稳的。

推论 2.9. 设 $x \in X$ 为正向拉格朗日稳定的。那么以下陈述等价:

a. 运动 $\pi(t,x)$ 是远程平稳的; b. 每个点 $p \in \omega_x$ 都是平稳的。

证明。 此陈述直接由相应的定义和定理 2.7 得出。 □

定义 2.10. 动力系统 $(X, \mathbb{T}, \pi)$ 中的点 $x \in X$ 称为:

(i) 几乎复现的，如果对于每个 $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{T}(\varepsilon, p) := \{\tau \in \mathbb{T} |\ \rho(\pi(\tau, p), p) < \varepsilon\}$$

在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密;
(ii) 若它几乎复现且拉格朗日稳定，则称其为复现的;
(iii) 若对每个 $\varepsilon > 0$ ，集合

$$\mathcal{P}(\varepsilon, p) := \{\tau \in \mathbb{T} |\ \rho(\pi(t+\tau, p), \pi(t,p)) < \varepsilon \ \ for\ all\ t \in \mathbb{T}\}$$

是相对 y 在 $\mathbb{T}$ 中稠密
; (iv) 若 $x \in \omega_x$ （分别为 $x \in \alpha_x$） ，则称其为正向（分别为负向）泊松稳定的; (v) 若存在一个平稳（分别为 τ-周期或几乎周期）点 $p \in X$ ，使得

$$\lim_{t \to \infty} \rho(\pi(t,x), \pi(t,p)) = 0.$$

定义2.11。 如果对所有 $t \in \mathbb{T}$， $M \subseteq X$ 满足 $\pi(t, M)$（分别地， $M \subseteq \pi(t, M)$ 或$\pi(t, M) = M$） ，则称子集 $M \subseteq X$ 为正不变（分别为负向不变或不变）。

定义2.12。 如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个相对稠密子集 $\mathcal{P}(\varepsilon, M)$，使得

$$\rho(\pi(t+\tau, p), \pi(t, p)) < \varepsilon$$

对所有 $t \in \mathbb{T}$, $\tau \in \mathcal{P}(\varepsilon, M)$ 以及 $p \in M$。

引理 2.13. [18] 设 $x \in X$ 是动力系统 $(X, \mathbb{S}_+, \pi)$的正向拉格朗日稳定点。当且仅当其ω-极限集 ω_x 是等度几乎周期的，运动 $\pi(t, x)$ 才是远程几乎周期的。

考虑一个双向动力系统 $(X, \mathbb{S}, \pi)$.

定义 2.14。 如果满足以下两个条件，则称点 $x \in X$ （分别地，运动 π（t, x）） 是双侧远程几乎周期的：

（i）点 x 是拉格朗日稳定的，即集合 $\Sigma_x := \{\pi(t, x) \mid t \in \mathbb{S}\}$ 是预紧的；（ii）对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个在 $\mathbb{S}$ 中相对稠密的子集 $\mathcal{P}$（ε, x），使得

$$\lim_{|t| \to +\infty} \sup \rho(\pi(t+\tau, x), \pi(t, x)) < \varepsilon$$

或者等价地，对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $\tau \in \mathcal{P}$（ε, x），存在一个正数 L（ε, x, τ），使得

$$\rho(\pi(t+\tau, x), \pi(t, x)) < \varepsilon$$

对于所有 $|t| \geq L$（ε, x, τ）。

引理 2.15。 [8] 点 x 是远程 τ-周期的（分别地，远程静止的），当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密的子集 $\mathcal{P}$（x, ε），使得

（i）对于每个 $\tau \in \mathcal{P}$（x, ε），存在一个数 L（x, ε, τ）> 0，使得对于所有 $t \geq L$（x, ε, τ），以及（ii） $\{\tau\mathbb{Z}\} \subset \mathcal{P}$（$x, \varepsilon$）（分别地， $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{P}$（$x, \varepsilon$））。 $\rho(\pi(t+\tau, x), \pi(t, x)) < \varepsilon$

定理 2.16。 [8] 动力系统 $(X, \mathbb{S}, \pi)$ 的运动 $\pi(t, x)$ 是双向远程几乎周期的，当且仅当其动力学极限集 $\Delta_x := \alpha_x \bigcup \omega_x$ 是等度几乎周期的。

引理 2.17。 [8] 假设 $K_1, K_2, \ldots, K_m$ 是 $(X, \mathbb{T}, \pi)$的等度几乎周期紧不变子集。则下列陈述成立：

(i) 积动力系统 $(X^m, \mathbb{T}, [\pi])$ 的紧致不变子集 $K := K_1 \times K_2 \times \ldots K_m$（$X^m := X \times X \times \ldots \times X$ 以及 $[\pi](t, x) := (\pi(t, x_1)\ \pi(t, x_2) \ldots, \pi(t, x_m))$，对所有 $t \in \mathbb{T}$ 和 $x := (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X^m$）是等度几乎周期的；*(ii)* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ 的紧致不变子集 $K := \bigcup_{i=1}^m K_i$ 是等度几乎周期的；*(iii)* $(X, \mathbb{T}, \pi)$ 的紧致不变子集 $K := \bigcap_{i=1}^m K_i$ 是等度几乎周期的。

设 $(X,\ \mathbb{T},\ \pi)$（分别地，$(Y,\ \mathbb{T},\ \sigma)$）为空间 X 上的动力系统（分别地，为空间 Y 上的动力系统），且 $x \in X$ $(y \in Y)$。用 $\mathfrak{N}_x$（分别地，$\mathfrak{M}_x$ 或 $\mathfrak{L}_x^{+\infty}$）表示所有序列 $\{t_n\} \subset \mathfrak{T}$ 构成的族，使得当 $n \to \infty$ 时，$\pi(t_n,\ x) \to x$（分别地，序列 $\{\pi(t_n,\ x)\}$ 收敛，或 $\{\pi(t_n,\ x)\}$ 收敛且 $t_n \to +\infty$）。

设 $(Y,\ \mathbb{T},\ \sigma)$ 是空间 $Y$and $y \in Y$ 上的一个动力系统。

定义 2.18. [9, Ch.I] 点 $x \in X$ 称为：

(i) 若点 y 满足 $\mathfrak{N}_y \subseteq \mathfrak{N}_x$，则称其与该点按复现特征可比；(ii) 若点 y 满足 $\mathfrak{M}_y \subseteq \mathfrak{M}_x$，则称其与该点按复现特征强可比；(iii) 若点 y 满足 $\mathfrak{L}_y^{+\infty} \subseteq \mathfrak{L}_x^{+\infty}$，则称其与该点按复现特征远程可比。

定理 2.19. [9,Ch.I] 以下命题等价：

(i) 点 $x \in X$ 与点 $y \in Y$ 按复现特征强可比；*(ii)* 存在一个连续映射 h: $H(y) \to H(x)$，满足条件 $h(y) = x$ 和 $h(\sigma(t,q)) = \pi(t,h(q))$，对所有 $(t,q) \in \mathbb{T} \times H(y)$ 均成立。

定理 2.20. [9, Ch.I] 设 $y \in Y$ 是渐近平稳（分别为渐近 τ-周期或渐近几乎周期）点。如果点 $x \in X$ 与点 y 在复现特征方面远程可比，则点 x 也渐近平稳（分别为渐近 τ-周期或渐近几乎周期）。

定理 2.21. [9,Ch.I] 以下陈述成立：

(i) 设 $y \in Y$ 是平稳（分别为 τ-周期或几乎复现）点。如果点 $x \in X$ 与点 y 在复现特征方面可比，则点 x 也平稳（分别为 τ-周期或几乎复现）；(ii) 设 $y \in Y$ 是几乎周期（分别为复现）点。如果点$x \in X$ 与点y 在复现特征方面强可比，则点 x 也几乎周期（分别为复现）。

定理 2.22。 [8] 设 $y \in Y$ 是拉格朗日稳定且远程平稳（分别地，远程 τ-周期或远程几乎周期）的点。若点 $x \in X$ 与点 y在复现特征上远程可比，则点x 也远程平稳（分别地，远程 τ-周期或远程几乎周期）。

2.2. **远程几乎周期函数**。 设 X 是一个完备度量空间。用 $C(\mathbb{T},\ X)$ 表示所有连续函数 $\varphi : \mathbb{T} \to X$ 构成的空间，其度量为

$$d(\varphi,\psi) := \sup_{L>0} \min\{\max_{|t|\leq L,\ t\in\mathbb{T}} \rho(\varphi(t),\psi(t)), L^{-1}\}.$$

空间 $(C(\mathbb{T},X),\ d)$ 是一个完备度量空间（例如，参见 [5, ChI]）。

注记 2.23. 1. 距离 d 在 $C(\mathbb{R}, X)$ 上生成紧开拓扑。

2. 以下陈述等价:

(i) $d(\varphi_n, \varphi) \to 0$ 当 $n \to \infty$时; (ii) 对每个 $L > 0$, $\lim_{n\to\infty} \max_{|t|\le L,\ t\in\mathbb{T}} \rho(\varphi_n(t)\ \varphi(t)) = 0$;
(iii) 存在一个序列 $l_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|t|\le l_n,\ t\in\mathbb{T}} \rho(\varphi_n(t), \varphi(t)) = 0.$$

设 $h \in \mathbb{T}$, $\varphi \in \mathbb{C}(\mathbb{T}, X)$ 和 φ^h 为 h-平移, 即对所有 $t \in \mathbb{T}$, $\varphi^h(t) := \varphi(t + h)$。记 σ_h 为从 $C(\mathbb{T}, X)$ 到其自身的映射, 由等式$\sigma_h\varphi := \varphi^h$ 对每个 $\varphi \in C(\mathbb{T}, X)$ 定义。注意, 对于所有 $h_1, h_2 \in \mathbb{T}$, $\sigma_0 = Id_{C(\mathbb{T},X)}$ 且 $\sigma_{h_1}\sigma_{h_2} = \sigma_{h_1+h_2}$。

引理 2.24. [5, Ch.I] 映射 $\sigma\colon\ \mathbb{T} \times C(\mathbb{T}, X) \to C(\mathbb{T}, X)$ 定义为$\sigma(h, \varphi) = \sigma_h\varphi$ 对所有 $(h, \varphi) \in \mathbb{T} \times C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 均连续。

推论 2.25. 三元组 $(C(\mathbb{T}, X)\ \mathbb{T}, \sigma)$ 是一个动力系统（移位动力系统或别布托夫动力系统）。

设 $\mathfrak{B}$ 是定义在域 $P(P = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的巴拿赫空间, 其范数为 $|\cdot|$, $\rho(u, v) := |u - v|$ $(u, v \in \mathfrak{B})$, 且 $\tau \in \mathbb{T}$ 为正数。记 $C_0(\mathbb{T}, \mathfrak{B}) := \{\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B}),$ 使得 $\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)| = 0\}$, 并且 $C_\tau(\mathbb{T}, \mathfrak{B}) := \{\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})|\ \varphi(t+\tau) = \varphi(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{T}\}$均成立。

定义 2.26. 设 $\tau \in \mathbb{T}$ 和 $\tau > 0$。若函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, X)$满足以下条件, 则称其为:

(i) 渐近 τ-周期（分别地, 渐近平稳）, 如果存在 $p \in C_\tau(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 和 $r \in C_0(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$, 使得对所有$t \in \mathbb{T}$都有 $\varphi(t) = p(t) + r(t)$; (ii) 远程 τ-周期 [15, 16] （分别地, 远程平稳）, 如果

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(\varphi(t + \tau), \varphi(t)) = 0 \tag{2}$$

（分别地, 对每个 $\tau > 0$ 都是远程 τ-周期）;
(iii) 远程几乎周期 [1, 2, 3, 18, 19], 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 都存在一个相对稠密子集 $\mathcal{P}(\varepsilon, \varphi)$, 使得对每个 $\tau \in \mathcal{P}(\varepsilon, \varphi)$, 都有一个正数 $L(\varepsilon, \varphi, \tau)$, 使得

$$\rho(\varphi(t + \tau), \varphi(t)) < \varepsilon$$

对所有 $t \ge L(\varepsilon, \varphi, \tau)$。

注 2.27. 在文献 [15]（分别地, 在文献 [16]）中, 具有性质 *(2)* 的函数称为 S-渐近 τ-周期函数（分别地, 称为无穷远处 τ-周期函数）。

注 2.28. 每个远程 τ-周期函数都是远程几乎周期函数。

注 2.29. 每个渐近 τ-周期（分别为渐近平稳）函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 都是远程 τ-周期的 [15, 16] （分别为远程平稳）。

定义 2.30. 如果函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, X)$ 的运动 $\sigma(t, \varphi)$ 在移位动力系统 $(C(\mathbb{T}, X)\ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的，则称该函数为拉格朗日稳定。

引理 2.31. [10] 设 $\varphi \in C(\mathbb{T}, X)$。以下命题等价:

(a) 由移位动力系统 $(C(\mathbb{T}, X)\ \mathbb{T}, \sigma)$ 中的函数 φ 生成的运动 $\sigma(t, \varphi)$ 是远程几乎周期的（分别为远程 τ-周期或远程平稳的）；(b) 函数 φ 是远程几乎周期的（分别为远程 τ-周期或远程平稳的）。

定义 2.32. 如果存在函数 $p, r \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 使得

(i) $\varphi(t) = p(t) + r(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{T}$均成立；(ii) $r \in C_0(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 且 p 是平稳的（分别为 τ-周期或几乎周期的）。

引理 2.33。 [4,Ch.I] 以下命题等价:

(i) 函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 是渐近平稳的（分别地，是渐近 τ-周期的或渐近几乎周期的）；(ii) 移位动力系统 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$ 的运动 $\sigma(t, \varphi)$ 是渐近平稳的（分别地，是渐近 τ-周期的或渐近几乎周期的）。

定理 2.34。设 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 是一个拉格朗日稳定函数。函数φ 是正向远程几乎周期的（分别地，若 $\mathbb{T} = \mathbb{S}$，则既是正向远程几乎周期的，也是反向远程几乎周期的），当且仅当它的 ω-极限集 ω_φ（分别地，它的动力学极限集 $\Delta_\varphi := \alpha_\varphi \bigcup \omega_\varphi$）是等度几乎周期的。

证明。该命题直接由引理 2.13、2.31 和定理 2.16 得出。

□

2.3. S^p 远程几乎周期函数。

2.3.1. 空间上的移位动力系统 $L^p_{loc}(\mathbb{R};\ \mathfrak{B}; \mu)$.. 设 $S \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$,$(\mathbb{T}, \mathfrak{B}; \mu)$ 是一个带测度的空间， μ 是拉东测度， $\mathfrak{B}$ 是带范数 $|\cdot|$的巴拿赫空间。

定义 2.35. 若函数 $f :\ S \to \mathfrak{B}$ 只取有限个值，则称其为 [20] 阶梯函数。在这种情况下，若对每个 $x \in \mathfrak{B}$ 都有 $f^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{B}$，则称其可测；此外，若 $\mu(f^{-1}(\{x\}) < +\infty$，则称其可积。于是定义

$$\int f d\mu = \sum_{x \in \mathfrak{B}} \mu(f^{-1}(\{x\})x. \tag{3}$$

根据假设，等式 *(3)* 右侧的和是有限的。

定义 2.36。 如果存在一个阶梯函数序列 $\{f_n\}$，其中的阶梯函数均可测，并且相对于测度 μ， $f_n(s) \to f(s)$ 几乎处处成立，则称函数 $f : S \to \mathfrak{B}$ 可测。

定义 2.37。 如果存在一个阶梯函数序列 $\{f_n\}$，其中的阶梯函数均可积，并且对每个 n，函数 $\varphi_n(s) = |f_n(s) - f(s)|$ 都可积，则称函数 $f: S \to \mathfrak{B}$ 可积，并且

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n(s) - f(s)| d\mu(s) = 0.$$

于是，$\int f_n d\mu$ 在空间 $\mathfrak{B}$ 中收敛，且其极限与满足上述性质的逼近序列 $\{f_n\}$ 的选取无关。该极限记作 $\int f d\mu$ 或 $\int f(s)\, d\mu(s)$。

设 $1 \le p \le +\infty$。通过 $L^p(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 表示所有满足以下条件的可测函数（函数类）f 所构成的空间：$S \to \mathfrak{B}$，其中 $|f| \in L^p(S; \mathbb{R}; \mu)$，且$|f|(s) = |f(s)|$。空间 $L^p(S; \mathfrak{B}; \mu)$ 赋予范数

$$||f||_{L^p} = \Big(\int |f(s)|^p d\mu(s) \Big)^{1/p} \quad \text{and} \quad ||f||_\infty = supess|f(s)|. \tag{4}$$

带有范数（4）的$L^p(S; \mathfrak{B}; \mu)$是一个巴拿赫空间。

用 $L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 表示所有函数 $f: \mathbb{T} \to \mathfrak{B}$ 的集合，使得对每一个 $l > 0$ 都有 $f_l \in L^p([-l, l]; \mathfrak{B}; \mu)$，其中 f_l 是函数 f 在 $\mathbb{T}_l$上的限制，其中$\mathbb{T}_l := [-l, l]$（若 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$）且 $\mathbb{T}_l := [0, l]$（若 $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$）。

在空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 中，我们按如下规则定义一族半范数 $||\cdot||_{\ell,p}$：

$$||f||_{\ell,p} := ||f_\ell||_{L^p(\mathbb{T}_\ell; \mathfrak{B}; \mu)} \quad (\ell > 0). \tag{5}$$

半范数族 (5) 在 $L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 上定义了一个可度量化拓扑。给出该拓扑的度量可以例如由下面的等式来定义

$$d_p(\varphi, \psi) = \sup_{\ell>0} \min\{ \Big(\int_{\mathbb{T}_\ell} |\varphi(s) - \psi(s)|^p d\mu(s) \Big)^{1/p}; \frac{1}{\ell} \}.$$

注记 2.38. [13]下列陈述是等价的：

(i)
$$d_p(\varphi_n, \varphi) \to 0 \quad as \quad n \to \infty;$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} d_{\ell,p}(\varphi_n, \varphi) = 0$$
for every $\ell > 0$, *where* $d_{\ell,p}(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|_{\ell,p}$.

我们如下定义映射 $\sigma: L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu) \times \mathbb{T} \to L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$：$\sigma(\tau, f) = f^\tau$对所有 $f \in L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 和 $\tau \in \mathbb{T}$，其中 $f^\tau(s) := f(s + \tau)$ $(s \in \mathbb{T})$。容易验证

(i) $\sigma(0, f) = f$ for every $f \in L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$;
(ii) $\sigma(t + \tau, f) = \sigma(t, \sigma(\tau, f))$ for all $t, \tau \in \mathbb{T}$ and $f \in L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$.

引理 *2.39.* [4, *Ch.I*] 映射 $\sigma: \mathbb{T} \times L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu) \to L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 是连续的，因此，三元组 $(L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)\ \mathbb{T}, \sigma)$ 是空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}; \mathfrak{B}; \mu)$ 上的动力系统。

引理 2.40. [13] 令 $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T};\mathfrak{B};\mu)$ 且 $\mathbb{T}_\ell := [-\ell,\ell]\,(\ell>0)$ 若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 且 $\mathbb{T}_\ell=[0,\ell]$ 若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$。以下条件等价:

(i)

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 |\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0; \tag{6}$$

(ii)

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{T}_\ell} |\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0$$

对每个 $\ell>0$。

定义 2.41. 我们称函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 在 $+\infty$ 处趋于零，如果 $\lim_{h\to+\infty}\varphi^h=\theta$, 其中 θ 是 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$的零元素，即，如果

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\mathbb{T}_\ell} |\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0$$

对每个 $\ell>0$。

注 2.42. 函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$在 $+\infty$ 处趋于零，当且仅当关系 *(6)* 成立。

这一结论由定义 2.41 和引理 2.40 得出。

2.3.2. 斯捷潘诺夫远程几乎周期函数。 回忆一下，函数 $\varphi\in L^p_{loc,\tau}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ [13] 被称为:

(i) 若满足 $\varphi^\tau=\varphi$，则称为 S^p τ-周期函数，即对所有 $t\in\mathbb{R}$, $\int_0^1|\varphi(t+\tau+s)-\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0$；(ii) 若对每个 $\tau\in\mathbb{T}$ 都是 τ-周期的，则称为 S^p 平稳函数。

记

(i) $L^p_{loc,\tau}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 表示所有来自 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 的 τ-周期函数 φ 所构成的空间; (ii) $L^p_{loc,st.}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 表示所有来自 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 的平稳函数所构成的空间; (iii) $L^p_{loc,0}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 表示所有来自 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 的函数 φ，它们在无穷远处 S^p-消失，即如果

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 |\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0.$$

令 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T};\mathfrak{B};\mu)$。用 $\hat{}\varphi$ 表示从 $\mathbb{T}$ 到 $L^p([0,1];\mathfrak{B};\mu)$ 的映射，定义为 $\hat{}\varphi(t):=\varphi^t|_{[0,1]}$，即，

$$\big(\hat{\varphi}(t)\big)(s):=\varphi(t+s)$$

对于任意 $s\in[0,1]$ 和 $t\in\mathbb{T}$。显然，$\hat{}\varphi(t)\in L^p([0,1];\mathfrak{B};\mu)$，因为 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T};\mathfrak{B};\mu)$。

定义 2.43。 函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},X)$ 称为:

(i) S^p 几乎周期函数，当函数 $\hat{}\varphi \in C(\mathbb{T}, L^p([0,1], \mathfrak{B}))$ 是几乎周期的，也就是说，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密的子集 $\mathcal{F}(\varepsilon, \varphi) \subset \mathbb{T}$，使得

$$\int_0^1 |\varphi(t+\tau+s) - \varphi(t+s)|^p d\mu(s) < \varepsilon^p$$

对所有 $t \in \mathbb{T}$ 和 $\tau \in \mathcal{F}$（ε, φ）；

(*ii*) 如果存在 $p \in L^p_{loc,\tau}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$（分别为 $p \in L^p_{loc,st.}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$）和 $r \in L^p_{loc,0}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$，使得对所有 $t \in \mathbb{T}$，$\varphi(t) = p(t) + r(t)$，则称 S^p 渐近 τ ($\tau \in \mathbb{T}, \tau > 0$)-周期（分别为渐近平稳）；

(iii) S^p 远程 τ-周期（分别为 S^p 远程平稳），如果

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^1 |\varphi(t+\tau+s) - \varphi(t+s)|^p d\mu(s) = 0.$$

（分别地，对每个 $\tau > 0$，S^p 远程 τ-周期）；

(iv) S^p 远程几乎周期，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密的子集 $\mathcal{P}(\varepsilon, \varphi)$，使得对于所有 $\tau \in \mathcal{P}(\varepsilon, \varphi)$，都有一个正数$L(\varepsilon, \varphi, \tau)$，使得

$$\int_0^1 |\varphi(t+\tau+s) - \varphi(t+s)|^p d\mu(s) < \varepsilon^p$$

for all $t \geq L(\varepsilon, \varphi, \tau)$.

注 2.44. 每个 S^p 远程 τ-周期函数都是 S^p 远程几乎周期的。

注 2.45. 每个 S^p 渐近 τ-周期函数（分别地，S^p 渐近平稳函数）$\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 都是 S^p 远程 τ-周期的（分别地，S^p 远程平稳的）。

定义 2.46. 如果函数 $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 的运动 $\sigma(t, \varphi)$ 在移位动力系统$(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B}) \ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的，则称该函数是拉格朗日稳定的。

引理 2.47。 [23,第三章] 设巴拿赫空间 $\mathfrak{B}$ 为有限维。函数 $\varphi \in L^p_{loc}$（$\mathbb{T}$，$\mathfrak{B}$）*</style}*是拉格朗日稳定的，当且仅当满足以下条件：

（i）集合函数 φ 是 S^p 有界的，即 上确界$\{\int_0^1 |\varphi$（$t+s$）$|^p ds| \ t \in \mathbb{T}\} < +\infty$；（ii）函数 $\varphi \in L^p_{loc}$（$\mathbb{T}$，$\mathfrak{B}$）在 $\mathbb{T}$上一致连续，即，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个正数 $\delta = \delta$（ε）> 0，使得 $|h| < \delta$蕴含

$$\Big(\int_0^1 |\varphi(t+h+s) - \varphi(t+s)|^p d\mu(s)\Big)^{1/p} < \varepsilon$$

对于所有 $t \in \mathbb{T}$。

引理 2.48。 [13] 设 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 且 $\tau \in \mathbb{T}$ 为正数。以下命题等价：

(i)

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^1 |\varphi(t+\tau+s) - \varphi(t+s)|^p d\mu(s) = 0; \tag{7}$$

(ii)
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\ell}|\varphi(t+\tau+s)-\varphi(t+s)|^p d\mu(s)=0$$
for every $\ell>0$.

推论 2.49。 函数 $\varphi\in L^p(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是 S^p 远程 τ-周期的，当且仅当关系式 *(7)* 成立。

定理 2.50. [13] 设 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 为拉格朗日稳定函数。函数 φ 为正远程 S^p 几乎周期（相应地，若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$，则为正向与负向远程 S^p 几乎周期），当且仅当其 ω-极限集ω_φ（相应地，其动力学极限集 $\Delta_\varphi:=\alpha_\varphi\bigcup\omega_\varphi$）是 S^p 等度几乎周期的。

2.3.3. S^p 远程几乎周期函数的若干性质。记

(i) $S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B}):=\{\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})|\sup_{t\in\mathbb{T}}(\int_t^{t+1}|\varphi(s)|^p d\mu(s))^{1/p}<+\infty\}$；(ii) $S^pRAS(\mathbb{T},\mathfrak{B})$全体远平稳函数 $\varphi\in S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$的族；(iii) $S^pRAP_\tau(\mathbb{T},\mathfrak{B})$全体远程 τ-周期函数 $\varphi\in S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$的族；(iv) $S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$全体远程几乎周期函数 $\varphi\in S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$的族。

注记 2.51. 注意，$S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是一个巴拿赫空间，其范数为
$$\|\varphi\|_{S^p}:=\sup_{t\in\mathbb{T}}\Big(\int_t^{t+1}|\varphi(s)|^p d\mu(s)\Big)^{1/p}.$$

定理 2.52. [13] 以下陈述成立：

1. 设 $h\in\mathbb{T}$ 和 $\varphi\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$，则 $\varphi^h\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$；*2.* $S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是空间 $S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 的闭子空间；*3.* 对每个 $f\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$，都有 $H(f)\subset S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$，其中上方横线表示空间 $S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 中的闭包；*4.* 假设函数 f_1、……、$f_m\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 均为拉格朗日稳定，且$f_i\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B}_i)$ $(i=1$、……、$m)$，则 *(a)* 函数 $F:=(f_1,\ldots\ldots,f_m)\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是拉格朗日稳定的，其中$\mathfrak{B}:=\mathfrak{B}_1\times\ldots\times\mathfrak{B}_m$；*(b)* 函数 $F\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$。

5. 假设函数 $f_i\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})(i=1,\ldots,m)$在移位动力系统$(L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$ 中是拉格朗日稳定的，则

(a) 函数 $F:=f_1+\ldots+f_m$ 也是拉格朗日稳定的，并且(b) $F\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})$。

6. 假设下列条件成立：

(a) 函数 $f_i\in S^pRAP(\mathbb{T},\mathfrak{B})(i=1,2,\ldots)$并且它们在移位动力系统$(L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中是拉格朗日稳定的；(b) 泛函级数
$$f_1+f_2+\ldots+f_m+\ldots$$
在空间 $S^p_b(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 中收敛，并且 F是其和。

那么，该函数
$$F=\sum_{i=1}^{\infty}f_i$$

是拉格朗日稳定的，且 $F \in S^pRAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$。

7. 设 $\alpha, \beta \in P$和 $f_1, f_2 \in S^pRAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$。若函数 f_1和 f_2在移位动力系统 $(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的，则

(a) 函数 $F := \alpha f_1 + \beta f_2$ 是拉格朗日稳定的；*(b)* $F \in S^pRAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$。

8. 假设满足以下条件：*(a)* $p, q > 0$和 $p^{-1} + q^{-1} = 1$；*(b)* 函数 $\varphi \in S^q_b(\mathbb{T}, P)$（一个标量函数）在移位动力系统 $(L^q_{loc}(\mathbb{T}, P)\ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的（相应地，$f \in S^p_b(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$在移位动力系统 $(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的）；*(c)* $\varphi \in S^qRAP(\mathbb{T}, P)$和 $f \in S^pRAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$。则 *(a)* 函数 $F = \varphi f$ 在移位动力系统 $(L^1_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$中是拉格朗日稳定的，且 *(b)* $F \in S^1RAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$。

注 2.53. 利用上述论证，我们可以证明，若将空间 $S^pRAP(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$（以及相应地，将 $S^pRAP_\tau(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$）处处替换为 $S^pRAS(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$，定理 *2.52* 仍然成立。

3. Integration of S^p remotely almost periodic functions

C考虑一个线性非齐次微分方程

$$x' = Ax + f(t) \tag{8}$$

在空间 $\mathfrak{B}$ 上，其中 $f \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$，且 A 是无穷小生成元，它生成一个作用于 $\mathfrak{B}$ 上的 C_0-半群 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$。

引理 3.1. [5, Ch.VI] 设 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ 是作用于空间 $\mathfrak{B}$ 上的 C_0-半群。那么，对每个 $L > 0$，存在一个正常数 $C = C(L)$ 使得 $\|U(t)\| \leq C$ 对所有 $t \in [0, L]$ 都成立。

回顾一下，连续函数 $u : \mathbb{T} \to \mathfrak{B}$ 是方程 (8) 的弱（温和）解，当且仅当对每个 $t_0 \in \mathbb{T}$，我们都有

$$u(t) = U(t - t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t - s)f(s)ds$$

对所有 $t \geq t_0$。

引理 3.2。设 Q 是来自 $\mathfrak{B}$ 的紧子集，$\{\varphi_n\}$ 是来自 $C(\mathbb{T}, Q)$ 的序列，且 $\{f_n\}$ 是来自 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 的序列。假设函数 φ_n 是方程的解

$$x' = Ax + f_n(t)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。

Then

(i) 若序列 $\{f_n\}$ 在 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$中相对紧，则序列 $\{\varphi_n\}$在 $C(\mathbb{T}, Q)$中相对紧；(ii) 若序列 $\{f_n\}$ 在空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$中随 $n \to \infty$ 趋于 f，则

(a) 序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\mathbb{T},Q)$ 中相对紧，且(b) 序列 $\{\varphi_n\}$ 的每个极限函数 φ 都是方程 *(8)* 的一个解。

(iii) 如果序列 $\{f_n\}$ 在空间 $L^p_{loc}(\mathfrak{B})$中按 $n\to\infty$ 收敛于 f，使得$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t_0)=x_0$，且 φ 是以初始数据$\varphi(t_0)=x_0$为初值的方程 *(8)* 的一个解，那么序列 $\{\varphi_n\}$ 在空间$C(\mathbb{T},Q)$中按 $n\to\infty$ 收敛于 φ。

证明。假设序列 $\{f_n\}$ 在空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 中相对紧。不失一般性，我们可以假设序列 $\{f_n\}$ 在 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 中收敛。于是我们有

$$\lim_{k,m\to\infty}\int\limits_{|t|\le L}|f_k(t)-f_m(t)|^\alpha dt=0 \tag{9}$$

对每个 $L>0$ 和 $1\le\alpha\le p$ 都成立。由于 $\varphi_n(t_0)\in Q$（对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立），且 Q 是 $\mathfrak{B}$ 的一个紧子集，因此我们可以假设序列 $\{\varphi_n(t_0)\}$ 也收敛，从而，

$$\lim_{k,m\to\infty}|\varphi_k(t_0)-\varphi_m(t_0)|=0. \tag{10}$$

注意

$$\varphi_k(t)-\varphi_m(t)=U(t-t_0)(\varphi_k(t_0)-\varphi_m(t_0))+\int_{t_0}^t U(t-s)(\varphi_k(s)-\varphi_m(s))ds \tag{11}$$

对所有 k，$m\in\mathbb{N}$。由 (11) 并结合引理 3.1，可得

$$\max_{|t|\le L}|\varphi_k(t)-\varphi_m(t)|\le$$

$$\big(|\varphi_k(t_0)-\varphi_m(t_0)|+\int\limits_{|t|\le 2L}|f_k(s)-f_m(s)|ds\big)C(2L) \tag{12}$$

对每个 $L>0$。令 k，$m\to\infty$，在 (12) 中取极限，并结合 (9) 和 (10)，可得

$$\lim_{k,m\to\infty}\max_{|t|\le L}|\varphi_k(t)-\varphi_m(t)|=0 \tag{13}$$

对每个 $L>0$。由于空间 $C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$ 是完备的，由关系式 (13) 可知，序列 $\{\varphi_n\}$ 在空间 $C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$ 中收敛。

现在令 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 属于空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$。根据引理的第一条，序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$ 中相对紧。令 $\widetilde{\varphi}$ 为序列 $\{\varphi_n\}$ 的一个极限函数，并令 $\{\varphi_{n_k}\}$ 为 $\{\varphi_n\}$ 的一个子序列，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\widetilde{\varphi}$。我们将证明 $\widetilde{\varphi}$ 是方程 (8) 的一个解。假设 $t>t_0$。我们将取充分大的 L（使得 t，$t_0\in[-L,L]$）。于是有

$$|\widetilde{\varphi}(t)-U(t-t_0)\widetilde{\varphi}(t_0)-\int_{t_0}^t U(t-s)\widetilde{f}(s)ds|=$$

$$|\widetilde{\varphi}(t)-\varphi_{n_k}(t)+U(t-t_0)(\varphi_{n_k}(t_0)-\widetilde{\varphi}(t_0))+$$

$$\int_{t_0}^t U(t-s)(f_{n_k}(s)-\widetilde{f}(s))ds|\le$$

$$|\varphi_{n_k}(t)-\widetilde{\varphi}(t)|+C(2L)\big(|\varphi_{n_k}(t_0)-\widetilde{\varphi}(t_0)|+\int_{t_0}^{t}|f_{n_k}(s)-f(s)|ds\big).$$

因此有

$$|\widetilde{\varphi}(t)-U(t-t_0)\widetilde{\varphi}(t_0)-\int_{t_0}^{t}U(t-s)\widetilde{f}(s)ds|\leq \tag{14}$$

$$\max_{|t|\leq L}|\varphi_{n_k}(t)-\widetilde{\varphi}(t)|+C(2L)\big(|\varphi_{n_k}(t_0)-\widetilde{\varphi}(t_0)|+\int\limits_{|t|\leq 2L}|f_{n_k}(s)-f(s)|ds\big).$$

由于 $f_n\to f$(在 $L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$) 且 $\varphi_{n_k}\to\widetilde{\varphi}$(在 $C(\mathbb{T},Q)$), 因此我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{|t|\leq L}|f_{n_k}(s)-f(s)|ds=0 \text{ and } \lim_{k\to\infty}\max_{|t|\leq L}|\varphi_{n_k}(t)-\widetilde{\varphi}(t)|=0 \tag{15}$$

对每个 $L>0$。

在（14）中取极限，并考虑（15），我们有

$$\widetilde{\varphi}(t)=U(t-t_0)\widetilde{\varphi}(t_0)+\int_{t_0}^{t}U(t-s)\widetilde{f}(s)ds,$$

即，函数 $\widetilde{\varphi}$ 是方程 (8) 的一个解。

令 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t_0)=x_0$，并令 φ 为方程 (8) 的一个解，其初始数据为$\varphi(t_0)=x_0$。由于序列 $\{\varphi_n\}$ 相对紧，因此它包含一个收敛子列 $\{\varphi_{n_k}\}$。令 $\widetilde{\varphi}:=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}$，则 $\widetilde{\varphi}(t_0)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(t_0)=x_0$。由最后一个关系可知，解 φ 和 $\widetilde{\varphi}$相同。此外，由上述内容可知，序列 $\{\varphi_n\}$ 的所有子列的极限都与φ相同。这意味着，序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛到 φ （在空间 $C(\mathbb{T},Q)$ 中），当$n\to\infty$时。引理得证。□

推论 3.3. 假设函数 $f\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 在$(L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中是拉格朗日稳定的（分别地，正向拉格朗日稳定）。那么，*(8)* 的每个紧解 φ在$(C(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中都是拉格朗日稳定的（分别地，正向拉格朗日稳定）。

推论 3.4. 如果函数 $f\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 在 $(L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中是拉格朗日稳定的（分别地，正向拉格朗日稳定），那么它的每个紧原函数 Φ *of*φ 在 $(C(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中都是拉格朗日稳定的（分别地，正向拉格朗日稳定）。

定义 3.5. 如果函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 的运动 $\sigma(t,\varphi)$ 在移位动力系统 $(L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})\ \mathbb{T},\sigma)$中是泊松稳定的，则称该函数为 S^p 泊松稳定函数。

定理 3.6. 设函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是 S^p 泊松稳定的，且 F 是 φ的有界原函数。假设 F 是弱预紧的，即对于每个 $\{t_n\}\in\mathfrak{N}_\psi$，集合 $\{F(t_n)\}$都是相对紧的。则函数 φ 的原函数 F 与 φ具有相同的复现特征，即 $\mathfrak{N}_\varphi\subseteq\mathfrak{N}_F$。

证明。 如果函数φ 连续且在移位动力系统（$C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})\ \mathbb{T},\ \sigma$）中泊松稳定，Shcherbakov [21, 第II章],[22] 证明了这一结论。通过对 Shcherbakov 的思路作一些修改，我们将给出 S^p（斯捷潘诺夫）泊松稳定函数 $\varphi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})$的证明。

考虑由等式定义的 φ 的原函数 F_0

$$F_0(t) := \int_0^t \varphi(s)ds$$

对所有 $t \in \mathbb{T}$。

我们将证明，在定理的条件下，若 $\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\psi$ 且序列$\{F(t_n)\}$收敛，则 $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = 0$，其中 0 是 $\mathfrak{B}$ 的零元素。

假设

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = x_0 \neq 0 \tag{16}$$

并考虑由等式定义的、来自 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 的函数序列 $\{F_n\}$

$$F_n(t) := nx_0 + \int_0^t \varphi(s)ds$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{T}$。我们将证明，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\overline{F_k(\mathbb{T})} \subset \overline{F_{k-1}(\mathbb{T})}.$$

事实上，我们注意到

$$F_k(t_0) - F_{k-1}(t_0 + t_n) = x_0 - F_0(t_n) + \int_0^{t_0} [\varphi(s) - \varphi(s + t_n)]ds. \tag{17}$$

令 $n \to \infty$，在 (17) 中取极限，并结合 (16) 和 $\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\varphi$（即，在空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 中，$\varphi^{t_n} \to \varphi$ 当 $n \to \infty$ 时），由引理 3.2（第 (iii) 项）可得

$$F_k(t_0) = \lim_{n\to\infty} F_{k-1}(t_0 + t_n).$$

这意味着，对每个 $t_0 \in \mathbb{T}$，$\overline{F_k(t_0)} \in F_{k-1}(\mathbb{T})$。因此，我们有 $F_k(\mathbb{T}) \subset \overline{F_{k-1}(\mathbb{T})}$，从而 $F_k(\mathbb{T}) \subset F_{k-1}(\mathbb{T})$，并且

$$\overline{F_0(\mathbb{T})} \supset \overline{F_1(\mathbb{T})} \supset \ldots \supset \overline{F_n(\mathbb{T})} \supset \ldots.$$

特别地，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\overline{F_n(\mathbb{T})} \subset F_0(\mathbb{T})$。但是

$$nx_0 \in \overline{F_n(\mathbb{T})} \subset \overline{F_0(\mathbb{T})} \tag{18}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。(18) 式与原函数F_0的有界性矛盾。

现在我们将证明，函数 φ 的有界原函数 F 与函数 φ 可比较。事实上，令 $\{t_n\} \in \mathfrak{N}_\varphi$，则我们可以抽取一个子序列$\{t_{k_n}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} F(t_{k_n}) = 0. \tag{19}$$

注意，

$$F(t + t_{k_n}) - F(t) = F(t_n) + \int_0^t [\varphi(s + t_{k_n}) - \varphi(s)]ds. \tag{20}$$

令 $n \to \infty$，在 (20) 中取极限，并考虑到 (19) 以及序列 $\{\varphi^{t_n}\}$ 在空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 中收敛到 φ 这一事实（由引理 3.2（第 (iii) 项）可知），我们得到 $F^{t_{k_n}} \to F$ 在空间 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 中趋于 $n \to \infty$。这意味着 $\{t_{k_n}\} \in \mathfrak{N}_F$。因此，序列 $\{F^{t_n}\}$ 相对紧，且在空间 $C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 中有唯一的极限点 F，从而 $\{t_n\} \in \mathfrak{N}_F$。定理得证。□

推论 3.7. </style}令 ($\mathbb{T}, \mathfrak{B}$) 为一个 S^p 泊松稳定函数。函数 φ 的每个相对紧原函数都与函数 φ具有相同的复现特征。

证明。 由定理 3.6 可直接得到此结论，因为如果函数 φ 的原函数 F 相对紧，那么它显然是弱相对紧的。 □

推论 3.8。 设 $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 是平稳（分别地， S^p τ-周期、S^p 几乎复现）的。函数 φ 的每个相对紧原函数都是平稳（分别地， S^p τ-周期、 S^p 几乎复现）的。

证明。 此结论由推论 3.7 和定理 2.21 得出。 □

定理 3.9. 设函数 $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 是复现的。函数 φ 的每一个相对紧原函数都按复现特征与函数 φ强可比。

证明。 若函数 φ连续且复现（在移位动力系统 $(C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$ 中），则该命题已由 Shcherbakov [21, 第II章],[22]证明。
记 $Y := H(\varphi)$ 为空间 $L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 中所有移位$\{\varphi^h |\ h \in \mathbb{T}\}$之族的闭包。在定理 Y 的条件下，它是移位动力系统 $(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})\ \mathbb{T}, \sigma)$ 的一个紧致极小集。设 $X := \mathfrak{B} \times Y$与 $(X, \mathbb{T}, \sigma)$ 为斜积动力系统 $(X, \mathbb{T}, \pi)$，其中对所有 $(t, v, g) \in \mathbb{T} \times \mathfrak{B} \times H(\varphi)$，有 $\pi(h, (v, g))) := (\phi(h, v, g)\ g^h)$， $\phi(t, v, g) := v + \int_0^t g(s)ds$ 且 $g \in H(\varphi$。记$\langle(X, \mathbb{T}, \pi), (Y, \mathbb{T}, \sigma)\ h\rangle$ $(h := pr_2 \colon X \to Y)$ 为由斜积动力系统 $(X, \mathbb{T}, \pi)$ 所关联的非自治动力系统。

考虑函数 φ 的任意一个紧原函数 F，则存在一点 $u \in \mathfrak{B}$ 使得

$$F(t) = \phi(t, u, \varphi) = u + \int_0^t \varphi(s)ds \tag{21}$$

对所有 $t \in \mathbb{T}$成立。记 $X_0 := H(u, \varphi) = \{\overline{\pi(t, (u, \varphi))|\ t \in \mathbb{T}}\}$，其中对所有 $h \in \mathbb{T}$有 $\pi(h, (u, \varphi)) = (\phi(h, u, \varphi)\ \varphi^h)$。显然， X_0 是斜积动力系统$(X, \mathbb{T}, \pi)$的一个紧致不变子集。由伯克霍夫定理，存在一个紧致极小子集 $M \subset X_0$。由于 Y 是紧致极小集，且$h \colon X \to Y$是$(X, \mathbb{T}, \pi)$到$(Y, \mathbb{T}, \sigma)$上的同态，故 $h(M) = Y$，从而对所有 $y \in Y$ 有 $M_y := h^{-1}(y) := \{(v, y)|\ (v, y) \in M\} \neq \emptyset$。我们将证明，对所有 $y \in Y$，集合 M_y 由单一点 $\{(u_y, y)\}$ 组成。若假设不然，则存在一点 $\varphi_0 \in Y = H(\varphi)$，使得集合 $M_{\varphi_0} = \{(u, \varphi_0)|\ (u, \varphi_0) \in M\}$ 至少包含两个不同的点(u_i, φ_0) $(i = 1, 2)$，即 $u_1 \neq u_2$ $(u_1, u_2 \in \mathfrak{B})$。显然（见公式(21)），

$$\phi(t, u_i, \varphi_0) = u_i + \int_0^t \varphi_0(s)ds \quad (i = 1, 2).$$

由定理 3.6 可得

$$\mathfrak{N}_{\varphi_0} \subseteq \mathfrak{N}_{x_i}, \tag{22}$$

其中 $x_i=(u_i,\varphi_0)$ $(i=1,2)$。注意到 $x_1,x_2\in M_{\varphi_0}\subseteq M$，并考虑到集合 M 的极小性，我们得出存在一个序列 $\{\bar{t}_n\}\subset\mathbb{T}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\pi(\bar{t}_n,x_1)=x_2. \tag{23}$$

注意，由（23）可得

$$\{\bar{t}_n\}\in\mathfrak{N}_{\varphi_0}.$$

事实上，我们有

$$\varphi_0=h(x_2)=h(\lim_{n\to\infty}\pi(\bar{t}_n,x_1))=\lim_{n\to\infty}h(\pi(\bar{t}_n,x_1))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(\bar{t}_n,h(x_1))=\lim_{n\to\infty}\sigma(\bar{t}_n,\varphi_0) \tag{24}$$

因此，$\{\bar{t}_n\}\in\mathfrak{N}_{\varphi_0}$。

另一方面，我们有

$$\rho(\pi(\bar{t}_n,x_1),\pi(\bar{t}_n,x_2))\leq\rho(\pi(\bar{t}_n,x_1),x_2)+\rho(x_2,\pi(\bar{t}_n,x_2)) \tag{25}$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。令 $n\to\infty$，在（25）中取极限，并结合（22）和（24），可得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\pi(\bar{t}_n,x_1),\pi(\bar{t}_n,x_2))=0. \tag{26}$$

注意

$$\rho(x_1,x_2)\leq\rho(x_1,\pi(\bar{t}_n,x_1))+\rho(\pi(\bar{t}_n,x_1),\pi(\bar{t}_n,x_2))+\rho(x_2,\pi(\bar{t}_n,x_2)) \tag{27}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$。考虑到(22)和(26)，并在(27)中当$n\to\infty$ 时取极限，我们得到 $x_1=x_2$，从而得到 $u_1=u_2$ $(x_i=(u_i,\varphi_0)\ \ i=1,2)$。最后一个等式与我们的假设相矛盾。所得矛盾证明了我们的陈述：对每一个 $y\in Y$，集合 M_y 由单个点组成。

现设$x_\varphi=(u_\varphi,\varphi)\in M_{\varphi^\circ}$ 我们将证明原函数

$$F(t):=\phi(t,u_\varphi,\varphi)=u_\varphi+\int_0^t\varphi(s)ds$$

函数 φ 的原函数与函数 φ按复现特征强可比，即 $\mathfrak{M}_\varphi\subseteq\mathfrak{M}_F$，或等价地 $\mathfrak{M}_\varphi\subseteq\mathfrak{M}_{x_\varphi}$。事实上，若 $\{t_n\}\in\mathfrak{M}_\varphi$，则$\{t_n\}\in\mathfrak{M}_{x_\varphi}$。假设并非如此，则存在序列 $\{t_n\}\in\mathfrak{M}_\varphi$使得 $\{t_n\}\notin\mathfrak{M}_{x_\varphi}$。这意味着序列 $\{\pi(t_n,x_\varphi)\}$ 不收敛。由于 $\{\pi(t_n,x_\varphi)\}\subseteq M$且集合 M是紧致的，故序列 $\{\pi(t_n,x_\varphi)\}$是相对紧的，并且至少有两个不同的极限点 $\bar{x}_i$ $(i=1,2)$。由于$\{t_n\}\in\mathfrak{M}_\varphi$，故存在点 $\bar{\varphi}\in H(\varphi)$使得当 $n\to\infty$时 $\varphi^{t_n}\to\bar{\varphi}$。容易验证 $\bar{x}_i\in M_{\bar{\varphi}}$ $(i=1,2)$。根据我们的假设 $\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$。于是我们有一点 $\varphi_0\in H(\varphi)$，其集合 $M_{\bar{\varphi}}$ 至少包含两个不同的点，但这与上文已证明的事实相矛盾。所得矛盾完成了定理的证明。□

推论 3.10. 设 $\psi\in L^p_{loc}(\mathbb{T},\mathfrak{B})$ 是一个 S^p 几乎周期（分别地，S^p 复现）函数。函数 ψ 的每个预紧原函数都是几乎周期（分别地，复现）的。

证明。该结论由定理 3.9 和 2.21 得出。□

推论 3.11. 在定理 *3.9* 的条件下，对于函数 φ 的每个预紧原函数 F，都存在一个连续函数 $\nu: \omega_\varphi \to \mathfrak{B}$，使得

$$\phi(t, \nu(\psi), \psi) = \nu(\sigma(t, \psi))$$

对所有$(t, \psi) \in \mathbb{R} \times \omega_\varphi$。

证明。设 F 是函数 φ的一个紧原函数，则存在一个元素$u \in \mathfrak{B}$，使得

$$F(t) = \phi(t, u, \varphi) = u + \int_0^t \varphi(s)ds$$

对所有 $t \in \mathbb{T}$。根据定理 3.9 $\mathfrak{M}_\varphi \subseteq \mathfrak{M}_x$，其中 $x = (u, \varphi) \in X := \mathfrak{B} \times H(\varphi)$。根据定理 2.19，存在一个连续映射 $\gamma: H(\varphi) \to H(x)$（或者等价地，存在一个连续映射 $\nu: \omega_\varphi \to \mathfrak{B}$），满足条件

$$\gamma(\varphi) = x = (u, \varphi) \quad \text{and} \quad \gamma(\sigma(t, \psi)) = \pi(t, \gamma(\psi))$$

（或等价地

$$\nu(\varphi) = u \quad \text{and} \quad \nu(\sigma(t, \psi)) = \phi(t, \nu(\psi), \psi))$$

对所有 $(t, \psi) \in \mathbb{T} \times \omega_\varphi$。 □

下面我们将考虑一类特殊的远程几乎周期函数。即我们考虑具有极小 ω-极限集ω_φ的远程几乎周期函数 φ，也就是说，ω_φ是移位动力系统 $(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B}) \ \mathbb{T}, \sigma)$ 的一个极小集。

定理 3.12. 设 $\varphi \in L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 是一个正向拉格朗日稳定函数。假设下列条件成立：

(i) φ 是一个 S^p 远程几乎周期（相应地，远程 τ-周期或远程平稳）函数，且其 ω-极限集ω_φ 是极小的；(ii) 函数 φ 的原函数 $F(t) := \int_0^t \varphi(s)ds$ 是相对紧的，即 $Q := \varphi(\mathbb{R}_+)$ 是 $\mathfrak{B}$的一个紧子集。

则 φ的原函数 F 是正向远程几乎周期（相应地，正向远程 τ-周期或正向远程平稳）函数。

证明。记 $Y := H(\varphi)$为集合 $\{\sigma(t, \varphi) | \ t \in \mathbb{T}\}$ 在空间$L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$中的闭包，并记$(Y, \mathbb{T}, \sigma)$为由$(L^p_{loc}(\mathbb{T}, \mathfrak{B}) \ \mathbb{T}, \sigma)$在 Y上诱导的移位动力系统，$X := \mathfrak{B} \times Y$以及$(X, \mathbb{T}, \pi)$为斜积动力系统：对所有$(t, v, \psi) \in \mathbb{T} \times \mathfrak{B} \times Y$，$\pi(t, (v, \psi)) := (\phi(t, v, \psi) \ \sigma(t, \psi))$，其中

$$\phi(t, v, \psi) := v + \int_0^t \psi(s)ds.$$

注意，映射 $\phi: \mathbb{T} \times \mathfrak{B} \times Y \to \mathfrak{B}$ 具有以下性质：

(i) $\phi(0, v, \psi) = v$ 对每个 $v \in \mathfrak{B}$ 和 $\psi \in Y$都成立；(ii) $\phi(t + \tau, v, \psi) = \phi(t, \phi(\tau, v, \psi) \ \sigma(\tau, \psi))$ 对所有 $t, \tau \in \mathbb{T}$、$v \in \mathfrak{B}$ 和 $\psi \in Y$都成立；(iii) 映射 ϕ 是连续的。

前两个性质显然成立。第三个性质由引理 3.2（第 (iii) 项）得出。

因此，$\langle \mathfrak{B},\ \phi,\ (Y,\ \mathbb{T},\ \sigma)\rangle$（简记为 ϕ）是动力系统（$Y,\ \mathbb{T},\ \sigma$）上的余循环，其纤维为 $\mathfrak{B}$，由 ϕ关联得到。

考虑非自治动力系统 $\langle (X,\ \mathbb{T},\ \pi),\ (Y,\ \mathbb{T},\ \sigma)\ h\rangle$，其中 $h\colon X\to Y$由余循环 ϕ生成的 $h\colon =pr_2$ 定义。

由于函数 φ 是 S^p 正向拉格朗日稳定的，且 φ 的原像 F 是相对紧的，因此根据推论 3.4，它在移位动力系统（$C(\mathbb{T},\ \mathfrak{B})\ \mathbb{T},\ \sigma$）中也正向拉格朗日稳定。

记 $x_0:=(0,\ \varphi)\in X$，其中 0 是 $\mathfrak{B}$的零元素。在定理的条件下，点 $x_0\in X$ 在（$X,\ \mathbb{T},\ \pi$）中是正向拉格朗日稳定的。注意，$_\sim X:=H^+(x_0)$ 是（$X,\ \mathbb{T},\ \pi$）的非空、紧致且正不变子集。由于 $\varphi=h(x_0)$ 是正向 S^p 拉格朗日稳定的，因此 $h(H^+(x_0))=H^+(\varphi)$，从而，非自治动力系统 $\langle (X,\ \mathbb{T},\ \pi),\ (Y,\ \mathbb{T},\ \sigma)\ h\rangle$ 在 $X=H^+(x_0)$ 上（分别在 ω_{x_0}上）诱导出一个半群（分别为双侧）$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$非自治动力系统 $\langle (X,\ \mathbb{R}_+,\ \pi),\ (Y,\ \mathbb{R}_+,\ \sigma)\ h\rangle$（分别为 $\langle (\omega_{x_0},\ _\sim\mathbb{R},\ \pi),\ (\omega_\varphi,\ \mathbb{R},\ \sigma)\ h\rangle$），其中 $Y:=H^+(\varphi)$。

现在我们将证明，至少存在一个连续映射 $\nu:\omega_\varphi\to\mathfrak{B}$，使得

$$\nu(\sigma(t,\psi))=\phi(t,\nu(\psi),\psi)$$

对所有 $(t,\ \psi)\in\mathbb{R}\times\omega_\varphi$。为此，我们固定一个点 $\widetilde{x}\in\omega_{x_0}$.

由于点 x_0 在斜积动力系统（$X,\ \mathbb{T},\ \pi$）中是正向拉格朗日稳定的，因此 ω_{x_0} 是一个非空、紧致且不变的集合。对于点 $\widetilde{x}\in\omega_{x_0}$，存在一个序列 $t_n\to+\infty$，使得 $\pi(t_n,\ x_0)=(\phi(t_n,\ x_0,\ \varphi)\ \sigma(t_n,\ \varphi))\to\widetilde{\ }(\widetilde{u},\ \psi)=\widetilde{x}$ 当 $n\to\infty$ 时。

注意到

$$F^{t_n}(t)=F^{t_n}(0)+\int_0^t\varphi^{t_n}(s)ds \tag{28}$$

对所有 $t\in\mathbb{T}$，因此，当 $n\to\infty$ 时，在（28）中取极限，我们得到

$$\widetilde{F}(t)=\widetilde{F}(0)+\int_0^t\widetilde{\psi}(s)ds.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$考虑到 $F(\mathbb{R})\subseteq Q=\varphi(\mathbb{R}_+)$，我们得出函数 F 是函数 $\psi\in\omega_\psi$ 的一个紧原函数。另一方面，由于函数 $\varphi\widetilde{\ }$ 是 S^p 远程几乎周期的，根据定理 2.50，函数 ψ 是 S^p 几乎周期的，并且根据推论 3.11，存在一个连续映射 $\nu:\omega_\varphi\to\mathfrak{B}$，使得

$$\nu(\widetilde{\psi})=\widetilde{u}\ \text{ and }\ \nu(\sigma(t,\psi))=\phi(t,\nu(\psi),\psi)$$

对所有 $(t,\ \psi)\in\mathbb{R}\times\omega_\varphi$。

现在我们将证明，x_0 的 ω极限集 ω_{x_0}（或者等价地，$(F,\ \varphi)$的 ω极限集$\omega_{(F,\varphi)}$）是一个等度几乎周期集。为证明这一事实，我们固定一个任意的正数 ε。

由映射 $\gamma:\omega_\varphi\to\omega_{x_0}$ 的一致连续性（相应地，由映射 $\nu:\ \omega_\varphi\to I:=pr_1(\omega_{x_0})$的一致连续性，因为 $\gamma=(\nu,\ Id_Y)$），对于 $\varepsilon/2$，存在一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon/2)$（$0<\delta(\varepsilon)<\varepsilon$），使得$\rho_{S^p}(\theta_1,\theta_2)<\delta$ 意味着

$$\rho_X(\gamma(\theta_1),\gamma(\theta_2))<\varepsilon/2\ \ (\text{respectively},\ \rho_{\mathfrak{B}}(\nu(\theta_1),\nu(\theta_2))<\varepsilon/2), \tag{29}$$

其中 $\rho_{\mathfrak{B}}(u,v):=|u-v|$ 对所有 $u,v\in\mathfrak{B}$, $\rho_X(x_1,x_2)=\rho_{\mathfrak{B}}(v_1,v_2)+\rho_{S^p}(\theta_1,\theta_2)$ 且$x_i=(v_i,\theta_i)$ (i=1,2)。

由于函数 φ 是正向拉格朗日稳定且远程几乎周期的，因此根据定理 2.50，集合 ω_φ 是 S^p 等度几乎周期的。这意味着该集合

$$\mathcal{F}(\varepsilon/2,\omega_\varphi):=\{\tau\in\mathbb{R}|\sup_{t\in\mathbb{T},\ \theta\in\omega_\varphi}\rho_{S^p}(\sigma(t+\tau,\theta),\sigma(t,\theta))<\delta(\varepsilon/2)\} \tag{30}$$

在 $\mathbb{R}$ 中是相对稠密的。

若 $\tau\in\mathcal{F}(\varepsilon/2,\omega_\varphi)$，则由 (29) 和 (30) 可得

$$\rho_X(\phi(t+\tau,\gamma(\theta),\theta),\phi(t,\gamma(\theta),\theta))=\rho_X(\gamma(\sigma(t+\tau,\theta)),\gamma(\sigma(t,\theta))<\varepsilon/2$$

（分别地,

$$\rho_{\mathfrak{B}}(\phi(t+\tau,\nu(\theta),\theta),\phi(t,\nu(\theta),\theta))=\rho_{\mathfrak{B}}(\nu(\sigma(t+\tau,\theta)),\nu(\sigma(t,\theta))<\varepsilon/2)$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\theta\in\omega_\varphi$，即 $\tau\in\mathcal{F}(\varepsilon,\omega_\varphi)$。

现在令 $(\Phi,\psi)\in\omega_{(F,\varphi)}$ 为任意一点，那么如上所述，对所有 $t\in\mathbb{R}$，有 $\Phi'(t)=\psi(t)$。另一方面，$\phi(t,\nu(\psi)\ \psi)'=\psi(t)$，因此，

$$\Phi(t)=\nu(\sigma(t,\psi))+\Phi(0)-\nu(\psi) \tag{31}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$。由 (31) 得到

$$\rho_{\mathfrak{B}}(\Phi(t+\tau),\Phi(t))=\rho_{\mathfrak{B}}(\nu(\sigma(t+\tau,\psi),\gamma(\sigma(t,\psi)))<\varepsilon/2. \tag{32}$$

根据 (30) 和 (32)，得到

$$\rho_X((\Phi(t+\tau),\sigma(t+\tau,\psi)),\Phi(t),\sigma(t,\psi))=$$

$$\rho_{\mathfrak{B}}(\Phi(t+\tau),\Phi(t))+\rho_{S^p}(\sigma(t+\tau,\psi),\sigma(t,\psi))<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

对所有 $t\in\mathbb{T}$ 以及 $(\Phi,\psi)\in\omega_{(F,\varphi)}$。

这意味着集合 $\omega_{(F,\varphi)}$ 是等度几乎周期的。为完成证明，我们注意到，如果集合 ω_φ 由 τ-周期点（分别为平稳点）组成，那么集合 $\omega_{(F,\varphi)}$ 也如此。定理得证。□

推论 3.13。设 $\varphi\in C(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ 是一个正向拉格朗日稳定函数。假设满足以下条件：

(i) φ 是一个正向远程几乎周期（分别为正向远程τ-周期或正向远程平稳）函数，且其 ω-极限集ω_φ 是极小的；(ii) 函数 φ 的原函数 $F(t):=\int_0^t\varphi(s)ds$ 是相对紧的。

那么，φ 的原函数 Φ 是正向远程几乎周期函数（分别为正向远程 τ-周期函数或正向远程平稳函数）。

证明。 由定理 3.12 可直接得到这一结论，因为每个远程几乎周期函数（分别为远程 τ-周期函数或远程平稳函数）$\varphi \in C(\mathbb{R},\ \mathfrak{B})$都是 S^p 远程几乎周期函数（分别为远程 τ-周期函数或远程平稳函数）。□

注 3.14. 推论 *3.13* 证实了文献 [10] 中提出的猜想。

注 3.15. 请注意，在推论 *3.13* 的条件下，函数 $\varphi \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{B})$ 的紧致原始 $F(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ 是远程平稳的（分别是远程 τ-平稳的或远程几乎周期的）。但是，F 的 ω-极限集 ω_F既可以是极小的，也可以是非极小的。

4. Examples

下面给出两个例子来说明注 3.15。具体来说，一个例子具有极小的 ω_F （例 4.1），另一个例子具有非极小集合 ω_F （例 4.2）。

例 4.1. 我们注意到（例如，参见 [10]），函数 $\psi(t) = \sin(t + \ln(1 + |t|))$ $(t \in \mathbb{R})$ 具有以下性质：

(i) ψ 是遥远 2π-周期的；(ii) 集合 ω_ψ 是极小的；(iii) ψ 不是渐近几乎周期的。

考虑由等式 $\varphi(t) := \cos(t+\ln(1+t))$ 定义的函数 $\varphi \in C(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$，其中任意 $t \in \mathbb{R}_+$均成立。函数 φ 具有以下性质：

(i)
$$|\cos(t + 2\pi + \ln(1 + t + 2\pi)) - \cos(t + \ln(1 + t))| =$$
$$2|\sin(t + \frac{\ln(1 + t + 2\pi)(1 + t)}{2}) \sin(\frac{\ln(1 + \frac{2\pi}{1+t})}{2})| \leq$$
$$|\ln(1 + \frac{2\pi}{1 + t})| \to 0$$
当 $t \to +\infty$ 时，因此函数 φ 是遥远的 2π-周期函数；

(ii) φ在 $\mathbb{R}_+$上有界；

(iii)
$$\varphi'(t) = -(1 + \frac{1}{1 + t}) \sin(t + \ln(1 + t))$$
对所有 $t \in \mathbb{R}_+$均成立。容易看出，导数 φ' 在 $\mathbb{R}_+$上有界，因此函数 φ在 $\mathbb{R}_+$上一致连续；

(iv) 函数 φ是正向拉格朗日稳定的，因此其 ω-极限集 ω_φ 非空、紧致且不变（在移位动力系统 $(C(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})\ \mathbb{R}_+,\ \sigma)$ 中）；

(v)
$$\omega_\varphi = \{\cos^h :\ h \in [0, 2\pi)\}.$$
为证明这个等式，我们注意到函数 $\widetilde{\varphi} \in \omega_\varphi$ 当且仅当存在一个序列 $\{h_k\} \subset \mathbb{R}_+$，使得 $h_k \to +\infty$ 且 $\varphi^{h_k} \to \widetilde{\varphi}$ （在空间 $C(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$ 中），当 $k \to \infty$ 时。

很容易看出

$$\widetilde{\varphi}(t)=\lim_{k\to\infty}\cos(r+h_k+\ln(1+t+h_k))=$$

$$\lim_{k\to\infty}\cos(t+h_k+\ln(2\pi h_k)+\ln(1+\frac{1+t}{h_k}) \tag{33}$$

对于每个 $k\in\mathbb{N}$。

注意

$$h_k+\ln(2\pi m_k)=2\pi m_k+\tau_k \tag{34}$$

对于所有 $k\in\mathbb{N}$，其中 $m_k\in\mathbb{N}$。不失一般性，我们可以假设序列 $\{\tau_k\}$ 收敛，且其极限为 $\widetilde{\tau}\in[0,2\pi)$，即，

$$\widetilde{\tau}=\lim_{k\to\infty}\tau_k. \tag{35}$$

在等式 (33) 中取极限，并考虑到 (34)-(35)，我们有

$$\widetilde{\varphi}(t)=\cos(t+\tau_0)$$

对每个固定的 $t\in\mathbb{R}_+$，即 $\widetilde{\varphi}=\cos^{\tau_0}$（对某个 $\tau_0\in[0,2\pi)$）。由此建立了该等式。特别地，我们得到集合 ω_φ 是极小的。

(vi) 函数 φ 不是渐近 2π-周期的。

若假设这不成立，则存在一个 2π-周期函数$\widetilde{\varphi}\in\omega_\varphi$（因此也存在一个数 $\alpha\in[0,2\pi)$），它具有性质 $\widetilde{\varphi}=\cos^{\alpha})$，使得

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)|=0. \tag{36}$$

注意

$$\psi^2(t)+\varphi^2(t)=\sin^2(t+\ln(1+t))+\cos^2(t+\ln(1+t))=1$$

因此，

$$.\psi^2(t)=1-\varphi^2(t) \tag{37}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}_+$。由 (37)，结合 (36)，我们得出函数 ψ 是渐近 2π-周期的。最后这个结论与 ψ 的选取相矛盾。由此得到的矛盾证明了我们的结论。

(vii)

$$\psi'(t)=(1+\frac{1}{1+t})\varphi(t):=\mu(t)$$

对所有 $t\in\mathbb{R}_+$，即函数 ψ 是远程 2π-周期函数 μ 的有界原函数（作为两个远程 2π-周期函数的乘积），其极小 ω-极限集合为 $\omega_\mu=\omega_\varphi$。

例 4.2。考虑由等式定义的函数 $\varphi\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

$$\varphi(t)=\frac{2t}{(\pi^3+t^2)^{2/3}}\cos(\pi^3+t^2)^{1/3}$$

对每个 $t\in\mathbb{R}_+$。

函数 φ具有以下性质：

(i) $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t)|=0$ 因此，函数 φ 是渐近平稳的，且 $\omega_\varphi=\{0\}$。从而其 ω-极限集合是极小的；(ii) $F(t)=\int_0^t\varphi(s)ds=\sin(\pi^3+t^2)^{1/3}$ 对所有 $t\in\mathbb{R}_+$;

(iii) *for every fixed* $\tau>0$ *we have*

$$|F(t+\tau)-F(t)|=|\sin(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}-\sin(\pi^3+t^2)^{1/3}|=$$

$$2|\sin\frac{(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}-(\pi^3+t^2)^{1/3}}{2}\cos(\frac{(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}+(\pi^3+t^2)1^{1/3}}{2})|=$$

$$2|\sin\frac{\tau(t+\tau)}{2((\pi^3+(t+\tau)^2)^{2/3}+(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}(\pi^3+t^2)^{1/3}+(\pi^3+t^2)^{2/3})}|\cdot$$

$$|\cos(\frac{(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}+(\pi^3+t^2)^{1/3}}{2})|\le$$

$$\frac{\tau(t+\tau)}{(\pi^3+(t+\tau)^2)^{2/3}+(\pi^3+(t+\tau)^2)^{1/3}(\pi^3+t^2)^{1/3}+(\pi^3+t^2)^{2/3}}\to 0$$

as $t\to+\infty$, *i.e., the function* F *is remotely stationary;*

(iv) *the primitive* F *is bounded and uniformly continuous on* $\mathbb{R}_+$ *and, consequently,* F *is positively Lagrange stable (thus its* ω*-limit set is nonempty, compact and invariant);*

(v) $\omega_F=\{F_c:\ c\in[-1,1]\}$, *where* $F_c(t)=c$ *for all* $t\in\mathbb{R}$ *(for the details see* [10]*).*

问题。 假设巴拿赫空间 $\mathfrak{B}$ 不含与 c_0同构的子空间。将“相对紧”条件替换为“有界”后，第3节中的哪些结果仍然成立?

开放问题。 当集合ω_φ 不是极小时，定理 3.12 在一般情况下是否仍成立，这一问题尚未解决。

5. Funding

本研究得到摩尔多瓦共和国国家计划“微分方程的远程几乎周期解（25.80012.5007.77SE）”的资助，并部分得到摩尔多瓦国立大学机构研究计划011303“SATGED”的资助。

6. Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

7. Conflict of Interest

作者声明不存在利益冲突。

References

[1] Baskakov A. G.，利用差分算子和线性关系的谱理论方法分析线性微分方程。 *Uspekhi Mathematicheskhih Nauk*，2013，卷68，第1期（409），第77–128页（俄文） [英文译本：俄罗斯数学调查， 2013， 68， 1， 69 116 10 1070 2013 068 01 004822] 卷. 期. 页. - DOI：. / [2] RM v n ABEH Baskakov A. G.，巴拿赫空间上幂有界算子与有界算子半群的调和分析和谱分析。 *Mat. Zametki*，2015，卷97，第2期，第174–190页（俄文）。 [2015， 97， 1 2， 164 178] 英文译本：数学札记， [3] 卷. 期. - 页. -。Baskakov A. G.、Strukov V. E. 和 Strukova I. I.，齐性空间中函数以及在无穷远处呈周期或几乎周期性的调和分析的调和分析。*Sbornik: Mathematics*，2019，卷210，第10期，第1380–1427页。[4] D. N. Cheban， *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations.* Hindawi Publishing Corporation，纽约，2009，ix+186 页。[5] David N. Cheban， *Nonautonomous Dynamics:* 非线性振荡与全局吸引子. *Springer Nature Switzerland AG 2020*，xxii+ 434 页。[6] David Cheban， *Remotel Almost Periodic Motions of Dynamical Systems and Solutions ofDifferential Equations*，《摘要集》：第十七届应用与计算数学国际快速研讨会，2024年1月4日至5日，秘鲁特鲁希略，2024，第62–66页。[7] David Cheban， *Two-sided Remotely Almost Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*，《纪念弗拉基米尔·安德鲁纳基耶维奇数学与计算机科学研究所（摩尔多瓦国立大学，IMCS60）成立60周年国际会议论文集》，2024年10月10日至13日，摩尔多瓦共和国基希讷乌，2024，第161–166页。[8] David Cheban，动力系统的远程几乎周期运动。 *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica* 3 106 2024， 71 102 ，第（ ）期，第 - 页。[9] David N. Cheban，单调非自治动力系统。 *Springer Nature Switzerland AG* 2024 +460 ， ，xix页。[10] David Cheban，移位动力系统与远程几乎周期函数。 *Journal of Applied Analysis* 2025 10 1515 2024 0178 ，。 https://doi.org/ . /jaa. [11] David Cheban， *Remotely Almost Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations in Banach Spaces* **25** 2025 111 ，《演化方程杂志》，（），文章 https://doi.org/10.1007/s00028-025-01140-3 [12] David Cheban， *Massera's Theorem for Asymptotically Periodic Solutions of Differential Equations* **459** 2026 114053 10 1016 2025 ，《微分方程杂志》，（）。DOI：. /j.jde. . 114053 [13] *Acta Mathematics Scientia* David Cheban，斯捷潘诺夫远程几乎周期函数。，2026（即将发表）。https://hal.science/hal-04765829 [14] Karol Gryszka，流中的渐近类周期运动。 *Ann. Univ. Paedagog.*，（），第 - 页。 *Crac. Stud. Math.* 17 2018 45 57 [15] Hernan R. Henriquez、Michelle Pierri 和 Placido Taboas，巴拿赫空间上的 S-渐近 ω周期函数及其应用。 *Journal of Mathematical Analysis and Appli-cations*，343，2008，第1119–1130页。[16] Kaluzhina N. S.，无穷远处的慢变函数、周期函数及其性质。 *Vestnik VGU, Seria: Fizika, Matem.*，第2期，2010，第97–102页（俄文）。[17] Andrzej Pelczar，渐近周期运动。 *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*，卷33，第5–6期，1985，第313–319页。[18] W. M. Ruess 和 W. H. Summers，几乎周期运动的极小集。 *Math. Ann.*，276 1986 145 158，，第 - 页。[19] Sarason D.，远程几乎周期函数。 *Contemporary Mathematics*，卷32，1984，第237–242页。[20] Schwartz L.， *Analyse Mathematique*，第1卷，巴黎，Hermann，1967。[21] B. A. Shcherbakov， *Topologic Dynamics and Poisson Stability of Solutions of Differential Equations* ¸ ¸ ¸ ˘ 1972, 231 。Stiinta，基希讷乌，第（俄文）[22] B. A. Shcherbakov， *A general property of compact transformations of abstract functions*。高等院校学报：数学辑，11（138），1973，第88–96页。[23] Sell G. R.，《拓扑动力学与微分方程讲义》， **2** *Van* 第 卷，。Van Nostrand Reinhold math. studies 1971 Nostrand–Reinbold，伦敦，。

[24] Luong Vu trong、Do Van Loi、Nguyen van Minh 和 Hideaki Matsunaga，《周期演化方程渐近周期解的 Massera 定理》。《微分方程杂志》329（2022年），第371–394页。DOI: 10.1016/j.jde.2022.05.010[25] Shilin Zhang 和 Daxiong Piao，《Hamilton–Jacobi方程的远时几乎周期黏性解》。 *International Scholarly Research Network ISRN. MathematicalAnalysis,* 2011年，第2011年卷，文章编号415358，共13页。doi:10.5402/2011/415358

（D. Cheban） State University of Moldova Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science Laboratory of Differential Equations str. Academiei , 5, MD–2028 Chişinău, Moldova

Email address, D. Cheban: david.ceban@usm.md, davidcheban@yahoo.com