偶极相互作用对膨胀超冷等离子体性质的影响：基于量子力学散射理论的研究。

Satyam Prakash, Ashok S Vudayagiri*School of Physics, University of Hyderabad, Prof.C.R. Rao road, Gachibowli, Hyderabad 500046,* **印度**

通过光电离激光冷却原子来生成超冷等离子体（UCP）时，只有一小部分原子被电离，其余中性粒子会与其中的电子发生相互作用。这些相互作用，加上离子与电子之间的库仑相互作用，会引发里德伯原子电离和三体复合等现象，而这些现象都会影响超冷等离子体的整体行为。我们此前开发了一种量子处理方法，用于分析这些相互作用，并研究了铯中里德伯原子的电离；研究结果与测量结果吻合良好。现在，我们将该方法拓展到其他原子种类，以研究里德伯原子电离以及三体复合等其他效应，以及由此产生的额外“量子压力”——它会使超冷等离子体膨胀得更快。我们的结果成功解释了此前被认为是“异常”的实验观测。

arXiv:2603.07512v1 [physics.atom-ph] 8 Mar 2026

I. 引言

超冷等离子体（UCP）是部分电离等离子体，可通过对激光冷却原子样品进行光电离获得，其平衡温度介于微开尔文至毫开尔文之间，密度为 $\sim 10^9\ cm^{-3}$。这与高温高密度等离子体（HEDP）截然不同；后者温度相当高（达 10^6 K 量级及以上），密度也很高（$\sim 10^{21}\ cm^{-3}$） [1]。了解控制 UCP 行为的基础物理，在探测高密度等离子体以及理解白矮星、气态巨行星等天体物理系统和聚变装置中的惯性约束方面，都具有重要意义 [2]。

此前，人们已利用经典动理学理论分析完全电离 HEDP 的动力学，例如采用福克–普朗克方程 [3] 或弛豫时间方法 [4, 5]。这一方法所依据的流体力学方程可导出电导率 [6]的明确解析公式。人们也尝试采用类似的动力学方法分析 UCP 的动力学。在典型分析中，离子和原子的温度被忽略，电子则被视为在离子产生的平均场中运动 [7, 8]。等离子体的膨胀被认为是绝热的，并且发现其热化速度很快。这意味着 UCP 系统被视为处于平衡态，从而产生粒子间的空间关联。这些方程的模拟已用于解释电子的超快冷却、等离子体膨胀，以及在较长时间尺度上强关联体系的形成，但无法充分提供较短时间尺度上的信息。此外，采用动力学理论方法仍无法解释 UCP 系统中的多种反常行为。例如，在电子能量较低时，等离子体膨胀速度远超预期，这被归因于等离子体膨胀过程中大量形成了里德伯原子 [9, 10]。Kulin等人 [9]通过在 UCP 中利用射频电场激发等离子体振荡，对此进行了实验验证。他们通过实验表明，对于 $E_e < 70K$，等离子体云的膨胀速度远超预期，明显偏离流体动力学模型。一个改进后的流体力学模型尝试纳入原子过程，包括辐射复合（RR）、双电子复合（DR）和三体复合（TBR），所得结果与实验符合得更好 [11, 12]。例如，TBR 涉及两个电子与一个离子相互作用，其中一个电子与原子结合，另一个电子则带走多余能量。然而，将 TBR 与平衡态等离子体中的辐射再分布模型结合后，预测会出现一个与密度无关的最大值 [11], ；这一效应与膨胀的 UCP 的实验观测相矛盾。多项实验中观察到的趋势 [10, 13]表明，随着离子数（N_i）增加或电子能量 E_e 降低，复合过程趋向于形成束缚更深的能级。Hu等人[14]利用量子三体复合对这些实验结果作出了理论解释。此外，预测 TBR 速率随温度按 $T^{-9/2}$ 变化，并在低温下发散。根据经典理论，预测的 TBR 速率随温度按 $T^{(-9/2)}$ 变化，在低温下也会发散。Hu等人采用量子方法得到的 TBR 速率同样呈现 $T^{-9/2}$ 这种发散。

在将同一理论模型用于超冷等离子体系统和高能量密度等离子体系统之前，重要的是指出高能量密度等离子体系统与 UCP 系统之间的显著差异，以判定用于这两个系统的理论方法是否正确。高能量密度等离子体系统完全电离，因此电子与离子之间明确存在电子-离子碰撞；正如 Spitzer 和其他几位作者所述，在较宽的参数范围内，动力学理论方法能够很好地描述这一系统[3–5]。在线性响应理论（LRT）这类修正方法中，不同碰撞机制的影响十分显著。例如，Reinholz等人 [15] 和Karakhtanov[16] 在玻恩近似框架内讨论了电子-电子碰撞对 FIP 的影响。与 Spitzer 的数值不同，他们的修正因子同时取决于密度和温度。现在，

对于会形成里德伯原子的超冷等离子体，在动力学理论框架内考虑电子-原子碰撞并非易事。正如上文所述，等离子体膨胀期间会形成大量里德伯原子，从而产生显著的电子-原子相互作用。Adams 等人考虑了这些电子-原子相互作用，并据此计算动量转移截面。他采用电子-原子相互作用的极化势，并借助 COMPTRA-04 将其与等离子体组分相结合，从而得到直流电导率。所得结果与实验结果的定量吻合度更高[17]。

在本研究中，我们提出采用量子力学方法解释超冷等离子体（UCP）表现出的异常现象。我们的方法考虑了电子-原子相互作用，这对于像超冷等离子体这样的部分电离等离子体尤其重要。在早期的一项研究中，我们按照 Rosmej 等人提出的方法进行势散射计算，求得了里德伯原子电离的散射截面 [1], 。结果与铯原子的实验结果吻合良好 [13]。在本研究中，我们将计算扩展到其他碱金属原子，并计算三体复合的概率。一个意外的结果是，出现了“量子力学压力”；这种压力叠加在离子和电子之间的库仑排斥之上，使超冷等离子体膨胀得更快，而这一现象已在许多实验中得到观测。

屏蔽极化势方法还使我们能够计算超冷等离子体超快膨胀过程中的相关参数，例如耦合常数、德拜半径、电子压强和等离子体频率，并展示这些参数的演化。我们的计算解释了超冷等离子体中的里德伯电离如何取决于温度和密度，也解释了 Kilian 等人报告的超冷等离子体在较短时间尺度上的反常冷却现象[10]。我们提出，应充分考虑电子-里德伯原子散射，以解释这些实验观测。

II. 碱金属超冷等离子体中里德伯原子的形成、三体复合与电离

超冷等离子体由激光冷却原子的光电离形成。产生等离子体的激光具有很窄的谱宽（$\sim 10ns$），因此电子起初具有非热能量分布，并迅速热化（$< 10\mu s$）。热化所需时间可估计为 $\tau_{ee} = 1.2 \times 10^{-6} s^4 m^{-6} v_e^3 / n_e \ln \Lambda$，其中 $\Lambda = 4\pi\epsilon_o (3k_B T_e \lambda_D / e^2)$ [8]， λ_D 为德拜长度，e为电子电荷。对于温度为100 K、密度为 $n_e = 10^{15} m^{-3}$ 且$\ln \Lambda = 6.0$的电子，热化时间为 $t_{ee} = 64$ ns。在热化之前，高温电子会逸出，从而降低温度和电子密度。随后，等离子体膨胀并缓慢热化，这一过程最长可达 $50\mu s$ [9]。在热化过程中，至少有20% [10]的自由电荷通过占主导地位的三体复合（TBR）过程发生复合。在典型的三体复合中，一个电子与一个离子在额外一个电子存在的情况下复合，该额外电子用于守恒能量和动量，从而产生高激发里德伯态。早在20世纪60年代，人们就通过经典动力学方法研究了经三体复合形成里德伯原子的速率，并作出两项重要预言：（1）三体复合速率按 $T^{-9/2}$ 标度；（2）复合会以电子结合能由 $E_n = k_B T$给出的方式将电子布居到壳层能级n。此处，k_B 表示玻尔兹曼常数，T为电子温度。

S. X. Hu 通过数值求解六维含时薛定谔方程，在量子力学形式下研究了三体复合： [14]

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \left[-\frac{1}{2}(\Delta_{\mathbf{r}_1} + \Delta_{\mathbf{r}_2}) - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right. \tag{1}$$

$$\left. + \frac{1}{|\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|}\right] \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \tag{2}$$

此处采用了密耦合方法，其中上文给出的六维波函数 $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \mid t)$ 按双极球谐函数 $Y_{l_1 l_2}^{LS}(\Omega_1, \Omega_2)$ $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \mid t) = \sum_{LS} \sum_{l_1 l_2} \left[\Psi_{l_1 l_2}^{(LS)}(r_1, r_2 \mid t) / r_1 r_2\right] Y_{l_1 l_2}^{LS}(\Omega_1, \Omega_2)$ 展开
对于特定的（LS）对称性，将库仑排斥项 $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ 展开为球谐函数的形式，代入薛定谔方程，最后对空间角度 Ω_1 和 Ω_2, 进行积分，方程（1）即可化为径向变量 r_1、 r_2 的形式，如方程（2）所示。在方程（2）中，求和指标 j 的取值上限为分波总数 N。这里， T_1, T_2 和 V_c 分别表示电子动能以及电子-原子核库仑相互作用的对角算符。非对角项 $\hat{V}_{j',k}^{I}(r_1, r_2 \mid t)$表示两个电子之间的库仑排斥。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j(r_1, r_2 \mid t) = \left[\hat{T}_1 + \hat{T}_2 + \hat{V}_c\right] \Psi_j(r_1, r_2 \mid t) \tag{3}$$

$$+\sum_k \hat{V}^I_{j,k}\left(r_1, r_2 \mid t\right)\Psi_k\left(r_1, r_2 \mid t\right) \tag{4}$$

为求解方程（2），将每个电子表示为高斯波函数，$G_{kl}(r) = \left[(i)^l / \left(\pi w^2\right)^{1/4}\right] \times_{e^{-(r-r_0)^2/2w^2}} e^{-ikr}$。这里，$w$ 表示具有动量 k的电子波包的宽度，l表示其方位量子数。总电子波函数的计算写成如下乘积形式：$G_{k_1 l_1}$和 $G_{k_2 l_2}$：$\Psi_j(r_1 r_2, t=0) = (1/\sqrt{2})\left[G_{k_1 l_1}(r_1) G_{k_2 l_2}(r_2) + (-1)^S G_{k_1 l_1}(r_2) G_{k_2 l_2}(r_1)\right]$。S. X. Hu 将有限元离散变量表示（FEDVR）与实空间乘积（RSP）算法相结合，得到如方程（3）所示的三体复合概率密度。这里，ϕ_{nl} 和 $\phi_{k_2 l_2}$ 分别表示束缚态和连续态，E_2 表示出射电子的能量。

$$P_{nl}\left(E_2\right) = 2\sum_{LS}\sum_{l_2}\left|\int dr_1 \int dr_2 \phi^*_{nl}\left(r_1\right)\phi^*_{k_2 l_2}\left(r_2\right)\Psi^{(LS)}_{l l_2}\left(r_1, r_2, t=t_f\right)\right|^2 \tag{5}$$

对 E_2 上的 $P_{nl}\left(E_2\right)$ 进行积分，可得到特定量子数 n, l, $P_{nl} = \int P_{nl}\left(E_2\right) dE_2$ 对应的三体复合概率。对于 n 能级，沿角动量 l 对复合概率求和，即可得到总复合概率，如 $P_n = \sum_l P_{nl}$ 所示。对 s 波贡献求和后，研究[11] 表明，对于能量介于 $0.05eV < E_e < 5eV$ 之间的电子，满足 $E_n \sim k_B T$ 的里德伯能级对应的复合速率最大。值得注意的是，对于低于 0.05 eV 的能量，量子力学计算得到的束缚态比 $E_n \sim k_B T$ 给出的更深。

在超冷等离子体中，通过三体复合形成的里德伯原子寿命较长，但会受到电子-原子散射的影响，因此复合后又会重新电离。理论上认为，这种电子碰撞电离导致了一束里德伯原子自发转变为超冷等离子体，多个实验团队均对此进行了研究 [10, 13, 18]。现有的解离理论解释采用经典蒙特卡罗模拟 [8] 和分子动力学模拟 [7], ，但无法解释超冷等离子体的超快膨胀以及里德伯电离存在最低能态等观测结果。我们此前的工作 [1]将这种解离视为量子力学散射现象，从而揭示了其背后的原子过程。对于 UCP 系统，当复合形成里德伯原子时，电子的电场会使里德伯原子高度扩展的电子云极化，进而产生极化势。由于碱金属里德伯原子的极化率随 n^6 变化，因此在膨胀的超冷等离子体中是一个重要因素。部分电离的半经典等离子体中电子-原子相互作用的极化势已得到广泛研究 [17, 19–21]。对于碱金属等离子体，Redmer 和 Ropke 修改了半经典势的形式 [22] ，并提出通过加入屏蔽参数（κ）来考虑等离子体效应的屏蔽极化势。对于我们的 UCP 系统，我们采用 Redmer 等人使用的屏蔽极化势形式，其表达式为:

$$V_{\mathrm{p}}^{\mathrm{s}}(r) = \frac{-e^2\alpha_p}{8\pi\epsilon_0(r+r_0)^4} e^{-2\kappa r}(1+\kappa r)^2 \tag{6}$$

这里，α_p 是极化率，κ 是屏蔽参数，r_o 是截断距离参数。为了计算碱金属原子的非相对论极化率 α_p ，我们采用 Shevelko 等人的方法：[23],

$$\alpha_p = \beta^z_{nl} = Z^{-4}[n^6 + 7/4n^4(l^2+l+2)][a_0^3]$$

这里，Z 表示原子序数，n 是主量子数，l 是角动量量子数。

由上可知，电子—原子散射的势通过对入射波进行分波分解来计算:

$$\psi_{in} = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

散射波函数计算为散射振幅之和，其取决于由散射产生的相移（δ_l）。因此，相移是相位函数$\delta_l(r)$的渐近值，该函数由相位方程 [24]描述。

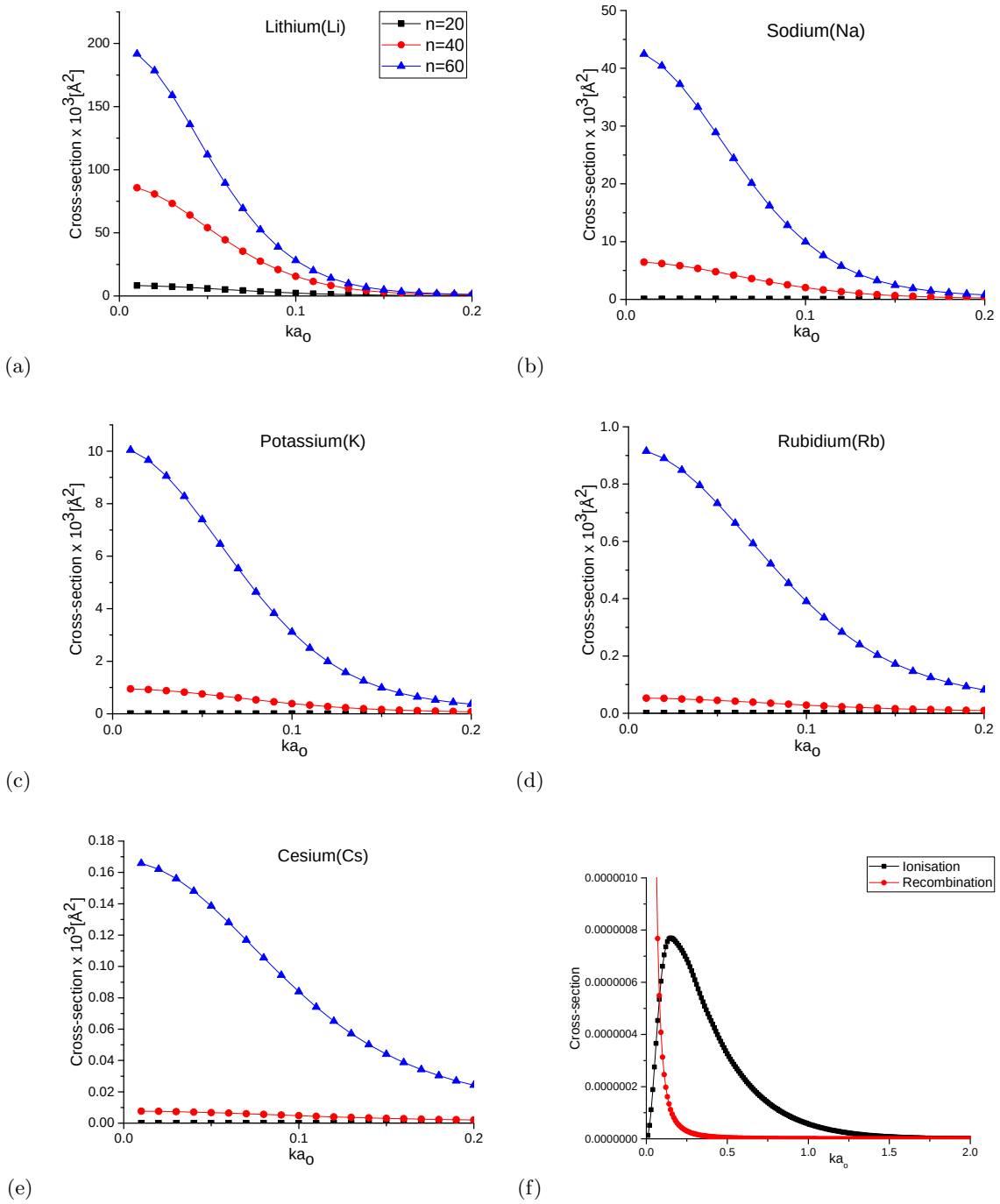


图 1. 低能范围（$\sim 1eV$）内碱金属原子（锂、钠、钾、铷、铯）的总电子碰撞截面随电子动量 ka_o 的变化。分别计算了不同能级 n=20 （方块）、 40 （圆圈）和 60 （三角形）对应的截面值。为便于比较，将 n=60 对应的截面值绘制在一起（右下角）。

$$\delta_l'(r) = -k^{-1}V(r)[\cos\delta_l(r)\hat{j}_l(kr) - \sin\delta_l(kr)\hat{n}_l(kr)]^2; \lim_{r\to\infty}\delta_l(r) = \delta_l \tag{8}$$

将相移作为渐近极限进行计算的方法见方程(6)。方程(7)给出了各分波贡献的计算方法。总截面则由各个分波贡献相加得到。

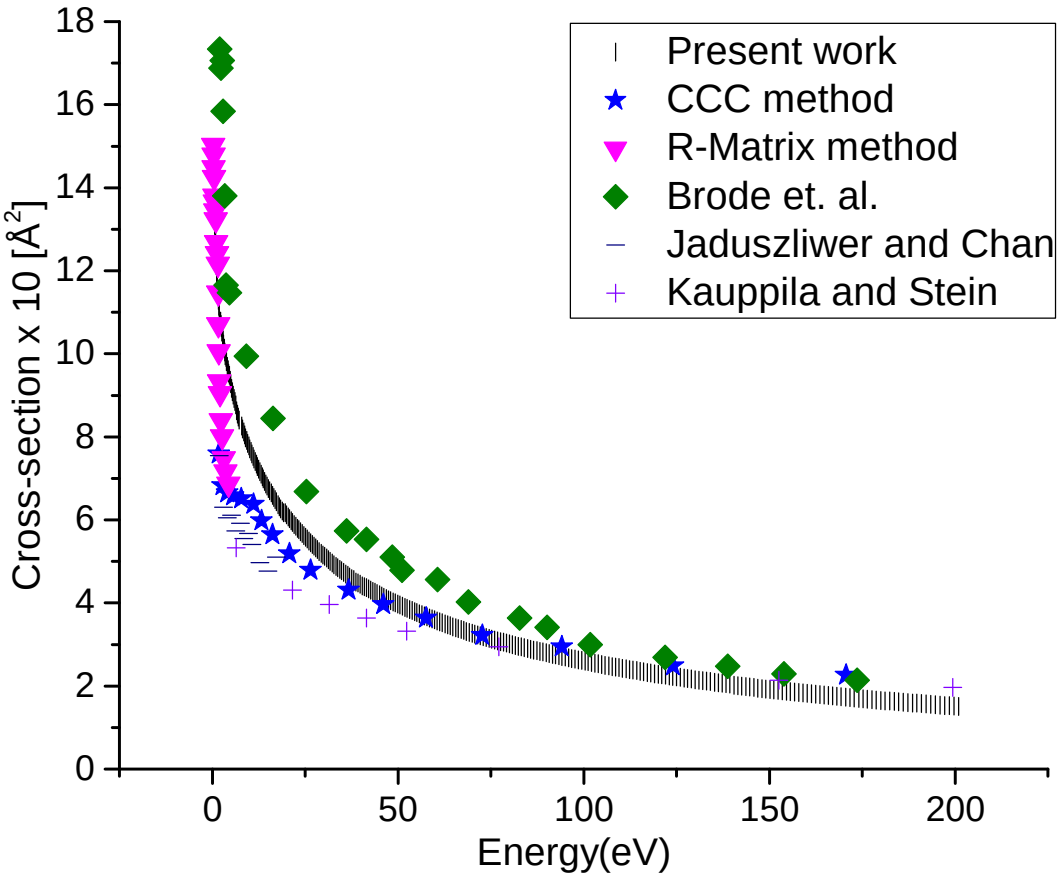


图 2. 铯的未屏蔽总电子-原子截面计算（1–200 eV），并与 Brode（菱形）、Jaduszliwer 和 Chan（横线）、Kauppila 和 Stein（叉号）、CCC 方法（星号）以及 R 矩阵方法（下三角形）的结果进行对比。采用未屏蔽极化势得到的结果以竖线[1, 26–28]表示。

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \qquad \sigma_{total} = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l \tag{9}$$

图 1 展示了用上述方法计算得到的电子-原子散射截面，其随电子动量的变化关系，依次对应锂、钠、钾、铷和铯等不同碱金属原子，以及里德伯能级 n = 20、40 和 60。我们近似认为 s 波截面等于总截面，因为随着电子能量降低，s 波截面会占据主导地位。这是因为较高角动量波的离心势垒$V'(r) = (\hbar^2/2\mu)(l(l+1)/r^2)$会变得显著，从而阻碍它们到达散射原子附近。截面值在电子动量较低时最大，并随着电子动量增大而迅速减小，这是因为电子在低动量时经历的相移较大。未观察到束缚态，因为我们得到的最大相移为 0.2 弧度，远小于根据列文森定理形成束缚态所需的 3.14 弧度 [25]。图中一个重要的观察结果是，电子-原子散射截面从铯到锂逐渐增大。因此，这表明原子尺寸越小，超冷等离子体系统对温度和密度变化越敏感。

我们通过将势散射截面计算结果与 Brode 等人、Jaduszliwer 和 Chan、Kaupilla 以及 Stein [26–28] 针对低温等离子体计算的结果进行比较，验证了我们的方法。

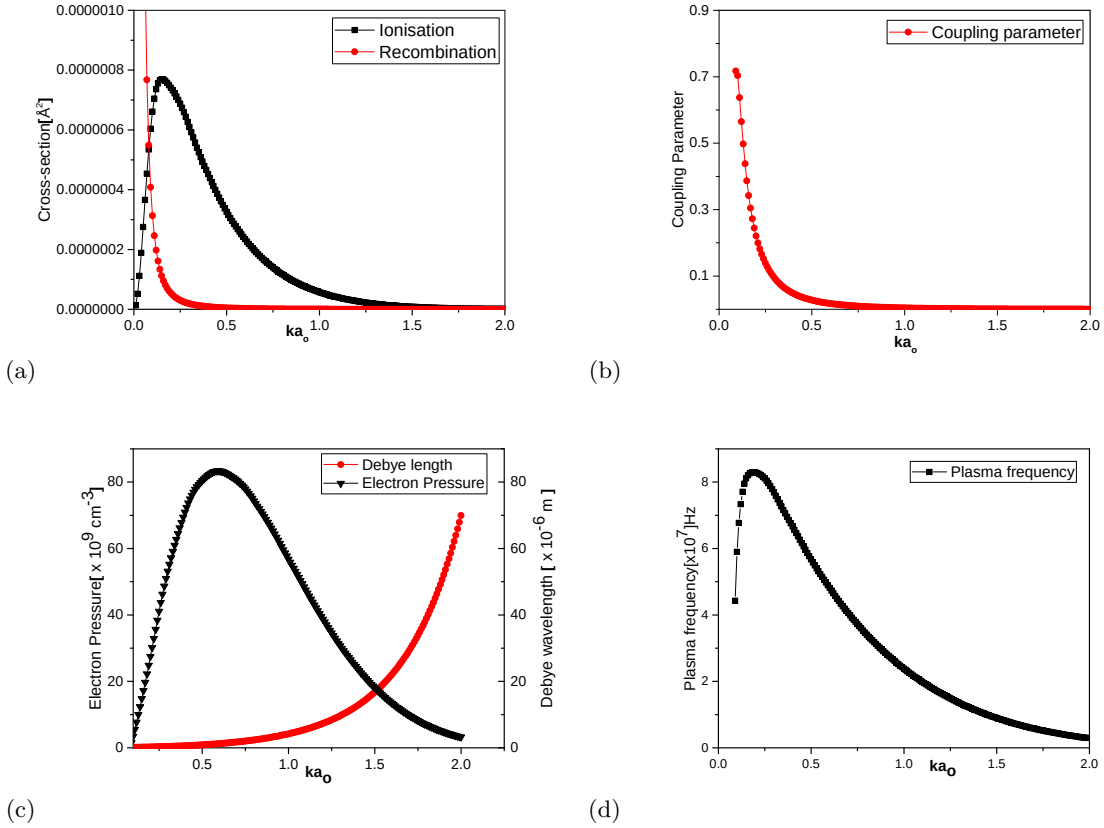


图3. 根据超冷等离子体介质中存在的电离/复合速率，计算得到的等离子体参数随电子动量 ka_o 的变化。图（a）展示了相空间中相互竞争的电离/复合过程。图（b）展示了耦合参数。图（c）展示了德拜波长和电子压强，图（d）展示了相空间中的等离子体频率。

如图 2 所示，该截面是针对处于基态的铯原子计算的。

这些数据表明，在较高散射能量（100–200 eV）下，实验结果与理论结果一致，但在较低能量下，截面计算结果出现了明显差异。我们计算得到的铯截面与 Bray 和 Stelbovics [27, 28], 采用收敛密耦方法（CCC）得到的结果一致，表明其与实验数据吻合良好。

III. 结果与讨论

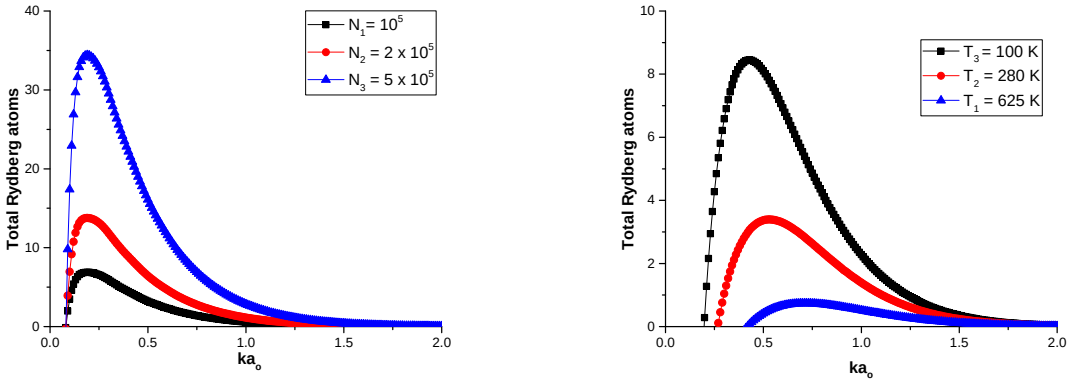
当超冷等离子体处于平衡态时，电离后电子的速度将遵循麦克斯韦-玻尔兹曼分布 $N(v) = (v^2/v^3)e^{-v^2/v^2}$。这些电子的复合速率由占主导地位的三体复合过程决定，该速率正比于 $T^{-(9/2)}$。因此，总复合速率为

$$\frac{dN_1}{dt} = \int v^{-9/2} N(v) dv = \int v^{-5/2} e^{-v^2/v^2} dv$$

.

其中，里德伯原子的平均数量通过对复合速率进行积分计算得到。我们还可以计算里德伯能级的布居数，因为电子以能量 $E_{n'} = k_B T$ 布居到里德伯能级。

现在，这些里德伯原子因电子-原子相互作用而再次电离。总电离速率已在我们先前的工作中计算得出，并由 $\frac{dN_2}{dt} = \int N(v)\sigma(v)dv$给出。这两个速率已经计算出来，因此里德伯原子的净损失速率由$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_2}{dt} - \frac{dN_1}{dt}$给出。因此，我们计算了复合概率和电离概率，以计算在时间尺度 $\sim 50\ \mu s$内碱金属超冷等离子体中获得里德伯原子的净概率。



(a) (b)

图 4. (a) 上图显示了等离子体介质中的里德伯原子总数随电子动量的变化。图中给出了不同电子密度下的原子数，即 10_5， 2×10^5, 5×10^5(单位为 cm^{-3})，等离子体温度固定为 100K.g (b) 下图显示了不同温度下里德伯原子的总数，即 100K、278 k 和 625 K。密度保持恒定为 $5\times10^5 cm^{-3}$

我们根据电离速率和复合速率计算了超冷等离子体的参数。结果如图3所示。结果表明德拜长度在空间中增大。这是合理的，因为超冷等离子体最初以极低的动能开始，随后迅速膨胀。电子压强先增大，直至电子热化，然后随着温度和密度下降而减小。等离子体膨胀时，电子的耦合参数因密度下降而减小。在我们的情形中，采用了 2×10^5 cm^{-3} 的中等密度。初始密度不足以出现强关联体系，等离子体处于弱耦合状态。等离子体频率预期会随密度降低而下降，但我们的图显示出一定偏差，即先增大后减小。这可能是由于低温下高复合速率导致电子密度突然增加所致。随着电子膨胀，等离子体频率如预期那样迅速下降。

图 4(a) 是里德伯原子总数随电子动量变化的曲线。原子数先增加、随后缓慢下降，这与 Killian 等人开展的实验相符 [10]。他们观察到热力学行为出现偏离，并将其归因于三体复合（TBR）。我们的计算表明，电离过程与复合之间存在竞争，两者都取决于中性原子与电子之间的相互作用，而相应过程的截面可表征这种相互作用。由于电离和复合的截面都取决于电子温度和离子密度，里德伯原子的形成也会受到离子密度的影响。因此，在不同能级的里德伯原子分布中观察到了依赖于密度的峰值[10]。

图4(b)表明，里德伯原子的数目随电子温度升高而减少。电离截面和复合截面均随电子温度升高而减小，因此在较高电子温度下，里德伯原子的总数更少。S.X. Hu采用量子三体复合计算表明，在较低温度下，复合所布居的n能级低于动力学理论所预言的电子能级 [14]。根据动力学理论，电子布居在能量由 $E_n \sim k_BT$给出的那些能级上。然而，量子三体复合 [14] 表明，当电子能量为0.01 eV时，电子形成的束缚态可比动力学理论所预言的能级低多达20个能级。这在超冷等离子体动力学中可能具有重要意义；随着电子温度下降，复合速率增大，电子落入深束缚态。若自由电子与深束缚态碰撞，便会发生超弹性碰撞，碰撞电子获得能量，这解释了等离子体膨胀开始时的无序诱导加热 [8] 。此外，Hu的结果表明，复合会显著转向具有更高角动量（更高l值）的态，尤其是当散射电子能量较低时。这解释了里德伯原子为何寿命较长（$\sim 100\mu s$） [2, 10, 13, 29]。这些结果意义重大，并已得到实验验证。

IV. 结论

我们采用量子力学散射方法计算了电离和量子三体复合的截面。根据这些截面的数值，我们计算了德拜长度、电子压强等等离子体参数，

以及在相空间中计算的耦合参数和等离子体频率。它们在定性上与实验观察结果相符。由此产生的“量子压力”会改变超冷等离子体的膨胀，这一现象在早期的超冷等离子体实验中已有观察 [2?]。我们表明，如果从量子力学范畴考察电离、复合和电子散射之间的竞争现象，就能准确理解超冷等离子体中的基本原子过程。这种方法与蒙特卡罗和分子动力学模拟等其他方法互为补充。

V. 数据可用性声明

本文已包含支持本研究结论的所有数据。如需其他数据，可向作者提出申请。

VI. 致谢

作者 SP 衷心感谢印度政府科学技术部下属 CSIR-HRDG 提供的支持，以及该机构授予的 JRF/SRF奖学金（授予编号：09/0414(13706)/2022-EMR-I）；这项支持贯穿了整个研究过程。

[1] Satyam Prakash，Ashok S. Vudayagiri，《超冷等离子体中里德伯原子因电子-原子相互作用而电离》，Phys. Plasmas 32, 043510(2025) [2] Killian, T., Pattard, T., Pohl, T., & Rost, J,《超冷中性等离子体》，Physics Reports, 449(4-5), 77-130(2007) [3] Spitzer, Lyman and H¨arm, Richard;《完全电离气体中的输运现象》，Phys. Rev. 89(5), 977(1953)[4] Blatt, Frank J;《固体中的电子传导物理》，纽约：McGraw-Hill(1968) [5] Ziman, J M.;《液态金属电学性质理论：I. 单价金属 (1961)》Phil. Mag., vol. (8). [6] S. Rosmej, H. Reinholz, and G. R¨opke;《电子-原子碰撞对稀有气体等离子体电导率的贡献》，Phys. Rev. E 95, 063208(2017) [7] Pohl, T. and Pattard, T. and Rost, J. M ;《超冷里德伯气体中的等离子体形成》，Phys. Rev. A.68.010703(2003) [8] Robicheaux F, Hanson JD;《超冷中性等离子体膨胀的模拟》，Phys Rev Lett. ;88(5):055002(2002) [9] S. Kulin, T. C. Killian, S. D. Bergeson, and S. L. Rolston;《超冷中性等离子体的等离子体振荡与膨胀》，Phys. Rev. Lett. 85, 318(2000) [10] T. C. Killian, M. J. Lim, S. Kulin, R. Dumke, S. D. Bergeson, and S. L. Rolston;《膨胀中的超冷中性等离子体内里德伯原子的形成》，Phys. Rev.. Lett. 86, 3759(2001) [11] J. Stevefelt, J. Boulmer, and J-F. Delpech;《冷等离子体中的碰撞-辐射复合》，Phys. Rev. A 12, 1246(1975) [12] M. J. Seaton，《类氢离子的辐射复合》，Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 119, Issue 2, Pages 81–89(1959) [13] Vanhaecke N, Comparat D, Duncan A. Tate, and Pierre Pillet，《超冷等离子体中里德伯原子的电离》，Phys. Rev. A 71, 013416(2005) [14] S. X. Hu，《慢电子与原子离子的三体复合》，《物理评论快报》98, 133201(2007) [15] H. Reinholz, G. Ropke, S. Rosmej, and R. Redmer;《考虑电子-电子碰撞的温稠密物质电导率》，Phys. Rev. E 91, 043105(2015) [16] V. S. Karakhtanov;《简并参数中等时完全电离等离子体电导率的修正》，Contrib. Plasma Phys. 56, 343(2016) [17] J. R. Adams, H. Reinholz, R. Redmer, V. B. Mintsev, N. S. Shilkin, and V. K. Gryaznov，《高压下稀有气体的电导率》，Phys. Rev. E 76, 036405(2007) [18] Robinson, M. P., Tolra, B. L., Noel, M. W., Gallagher, T. F., & Pillet, P;《里德伯原子自发演化为超冷等离子体》，Phys. Rev. Lett.(85), 4466(2000) [19] T. S. Ra mazanov, K. N. Dzhumagulova and Y. A. Omarbakiyeva;《部分电离稠密等离子体中“电荷-原子”的有效极化相互作用势》，AIP Publishing, Physics of Plasma(2005)[20] Seisembayeva, Madina and Dzhumagulova, Karlygash and Ramazanov, Tlekkabul;《半经典等离子体中的电子俘获过程研究》，Nukleonika. 61. 10.1515/nuka-2016-0034(2016)[21] Ramazanov, Tlekkabul and Dzhumagulova, Karlygash and Gabdullin, M;《稠密半经典部分电离氢等离子体的微观与热力学性质》，Journal of Physics A: Mathematical and General. 39.4469(2006)

[22] R. Redmer, G. R¨opke, and R. Zimmermann;《碱金属等离子体中的有效电子-原子相互作用与维里系数》, J. Phys. B 20, 4069(1987) [23] V. P Shevelko;《原子及其光谱性质》, Springer 原子与等离子体丛书(1997)[24] F Calogero, 《势散射的变相位方法》, Elsevier Academic Press, Vol-35(1967) [25] 马中骐, 《莱文森定理》, J. Phys.(39), 48(2006) [26] MacAskill, J., Kedzierski, W., McConkey, J., Domyslawska, J., & Bray, I. (2002), 《使用磁光阱测量铯电子碰撞截面》, 《电子光谱学及相关现象》, 123(2-3), 173-184. [27] Bray, Igor, and Andris T. Stelbovics;《电子-氢散射的收敛密耦方法》, 《物理评论快报》69, no. 21: 3005–3008(1992) [28] I. Bray, A.T. Stelbovics, 《模型电子-氢散射问题的动量空间收敛密耦方法》, Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. 35, 209(1995) [29] T. Gallagher;《里德伯原子(1994)》, 剑桥大学出版社。