CALT-TH 2026-011

克尔-纽曼双扭量粒子

Joon-Hwi Kim[1]

[1] *Walter Burke Institute for Theoretical Physics, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125*

在扭量粒子理论中，得到了克尔-纽曼黑洞的全阶世界线有效作用量，并在自对偶背景中识别出精确的隐藏对称性。

arXiv:2603.07537v1 [gr-qc] 8 Mar 2026

引言。——当前引力物理文献中的一个重要课题，是构造自旋黑洞的世界线有效作用量 [1–6]。近期，文献 [7] 利用有质量扭量理论 [8–10] 和用于测地偏离的切丛形式主义 [11]，推导出了克尔黑洞的精确一阶作用量，并给出了其明确的全阶公式。

文献 [7]对克尔作用量的推导给出了纽曼-贾尼斯技巧的试探粒子对应物 [7,12]。纽曼-贾尼斯技巧是一种解生成技术，它通过对施瓦西度规施行复几何变换而重新导出了克尔度规 [13]。这一技巧随后促成了克尔-纽曼解那次极具历史意义的推导[14]。按照一种现代观点 [15], , 纽曼-贾尼斯技巧所编码的是：当把Kerr解取为全纯鞍点时，它与一对自对偶和反自对偶陶布–纽特瞬子微分同胚。

本文将参考文献 [7]的构造加以推广，推导出与背景引力场和电磁场耦合的克尔-纽曼黑洞的一阶作用量。同样，参考文献 [11] 中的系统化形式体系在获得作用量的显式公式方面发挥了重要作用。我们确定了一个哈密顿系统，它能够在点粒子有效理论中描述克尔-纽曼黑洞精确的全阶动力学。

研究发现，文献 [7] 的结论得以保留。非线性纽曼-贾尼斯平移在自对偶背景中显现。Kerr-Newman作用量的手性（“googly”）表述对于一般的、非自对偶外场是可行的。在微扰理论中，同螺旋度康普顿振幅 [16–21] 的自旋指数化在全部引力光子重数上得以体现。

我们还推导了自对偶背景下的经典运动方程。我们证实了文献 [22]所提出的等效原理的复化自旋类比。这意味着在存在基灵-矢野张量时具有动力学隐藏对称性，从而推广了文献 [12]先前关于 Kerr 粒子的结果。

爱因斯坦-麦克斯韦几何中的测地偏离。——首先，我们介绍文献 [11]的切丛形式体系对测地偏离的新应用。

设 $(\mathcal{M}, g)$ 为一个实解析伪黎曼四维流形，并设 $F \in \Omega^2(\mathcal{M})$ 为一个二形式。设 ∇ 为列维-奇维塔联络。设 D 为由 ∇ 给出的协变外导数。

设 $N \in T(T\mathcal{M})$ 为切丛 $T\mathcal{M}$ 的重言向量场关于 ∇ 的水平提升。这就是测地喷射，即 $T\mathcal{M}$ 中测地偏离的生成元。

我们明确计算了所有整数 $\ell \geq 1$ 对应的 $(\iota_N d)^{\ell-1}\iota_N F = (\iota_N D)^{\ell-1}\iota_N F$。结果为

$$(\iota_N D)^{\ell-1}\iota_N F \;=\; (P_\ell)_\mu\, dx^\mu + (\ell-1)\,(P_{\ell-1})_\mu\, Dy^\mu + \sum_{p=2}^{\lfloor(\ell+1)/2\rfloor} \sum_{\alpha\in\Omega_p(\ell+1)} \mathscr{K}_\alpha \begin{pmatrix} \big(P_{\alpha_1-1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_p}\big)_\mu\, dx^\mu \\ +\,(\alpha_p-2)\big(P_{\alpha_1-1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_{p-1}}Q_{\alpha_p-1}\big)_\mu\, Dy^\mu \end{pmatrix}. \tag{1}$$

这是一项新的计算，并未在我们的先前的工作 [7, 11] 中呈现。不过，我们使用的符号与先前相同。每个$\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p) \in \Omega_p(\ell)$ 都是一个有序分拆，满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p = \ell$ 和 $\alpha_i \geq 2$。$\alpha \in \Omega_p(\ell)$ 对应的系数 $\mathscr{K}_\alpha$ 是二项式系数的乘积:

$$\mathscr{K}_\alpha \;=\; \left[\prod_{i=1}^{p}\binom{\left(\sum_{j=i}^{p}\alpha_j\right)-2}{\alpha_i-2}\right]. \tag{2}$$

对于任意满足 $\min\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\} < 2$ 的 $\alpha = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_p)$，我们令 $\mathscr{K}_\alpha = 0$。P 阶和 Q 阶张量 [11] 为

$$(P_\ell)_\mu \;=\; F_{\rho_1\mu;\rho_2;\cdots;\rho_\ell}(x)\, y^{\rho_1}y^{\rho_2}\cdots y^{\rho_\ell}\,, \tag{3a}$$

$$(Q_\ell)^\mu{}_\sigma \;=\; R^\mu{}_{\rho_1\rho_2\sigma;\rho_3;\cdots;\rho_\ell}(x)\, y^{\rho_1}y^{\rho_2}y^{\rho_3}\cdots y^{\rho_\ell}\,, \tag{3b}$$

其中 P_ℓ 和 Q_ℓ 分别设为 $\ell = 0$ 和 $\ell = 0,\ 1$。

式（1）可基于图 2 所示的递归结构，通过数学归纳法轻松证明。这运用了参考文献 [11] 中“有机化学”的直觉。

有趣的是，通过一种“协变色运动学” [23] 映射，可以很快看出式 (1)；该映射将引力视为洛伦兹群的规范理论。具体而言，式 (1) 可由文献 [7, 11] 中给出的 $(\iota_N D)^{\ell-1}\iota_N R^m{}_n$ 公式推导得出。将局部洛伦兹指标的反对称指标对视为作为规范群的洛伦兹群的伴随指标后，$(\iota_N D)^{\ell-1}\iota_N R^m{}_n$ 对应于 $(\iota_N D)^{\ell-1}\iota_N F^a$，其中 F^a 是非阿贝尔场强。取阿贝尔极限即可重现式 (1)。

克尔-纽曼作用量。——其次，我们在

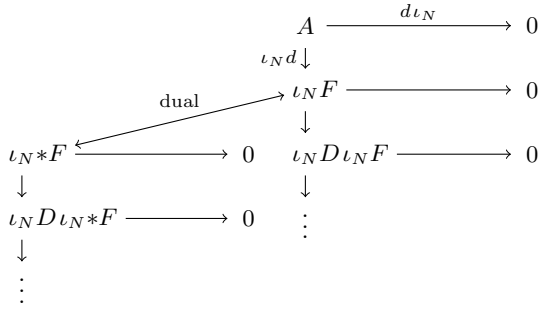


图 1. 爱因斯坦-麦克斯韦几何的“$\pounds_N$ 序列”。

参考文献 [7]（扭量式、自上而下）或参考文献 [12]（相对自下而上）所采用的版本中，实现纽曼-扬尼斯算法的探针对应形式，从而推导出外部引力场和电磁场存在时克尔–纽曼黑洞的精确有效作用量。

引力部分已由参考文献 [7]给出：Kerr双扭量粒子。本文只需加入电磁相互作用

作用量。令 $A \in \Omega^1(\mathcal{M})$为电磁规范势，并令 $F = dA \in Z^2(\mathcal{M}) \subset \Omega^2(\mathcal{M})$表示电磁场强。

图 1 展示了 A 的“$\pounds_N$ 序列”。参考文献 [7, 12] 中的方法对该序列中 2^ℓ极矩项应用霍奇对偶 ℓ 次，从而确定电磁相互作用辛势。因此，克尔-纽曼粒子的完整辛势为

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{KN}} &= \Big(\cos(\pounds_N) + \operatorname{sinc}(\pounds_N)\, J\, \iota_N d\Big)\big(p_\mu dx^\mu\big) \\ &\quad + \Big(\cos(\pounds_N) + \operatorname{sinc}(\pounds_N)\, \iota_N * d\Big)\big(A_\mu(x)\, dx^\mu\big)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

为简便起见，我们将电荷 q 设为单位值；若要恢复其一般取值，请对 $A \mapsto qA$重新缩放。现在我们在参考文献 [7]中定义的有质量对应空间 $\mathcal{K}$ 上进行研究。由于篇幅有限，详情请参见参考文献 [7]。回顾一下， $\mathcal{K}$ 配备了几何数据 $N \in \Gamma(T\mathcal{K})$ 和 J: $T^*\mathcal{K} \to T^*\mathcal{K}$，其中 $J^2 = -$为恒等映射。

式（1）便于显式计算式（4）：

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{KN}} \;=\; & \theta_{(0)} + A_\mu(x)\, dx^\mu \\ & + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{p=1}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \sum_{\alpha \in \Omega_p(\ell)} \mathscr{K}_\alpha\, p_\mu \begin{pmatrix} \big((*^\ell Q_{\alpha_1})\, Q_{\alpha_2} \cdots Q_{\alpha_p}\big)^\mu{}_\sigma\, dx^\sigma \\ + (\alpha_p - 2)\big((*^\ell Q_{\alpha_1})\, Q_{\alpha_2} \cdots Q_{\alpha_{p-1}} Q_{\alpha_p - 1}\big)^\mu{}_\sigma\, Dy^\sigma \end{pmatrix} \\ & + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \Big(\big(*^\ell P_\ell\big)_\mu\, dx^\mu + (\ell - 1)\big(*^\ell P_{\ell-1}\big)_\mu\, Dy^\mu \Big) \\ & + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{p=2}^{\lfloor (\ell+1)/2 \rfloor} \sum_{\alpha \in \Omega_p(\ell+1)} \mathscr{K}_\alpha \begin{pmatrix} \big((*^\ell P_{\alpha_1 - 1})\, Q_{\alpha_2} \cdots Q_{\alpha_p}\big)_\mu\, dx^\mu \\ + (\alpha_p - 2)\big((*^\ell P_{\alpha_1 - 1})\, Q_{\alpha_2} \cdots Q_{\alpha_{p-1}} Q_{\alpha_p - 1}\big)_\mu\, Dy^\mu \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{5}$$

此处， $*^\ell P_j$ 和 $*^\ell Q_j$ 表示对 P_j 和 Q_j内部的电磁场强 F 与黎曼张量 R 作用霍奇星 ℓ次。

同样， $\theta_{(0)}$ 的定义见文献 [7]: 双扭子粒子的自由理论辛势的协变化。为方便读者，我们将其复述如下:

$$\theta_{(0)} \;=\; p_\mu dx^\mu + i y^{\dot\alpha\alpha}\Big(\lambda_\alpha{}^I D\bar\lambda_{I\dot\alpha} - D\lambda_\alpha{}^I \bar\lambda_{I\dot\alpha}\Big)\,. \tag{6}$$

通过拉格朗日乘子纳入一级约束 $\phi_0 \;=1\,2\,(p^2 + m^2)$ 和 $\phi_1 = -p\cdot y$，式(5)具体定义了一个全阶的一阶世界线作用量，其中每一项都被充分且显式地求值为明显协变的世界线算符。

应当清楚，式(5)可很好地约化为文献 [7]中的Kerr辛势和√Kerr辛势。此外，由式(5)通过简单替换$A_\mu(x)\, dx^\mu \mapsto i\bar\psi_i D\psi^i$ 和$(P_\ell)_\sigma \mapsto q_a (P_\ell)^a{}_\sigma$ 即可直接得到非阿贝尔克尔-纽曼粒子（相关设定见文献 [7] 的附录）。

非线性纽曼-贾尼斯平移。—第三，我们对电磁曲率和黎曼曲率施加自对偶条件，以揭示动力学的非线性纽曼-贾尼斯平移： $*F_{\mu\nu} = iF_{\mu\nu}$, $*R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = iR^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$。

为此，我们只需在式（5）中用 i^ℓ 替换 $*^\ell$ 。回顾参考文献 [7], 中的解释可知，这一替换导致

$$\theta_{\mathrm{KN}} \;\sim\; \mathrm{e}^{i\pounds_N}\Big(p_\mu dx^\mu + A_\mu(x)\, dx^\mu + \theta_{\mathrm{G2A}}\Big), \tag{7}$$

其中 $\sim$表示模去全导数后的等价关系。具体而言，我们舍弃了 $i\,\operatorname{sinc}(\pounds_N) d(A_\mu(x)\, y^\mu)$。

式（7）无非是一个最小耦合带电标量粒子——即 Reissner-Nordstr¨om 粒子——在复时空中沿测地线偏移后的结果；其中进行了“Gilbert-to-Amp`ere”替换 [7] implemented byθ_{G2A} ，这反映了一个运动学细节:

$$\theta_{\mathrm{G2A}} \;=\; i y^{\dot\alpha\alpha}\Big(\lambda_\alpha{}^I D\tilde\lambda_{I\dot\alpha} - D\lambda_\alpha{}^I \tilde\lambda_{I\dot\alpha}\Big) - i p_\mu Dy^\mu\,. \tag{8}$$

显然，这体现了纽曼-贾尼斯算法 [13]的精神，以及其在历史上应用于 Reissner-Nordstr¨om 解、从而推导出克尔-纽曼解的具体实例。

公式 (7) 中的指数化李导数 $\mathrm{e}^{i\pounds_N}$ 描述了参考文献 [7] 中定义的映射 γ ，该映射将我们带到

（复化的）大质量对应空间 $\mathcal{K}$ 上的“带撇坐标图”（$z^{\mu'}$, $y^{\mu'}$, $\lambda_{\alpha'}{}^{I}$）。在此理解下，公式 (7) 可归结为

$$\theta^{+}_{\mathrm{KN}} \;=\; p_{\mu'}\,dz^{\mu'} - 2i\,\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\,y^{\dot{\alpha}'\alpha'}D\lambda_{\alpha'}{}^{I} + A_{\mu'}(z)\,dz^{\mu'}, \quad (9)$$

其中，我们和参考文献 [7] 一样舍弃了一个全导数。这里，$z^{\mu'}=\delta^{\mu'}{}_{\mu}(x^{\mu}+iy^{\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x)y^{\rho}y^{\sigma}+\mathcal{O}(y^{3}))$ 是弯曲自旋时空的全纯坐标。

重新审视参考文献 [12], 中的分析可知，由方程 (9) 导出的世界线微扰理论，在任意多重度和任意无质量物种的情况下，都体现了引力光子康普顿振幅的同螺旋度（尤其是正螺旋度）自旋指数化。

天界运动方程。——利用协变辛微扰技术[24]，很容易导出由方程 (9) 中的辛势以及一级约束 ϕ_0 和 ϕ_1 所决定的经典运动方程。分别将它们的拉格朗日乘子固定为 $\kappa^{0}(\tau)=1$ 和 $\kappa^{1}(\tau)=0$，我们得到

$$\begin{aligned} \dot{z}^{\mu'} &= p^{\mu'}, \quad \frac{Dy^{\mu'}}{d\tau} = F^{\mu'}{}_{\nu'}(z)\,y^{\nu'}, \\ \frac{D\lambda_{\alpha'}{}^{I}}{d\tau} &= 0\,, \quad \frac{D\tilde{\lambda}_{I\alpha'}}{d\tau} = \tilde{\lambda}_{I\beta'}\tilde{F}^{\dot{\beta}'}{}_{\dot{\alpha}'}(z)\,. \end{aligned} \quad (10)$$

这表明，我们的克尔–纽曼粒子的运动描述了自旋时空中的一条复测地线世界线 $z^{\mu'}$，其上左手自旋标架 $\lambda_{\alpha'}{}^{I}$ 协变恒定（平行移动），而右手自旋标架 $\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}$ 与自旋长度赝矢量$y^{\mu'}$则按照由动力学纽曼–贾尼斯移位场强引起的洛伦兹力定律进行输运。

基于左手自旋子丛目前为平坦这一事实，$D\lambda_{\alpha'}{}^{I}/d\tau=0$ 明确验证了自旋的、复化的等效原理类比，该原理由文献 [22] 提出，作为刻画自旋黑洞的性质。也就是说，在自对偶背景中，自旋进动不存在反自对偶分量。

当在时空中的 x^{μ} 处重新协变化（即转录到 $\mathcal{K}$的定义坐标图）时，方程(10)给出了Barg mann-Michel-Telegdi [25]与Mathisson-Papapetrou-Dixon [26–28] 方程的全阶推广，其中所有多极系数（电磁与引力）均设为1。这正是克尔–纽曼粒子所期望的行为。此处的关键在于，引力多极系数均取为1之所以得以实现，是因为我们在作用量中生成自旋-曲率耦合时利用了测地偏离。

同样不难看出，在这个自对偶极限下，克尔黑洞弯曲自旋时空的全纯坐标 $z^{\mu'}$是泊松对易的：

$$\{z^{\mu'}, z^{\nu'}\} \;=\; 0\,. \quad (11)$$

隐藏对称性。——第四，让我们假设存在一个 Killing 矢量 $X\in\Gamma(T\mathcal{M})$ 以及一个 Killing-Yano 张量 $Y\in\Omega^{2}(\mathcal{M})$。它们应满足

$$\pounds_X g = 0\,, \quad \pounds_X F = 0\,, \quad Y^{\mu}{}_{\rho}F^{\rho}{}_{\nu} \;=\; F^{\mu}{}_{\rho}Y^{\rho}{}_{\nu}\,, \quad (12)$$

以及 $Y_{\mu\nu;\rho}=Y_{[\mu\nu;\rho]}$。最后一个条件描述了一种对易性质，该性质凭借 D 型性质 [29] 对克尔-纽曼背景成立，并且对其自对偶部分同样成立：即自对偶带电的 Taub-Newman-Unti-Tamburino（NUT）解，其中 $F^{\mu}{}_{\nu}\propto Y^{\mu}{}_{\nu}/|\vec{x}|^{3}$。参见文献 [15] 以及文献 [30]。

众所周知， [29], 由运动方程 $\dot{x}^{\mu}=p^{\mu}$, $Dp^{\mu}/d\tau=F^{\mu}{}_{\nu}(x)p^{\nu}$支配的 Reissner-Nordstr¨om 粒子具有以下守恒量

$$\mathbb{Q} \;=\; p_{\mu}X^{\mu}(x)+\alpha(x)\,, \quad (13a)$$
$$\mathbb{C} \;=\; -p_{\mu}Y^{\mu}{}_{\rho}(x)Y^{\rho}{}_{\nu}(x)\,p^{\nu}\,. \quad (13b)$$

在方程（13a）中， $\alpha\in C^{\infty}(\mathcal{M})$ 是一个标量场，满足 $d\alpha=-\iota_X F$ [29]; 其局部存在性由$-d\iota_X F=\iota_X dF=0$保证。具体而言，如果愿意作出明确的规范选择，使得 $\pounds_X A=0$，则可以取 $\alpha=\iota_X A$。为了推导方程（13b），注意到向量 $Y^{\mu}{}_{\nu}(x)p^{\nu}$ 的协变进动与 p^{μ} 相同，这是由方程（12）中的对易性质所致。

文献 [12] 提出了一项大胆的观点：在自对偶扇区中，自旋黑洞探针的精确（自旋和耦合常数的全阶）守恒荷，可通过对非自旋黑洞探针的守恒量进行动力学纽曼-贾尼斯平移直接得到。基于这一思路，我们为克尔–纽曼探针确定了以下精确守恒荷：

$$\mathbb{Q} \;=\; p_{\mu'}X^{\mu'}(z)+\alpha(z)\,, \quad (14a)$$
$$\mathbb{R} \;=\; p_{\mu'}Y^{\mu'}{}_{\nu'}(z)\,y^{\nu'}, \quad (14b)$$
$$\mathbb{C} \;=\; -p_{\mu'}Y^{\mu'}{}_{\rho'}(z)Y^{\rho'}{}_{\nu'}(z)\,p^{\nu'}. \quad (14c)$$

在电磁规范势的显式规范选择下，可得 $\alpha(z)=A_{\mu'}(z)X^{\mu'}(z)$。很容易验证，方程（14）中的 Q、R、C 均由方程（10）中的运动方程守恒。注意（$Dp^{\mu'}/d\tau=F^{\mu'}{}_{\nu'}\,z\,p^{\nu'}$）。$p^{\mu'}$、 $y^{\mu'}$ 和 $Y^{\mu'}{}_{\nu'}(z)p^{\nu'}$ 所呈现的协变进动行为完全相同。

方程（14）中的守恒荷足以确立在至少具有两个 Killing 矢量和一个 Killing-Yano 张量的自对偶 Einstein-Maxwell 背景中，克尔–纽曼探针动力学的可积性。文献 [12], 指出，这种可积性正是黑洞区别于所有可能的有质量自旋物体的特性。文献 [12] 以 Kerr 粒子证实了这一观点，而本文则对克尔–纽曼粒子得出了相同结论。

事实上，正如参考文献 [12]中所做的那样，通过纳入反自对偶 Pleba˙nski 二形式 [31], ，可以确立超可积性：

$$\mathbb{K}_a \;=\; p_{\mu'}(\Sigma_a)^{\mu'}{}_{\rho'}(z)\,Y^{\rho'}{}_{\nu'}(z)\,p^{\nu'}. \quad (15)$$

还应强调的是，由 Q、C 和 K_a 构成的对称代数与无自旋情形下的对称代数在复化意义下完全相同，这是由于 $\{z^{\mu'}, z^{\nu'}\}=0$（式（11））这一黑洞自旋时空所特有的重要性质。

简而言之，我们在零阶自力阶的克尔–纽曼黑洞双星系统动力学中发现了超可积性，但这一结果仅存在于自对偶扇区。

弯曲大质量扭量空间。—第五，我们识别“mu变量”，以回到大质量扭量空间。

为此，我们将反自对偶自旋联络系数平凡化，采用四标架形式，并将全纯余标架在平直背景附近展开为 $e^{\dot{\alpha}'\alpha} = dz^{\dot{\alpha}'\alpha} + h^{\dot{\alpha}'\alpha}$，其中可以使用第二组 Pleba´nski 坐标 [32]。于是，方程（9）变为

$$\theta^{+}_{\mathrm{KN}} \;=\; -\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\, dz^{\dot{\alpha}'\alpha}\lambda_{\alpha}{}^{I} - 2i\,\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\, y^{\dot{\alpha}'\alpha}\, d\lambda_{\alpha}{}^{I} + \theta'_{\mathrm{KN}}\,. \tag{16}$$

我们舍弃了一个全导数 ，其中

$$\theta'_{\mathrm{KN}} \;=\; \Big(-\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\, h^{\dot{\alpha}'\alpha}{}_{\mu'}(z)\lambda_{\alpha}{}^{I} + A_{\mu'}(z)\Big)\, dz^{\mu'}. \tag{17}$$

因此，我们对 mu变量 作出与参考文献 [7] 中相同的认定：

$$\mu^{\dot{\alpha}'I} \;=\; z^{\dot{\alpha}'\alpha}\lambda_{\alpha}{}^{I}\,, \quad \tilde{\mu}_{I}{}^{\alpha} \;=\; \tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\big(z^{\dot{\alpha}'\alpha} - 2iy^{\dot{\alpha}'\alpha}\big)\,. \tag{18}$$

最终，我们得到

$$\begin{aligned}\theta^{+}_{\mathrm{KN}} \;&=\; -\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\, d\mu^{\dot{\alpha}'I} + \tilde{\mu}_{I}{}^{\alpha}\, d\lambda_{\alpha}{}^{I} + \theta'_{\mathrm{KN}}\,,\\ \omega_{\mathrm{KN}} \;&=\; d\mu^{\dot{\alpha}'I}\wedge d\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'} + d\tilde{\mu}_{I}{}^{\alpha}\wedge d\lambda_{\alpha}{}^{I} + d\theta'_{\mathrm{KN}}\,.\end{aligned} \tag{19}$$

方程（19）通过对大质量扭量空间上的辛结构进行形变，定义了弯曲大质量扭量空间这一概念：

$$\big(\mathcal{MT}, \omega^{\circ}\big) \;\longrightarrow\; \big(\mathcal{MT}, \omega^{\circ} + d\theta'_{\mathrm{KN}}\big)\,. \tag{20}$$

这种形变是在辛势层面通过一个 (1，0) 型微扰 θ'_{KN} 实现的，同时保留全纯自旋时空坐标 [22]的泊松对易性，如方程（11）所示。从物理上看，这表明引力电磁相互作用作用量支撑在自对偶（入射正螺旋度 [33, 34]）扇区的 Newman-Janis平移世界线 $z^{\mu'}$ 上。

正如文献 [7], 中所述，上述方案源于在微扰理论中实际运用我们的框架，因此，定义弯曲大质量扭量空间或许还存在其他途径。

***Googly*表述。**—最后，我们的任务是推导 Kerr-Newman作用量的手性（“googly”）表述。通过考虑文献 [7]中的映射 γ，可以将式（5）所描述的一般非自对偶作用量，用复的带撇变量（$z^{\mu'}$，$y^{\mu'}$，$\lambda_{\alpha'}{}^{I}$）表示。

为此，我们重新采用文献 [7]中的技巧。定义

$$\theta^{\pm}_{1} \;=\; \frac{1}{2}\Big(p_{\mu}Dy^{\mu} \pm y^{\dot{\alpha}\alpha}\Big(\lambda_{\alpha}{}^{I}D\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}} - D\lambda_{\alpha}{}^{I}\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}}\Big)\Big) + \iota_{N}F^{\pm}\,, \tag{21}$$

其中，$\pm$ 上标表示通过$_{1\,2}$（$1 \mp i*$）得到的投影。于是可得

$$\theta_{\mathrm{KN}} \;=\; p_{\mu}dx^{\mu} + A_{\mu}(x)\,dx^{\mu} + \frac{\mathrm{e}^{i\pounds_{N}}-1}{\pounds_{N}}\,\theta^{+}_{1} + \frac{\mathrm{e}^{-i\pounds_{N}}-1}{\pounds_{N}}\,\theta^{-}_{1}\,, \tag{22a}$$

$$\mathrm{e}^{i\pounds_{N}}\Big(p_{\mu}dx^{\mu} + A_{\mu}(x)\,dx^{\mu}\Big) \;\sim\; p_{\mu}dx^{\mu} + A_{\mu}(x)\,dx^{\mu} + \frac{\mathrm{e}^{i\pounds_{N}}-1}{\pounds_{N}}\,\theta^{+}_{1} + \frac{\mathrm{e}^{i\pounds_{N}}-1}{\pounds_{N}}\,\theta^{-}_{1}\,. \tag{22b}$$

差值 b 介于式（22a）和式（22b）——Kerr-Newman与“Reissner-Nordstr¨om $+iy$”——之间的差异给出

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{KN}} \;&\sim\; \mathrm{e}^{i\pounds_{N}}\left(p_{\mu}dx^{\mu} + \frac{\mathrm{e}^{-2i\pounds_{N}}-1}{\pounds_{N}}\,\theta^{-}_{1}\right),\\ &=\; \mathrm{e}^{i\pounds_{N}}\left(\theta_{(0)} - ip_{\mu}Dy^{\mu} + \sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{(-2i)^{\ell}}{\ell!}\,p_{\mu}\big((\iota_{N}D)^{\ell-2}\iota_{N}R^{-\mu}{}_{\nu}\big)y^{\nu} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{\ell}}{\ell!}\,(\iota_{N}d)^{\ell-1}\iota_{N}F^{-}\right),\end{aligned} \tag{23}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{KN}} \;\sim\;& p_{\mu'}dz^{\mu'} - 2i\,\tilde{\lambda}_{I\dot{\alpha}'}\,y^{\dot{\alpha}'\alpha'}D\lambda_{\alpha'}{}^{I} + A_{\mu'}(z)\,dz^{\mu'}\\ &+\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{(-2i)^{\ell}}{\ell!}\sum_{p=1}^{\lfloor \ell/2\rfloor}\sum_{\alpha\in\Omega_{p}(\ell)}\mathscr{K}_{\alpha}\,p_{\mu'}\begin{pmatrix}\big(Q^{-}_{\alpha_1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_p}\big)^{\mu'}{}_{\sigma'}\,dz^{\sigma'}\\ +(\alpha_p-2)\big(Q^{-}_{\alpha_1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_{p-1}}Q_{\alpha_p-1}\big)^{\mu'}{}_{\sigma'}Dy^{\sigma'}\end{pmatrix}\\ &+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{\ell}}{\ell!}\Big(\big(P^{-}_{\ell}\big)_{\sigma'}\,dz^{\sigma'} + (\ell-1)\big(P^{-}_{\ell-1}\big)_{\sigma'}Dy^{\sigma'}\Big)\\ &+\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{(-2i)^{\ell}}{\ell!}\sum_{p=2}^{\lfloor(\ell+1)/2\rfloor}\sum_{\alpha\in\Omega_{p}(\ell+1)}\mathscr{K}_{\alpha}\begin{pmatrix}\big(P^{-}_{\alpha_1-1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_p}\big)_{\mu'}\,dz^{\mu'}\\ +(\alpha_p-2)\big(P^{-}_{\alpha_1-1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_{p-1}}Q_{\alpha_p-1}\big)_{\mu'}Dy^{\mu'}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{24}$$

再次，我们发现了这样的结构： P 或 Q 张量串中的第一个分量会产生反自对偶投影。式（24）在自对偶极限下重现了式（9）。友情提示，我们的指标记号 [11] 表示

$$(P_\ell)_{\mu'} \;=\; F_{\rho'_1\mu';\rho'_2;\cdots;\rho'_\ell}(z)\, y^{\rho'_1} y^{\rho'_2}\cdots y^{\rho'_\ell}\,, \tag{25a}$$

$$(Q_\ell)^{\mu'}{}_{\sigma'} \;=\; R^{\mu}{}_{\rho'_1\rho'_2\sigma';\rho'_3;\cdots;\rho'_\ell}(z)\, y^{\rho'_1} y^{\rho'_2} y^{\rho'_3}\cdots y^{\rho'_\ell}\,. \tag{25b}$$

式 (24) 给出了克尔-纽曼作用量的 Googly表述。重申一下，它描述了完全一般的非自对偶引力电磁场构型，但对待自对偶和反自对偶模式的方式并不对等。它给出了一个局域于全纯世界线 $z^{\mu'}$ 上的世界线作用量，其微扰理论体现了入射正螺旋度光子和引力子的同螺旋度自旋指数化。光子耦合始终是线性的。仅当入射光子携带负螺旋度时，才会出现引力光子接触顶点。在自旋长度展开中考察时，第一个引力光子接触顶点出现在 $\mathcal{O}(y^3)$。

诠释。——我们以对物理诠释的简要评述作结，并回顾文献 [7] 中给出的评论。式 (5) 表示由一条狄拉克–米斯纳弦（磁通量与 NUT 通量的线缺陷）连接的两个带电质量。式 (5) 表示附着于一个带电质量上的悬垂反自对偶狄拉克–米斯纳弦。狄拉克–米斯纳弦的形状恰好对于由世界线所定义的每一个同时性切片都是测地的固有时。就狄拉克弦部分而言，基于其作为拓扑曲面算符的公认地位，这一点是完全合理的。

凭借参考文献 [15]，揭示的对纽曼–贾尼斯算法的清晰解读，我们很容易认识到，这种弦结构正是实际狄拉克–米斯纳弦在克尔-纽曼解 [35] 的紫外描述中的精确红外对应物。具体而言，参考文献 [15] 表明，克尔-纽曼解作为爱因斯坦–麦克斯韦理论中的全纯鞍点，代表一对自对偶和反自对偶带电陶布–纽特瞬子。总之，全纯世界线 $z^{\mu'}$ 是构成克尔–纽曼黑洞的自对偶带电陶布–纽特瞬子世界线的红外化身。

式 (24) 中的 googly 作用量对自对偶扇区进行微扰——至少在这个扇区中，我们已经能够通过超可积性（由式 (14) 和 (15) 导出）或同螺旋度自旋指数化等显著性质，全面理解其动力学。googly 纲领旨在从克尔-纽曼探针动力学中可精确求解的部分入手，探究其复杂动力学，这听起来合乎情理。

请注意，文献 [36] 曾推测存在某种世界面结构，但并未给出明确的物理诠释，也未提供式 (5) 和 (24) 这类显式公式。

致谢。—J.-H.K. 获得能源部（资助编号 DE-SC0011632）和 Walter Burke 理论物理研究所的支持。

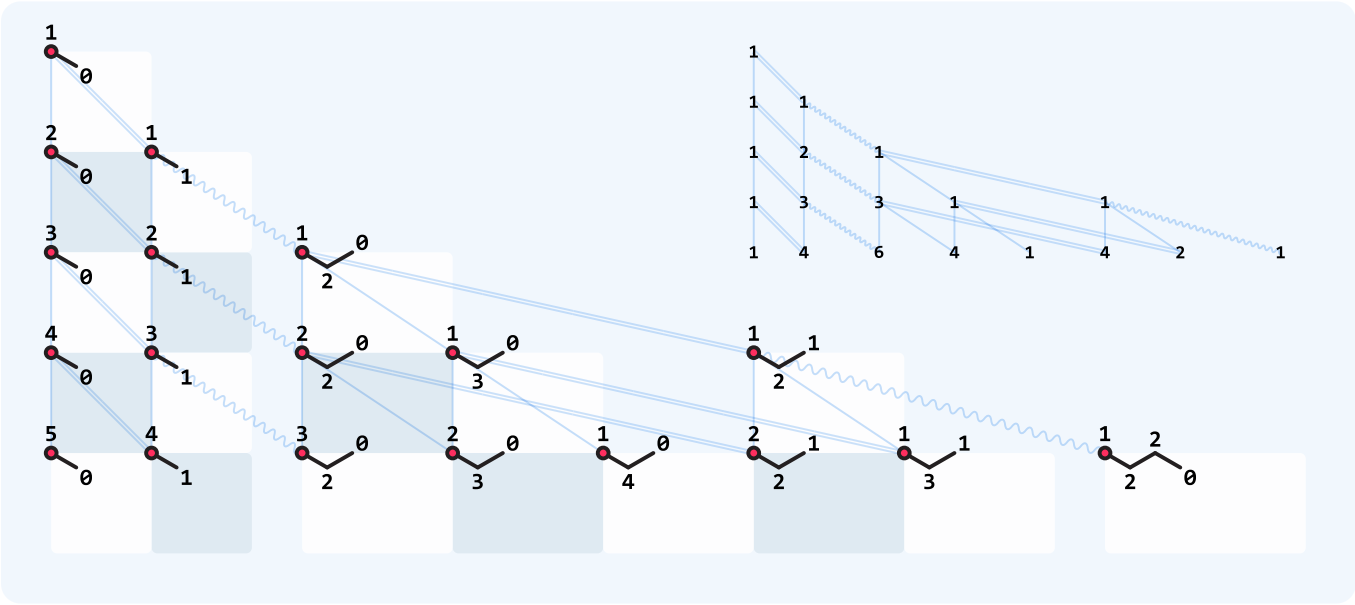


图 2. 爱因斯坦-麦克斯韦几何的“有机化学”。每一行中的分子均由上一行中的分子经 $\iota_N D$ 的作用而来。单线表示反应 $(P_{\alpha_1}Q_{\alpha_2}\cdots Q_{\alpha_p})dx \mapsto \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_p=1}(P_{\alpha_1+\beta_1}Q_{\alpha_2+\beta_2}\cdots Q_{\alpha_p+\beta_p})dx$ 与 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_p \geq 0$。双线表示反应 $(PQ\cdots Q)\,dx \mapsto (PQ\cdots Q)\,Dy$。波浪线表示“聚合”反应 $(PQ\cdots Q)\,Dy \mapsto (PQ\cdots Q)(Q_2\,dx)$。参见图 3 及文献 [11]。右上角较小的示意图展示了各分子的系数。

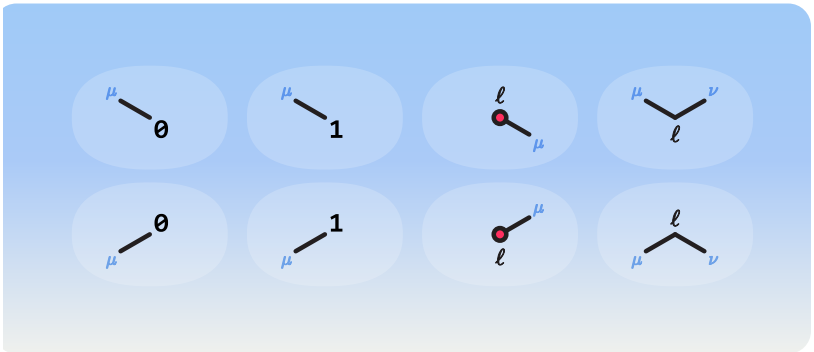


图 3. 图 2 中使用的图形记号。第一行中的元素依次表示 dx^μ、 Dy^μ、$(P_\ell)_\mu$ 和 $(Q_\ell)^{\mu\nu}$。第二行中的元素依次表示 dx_μ、 Dy_μ、$(P_\ell)^\mu$ 和 $(Q_\ell)_{\mu\nu}$。

[1] W. D. Goldberger 和 I. Z. Rothstein, “延展物体引力的有效场论,” *Phys. Rev. D* **73**(2006) 104029, arXiv:hep-th/0409156.[2] R. A. Porto, “NRGR 中自旋天体运动的后牛顿修正,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 104031, arXiv:gr-qc/0511061 .[3] M. Levi 和 J. Steinhoff, “后牛顿方案中有效场论里的自旋引力天体,” *JHEP*09 (2015) 219, arXiv:1501.04956 [gr-qc].[4] R. A. Porto, “有效场论学家处理引力动力学的方法,” *Phys. Rept.* **633** (2016) 1–104,arXiv:1601.04914 [hep-th] .[5] M. Levi, “后牛顿引力的有效场论：综合综述,” *Rept. Prog. Phys.* **83** no. 7, (2020) 075901, arXiv:1807.01699 [hep-th].[6] G. K¨alin 和 R. A. Porto, “保守双星动力学的后闵可夫斯基有效场论,” *JHEP* **11** (2020) 106, arXiv:2006.01184 [hep-th].[7] J.-H. Kim, “Kerr双扭量粒子,” arXiv:2602.19495 [gr-qc].[8] R. Penrose, “扭量与粒子：概要,” pp. 129–145. 1974.[9] Z. Perj ´ es, *Phys. Rev. D* **11** 1975 2031 2041 “相对论力学的扭量变量,” ( ) – .[10] P. Tod, “扭量理论中出现的一些辛形式,” *Reports on Mathematical Physics* **11** no. 3, (1977) 339–346.[11] J.-H. Kim, “通过切丛形式主义求得任意阶的测地偏离,” arXiv:2509.23600 [gr-qc].[12] J.-H. Kim, “关于Kerr自旋粒子运动方程的注记,” arXiv:2512.23697 [gr-qc].[13] E. T. Newman 和 A. I. Janis, “关于Kerr自旋粒子度规的注记,” *J. Math. Phys.* **6** (1965) 915–917.[14] E. T. Newman、R. Couch、K. Chinnapared、A. Exton、A. Prakash 和 R. Torrence, “旋转带电质量的度规,” *J. Math. Phys.* **6** (1965) 918–919.[15] J.-H. Kim, “来自Taub-NUT瞬子的纽曼-贾尼斯算法,” arXiv:2412.19611 [gr-qc].[16] A. Guevara、A. Ochirov 和 J. Vines, “通过指数化软因子散射自旋黑洞,” *JHEP* **09**(2019) 056, arXiv:1812.06895 [hep-th].[17] A. Guevara、A. Ochirov 和 J. Vines, “通过最小耦合振幅研究自旋方向任意的黑洞散射,” *Phys. Rev. D* **100** no. 10, (2019) 104024, arXiv:1906.10071 [hep-th] .[18] N. Arkani-Hamed、Y.-t. Huang 和 D. O’Connell, “作为基本粒子的Kerr黑洞,” *JHEP* **01** (2020) 046, arXiv:1906.10100 [hep-th] .

[19] H. Johansson 和 A. Ochirov, 《具有自旋的有质量量子粒子的双拷贝》, *JHEP* **09** (2019) 040,arXiv:1906.12292 [hep-th].[20] R. Aoude、K. Haddad 和 A. Helset, 《壳上重粒子有效理论》, *JHEP* **05** (2020) 051,arXiv:2001.09164 [hep-th] .[21] A. Lazopoulos、A. Ochirov 和 C. Shi, 《含四个有质量夸克和同螺旋度胶子的任意重数振幅》, *JHEP* **03** (2022) 009, arXiv:2111.06847 [hep-th].[22] J.-H. Kim, 《渐近自旋时空》, *Phys. Rev. D* **111** 第 10 期, (2025) 105011, arXiv:2309.11886 [hep-th].[23] C. Cheung 和 J. Mangan, 《协变色-运动学对偶性》, *JHEP* **11** (2021) 069, arXiv:2108.02276 [hep-th]. [24] J.-H. Kim, 《辛扰动理论》。即将发表。[25] V. Bargmann、L. Michel 和 V. L. Telegdi, 《均匀电磁场中运动粒子的偏振进动》, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 435–436。[26] M. Mathisson, 《物质系统的新力学》, *Acta Phys. Polon.* **6** 1937 163 200 ( ) – 。

[27] A. Papapetrou, 《广义相对论中的自旋测试粒子 I》, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **209** (1951) 248–258。[28] W. G. Dixon, 《广义相对论中延展体的动力学 I：动量和角动量》, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **314** (1970) 499–527。[29] L. P. Hughston、R. Penrose、P. Sommers 和 M. Walker, 《关于带电Kerr解中带电粒子轨道的一个二次第一积分》, *Commun. Math. Phys.* **27**(1972) 303–308。 [30] T. Adamo、G. Bogna、L. Mason 和 A. Sharma, 《自对偶 Taub-NUT上的散射》, arXiv:2309.03834 [hep-th].[31] J. F. Plebanski, 《关于爱因斯坦子结构的分离》, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 2511–2520。[32] J. F. Plebanski, 《复爱因斯坦方程的一些解》, *Journal of Mathematical Physics* **16** 第 12 期, (1975) 2395–2402。 [33] I. Bialynicki-Birula、E. Newman、J. Porter、J. Winicour、B. Lukacs、Z. Perjes 和 A. Sebestyen, 《关于螺旋度的注记》, *Journal of Mathematical Physics* **22**第 11 期, (1981) 2530–2532。[34] A. Ashtekar, 《关于螺旋度和自对偶性的注记》, *Journal of mathematical physics* **27** 3, 1986 824 827 第 ( ) 期 – 。[35] 这里, “ 红外 ” 指点粒子有效理论, 而 “ 紫外 ” 指广义相对论。 [36] A. Guevara、B. Maybee、A. Ochirov、D. O’connell 和 J. Vines, 《Kerr的一个世界面》, *JHEP* **03** (2021) 201, arXiv:2012.11570 [hep-th] 。