arXiv:2603.07565v1 [math.GT] 8 Mar 2026

通过交换图研究属0 二次微分分层的基本群

JEONG-HOON SO

摘要。我们探讨如何利用交换图技术研究亚纯二次微分分层的拓扑。交换图为基本群提供了自然的生成元。通过将三角剖分的组合结构推广到加权混合剖分，我们推广了简单零点情形中熟悉的关系，并引入了一种仅在高阶零点周围出现的额外关系。在具有四个奇点的属零情形中，我们证明这些关系足以给出基本群的显式表示。

目录

1. 引言 1
2. 辫群与曲面 3
3. 交换图 7
4. 二次微分 24
5. 交换图与模空间 31
6. 示例与新情形 41
参考文献 55

1. 引言

理解二次微分分层的拓扑是泰希米勒理论中的核心问题。然而，尽管它们十分重要，甚至连基本的拓扑不变量——例如其基本群——也很难直接计算。由 [BS15] 开创并在 [KQ20], 中加以拓展的组合方法，以基于三角剖分和翻转构建的组合模型，取代了二次微分的解析复杂性。在这一框架下，交换图自然地给出了分层基本群的生成元。本文关注的核心问题是确定这些生成元之间的关系。

首先，考虑黎曼曲面上的一个亚纯二次微分分层，其奇点仅由简单零点和阶至少为三的极点构成。在每个极点处进行实定向爆破后，曲面变为一个带有边界的标记曲面，其边界分支与极点相对应。对于该分层中的任意无鞍点微分，水平叶状结构确定一个典范三角剖分（见小节4.2），任意两个这样的三角剖分都可通过一系列翻转相互转换。

在 [BS15], 的研究中，这些三角剖分表现为分层的自然墙与室分解中的腔室，而翻转对应于穿越

余维一墙。这给出了一个满射

$$\pi_1(\text{exchange graph of triangulations}) \twoheadrightarrow \pi_1(\text{stratum}),$$

表明交换图为基本群提供了一组完备的生成元。

在组合方面，交换图包含三种规范的环路，我们将其称为关系，因为稍后我们会对这些环路取商。每个关系都由三角剖分中两条弧（边）的相对位置决定：

- 由一对在任意三角形内部都不相交的弧决定的方形关系；
- 由一对在单个三角形中相交一次的弧决定的五边形关系；
- 由一对分别在两个三角形中的每一个内相交一次的弧决定的六边形关系。

这些环路在带框层中的像是可缩的。这一点已在[KQ20], 中得到证明，其中还表明它们已经生成了整个核。我们仅使用三角剖分和二次微分重新表述这些论证，从而避免使用簇论语言：

命题 1.1 (命题5.4)。 存在一个同构

$$\pi_1 \operatorname{EG}^\star(\mathbf{S}) / \operatorname{Rel}(\mathbf{S}) \simeq \pi_1 \operatorname{Quad}(\mathbf{S})$$

轨形基本群之间。

本文旨在将这一图景推广到具有高阶零点的分层中。阶为 k 的零点有 $k+2$ 条出射分离轨，因此必须用混合剖分取代 [BMQS22], 中的三角剖分，使得阶为 k 的零点表示为一个(k+2)边形。翻转也相应推广，由此得到的交换图再次为该分层的基本群提供自然生成元。

经典的正方形、五边形和六边形关系可直接推广到混合剖分。我们给出第二类六边形，它只出现在高阶零点周围，由一对在同一多边形内部相交两次的弧决定（见小节3.4）。 [BMQS22] 的一个结果表明，室映射诱导出一个满射

$$\pi_1(\text{exchange graph of mixed-angulations}) \twoheadrightarrow \pi_1(\text{stratum}),$$

因此，交换图总能提供生成元。我们在命题5.6中证明，所有上述关系——正方形关系、五边形关系以及两类六边形关系——都属于核。

一般而言，尚未解决的问题是这些关系是否生成了整个核。作为初步检验，我们分析最简单的非平凡族：亏格 0 且有四个奇点。在这种情况下，基本群通过经典论证基本上已为人所知，因此我们的显式计算为交换图方法提供了非平凡的交叉验证。我们证明，对于零点阶数和极点阶数 > 2 的任意取值，广义关系已经涵盖了交换图生成元之间的所有关系：

定理 1.2 (定理 6.2)。 对于 $g = 0$ 且有四个奇点的情形，我们有一个自然同构

$$\pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \;\cong\; \pi_1 \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$$

轨形基本群。此外，所得的群可以根据对称类型直接确定：

(a) $\mathbb{Z} \times F_2$，如果四个奇点的阶各不相同；*(b)* $\langle z, c, d \mid [z, c], [z, d],\ c^2 = 1\rangle$，如果两个奇点的阶相同，且其余两个奇点的阶均为偶数，并且与前两个奇点的阶不同；*(c)* $\langle c, d \mid [c^2, d]\rangle$，如果两个奇点的阶相同，且其余两个奇点的阶均为奇数，并且与前两个奇点的阶不同；*(d)* $\langle s, d \mid [d^3, s], s^2\rangle$，如果有三个阶相同的偶数阶零点；*(e)* $B_3 = \langle s, d \mid d^3 = s^2\rangle$，如果有三个阶相同的奇数阶零点。

带权交换图总能给出任意分层的基本群的生成元，我们也明确给出了一组关于这些生成元的关系。一个有趣的开放问题是：当奇点数量增加或曲面亏格为正时，是否会出现额外的关系

轨形约定。 许多无框架的二次微分分层是轨形而非流形，这是由于相同阶零点的置换所带来的剩余对称性所致。本文中，凡是底层分层带有此类稳定子的情形，所有基本群均指轨形基本群。这一约定尤其适用于第 6 节中的显式计算。

开放问题与未来方向。 本文的结果提出了若干值得进一步研究的方向。一个自然的下一步是将本文所发展的方法推广到奇点数量更多的分层，或推广到更高亏格的曲面。在本文考察的情形中，交换图仍然足够小，因此可以通过显式计算分析其基本群。对于奇点更多的分层，交换图的规模会迅速增大，顶点和边也会大幅增加，从而使这类直接计算变得愈发困难。

一个有趣的开放问题是，本文所考察的关系——即正方形、五边形以及两类六边形关系——是否已经生成了所有一般情形下的关系。在更复杂的翻转构型中，或许会出现其他类型的关系；但也有可能，即使在这些规模更大的交换图中，已知的局部关系仍然足够。

致谢。 感谢我的导师 Martin Möller 的指导与支持，并衷心感谢德国研究基金会（DFG）通过合作研究中心 TRR 326“均匀化结构的几何与算术”项目（项目编号 444845124）提供的资助。

2. 辫群与曲面

二次微分分层的拓扑自然引出了这样的问题：点集如何在曲面上移动，以及底层曲面如何变形。这两种现象都由经典对象来描述：辫群、构形空间和映射类群。这些群随后会作为

低复杂度分层的显式基本群，以及曲面模型之间自然遗忘映射的核或目标出现。

在本节中，我们汇集这些应用所需的背景知识。我们从辫群及其纯辫群入手，并一并介绍由一般曲面上的构形空间得到的相应曲面辫群。随后，我们引入作为二次微分的拓扑模型而出现的各类曲面——标记曲面、装饰曲面以及加权装饰曲面。最后，我们回顾作用在这些曲面上的映射类群，以及曲面辫群作为从装饰映射类群到未装饰映射类群的遗忘映射之核所起的作用。

2.1. **辫群与曲面辫群**。 在引入它们的曲面类似物之前，我们回顾辫群与纯辫群的经典定义和标准表示。

定义 2.1 ([Bir16], 定理 1.8). 辫群 B_n 在 n 股上由 σ_1，……，σ_{n-1} 生成，并满足关系

(i) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ *if* $|i-j|>1$,
(ii) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ *for all* i.

辫群具有几何解释。考虑 n条平行且已编号的股。生成元 σ_i 对应于扭转第 i 股与第$(i+1)$股，使其下端互换，且第 i股从第$(i+1)$股上方穿过。存在自然满射 $B_n \to S_n$ ，将 σ_i 映到对换$(i,\ i+1)$，其核为纯辫群 PB_n。

对于 $1 \le i < j \le n$，令

$$a_{ij} := (\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1})\sigma_i(\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}), \qquad A_{ij} := a_{ij}^2.$$

定理 2.2 ([Lee10],定理 1.1，注 3.1). 纯辫群 PB_n 由下列元素生成

$$\{A_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$$

并满足如下关系：

(P1) $A_{ij}A_{rs} = A_{rs}A_{ij}$ *if* $r<s<i<j$ *or* $i<r<s<j$,
(P2) $A_{ji}A_{ir}A_{rj} = A_{ir}A_{rj}A_{ji} = A_{rj}A_{ji}A_{ir}$ *if* $r<i<j$,
(P3) $A_{rs}(A_{jr}A_{ji}A_{js}) = (A_{jr}A_{ji}A_{js})A_{rs}$ *if* $r<i<s<j$.

此外，存在一个短正合列

$$0 \to F_n \xrightarrow{g} \mathrm{PB}_{n+1} \xrightarrow{f} \mathrm{PB}_n \to 0,$$

其中 $F_n = \langle A_{1(n+1)}, \ldots, A_{n(n+1)}\rangle$ 是自由的。该序列分裂，因此

$$\mathrm{PB}_{n+1} \cong F_n \rtimes \mathrm{PB}_n\,.$$

$n=2$. 这里 $B_2 = \langle\sigma_1\rangle \cong \mathbb{Z}$，且 $\mathrm{PB}_2 = \langle\sigma_1^2\rangle$ 是偶辫的指数为二的子群。

$n=3$. 我们有

$$B_3 = \langle a, b \mid aba = bab\rangle,$$

其中 $a=\sigma_1$、 $b=\sigma_2$。纯辫群为

$$\mathrm{PB}_3 = \langle A_{12}, A_{23}, A_{13} \mid A_{23}A_{12}A_{13} = A_{12}A_{13}A_{23} = A_{13}A_{23}A_{12}\rangle,$$

其中 $A_{12}=a^2$、 $A_{23}=b^2$和 $A_{13}=ba^2b^{-1}$。其中心元 $C=(ab)^3=(ba)^3$与所有 A_{ij} 均可交换；因此 $\mathrm{PB}_3 \cong \mathbb{Z}\times F_2$。

辫群可以自然地推广到曲面上。我们遵循 [GJP15]。令 S 为一亏格为 $g \geq 0$且具有 $p \geq 1$个边界分支的紧致连通定向曲面。令

$$\mathrm{F}_n(S) := \{(p_1, \ldots, p_n) \in S^n \mid p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j\}$$

是 S 上 n 有序点的构形空间。对称群 S_n 通过坐标置换在 $\mathrm{F}_n(S)$ 上自由作用。其商

$$\mathrm{D}_n(S) := \mathrm{F}_n(S)/S_n$$

是 S 上 n 无序点的构形空间。

定义 2.3（Fox-Neuwirth）。具有 S 上的曲面辫群 n，有 n 股，为

$$\mathrm{B}_n(S) := \pi_1(\mathrm{D}_n(S)),$$

其纯辫群版本为

$$\mathrm{P}_n(S) := \pi_1(\mathrm{F}_n(S)).$$

注 2.4。对于圆盘 $S = D^2$，这些群分别与经典群相同：$\mathrm{B}_n(D^2) = B_n$ 和 $\mathrm{P}_n(D^2) = \mathrm{PB}_n$。

引理 2.5。存在一个同构

$$\mathrm{PB}_n \simeq \mathrm{P}_{n-2}(\mathbb{C} \setminus \{0,1\}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}.$$

证明。考虑短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{P}_{n-2}(\mathbb{C} \setminus \{0,1\}) \xrightarrow{j} \mathrm{PB}_n \xrightarrow{p_*} \mathrm{PB}_2 \longrightarrow 1,$$

其中 j 将前两股固定在 0 和 1，而 p_* 遗忘其余$n-2$股。由于 $\mathrm{PB}_2 \cong \mathbb{Z}$，该序列分裂，从而得到所声称的半直积。□

此处引入的群稍后以两种方式再次出现：作为遗忘映射的核

$$F_M : \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) \to \mathrm{MCG}(\mathbf{S}),$$

以及作为某些二次微分分层的显式基本群。例如，某些分层产生三股辫群，而另一些则给出三股纯辫群。

2.2. **曲面**。我们首先回顾所有组合与几何构造将在其上展开的曲面类。在全文中，这些曲面作为我们所研究的二次微分分层的底层拓扑模型。具体而言：

- 标记曲面 刻画高阶极点处的实爆破；
- 装饰标记曲面还会将微分的零点记录为内部标记点；并且
- 加权装饰标记曲面则进一步通过权函数对每个零点的阶进行编码。

我们对标记曲面与装饰标记曲面的处理遵循§3.1-3.4与§4.1，见[KQ20], 而为处理高阶零点所需的加权设定则遵循§3.2，见 [BMQS22]。这三层结构支撑三种相应的组合概念：三角剖分、装饰三角剖分以及**w**-混合剖分，它们进而产生后文所研究的各种交换图。

定义2.6. 一个（无穿刺的）标记曲面

$$\mathbf{S} = (S, \mathbf{M})$$

是一个紧致连通定向光滑曲面 S，具有非空边界 ∂S，以及标记点的有限集$\mathbf{M} \subset \partial S$，使得每个边界分支至少包含一个标记点。在相差微分同胚的意义下，$\mathbf{S}$ 由其亏格 g、边界分支的数目 b，以及 $m = |\mathbf{M}|$个标记点在这些边界分支之间的分布所决定。

在二次微分的框架下，人们常常通过添加用以记录微分零点的内部点来增强标记曲面。由此引出装饰标记曲面的概念。

定义 2.7. 一个装饰标记曲面

$$\mathbf{S}_\Delta = (\mathbf{S}, \Delta)$$

是一个标记曲面$\mathbf{S}$，连同装饰点的有限集 $\Delta \subset \mathrm{int}(\mathbf{S})$ 。装饰点起着二次微分零点的作用。对于亏格为 g 、具有 b 个边界分支和 m个边界标记点的曲面，我们定义

$$\aleph = 4g - 4 + 2b + m.$$

在最简单的情形下，对应于仅有简单零点的微分，有$|\Delta| = \aleph$。然而一般而言，我们允许任意有限子集 $\Delta \subseteq \mathrm{int}(\mathbf{S})$ 满足 $|\Delta| \leq \aleph$，以容纳高阶零点。

最后，我们引入权重来记录这些零点的阶。这便引出了加权装饰标记曲面这一一般概念。

定义 2.8. 加权装饰标记曲面（wDMS）

$$\mathbf{S}_\mathbf{w} = (\mathbf{S}, \Delta, \mathbf{w})$$

是一个装饰标记曲面$\mathbf{S}_\Delta$，并配有一个权函数

$$\mathbf{w} \colon \Delta \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq -1}.$$

我们用 $r = |\Delta|$ 表示装饰点（亦称有限临界点）的数量，以及

$$\|\mathbf{w}\| = \sum_{Z \in \Delta} \mathbf{w}(Z)$$

表示它们的总权重。若权函数$\mathbf{w}$ 与$\mathbf{S}$ 相容，则

$$\|\mathbf{w}\| - (m + 2b) = 4g - 4,$$

其中 g、 b 和 $m = |\mathbf{M}|$ 分别表示亏格、边界分支数和标记点数。若每个零点都是单零点，则所有权重均为1，此时便得到普通的装饰标记曲面$\mathbf{S}_\Delta$。

2.3. **映射类群**。 设 S 为一个紧致、连通、定向的光滑曲面。用 $\mathrm{Homeo}^+(S, \partial S)$ 表示 S 上保定向、且在 ∂S上限制为恒等映射的同胚所构成的群。

定义 2.9. S 的映射类群是

$$\mathrm{MCG}(S) := \mathrm{Homeo}^+(S, \partial S) / \mathrm{Homeo}_0(S, \partial S),$$

其中 $\mathrm{Homeo}_0(S, \partial S)$ 是单位元分支。将同胚替换为微分同胚，或将同痕替换为同伦，会得到同一个群。

设 $\mathbf{S}$ 为带有标记点$\mathbf{M} \subset \partial S$的标记曲面，并设 $\mathbf{S}_\Delta$ 为在 S 内部带有装饰 Δ 的装饰标记曲面。

定义 2.10. 我们定义

$$\mathrm{MCG}(\mathbf{S}) := \mathrm{Homeo}^+(\mathbf{S})/isotopy, \qquad \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) := \mathrm{Homeo}^+(\mathbf{S}_\Delta)/isotopy,$$

其中，$\mathrm{Homeo}^+(\mathbf{S})$（分别地，$\mathrm{Homeo}^+(\mathbf{S}_\Delta)$）表示保持$\mathbf{S}$ 定向且将$\mathbf{M}$ （分别地，$\mathbf{M} \cup \Delta$）整体映到自身的同胚群。

遗忘装饰点给出一个自然同态

$$F_M : \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow \mathrm{MCG}(\mathbf{S}).$$

引理 2.11. 遗忘映射的核 $F_M : \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) \to \mathrm{MCG}(\mathbf{S})$ 是曲面辫群（见定义 2.3）

$$\mathrm{B}_n(\mathbf{S}) = \pi_1(D_n(S), \Delta),$$

其中， $D_n(S)$ 是 S上 $n = |\Delta|$ 个无序点的构形空间。

证明。 由于 $\mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta)$ 和 $\mathrm{MCG}(\mathbf{S})$ 在标记点$\mathbf{M}$上的作用相同，因此我们可以将讨论限制在逐点固定$\mathbf{M}$ 的子群上。然而，任何这样的（保向）微分同胚都同伦于一个逐点固定边界∂S 的微分同胚。因此，所需的核与固定边界的映射类群之间的遗忘映射 $\mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta, \partial S) \to \mathrm{MCG}(\mathbf{S}, \partial S)$ 的核相同。接下来，由 $\Psi(f) = f(\Delta)$ 定义的映射 $\Psi : \mathrm{Homeo}^+(S) \to D_n(S)$ 是一个局部平凡纤维丛，其在 Δ 上的纤维等于 $\mathrm{Homeo}^+(S, \Delta)$。取该纤维化的同伦长正合列可得：

$$\cdots \to \pi_1(\mathrm{Homeo}^+(S, \Delta)) \to \pi_1(\mathrm{Homeo}^+(S)) \to \pi_1(D_n(S), \Delta) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(S, \Delta)) \to \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(S)) \to \pi_0(D_n(S), \Delta) \to 0$$

若 $\pi_1(\mathrm{Homeo}^+(S)) = 1$ 和 $\pi_0(\mathcal{D}_n(S)\ \Delta) = 1$ 成立，则这可化为短正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(D_n(S), (\Delta)) \longrightarrow \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta, \partial S) \longrightarrow \mathrm{MCG}(\mathbf{S}, \partial S) \longrightarrow 1$$

更多详情请参见 [GJP15]中的 § 2.4 (5)。 □

定义 2.12。 设 $\mathbf{S_w} = (S, \mathbf{M}\ \Delta)$ 为一个加权装饰标记曲面。$\mathrm{MCG}(\mathbf{S_w})$ 带权映射类群 是由 S 上保持定向的同胚（其同伦类固定 $\mathbf{M}$，并将 Δ 集合映到自身且保持权重）构成的群：

$$\mathrm{MCG}(\mathbf{S_w}) = \mathrm{Homeo}^+(\mathbf{S_w})/isotopy.$$

3. 交换图

本节将探讨与第2.2小节所介绍曲面相关的组合结构。对于每种类型的曲面——标记曲面、装饰曲面和加权装饰曲面——我们都为其配备相应类别的弧系（三角剖分或混合剖分），以及一种以一条弧替换另一条弧的翻转操作。由此得到的组合结构由交换图编码，其顶点对应弧系，边对应翻转。

对于标记曲面与装饰曲面，我们沿用[KQ20], 第3.1–§3.4节的框架；而在加权情形下，我们采用 [BMQS22]第3.3节的混合剖分模型来定义交换图。在每种情形下，交换图都带有一组特定环路，这些环路源自弧对可能出现的局部构型。这些环路——正方形、五边形以及（在某些情况下）六边形环——贯穿全文并发挥核心作用：它们编码翻转之间的局部关系，而交换图的基本群对这些环路取商所得的群，将在后文中加以研究，并与二次微分分层的基本群进行比较。

我们先讨论标记曲面的交换图，包括其无向版本和有向版本；接着处理装饰情形，最后将这一构造推广到加权装饰标记曲面，在那里会出现另一类六边形环路。这为第4节做好了铺垫，该节将把这些组合模型与框架二次微分及其模空间的拓扑联系起来。

3.1. **无向交换图 S.** 我们首先依据 [KQ20] 讨论标记曲面的无向交换图。在这一设定中，顶点是三角剖分，边对应翻转。这一情形包含了所有其他交换图所依据的核心组合结构，并将作为接下来讨论有向、装饰和加权版本的起点。本小节末尾，我们将证明交换图的基本群关于正方形环路和五边形环路的商是平凡群（定理 3.4）。

定义 3.1. 设**S** 为一个标记曲面。

- **S** 上的一条开弧 是**S**| ∂S中一条简单本质曲线的同伦类，其端点位于**M**。
- 一条开弧是本质的，如果它（相对于端点）不同伦于一条边界线段或一个点。
- 两条弧是相容的，如果它们可以由不相交的曲线表示，但端点处可能除外。
- **S** 的一个三角剖分 T 是两两相容的开弧的一个极大集合。

每个三角剖分将曲面细分为有限多个理想三角形，其边要么是开弧，要么是边界线段。任意两个三角剖分都通过有限次翻转相关联，每次翻转如下将一条弧替换为另一条弧。

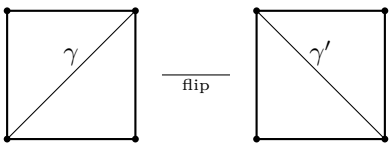


图 1。翻转：将四边形的一条对角线替换为另一条。

定义 3.2。 （无向）交换图 EG(**S**) 是一个连通图，其顶点对应于**S**的三角剖分，边对应于它们之间的翻转，即将一条弧 $\gamma \in T$ 替换为对边

对角线 γ'，该对角线属于与 γ 相邻的两个三角形所形成的四边形，见图 1。每个顶点的度为 $|T|$，即 $\mathbf{S}$的任一三角剖分中的弧数，因此该图是 $|T|$-正则图。

$\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S})$中的关系。

交换图中有两种基本的闭环。每个这样的环路由三角剖分中任选两条不同的弧确定：要么两条弧不相交于任何三角形，从而形成我们称为方形 环路的结构；要么两条弧恰好相交于一个三角形，从而形成五边形 环路。我们将它们称为方形和五边形关系，以预示后续将基本群对这些环路取商这一步骤。这一术语反映了交换图中相应环路的形状。

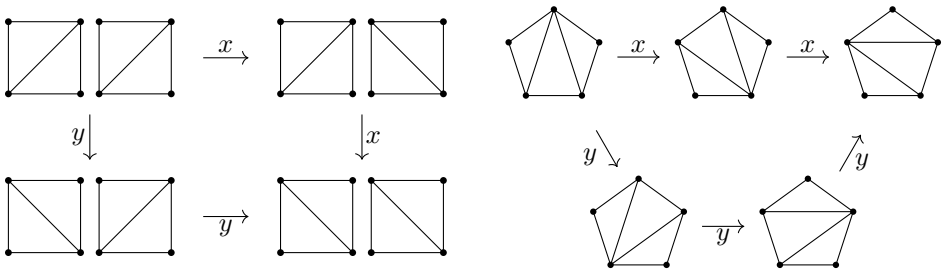


图 2。左：方形关系；右：五边形关系

局部构型	EG(S)中的关系	EG(S)中的形状
两条弧相交，但不在任何三角形中	$(y^2)^{-1}\cdot x^2$	正方形：图3
两条弧在一个三角形中相交一次	$(y^{-3})^{-1}\cdot x^2$	五边形：图3

定义 3.3. 令 $\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 表示无向交换图的基本群。我们用

$$\underline{\mathrm{Rel}}(\mathbf{S}) \subseteq \pi_1\underline{\mathrm{EG}}(\mathbf{S})$$

由所有正方形环路和五边形环路生成的正规子群：

$$\underline{\mathrm{Rel}}(\mathbf{S}) := \langle \textit{square, pentagon loops in } \underline{\mathrm{EG}}(\mathbf{S})\rangle.$$

我们以如下定理结束本段。

定理 3.4 ([KQ20，定理 3.5]；另见 [FST08，定理 3.10])。交换图 $\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 的基本群由正方形关系与五边形关系生成。换言之

$$\pi_1\underline{\mathrm{EG}}(\mathbf{S})/\underline{\mathrm{Rel}}(\mathbf{S}) = 1.$$

遵循 [CP07]的论证，我们首先定义如下单纯复形。令 $\mathcal{A}(\mathbf{S})$ 表示如下单纯复形：其顶点是$\mathbf{S}$ 中弧的同伦类，其 k-单形是由 $k+1$ 条两两相容弧组成的集合。

引理 3.5. $A(\mathbf{S})$ 的对偶复形的1-骨架恰好是$\mathrm{EG}(\mathbf{S})$。

证明. N-单形对应于三角剖分，其中 N 是极大弧复形中弧的数目。($N-1$)-单形是已去掉一条边的三角剖分。将这样的弧系延拓为三角剖分的方式（在同伦意义下）只有两种，且这两种方式相差对新弧的一次翻转。因此，每个($N-1$)-单形恰好位于两个 N-单形中，并且对应于这两个($N-1$)-单形的弧系相差一次翻转。□

现在我们可以证明该定理。

定理的证明。 根据引理 3.5 中的一条闭路径 $\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 可以看作位于 N-单形和 ($N-1$)-单形内部的一条闭路径 $A(\mathbf{S})$，其基点位于一个 N-单形的内部。这条环路可以通过 $(N-2)$-单形的内部作同伦变形。现在有两种类型的 $(N-2)$-单形。回顾一下，一个 $(N-2)$-单形对应于一个删去两条弧后的极大弧系。

(1) 弧系由两个四边形构成，其余部分为三角形；或者 (2) 弧系由一个五边形构成，其余部分为三角形。

在情况 (1) 中，($N-2$)-单形恰好包含于四个 N-单形和四个 ($N-1$)-单形中。这将得到方形关系。在情况 (2) 中，($N-2$)-单形恰好包含于五个 N-单形和五个 ($N-1$)-单形中。这将得到五边形关系。结合图的连通性，即可证明该断言。□

3.2. **S 的有向交换图S**。 现在，我们通过记录翻转的方向来细化无向交换图。在标记曲面的有向交换图中，每个翻转都被替换为一对方向相反的边，从而得到一个有向图。除了无向情形中已有的正方形环路和五边形环路外，当两条弧恰好相邻于两个三角形时，还会出现六边形环路。

在本小节中，我们将介绍三角剖分辫群，这是簇辫群的一种纯拓扑类比 [KQ20]。我们有意避免使用任何簇理论术语，并以曲面为基础表述所有内容。随后，我们证明三角剖分辫群恰好是有向交换图的基本群对正方形、五边形和六边形关系取商所得的群。

定义 3.6。 有向交换图$\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 由无向交换图$\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 得到：将每条对应于一次翻转的边替换为一条由方向相反的边构成的2–环。特别地，现在每次翻转都表现为一对互逆有向移动。

$\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ **中的关系**。

在有向交换图中，会出现第三种闭环。每个环路仍由三角剖分中的一对不同弧决定。除了正方形环路和五边形环路外，现在还有一种六边形 环路；当且仅当两条弧恰好相交于两个三角形时，这种环路才会出现，也就是说，它们共享一对相邻三角形，形成一个拓扑环带。和之前一样，我们将正方形、五边形和六边形环路称为关系，以预示后文的商结构，其中这些有向圈都是零伦的。它们的名称同样反映了有向交换图中对应环路的组合形状。

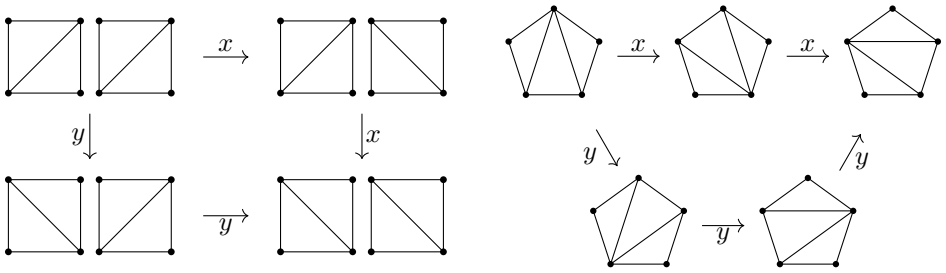


图 3。左：方形关系，右：五边形关系

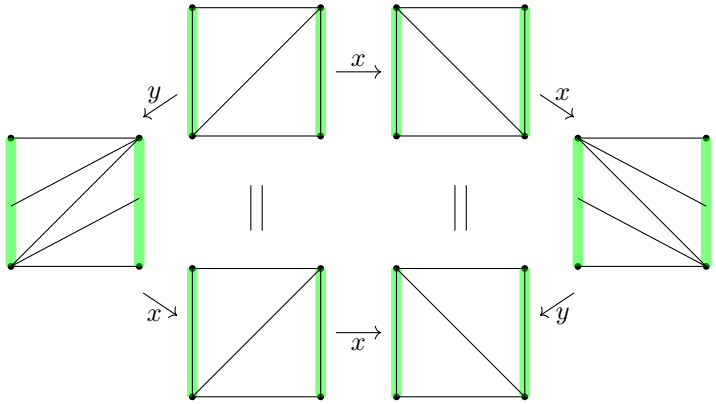


图 4。六边形关系

局部几何	π_1EG(S) 中的关系	EG(S) 中的形状
两条弧不相交于任何三角形中	$(y^2)^{-1} \cdot x^2$	正方形：图3
两条弧在一个三角形中相交一次	$(y^3)^{-1} \cdot x^2$	五边形：图3
两条弧分别在两个图形中各相交一次	$(yx^2)^{-1} \cdot x^2 y$	六边形：图4
三角形		

对于从有向交换图到无向交换图 $\mathbf{EG(S)} \to \mathbf{EG(S)}$的自然投影，这些关系的像沿用相同术语，仍称为正方形、五边形和六边形。不过请注意，在此投影下，有向路径 xy 和 yx 落在核中，因此六边形关系 $(yx^2)^{-1} \cdot x^2 y$ 在 $\mathbf{EG(S)}$中变为平凡关系。

—

定义 3.7。 令 $\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 表示定向交换图的基本群。我们记为

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) \subseteq \pi_1\,\mathrm{EG}(\mathbf{S})$$

由所有正方形环和五边形环生成的正规子群：

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) := \langle \textit{square, pentagon, hexagon loops in } \mathrm{EG}(\mathbf{S}) \rangle.$$

现在我们想描述商群 $\pi_1\,\mathbf{EG(S)}/\mathbf{Rel(S)}$。我们的目标是证明，该群由某些典范环路生成，这些环路称为局部扭转，

它们对应于沿同一方向对一条边进行两次翻转。由这些元素生成的子群将称为三角剖分辫群——这是将簇辫群 引入 [KQ20] 中的概念直接转换到三角剖分的情形。此小节余下部分的陈述与证明改编自 [KQ20], 第 2.4 节，但改用三角剖分的语言重新表述。

定义 3.8。 固定一个三角剖分 $T = \{e_i\}$。对于每条边 $e_i \in T$，位于 e_i 处的局部扭转 t_i 是由e_i处的两次正向翻转复合而成的长度为二的环路。因此

$$t_i \in \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}).$$

我们定义三角剖分辫群

$$\mathrm{TB}(T) := \langle t_i \mid e_i \in T \rangle \subseteq \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}).$$

三角剖分辫群的生成元满足熟知的辫关系，这也说明了其名称的由来。特别地，与不相邻边相关的局部扭转彼此交换，而与在单个三角形中相交一次的两条边相关的局部扭转满足标准辫关系。以下引理概述了这一点。

引理 3.9。设 e_i， $e_j \in T$。

(1) 若 e_i 和 e_j 不在 T 的任何三角形中相交，则

$$t_i t_j = t_j t_i$$

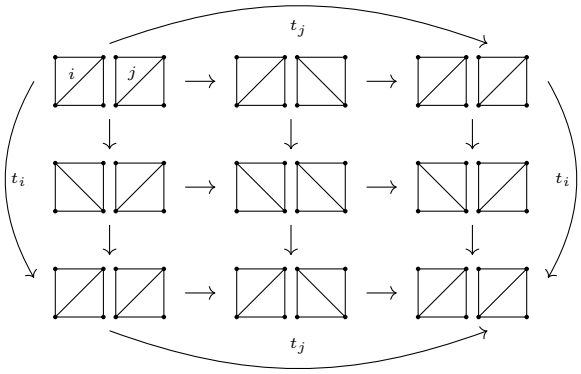
中 $\pi_1(\mathbf{EG(S)}\ T)/\operatorname{\mathbf{Rel(S)}}$。

(2) 若 e_i 和 e_j 在 T 的一个三角形中相交一次，则

$$t_i t_j t_i = t_j t_i t_j$$

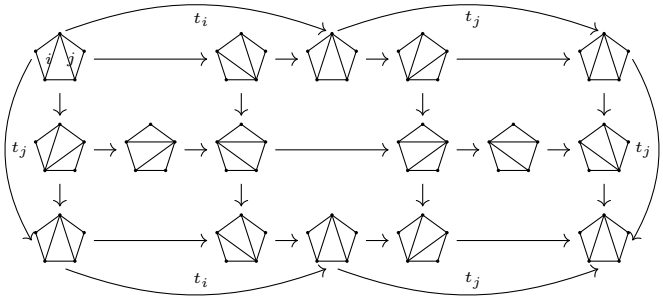
in $\pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S})$.

证明。 第一个关系由下图得出：



由于我们对正方形关系取商，该图交换；沿图先向右再向下，与先向下再向右相同。因此， $t_i t_j = t_j t_i$。

第二个关系由下图得出：



这一次，交换性源于对五边形取商。因此，$t_i t_j t_i = t_j t_i t_j$。□

结果表明，三角剖分辫群已经是整个群：

命题 3.10. 商图的基本群由局部扭转生成。换言之

$$\pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}) = \mathrm{TB}(T).$$

在证明它之前，我们首先定义基本群上的共轭映射。给定正向翻转 $T^\bullet \xrightarrow{z} T^\circ$，位于 **EG(S)** 中。由 z 作共轭得到

$$\mathrm{ad}_z : \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T^\circ)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T^\bullet)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}),$$
$$t \mapsto z^{-1} t z.$$

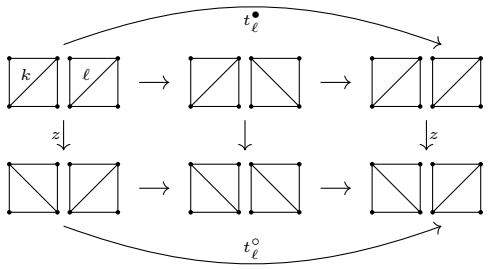
局部地，我们可以将 $T_\circ$ 与 $T^\bullet$ 的边集等同，并将这个公共集合记为 T_0。我们记 $\{t_\ell^\circ \mid \ell \in T_0\}$ 与 $\{t_\ell^\bullet \mid \ell \in T_0\}$ 分别为生成 $\mathrm{TB}(T^\circ)$ 与 $\mathrm{TB}(T^\bullet)$ 的局部扭转。在下文的命题 3.11 中，我们明确描述 ad_z 如何作用于这些生成元，并证明它在三角剖分辫群上诱导一个同构。

命题 3.11（共轭公式）。设 z 是边 $k \in T_0$ 处的正向翻转。则对任意 $\ell \in T_0$，

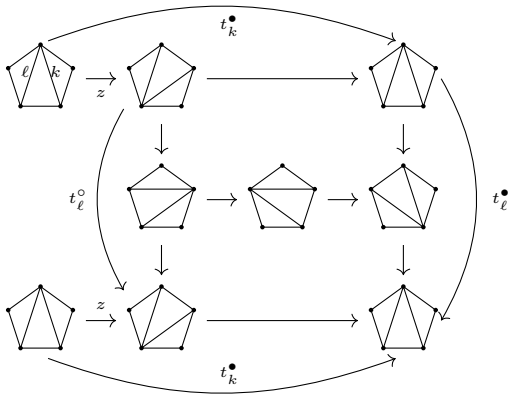
$$\mathrm{ad}_z(t_\ell^\circ) = \begin{cases} (t_k^\bullet)^{-1} t_\ell^\bullet t_k^\bullet, & \text{若 } \ell \text{ 在 } T_\circ \text{ 的一个公共三角形中按顺时针方向先于 } k; \\ t_\ell^\bullet. & \text{否则为} \end{cases}$$

特别地，ad_z 限制为一个同构 $\mathrm{TB}(T^\circ) \xrightarrow{\sim} \mathrm{TB}(T^\bullet)$。

证明. 我们只需证明该公式。首先考虑不存在从 l 到 k 的箭头的情况。这个图表



在 EG(S)/ Rel(S) 中交换。因此，$\mathrm{ad}_z(t_l^\circ) = z^{-1}t_\ell^\circ z = t_l^\bullet$。现在，假设存在从 l 到 k 的箭头。我们处于以下图表所示的情形



.

这在 EG(S)/Rel(S) 中交换。因此，$\mathrm{ad}_z(t_l^\circ) = z^{-1}t_l^\circ z = (t_k^\bullet)^{-1}t_l^\bullet t_k^\bullet$。 □

现在我们可以证明命题3.25。

命题 *3.25* 的证明。设 $t \in \mathrm{TB}(T_\circ)$，并设 $p\colon\ T \to T^\circ$ 是 $\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 中的一条路径。如果 p 的长度为一，设 $p = z$ 是一次正向翻转，则由命题 3.11 可得

$$p^{-1}tp \ = \ \mathrm{ad}_z(t) \ \in \ \mathrm{TB}(T).$$

对 p 的长度进行归纳，我们得出 TB(T) 是π_1(EG(S T)/ Rel(S) 的正规子群，并且沿任意路径的局部扭转的每个共轭都属于 TB(T)。

考虑典范覆盖 EG(S) $\to$ EG(S)，该覆盖遗忘翻转的定向。取基本群，再对 Rel(S) 取商，可得一个短正合列

$$1 \ \to \ \mathrm{TB}(T) \ \to \ \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) \ \to \ \pi_1(\underline{\mathrm{EG}}(\mathbf{S}), T)/\underline{\mathrm{Rel}}(\mathbf{S}) \ \to \ 1.$$

由定理 3.4，$\pi_1(\mathrm{EG}(\underline{\mathbf{S}}), T)/\mathrm{Rel}(\underline{\mathbf{S}}) = 1$。因此

$$\pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) = \mathrm{TB}(T).$$

□

3.3. **交换图 $\mathbf{S}_\Delta$。** 我们现在从标记曲面转向装饰标记曲面，其中内部装饰点标记二次微分的简单零点。装饰点的存在丰富了翻转组合：尽管三角剖分的基本概念保持不变，但弧不能通过装饰点进行同伦变形。与定向情形相同（见小节 3.2），正方形、五边形和六边形环路均由成对的弧产生。

任意一个 $\mathbf{S}$ 的理想三角剖分都由 $n = 6g - 6 + 3b + m$ 条开弧组成——其中 g为亏格，b为边界分支数，m 为标记点数——并将 $\mathbf{S}$ 划分为 $\aleph = (2n + m)/3$ 个三角形。

定义 3.12。 给定一个装饰标记曲面 $\mathbf{S}_\Delta$，也就是说，一个标记曲面 $\mathbf{S}$ 及其内部固定的一组 Δ 个 $\aleph$ 装饰点 S。

- 开弧在$\mathbf{S}_\Delta$ 中是连接$\mathbf{M}$中的两个标记点的简单本质曲线（的同伦类）$_\Delta \mid \Delta$ 。

• 三角剖分 $\mathbb{T}$ 是$\mathbf{S}_\Delta$ 中两两相容的开弧的极大集合（即在$\mathbf{S}|\,\mathbf{M}$中没有交点），它将$\mathbf{S}_\Delta$ 划分为 $\aleph$ 个三角形，每个三角形恰好包含一个装饰点 Δ。

• 忘掉装饰点定义了一个映射 $F:\mathbf{S}_\Delta \to \mathbf{S}$，因为在$\mathbf{S}_\Delta$中的同伦蕴含$\mathbf{S}$中的同伦，所以它也在开弧集合之间诱导出相应的映射。

• 三角剖分的正向翻转定义为沿四边形逆时针移动一条开弧的端点 $\mathbb{T}$，从而得到一条新的弧 $\gamma \quad \gamma\#$（见图5）。

• 所谓交换图$\mathrm{EG}(\mathbf{S}_\Delta)$，是指其顶点为$\mathbf{S}_\Delta$ 的三角剖分、边对应正向翻转的有向图。$EG\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$表示包含 $\mathbb{T}$的连通分支。

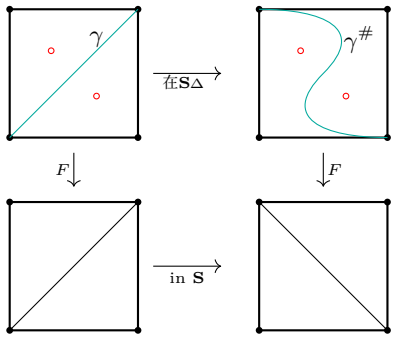


图 5. EG($\mathbf{S}_\Delta$) 和 EG($\mathbf{S}$) 中的正向翻转

三角剖分中的任意一对弧恰好存在三种局部构型。每种构型都会产生与相关翻转对应的特征关系。

关系 $\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S}_\Delta)$。对于装饰标记曲面，交换图中也会出现同样三种类型的环路。每个环路同样由曲面 $\mathbf{S}_\Delta$ 的一个三角剖分中的两条不同弧决定。如果这两条弧不在任何三角形中相交，我们得到一个 方形关系；如果它们在一个三角形中相交一次，我们得到一个 五边形关系；如果它们分别在两个三角形中各相交一次，我们得到一个 六边形关系。

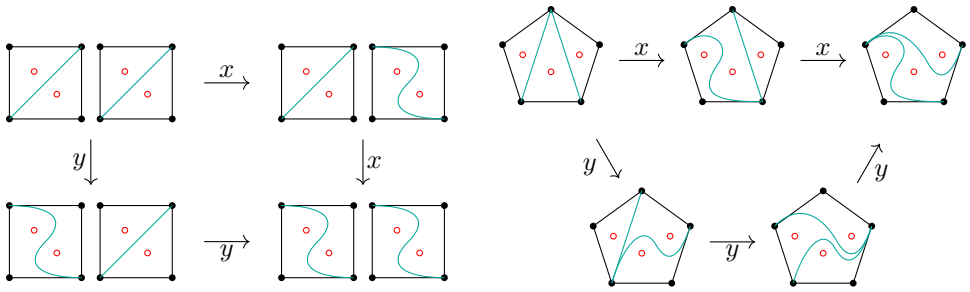


图 6. 左：方形关系，右：五边形关系

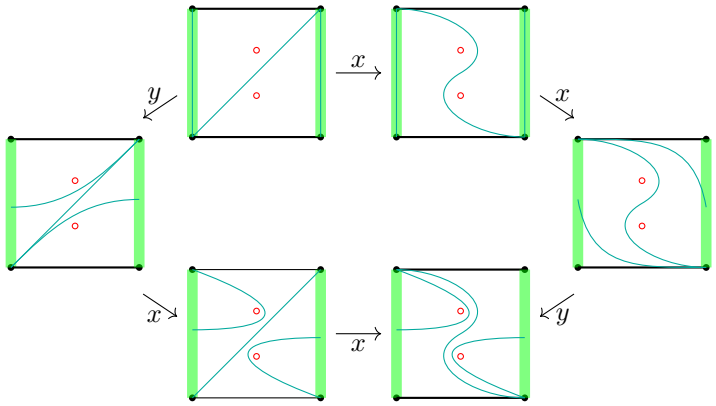


图 7. 六边形关系

局部几何	$\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中的关系	$\mathrm{EG}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中的形状
两条弧不相交于任何三角形	$(y^2)^{-1}\cdot x^2$	正方形：图6
两条弧在一个三角形中相交一次	$(y^3)^{-1}\cdot x^2$	五边形：图6
两条弧分别在两个三角形	$(yx^2)^{-1}\cdot x^2 y$	六边形：图7

定义 3.13。令 $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 表示以选定的基三角剖分 $\mathbb{T}$ 为基点的有向交换图的基本群。我们记

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)\subseteq \pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$$

由所有正方形、五边形和六边形关系生成的正规子群：

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta):=\langle \textit{square, pentagon, hexagon relations in } \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)\rangle.$$

注记 3.14. 设 $F\colon \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)\to \mathrm{EG}(\mathbf{S})$为遗忘装饰点所诱导的覆盖。装饰交换图中的三类关系恰好是下层相应关系的提升：$\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中的每一个正方形、五边形和六边形都投影到$\mathrm{EG}(\mathbf{S})$中的一个正方形、五边形或六边形，并且作为其提升而出现。因此，自然包含 $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)\to \pi_1\,\mathrm{EG}(\mathbf{S})$将由这些关系生成的子群等同起来，即

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)\simeq \mathrm{Rel}(\mathbf{S}).$$

3.4. **交换图 $\mathbf{S}_\mathbf{w}$**。我们现在将交换图的构造推广到加权装饰标记曲面。在此设定下，每个装饰点带有一个权，并且一个 **w**–混合剖分对每个装饰点指定一个多边形，其边数由其权决定。这一概念在 §3.3（见[BMQS22], ）中引入，它推广了装饰标记曲面上的三角剖分。带权交换图的顶点是 **w**–混合剖分，边对应于这些**w**–多边形内部的正向翻转。

不同于无向、定向和装饰情形——在这些情形中，局部循环（正方形、五边形和六边形关系）已经从 [KQ20]中得到理解——加权情形需要进行新的分析。在此，我们首次介绍一系列局部环路

。除了熟悉的正方形、五边形和六边形关系之外，加权情形中还出现了第二种六边形环：当两条弧在单个多边形内部相交两次时，便会产生这种环。

定义 3.15。 设$\mathbf{S_w} = (\mathbf{S}, \mathbf{M}\ \Delta, \mathbf{w})$ 是一个加权装饰标记曲面。

- 一个 **w**–混合剖分 $\mathbb{M}$ 的$\mathbf{S_w}$ 是由一组极大相容开弧（相容性的定义见定义 *3.1*）的同伦类构成的集合，这些开弧将S 分割成多个多边形，每个多边形恰好包含一个装饰点 $Z \in \Delta$，且恰有 $\mathbf{w}(Z)$条边。
- 混合剖分的正向翻转 与装饰标记曲面上三角剖分的正向翻转完全相同：沿包含 γ的**w**边多边形的边界逆时针移动开弧 γ 的端点，从而生成新的弧 $\gamma\#$。
- 交换图 $\mathrm{EG}(\mathbf{S_w})$ 是一个有向图，其顶点是**w**–混合剖分 ，其边是正向翻转。记$\mathrm{EG}^\circ(\mathbf{S_w})$ 为一个连通分支。

π_1 EG(S) 中的关系 $\pi_1\mathrm{EG}(\mathbf{S_w})$。 在带权交换图中，我们得到了三角剖分中出现的三类环路的推广版本。同样，每一类都由选定的一对弧决定。如果这两条弧在任何多边形中都不相交，则得到一个方形关系；如果它们在一个多边形中相交一次，则得到一个五边形关系；如果它们在两个多边形中各相交一次，则得到一个六边形关系。但现在，当两条弧在单个多边形内部相交两次时，还会出现第二类六边形关系 。

我们将 EG($\mathbf{S_w}$) 中的这些环路称为正方形、五边形和（第二）六边形关系，因为我们将用它们生成的正规子群对交换图取商。

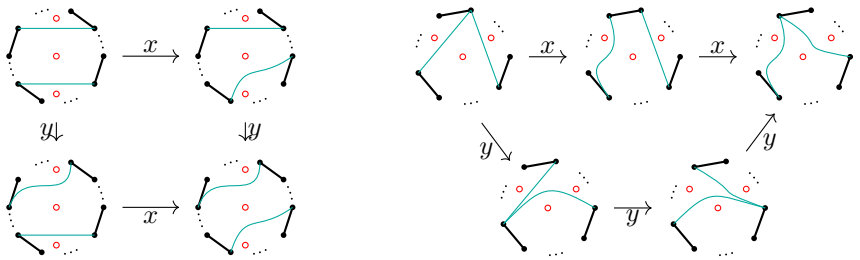


图8。左：方形关系，右：五边形关系

局部几何	π_1中的关系	EG($\mathbf{S_w}$)中的形状
两条弧在任何多边形中都不相交	$(y^2)^{-1} \cdot x^2$	正方形：图8
两条弧在一个多边形中相交一次	$(y^3)^{-1} \cdot x^2$	五边形：图8
两条弧在两个多边形中各相交一次	$(yx^2)^{-1} \cdot x^2 y$	六边形：图9
多边形 两条弧在一个多边形中相交两次	$(y^3)^{-1} \cdot x^3$	六边形：图9

注 3.16. 前三个关系是对三角化情形（定义 *3.7*）中已知的正方形、五边形和六边形关系的直接推广。

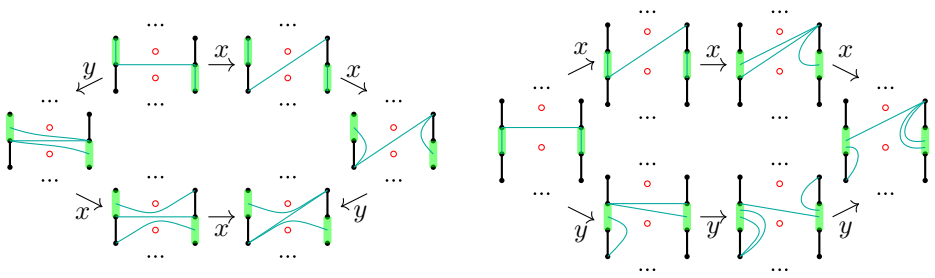


图9。左：第一六边形关系；右：第二六边形关系

另一方面，第二六边形关系是新出现的，只有在至少存在一个阶至少为 2 的零点时才会出现。

定义 3.17。令 $\pi_1\mathrm{EG}^\circ(\mathbf{S_w})$ 表示交换图的一个连通分支的基本群，该交换图对应$\mathbf{w}$-混合剖分。我们记

$$\mathrm{Rel}(\mathbf{S_w}) \subseteq \pi_1\,\mathrm{EG}^\circ(\mathbf{S_w})$$

由所有正方形环和五边形环生成的正规子群：

$\mathrm{Rel}(\mathbf{S_w})$:=⟨$\mathrm{EG}(\mathbf{S_w})$中的正方形、五边形和（第二类）六边形关系⟩。

定义 3.18。忘掉装饰点后，我们得到一个新的交换图，它记录底层未装饰曲面上的$\mathbf{w}$–混合剖分。更准确地说，忘掉 Δ 定义了一个覆盖

$$F : \mathrm{EG}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \mathrm{EG}(\mathbf{S}, \mathbf{w}),$$

其中，$\mathrm{EG}(\mathbf{S},\mathbf{w})$ 是一个交换图，其顶点是$\mathbf{S}$上的$\mathbf{w}$–混合剖分，并视为在装饰点 Δ 处同伦等价。换言之，$\mathrm{EG}(\mathbf{S},\mathbf{w})$ 中的弧可以经过 Δ进行同伦变形。这推广了简单权重情形下的覆盖 $\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \to\mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 。

与之前类似，我们在交换图中有四种环路。

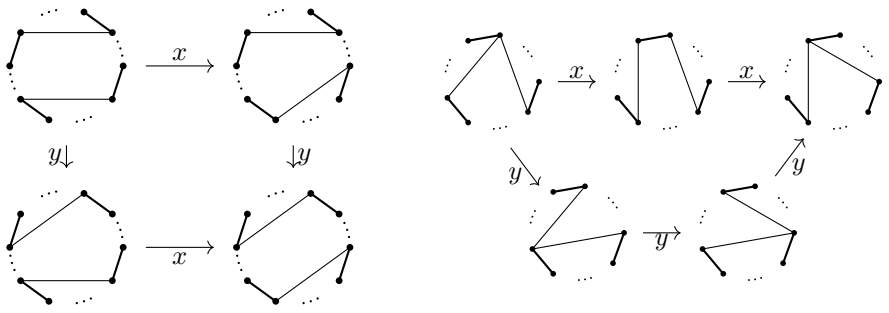


图10。左：方形关系，右：五边形关系

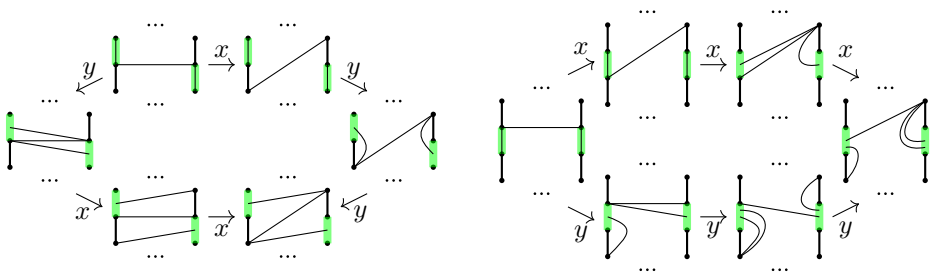


图 11。左：第一种六边形类型，右：第二种六边形类型

局部几何	π_1 中的关系	EG(S，w) 中的形状
两条弧在任何多边形中都不相交	$(y^2)^{-1}\cdot x^2$	正方形：图10
两条弧在一个多边形中相交一次	$(y^3)^{-1}\cdot x^2$	五边形：图10
两条弧分别在两个多边形中相交一次	$(yx^2)^{-1}\cdot x^2y$	六边形：图11
两条弧在一个多边形中相交两次	$(y^3)^{-1}\cdot x^3$	六边形：图11

我们将EG(**S**,**w**) 中的局部关系定义为在 F 下EG($\mathbf{S_w}$)中相应关系的像。因此，EG($\mathbf{S_w}$) 中的每个正方形、五边形和六边形关系都投影为EG(**S**,**w**)中的一个关系，并且底上的每个关系都以这种方式产生。见图10和图11。由这些关系生成的正规子群记为Rel(**S**,**w**)。

注 3.19. 自然包含

$$\pi_1 \operatorname{EG}(\mathbf{S_w}) \hookrightarrow \pi_1 \operatorname{EG}(\mathbf{S}, \mathbf{w})$$

诱导相应关系子群之间的自然同构：

$$\operatorname{Rel}(\mathbf{S_w}) \simeq \operatorname{Rel}(\mathbf{S}, \mathbf{w}).$$

3.5. **辫扭群**。 本小节旨在确立两个后续将用到的结论。第一个结论涉及以下单射同态

$$F_* : \pi_1 \operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{EG}(\mathbf{S})/\operatorname{Rel}(\mathbf{S}),$$

由遗忘映射 $F\colon \operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \to \operatorname{EG}(\mathbf{S})$诱导。我们引入辫扭群，并证明（引理3.22）它是 F_* 的商。

第二个目标是比较辫扭群与定义3.8中引入的三角剖分辫群。我们证明（命题3.25），辫扭群中出现的所有关系在三角剖分辫群中也都成立。这一点在后续将交换图与模空间 $\operatorname{FQuad}(\mathbf{S}_\Delta)$ 的基本群联系起来时至关重要。

在三角剖分这一框架下，我们不借助簇理论，验证了命题3.25的前六个关系；而第七个关系尚不明确，本文也未能证明。这并不影响整体的数学论述：在簇框架下，已知七个关系均成立，而三角剖分辫群只是一个特例。

我们紧密遵循 [KQ20] ，但命题 3.25除外。在这一步中，为避免使用任何簇理论工具，我们用纯拓扑概念——三角剖分辫群——取代 [KQ20] 的簇辫群。

这需要对原有论证作出修改，但所得结论在形式上仍与其簇理论对应版本类似。

定义 3.20. 设 $\mathbb{T}$ 是$\mathbf{S}_\Delta$ 的一个由 n 条开弧组成的三角剖分。其对偶图 $\mathbb{T}^*$ 是$\mathbf{S}_\Delta$ 中一组闭弧，其中每条闭弧恰好与一条开弧相交一次，且不与其他开弧相交。更确切地说，对于每条

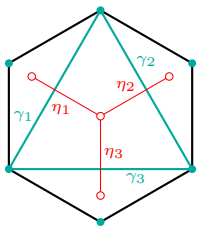


图 12. 三角剖分的对偶图。

开弧 $\gamma \in \mathbb{T}$，其对偶闭弧 $\eta \in \mathbb{T}^*$ 位于以 γ为对角线的四边形内，连接该四边形中的两个装饰点，并与 γ 恰好相交一次（见图 *12*）。

定义 3.21. 对于任意闭弧 η 在 $\mathbf{S}_\Delta$中，存在沿 η 的（正）辫扭转B_η ∈映射类群$(\mathbf{S}_\Delta)$，如图 *13*所示。辫扭群

$$\mathrm{BT}(\mathbf{S}_\Delta)$$

是由所有此类扭转生成的映射类群$(\mathbf{S}_\Delta)$ 的子群。给定一个三角剖分 $\mathbb{T}$，记

$$\mathrm{BT}(\mathbb{T}) = \langle B_\eta \mid \eta \in \mathbb{T}^* \rangle$$

为与其对偶弧相关联的生成集（参见 *[Qiu16*，引理 *4.2]*）。

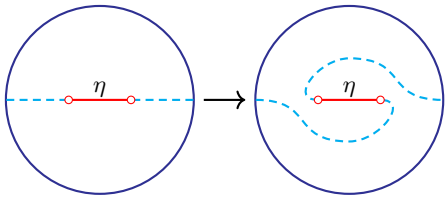


图 13. 辫扭转 B_η

引理 3.22. 令 $F : \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \to \mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 为遗忘映射。则诱导出的包含

$$\pi_1 \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) \hookrightarrow \pi_1 \mathrm{EG}(\mathbf{S})/\mathrm{Rel}(\mathbf{S})$$

具有典范同构于扭转群 $\mathrm{BT}(\mathbf{S}_\Delta)$ 的商。等价地，

$$\frac{\pi_1 \mathrm{EG}(\mathbf{S})/\mathrm{Rel}(\mathbf{S})}{\pi_1 \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)} \cong \mathrm{BT}(\mathbf{S}_\Delta).$$

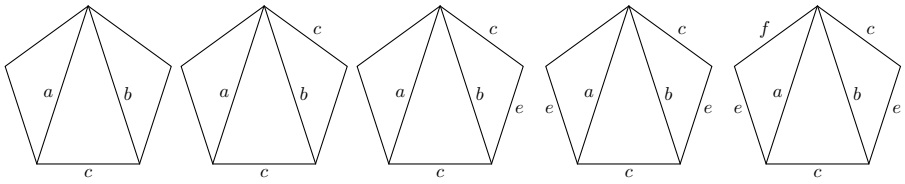


图 14. 五种情形的三角剖分

证明。设 $T := F(\mathbb{T})$ 为未装饰曲面的三角剖分。设 F 为 $\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathrm{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathrm{S}_\Delta)$ 中 T 的所有装饰提升的集合。群 $\mathrm{BT}(\mathrm{S}_\Delta)$ 不改变 S 的底层三角剖分，因此作用于 F。任取 $p \in \pi_1 \mathrm{EG(S)/Rel(S)}$，并取其提升 $\hat{}p : \mathbb{T} \to \mathbb{T}'$ 到某个 $\mathbb{T}' \in \mathrm{F}$。由命题 3.10，$p$ 可以（在同伦意义下）表示为 T 处局部扭转的乘积。提升到 $\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathrm{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathrm{S}_\Delta)$ 后，这些局部扭转成为将 $\mathbb{T}$ 映到 $\mathbb{T}'$ 的辫扭曲 $\mathrm{BT}(\mathrm{S}_\Delta)$。因此，我们得到一个映射

$$\Phi : \pi_1 \mathrm{EG}(\mathbf{S})/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) \to \mathrm{BT}(\mathbf{S}_\Delta).$$

由于每个 $b \in \mathrm{BT}(\mathbf{S}_\Delta)$ 都将 $\mathbb{T}$ 送到某个 $\mathbb{T}' \in \mathcal{F}$，而该点是 $\mathrm{EG(S)/Rel(S)}$ 中某条适当环路的提升的端点，因此此映射是满射。

最后，$p \in \ker \Phi$ 当且仅当其以 $\mathbb{T}$ 为起点的提升 p' 再次以 $\mathbb{T}$ 为终点，也就是说，当且仅当 p' 由 $\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathrm{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathrm{S}_\Delta)$ 中的一个环路表示。这等价于 $p \in \mathrm{Im}(F_*)$。因此 $\ker \Phi = \mathrm{Im}(F_*)$，结论由第一同构定理得证。□

现在我们来比较：

- 三角剖分辫群 $\mathrm{TB}(T)$，即由局部扭转生成的 $\pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S})\ T)$ 的子群，以及
- 辫扭群 $\mathrm{BT}(\mathbb{T})$，由沿装饰三角剖分 $\mathbb{T}$ 的对偶闭弧进行的辫扭转生成，

利用如下对象的显式有限表示：$\mathrm{BT}(\mathbb{T})$ 该表示来自 [KQ20]，并验证相同的关系在 $\mathrm{TB}(T)$ 中成立（见命题 3.25）。

我们现在回顾与位于$\mathbf{S}_\Delta$上的固定三角剖分 $\mathbb{T}$ 相关联的抽象辫群的表示。

定义 3.23. 设 $\mathbb{T}$ 是$\mathbf{S}_\Delta$的一个三角剖分。辫群 $\mathrm{Br}(\mathbb{T})$ 定义如下：其生成元是 $\mathbb{T}$中的开弧，定义关系为

1°. $Co(a, b)$，即 $ab = ba$，若 a 与 b 不共有公共三角形；2°. $Br(a, b)$，即 $aba = bab$，若 a 与 b 恰好共有一个公共三角形；3°. $Co(a^b, c)$，即 $Co(b^{-1}ab, c)$，对应于图 *14* 中第一个图的构型；4°. $Br(a^b, c)$，对应于图 *14* 中第二个图的构型；5°. $Co(c^{ae}, b)$，对应于图 *14* 中第三个图的构型；6°. $Br(c^{ae}, b)$ 与 $Br(c^{ea}, b)$，对应于图 *14* 中第四个图的构型；7°. $Br(c^{ae}, b)$、$Br(c^{ea}, b)$ 与 $Co(e, f^{abc})$，对应于图 *14* 中第五个图的构型。

以下定理可见于 [KQ20] 中的定理 3.15。

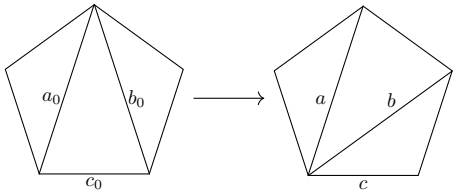
定理 3.24。 辫扭群$\mathrm{BT}(\mathbb{T})$ 同构于辫群$\mathrm{Br}(\mathbb{T})$，其中辫扭转 B_η 对应于 $\mathbb{T}$中的 η 的对偶开弧，对任意$\eta \in \mathbb{T}^*$均成立。因此，我们得到$\mathrm{BT}(\mathbb{T})$的显式有限表示。

命题 3.25. 如果三角剖分 $T^\circ \in \mathrm{EG}(\mathbf{S})$ 中存在一组弧，如定义 *3.23*中的某种情形所示，那么相应的关系在三角剖分辫群 $\mathrm{TB}(T^\circ)$中成立。

证明。 我们需要证明，BT(𝕋) 中的关系在 TB(T°) 中同样成立。该映射由 $B_a \mapsto (t_a^\circ)^{-1}$ 给出。

前两个关系由引理 3.9推出。

3°. 对于第三个关系，我们必须证明 $t_b^\circ (t_a^\circ)^{-1}(t_b^\circ)^{-1}$和 $(t_c^\circ)^{-1}$可交换。在证明中，我们使用简写记号 $a_0 := t_a^\circ$， $a := t_a^\bullet$，其他元素也类似。我们在图 3.9的第一个三角剖分中，对边 b_0 进行翻转：



根据命题3.11，相应三角剖分辫群之间的映射为

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_z : \mathrm{TB}(T^\circ) &\to \mathrm{TB}(T^\bullet), \\ a_0 &\mapsto b^{-1}ab, \\ b_0, c_0 &\mapsto b, c. \end{aligned}$$

此外，

$$\mathrm{ad}_z(b_0 a_0^{-1} b_0^{-1}) = bb^{-1}a^{-1}bb^{-1} = a^{-1}.$$

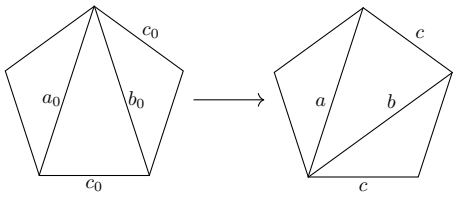
利用 $ac = ca$ 引理3.9中的结论，可得

$$\mathrm{ad}_z((b_0 a_0^{-1} b_0^{-1})(c_0^{-1})) = a^{-1}c^{-1} = c^{-1}a^{-1} = \mathrm{ad}_z((c_0^{-1})(b_0 a_0^{-1} b_0^{-1})).$$

因此，我们得出

$$(b_0 a_0^{-1} b_0^{-1})(c_0^{-1}) = (c_0^{-1})(b_0 a_0^{-1} b_0^{-1}).$$

4°. 对于第四个关系，我们必须验证 $b_0 a_0^{-1} b_0^{-1}$与c_0^{-1}之间的辫关系。我们在图 b_0 中的第二个三角剖分的边14处进行翻转：



我们应用命题3.11：

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_z : \mathrm{TB}(T^\circ) &\to \mathrm{TB}(T^\bullet), \\ a_0 &\mapsto b^{-1}ab, \end{aligned}$$

$$b_0, c_0 \mapsto b, c.$$

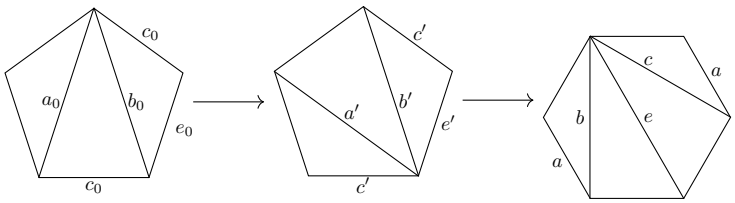
利用 $aca = cac$ 引理 3.9，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z((b_0a_0^{-1}b_0^{-1})(c_0^{-1})(b_0a_0^{-1}b_0^{-1})) &= a^{-1}c^{-1}a^{-1} = c^{-1}a^{-1}c^{-1},\\ &= \mathrm{ad}_z((c_0^{-1})(b_0a_0^{-1}b_0^{-1})(c_0^{-1})).\end{aligned}$$

因此，

$$(b_0a_0^{-1}b_0^{-1})(c_0^{-1})(b_0a_0^{-1}b_0^{-1}) = (c_0^{-1})(b_0a_0^{-1}b_0^{-1})(c_0^{-1}).$$

5°. 对于第五个关系，我们需要证明 $e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1}$与 b_0^{-1}可交换。首先在边 a_0 处进行一次翻转，然后在边 e' 处进行翻转，见图 14中的第三个三角剖分:



应用命题 3.11，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z : \mathrm{TB}(T^\circ) &\to \mathrm{TB}(T^\bullet),\\ a_0, b_0, e_0 &\mapsto a, b, e,\\ c_0 &\mapsto (ae)^{-1}c(ae).\end{aligned}$$

利用引理 $ea = ae$ 中的 3.9，计算得

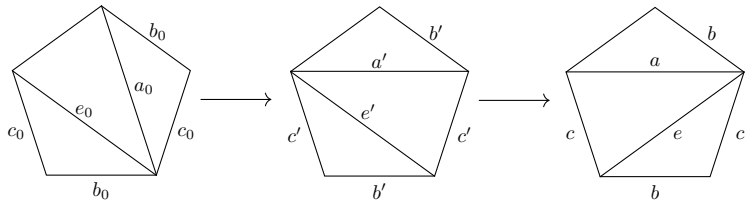
$$\mathrm{ad}_z(e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1}) = ea(e^{-1}a^{-1}c^{-1}ae)a^{-1}e^{-1} = c^{-1}.$$

由于 $cb = bc$，可知

$$\mathrm{ad}_z((e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1})\cdot(b_0^{-1})) = c^{-1}b^{-1} = b^{-1}c^{-1} = \mathrm{ad}_z((b_0^{-1})\cdot(e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1})),$$

这证实了 $(e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1})\cdot(b_0^{-1}) = (b_0^{-1})\cdot(e_0a_0c_0^{-1}a_0^{-1}e_0^{-1})$。

6°. 对于第六个关系，我们必须证明两种情况。第一种情况需要验证 $(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}$ 和 b_0^{-1} 满足辫关系。我们先对边 a_0 进行翻转，然后在图 的第四个三角剖分中对边 e' 进行翻转14:



利用命题 3.11，我们得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z : \mathrm{TB}(T^\circ) &\to \mathrm{TB}(T^\bullet),\\ a_0, b_0, e_0 &\mapsto a, b, e,\\ c_0 &\mapsto (ae)^{-1}c(ae).\end{aligned}$$

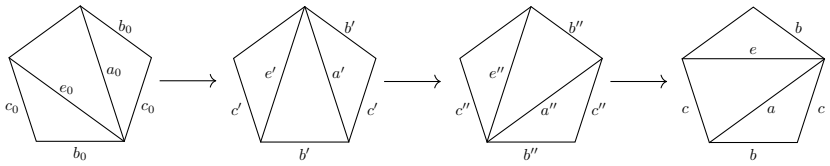
此外，我们发现 $\mathrm{ad}_z((a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}) =(ae)((ae)^{-1}c^{-1}(ae))(ae)^{-1} = c^{-1}$。利用 $cbc = bcb$ 引理 3.9，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z((a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1})\cdot(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}) &= c^{-1}b^{-1}c^{-1}\\ &= b^{-1}c^{-1}b^{-1} = \mathrm{ad}_z((b_0^{-1})\cdot(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1})),\end{aligned}$$

从而确认

$$(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1})\cdot(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1} = (b_0^{-1})\cdot(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1}).$$

对于第二种情况，我们需要证明 $(e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}$ 和 b_0^{-1}满足辫关系。我们先在边 e_0 处进行翻转，然后在边 a' 处进行翻转，接着在图 e'' 14 的第四个三角剖分中，在边 处进行翻转：



利用命题 3.11，我们得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z : \mathrm{TB}(T^\circ) &\to \mathrm{TB}(T^\bullet),\\ a_0 &\mapsto e\\ b_0 &\mapsto b\\ e_0 &\mapsto a\\ c_0 &\mapsto (ae)^{-1}c(ae)\end{aligned}$$

此外，我们发现 $\mathrm{ad}_z((e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}) =(ae)((ae)^{-1}c^{-1}(ae))(ae)^{-1} = c^{-1}$。利用引理 $cbc = bcb$ 3.9 中的 ，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_z((e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1})\cdot(a_0e_0)c_0^{-1}(a_0e_0)^{-1}) &= c^{-1}b^{-1}c^{-1}\\ &= b^{-1}c^{-1}b^{-1} = \mathrm{ad}_z((b_0^{-1})\cdot(e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}\cdot(b_0^{-1})).\end{aligned}$$

因此，

$$\big((e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}\big)\cdot(b_0^{-1})\cdot\big((e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}\big) = (b_0^{-1})\cdot\big((e_0a_0)c_0^{-1}(e_0a_0)^{-1}\big)\cdot(b_0^{-1}).$$

7°.对于第七个关系，我们需要证明 e_0^{-1}和

$$c_0^{-1}b_0^{-1}a_0^{-1}f_0^{-1}a_0b_0c_0$$

交换。 □

4. 二次微分

现在，我们将第 3 节的组合结构与亚纯二次微分的几何联系起来。无鞍点微分诱导出一种叶状结构，其轨迹结构自然形成三角剖分，或者在存在高阶零点时形成 **w–**混合剖分。由于三角剖分的组合结构取决于微分在曲面上的放置方式，我们需要一种规范的方法来比较不同的微分。标架通过将微分的实爆破与第 2.2 小节中的某个模型曲面相识别，提供了这种方法。

简单情形和装饰情形遵循 [KQ20], §4.1 中的内容，而高阶零点所需的加权设置则采用 [BMQS22]的框架。在本

节中，我们描述带框架微分的模空间，并说明其轨迹结构如何与第3节的交换图相互作用。这些几何模型将构成第5节所进行的基本群计算的基础。

我们首先定义带有各种附加数据的带框架微分，然后说明无鞍点微分如何确定弧系，最后回顾墙-室结构。

4.1. **带框架二次微分**。本小节将在简单、装饰和加权情形下定义带框架二次微分。前两种情形遵循 [KQ20], 中的 §4.1，而加权框架则取自 [BMQS22]。这些定义给出了本节其余构造所依托的模空间。

定义 4.1。设$\mathbf{X}$为紧黎曼曲面，$\omega_{\mathbf{X}}$为其全纯余切丛。亚纯二次微分 ϕ 在$\mathbf{X}$ 上是 $\omega^{\otimes 2}$ x 的亚纯截面。局部地，在坐标 z下，我们可以写成

$$\phi = g(z)\, dz^2$$

其中 g为某个亚纯函数(z)。

我们只考虑这样的亚纯二次微分 ϕ： ϕ至少有一个有限临界点，且 ϕ的每个极点的阶至少为三。记 Zero(ϕ) 为 ϕ的零点集，记 Pol$j$(ϕ) 为阶为 j 的极点集，并令

$$\mathrm{Pol}(\phi) := \bigcup_j \mathrm{Pol}_j(\phi), \quad \mathrm{Crit}(\phi) := \mathrm{Zero}(\phi) \cup \mathrm{Pol}(\phi).$$

我们通过2.6定义中所述的实爆破，为每个微分关联一个带标记曲面。

定义 4.2. 实（定向）爆破($\mathbf{X}$ ϕ) 是曲面$\mathbf{X}^{\phi}$，它是通过将每个阶为 ≥ 3 的极点 P 替换为一个边界分支 ∂_P 得到的。∂_P 上的点对应于 P 处的实切向方向，而我们在 ∂_P上标记$\mathrm{ord}_P(\phi) - 2$个特定方向。

因此，$\mathbf{X}^{\phi}$ 是一个带标记曲面，微分同胚于某个$\mathbf{S} = (S,\mathbf{M})$，如定义2.6中所述。

定义 4.3. 一个$\mathbf{S}$-框架二次微分是一个三元组$(\mathbf{X}\ \phi, \psi)$，由以下部分组成：

(a) 一个黎曼曲面$\mathbf{X}$，具有 *(b)* 一个 *GMN* 微分 ϕ，以及
(c) 一个保留标记点的微分同胚 $\psi : \mathbf{S} \to \mathbf{X}^{\phi}$。

如果存在一个双全纯映射 $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$，则这两个带框架微分$(\mathbf{X}_1, \phi_1, \psi_1)$ 和$(\mathbf{X}_2, \phi_2, \psi_2)$等价

(a) with $f^*\phi_2 = \phi_1$
(b) and $\psi_2^{-1} \circ f_* \circ \psi_1 \in \mathrm{Diff}_0(\mathbf{S})$.

保持$\mathbf{M}$ 集合不变的微分同胚群的单位元分支。此类带框架微分的模空间记为 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S})$。

映射类群MCG($\mathbf{S}$)（见定义2.10）通过改变标架作用于FQuad($\mathbf{S}$)，其商即为无标架模空间：

$$\mathrm{Quad}(\mathbf{S}) \cong \mathrm{FQuad}(\mathbf{S}) / \mathrm{MCG}(\mathbf{S}).$$

这个商通常不是流形，而是一个轨形。

现在，我们通过将 ϕ 的零点记录为装饰点，来丰富这一构造。装饰标记曲面 $\mathbf{X}^{\phi}_{\Delta}$（如定义2.7中所述）是由$\mathbf{X}\phi$ 添加 Δ而得到的：$=\mathrm{Zero}(\phi)$ 作为装饰点的集合。

定义 4.4。给定一个装饰标记曲面$\mathbf{S}_{\Delta}\mathbf{S}_{\Delta}$-带框架二次微分是一个三元组($\mathbf{X}$ ϕ, ψ)，由以下对象组成：

(a) 一个黎曼曲面$\mathbf{X}$，***(b)*** 一个 *GMN* 微分 ϕ，以及 ***(c)*** 一个微分同胚 $\psi : \mathbf{S}_{\Delta} \to \mathbf{X}^{\phi}_{\Delta}$，它同时保持标记点和装饰点。

如果存在一个双全纯映射 $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$，则称这两个带框架微分$(\mathbf{X}_1, \phi_1, \psi_1)$ 和$(\mathbf{X}_2, \phi_2, \psi_2)$ 等价。

(a) with $f^*\phi_2 = \phi_1$

(b) and $\psi_2^{-1} \circ f_* \circ \psi_1 \in \mathrm{Diff}_0(\mathbf{S}_{\Delta})$,

保持$\mathbf{M}$ 和 Δ 的微分同胚群的单位元分支（保持集合不变）。这类带框架微分的模空间记作FQuad($\mathbf{S}_{\Delta}$)。

映射类群 映射类群($\mathbf{S}_{\Delta}$)(见定义 2.10) 在其上有自然作用：

$$\mathrm{Quad}(\mathbf{S}) \cong \mathrm{FQuad}(\mathbf{S}_{\Delta}) / \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_{\Delta}).$$

$\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_{\Delta})$ 是与固定的装饰三角剖分 $\mathbb{T}$ 相关联的连通分支。

引理 4.5 (覆盖结构)。 投影

$$\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_{\Delta}) \longrightarrow \mathrm{Quad}(\mathbf{S})$$

是一个覆盖，其甲板变换群为 映射类群($\mathbf{S}_{\Delta}$)。

证明。 映射 映射类群($\mathbf{S}_{\Delta}$) 在$\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_{\Delta})$ 上的作用是真不连续的，因为其在 Teichmüller 空间上的诱导作用是真不连续的。根据 [Hat91，命题 1。40], 这一真不连续的自由作用给出一个覆盖，其甲板变换群为 映射类群($\mathbf{S}_{\Delta}$)。 □

现在我们允许任意阶零点。这些阶由装饰点上的权函数记录，而权函数又决定了相关混合剖分中每个多边形的顶点数。以下定义取自 [BMQS22]。

定义 4.6。 给定一个装饰标记曲面 $\mathbf{S_w}$。一个 $\mathbf{S_w}$-带框架二次微分是一个三元组 ($\mathbf{X}$ ϕ, ψ)，由以下部分组成：

(a) 一个黎曼曲面 $\mathbf{X}$，其上带有 ***(b)*** 一个 *GMN* 微分 ϕ，以及 ***(c)*** 一个微分同胚 ψ： $\mathbf{S_w} \to \mathbf{X}^{\phi}_{\mathbf{w}}$，保持标记点、装饰点和权重不变。

若存在双全纯映射 $f : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$，则称这两个带框架微分$(\mathbf{X}_1, \phi_1, \psi_1)$ 和$(\mathbf{X}_2, \phi_2, \psi_2)$ 等价

(a) with $f^*\phi_2 = \phi_1$

(b) 和 $\psi_2^{-1}\circ f_*\circ\psi_1\in$ 微分$_0(\mathbf{S_w})$，
保持 $\mathbf{M}$、 Δ 及其权重集合不变的微分同胚群的单位元分支。此类带框架微分的模空间记为 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S_w})$，而选定的一个连通分支记为 $\mathrm{FQuad}^\circ(\mathbf{S_w})$。

映射类群

$$\mathrm{MCG}(\mathbf{S_w}) := \mathrm{Diff}(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{Diff}_0(\mathbf{S_w})$$

（由固定边界和标记点并保持带权装饰集合不变的微分同胚的同伦类组成）作用于 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S_w})$，并令

$$\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}) \;:=\; \mathrm{FQuad}(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{MCG}(\mathbf{S_w}).$$

注记 4.7。 一般而言$\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$是一个轨形，而非流形。一个基本例子是分层 $\mathrm{Quad}(2、1、1、-8)$，它可以通过取$\mathbf{S}$ 为具有六个标记边界点且权重为$\mathbf{w}=(2、1、1)$的圆盘来实现：它是有标记分层在 S_2-作用下的商，其中该作用置换两个简单零点，并且存在不动点。我们纳入此例，是为了说明在无标记或无框架的情形下，轨形结构的自然出现。

4.2. **从微分到交换图**。 这里我们回顾无鞍点二次微分如何在其实爆破上确定一组典范弧：在简单零点情形下是三角剖分，而存在高阶零点时则是 $\mathbf{w}$–混合剖分。简单情形与装饰情形的描述遵循 §4.2 中的内容 [KQ20]，，该文还引用了 [BS15]，；带权及混合剖分行为则源自 [BMQS22]。这一构造将每个无鞍点带框架微分对应到第 3 节相应交换图中的一个顶点。

设 $\phi=g(z)\,dz^2$ 是黎曼曲面$\mathbf{X}$上的二次微分，在坐**标** z 中，对某个亚纯函数 $g(z)$。在$\mathbf{X}^\circ:=\mathbf{X}\setminus\mathrm{Crit}(\phi)$ 上存在一个特定的局部坐标 ω，其在相差 $\omega\mapsto\pm\omega+$const 的意义下唯一，使得$\phi=d\omega\otimes d\omega$。在局部坐标中，$\omega=\int\sqrt{g(z)}\,dz$。通过经由 ω 拉回欧几里得度量，可在$\mathbf{X}^\circ$ 上诱导出 ϕ-度量；该度量的测地线具有恒定的 $\sqrt{\phi}$ 辐角。

一条（水平）轨迹 ϕ 是指一条极大的水平测地线 $\gamma:(0,1)\to\mathbf{X}^\circ$，相对于 ϕ-度量。如果$\lim_{t\to0}\gamma(t)$（分别地，$\lim_{t\to1}\gamma(t)$）存在于$\mathbf{X}$中，则称其为 γ的左（分别地，右）端点。 ϕ 的轨迹决定了它的水平叶状结构。其局部行为已得到充分理解（[BS15，§3]）：

- 在阶为 k的零点附近，轨迹形成 $k+2$ 条以相等角度相交的棱枝。阶为15 的零点的局部轨迹结构见图1、2 和3。
- 在阶为 $m\geq3$的极点附近，有 $m-2$ 特征切向方向$\{v_j\}$，趋近极点的轨迹渐近于其中一个方向。阶为16 的极点的局部轨迹结构见图3、4 和5。

的水平叶状结构将$\mathbf{X}$ 分解为标准片，这些标准片之后对应于标记曲面上的弧和翻转。微分的轨迹分为三类：

- 鞍轨迹，连接 ϕ的两个零点；

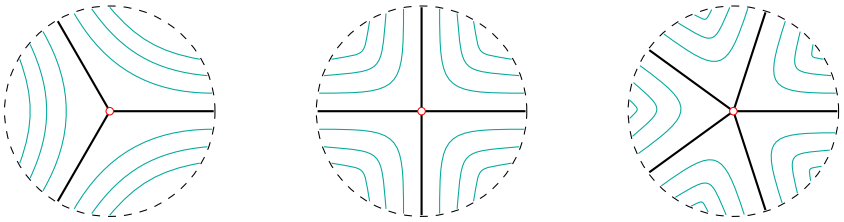


图 15. 1、2、3 阶零点处的局部轨线

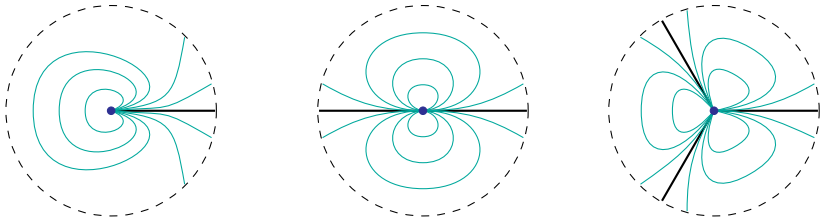


图 16. 3、4、5 阶极点处的局部轨线

- 分离轨线，连接一个零点和一个极点；
- 一般轨迹，连接两个极点。

移除所有分离轨线后，得到各个分支的无交并，每个分支或者是

- 一个半平面，同构于$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$，带有微分 dz^2，由从一个极点到其自身的轨迹扫过；或者
- 一个水平条带，同构于$\{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b\}$，带有微分$dz^2$，由连接两个极点（可以是同一个极点）的轨迹扫过。

我们将这个并集称为相对于 ϕ 的 X 的水平带分解。若微分 ϕ 定义在 X 上，且没有鞍轨线，则称其为无鞍点微分。类似地，$\mathbf{S}$ （或 $\mathbf{S}_\Delta$）上的带框架二次微分若对应的微分无鞍点，则称其为无鞍点。注意以下几点：

- 每个水平条带中的轨迹彼此同伦。
- 任一分支的边界都由分离轨线构成。
- 每个水平条带中都有一条唯一的测地线，即鞍连接，它连接其边界上的两个零点。

- 对于无鞍点微分 ϕ 定义在 X上，我们有 $\operatorname{Pol}(\phi) \neq \emptyset$。于是 ϕ 根据 [[BS15], 引理 3，没有闭轨迹或回复轨线。因此，在 X 相对于 ϕ的水平带分解中，只有半平面和水平条带。

根据构造，X （相对于 ϕ）上的一般轨迹会传递到$\mathbf{S}$上，对任意 ψ：$\mathbf{S} \to X^\phi$；而 X（相对于 ϕ）上的所有轨迹都会传递到$\mathbf{S}_\Delta$上，对任意 Ψ：$\mathbf{S}_\Delta \to X^\phi$。例如，一般轨迹在$\mathbf{S}$ 上（以及在$\mathbf{S}_\Delta$上）变为开弧，而鞍轨线在$\mathbf{S}_\Delta$上变为闭弧。

定义 4.8. 设 ψ:$\mathbf{S} \to X^\phi$ 是一个具有简单零点且无鞍点的$\mathbf{S}$-带框架二次微分。于是，T_ψ 上存在一个由 ψ诱导的三角剖分，其弧为（继承而来的同伦类）一般轨迹。此外，每个三角形

在 T_ψ 中恰好包含一个零点，因此 T_ψ 成为$\mathbf{S}_\Delta$的一个装饰三角剖分 $\mathbb{T}_\psi$，其对偶图由鞍轨迹组成。

类似地，我们有如下推广定义，取自 [BMQS22]。

定义 4.9. 设 $\psi : \mathbf{S} \to X^\phi_{\mathbf{w}}$ 为一个$\mathbf{S_w}$-带框架二次微分，且是无鞍点的。于是存在一个$\mathbf{w}$-混合剖分 $\mathbb{M}_\psi$，在$\mathbf{S_w}$ 上由 ψ诱导，其弧为所继承的一般轨迹的同伦类。每个$(k+2)$-边形在 $\mathbb{M}_\psi$中恰好包含一个阶（或权）为 k 的零点。其对偶图由鞍轨迹组成。

4.3. **墙与室结构**。 带框架二次微分的模空间具有自然的墙室分解，其中室对应于无鞍点微分，墙则记录轨迹构型的退化。穿越一面墙会使相应的弧系发生一次翻转。对于简单零点，这一图景遵循 [BS15], ；而对于高阶零点，我们采用在§4.2中发展的墙-室结构，见 [BMQS22]。在本小节中，我们描述这一分解，并说明它如何实现第3 节的交换图于带框架微分的分层内部。

我们考虑 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S})$ 分层中最上面的两个部分，它们类似于 [[BS15],§5]中 Quad(S) 的分层:

$$F_0(\mathbf{S}) = \{[\mathbf{X}, \phi, \psi] \in \mathrm{FQuad}(\mathbf{S}) \mid \phi \text{ has no saddle trajectories}\},$$
$$F_2(\mathbf{S}) = \{[\mathbf{X}, \phi, \psi] \in \mathrm{FQuad}(\mathbf{S}) \mid \phi \text{ has exactly one saddle trajectory}\}.$$

那么， $B_0(S) := F_0(\mathbf{S})$ 是开且稠密的，而 $F_2(S)$ 的余维为 1。此外， $B_2(\mathbf{S}) := F_0(\mathbf{S}) \cup F_2(\mathbf{S})$ 也开且稠密，其补集的余维为 2。令 $U(T)$ 为 FQuad(S) 中由诱导三角剖分为 T 的无鞍点 $[\psi]$ 所组成的子空间。那么

$$B_0(\mathbf{S}) = \bigcup_{T \in \mathrm{EG}(\mathbf{S})} U(T),$$

根据 [[BS15], 命题 4.9], 中的论证，我们可知 $U(T) \simeq \mathbb{H}^T$，其中

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

是（严格）上半平面。坐标 $(^u\gamma)_{\gamma \in \mathbb{T}}$ 给出了同伦类 γ 中具有一般轨迹的水平条带的复模数（更多细节见 [BS, §4.5]）。因此， $U(T)$ 恰好是 $B_0(\mathbf{S})$ 的连通分支。

$U(T)$的边界与 $F_2(\mathbf{S})$相交于 $2n$ 个连通分支，我们将其记为 $\partial^\#_\gamma U(T)$和 $\partial^\flat_\gamma U(T)$，其中坐标$^u\gamma$分别趋向负实轴或正实轴。注意，$^u\gamma$ 不能趋于零，因为那将对应于 ϕ的两个零点合并，从而离开该分层。

类似地，在 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中存在胞腔 $U(\mathbb{T})$ 以及一个分层 $\{B_p(\mathbf{S})\}$。我们可以借用 [BS15]，中的一个关键引理，原始表述实际上针对的是$\mathrm{Quad}(\mathbf{S}_\Delta)$。

引理 4.10. *FQuad(*$\mathbf{S}$*)*中的任意路径都同伦于一条位于 $B_2(\mathbf{S})$中的路径（端点保持不动）。因此存在一个满射映射

$$\pi_1 B_2(\mathbf{S}) \to \pi_1 \mathrm{FQuad}(\mathbf{S}).$$

将$\mathbf{S}$ 替换为$\mathbf{S}_\Delta$后，同样成立。

因此，我们有如下结果，表明EG(S)是FQuad(S)的一个骨架。**引理 4.11.** 存在一个（在同伦意义下唯一的）典范嵌入

$$\wp_{\mathbf{S}} : \mathrm{EG}(\mathbf{S}) \to \mathrm{FQuad}(\mathbf{S})$$

其像与 $B_2(\mathbf{S})$ 对偶，并且诱导出一个满射

$$\wp_* : \pi_1 \,\mathrm{EG}(\mathbf{S}) \twoheadrightarrow \pi_1 \,\mathrm{FQuad}(\mathbf{S}).$$

将 $\mathbf{S}$ 替换为$\mathbf{S}_\Delta$ 并限制到包含某个 $\mathbb{T}$ 的连通分支时，同样成立。

最后，映射类群 $\mathrm{MCG}(\mathbf{S})$ （见定义 2.12）自然作用于$\mathrm{FQuad}(\mathbf{S})$，因此也作用于其骨架$\mathrm{EG}(\mathbf{S})$。我们将其记为

$$\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S}) := \mathrm{EG}(\mathbf{S}) / \,\mathrm{MCG}(\mathbf{S})$$

所得的商图记录了无标架模空间 Quad(S) 的墙-室结构。上面的嵌入下降为一个嵌入

$$\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S}) \to \mathrm{Quad}(\mathbf{S}),$$

再次诱导出一个满射

$$\pi_1 \,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S}) \twoheadrightarrow \pi_1 \,\mathrm{Quad}(\mathbf{S}).$$

典范嵌入 π_1EG(S) $\to \pi_1$EG*(S) 将 Rel(S) 映射到 π_1EG*(S) 的一个正规子群，我们将其记为 Rel*(S)。

现在我们明确允许出现高阶零点。再次考虑顶部的两个分层

$$F_0(\mathbf{S_w}) = \{[\mathbf{X}\ \phi, \psi] \in \mathbf{FQuad(S_w)} \mid \phi \text{没有鞍轨迹}\},$$

$$F_2(\mathbf{S_w}) = \{[\mathbf{X}, \phi, \psi] \in \mathrm{FQuad}(\mathbf{S_w}) \mid \phi \text{ has exactly one saddle trajectory}\},$$

并设

$$B_0(\mathbf{S_w}) := F_0(\mathbf{S_w}), \qquad B_2(\mathbf{S_w}) := F_0(\mathbf{S_w}) \cup F_2(\mathbf{S_w}).$$

那么， B_0(Sw) 是开且稠密的， F_2(Sw) 的余维为 1，而 B_2(Sw) 是开且稠密的，其补集的余维为 2。

推论 4.12. 假设符号差的负部分不是 $\mathbf{w}^- = (-2)$。那么，$\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$ 中的任意路径都可以在固定端点的同伦变形下映入 $B_2(\mathbf{S_w})$。

B_0(Sw) 的连通分支由 w-混合剖分标记。

命题 4.13. $B_0(\mathbf{S_w})$ 的两个分量在 $B_2(\mathbf{S_w})$ 中由一条恰好含有一个非鞍点自由点的弧相连，当且仅当相应的w-混合角剖分通过一次正向翻转相关联。

证明。假设 B_0 的两个分支由这样一条弧连接。我们可以对该弧作同伦变形，使其在保持曲面其余部分几何形状不变的同时，变为实轴附近鞍连接的一次微小旋转。因此，问题是局部的，位于该鞍连接的邻域内。采用度量正确的图示，如图 17 中间所示，可以看出，沿逆时针（顺时针）方向旋转，会使水平带分解从最左侧的图变为最右侧的图。从条带中选取一条一般轨迹，可以看到，这会通过一次正向翻转（反向翻转）改变混合剖分。反过来，如果两个混合剖分相差一次正向翻转，我们就在局部按度量图示取微分，并旋转鞍连接，从而生成所需的路径。□

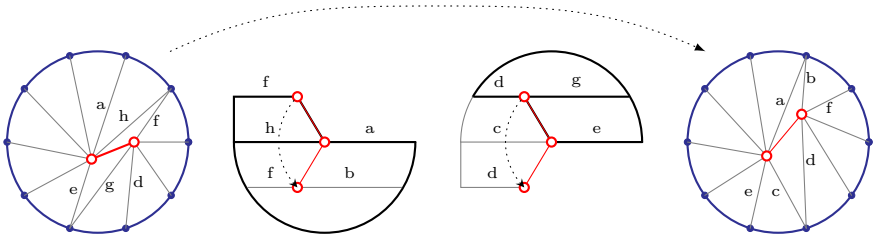


图 17. 旋转前后的水平叶状结构

因此，$\mathbf{S_w}$的$\mathbf{w}$-混合剖分的有向交换图 $\mathbf{EG(S_w)}$ 再次编码了 $B_0(\mathbf{S_w})$中各腔室的邻接关系。

引理 4.14. 存在一个典范嵌入（在同伦意义下唯一）

$$\wp_{\mathbf{S_w}} : \mathrm{EG}^\circ(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \mathrm{FQuad}^\circ(\mathbf{S_w})$$

其像与 $B_2(\mathbf{S_w})$ 对偶，并且诱导一个满射

$$\wp_* : \pi_1\,\mathrm{EG}^\circ(\mathbf{S_w}) \twoheadrightarrow \pi_1\,\mathrm{FQuad}^\circ(\mathbf{S_w}).$$

注 4.15. 与简单零点情形一样，映射类群$(\mathbf{S_w})$（见定义*2.12*）作用于$\mathrm{FQuad}^\circ(\mathbf{S_w})$ 以及$\mathrm{EG}(\mathbf{S_w})$。我们将其记为

$$\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) := \mathrm{EG}(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{MCG}(\mathbf{S_w})$$

表示由此得到的商图。由于稳定子可能非平凡，$\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$ 自然是一个1维轨形（按照 *Bass–Serre* 理论定义的群图），反映了$\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$的轨形结构。典范嵌入$\pi_1$ $\mathrm{EG}(\mathbf{S_w})$ $\to$ $\pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$ 将$\mathrm{Rel}(\mathbf{S_w})$ 映为 $\pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$中的一个正规子群，我们将其记作$\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w})$。

引理 4.16. 存在一个典范嵌入（在同伦意义下唯一）

$$\wp^\star_{\mathbf{S_w}} : \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$$

它诱导出一个满射

$$\wp_* : \pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) \twoheadrightarrow \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

映射到它们的轨形基本群。

5. 交换图与模空间

在第 4 节中，我们为每个无鞍点框架二次微分关联了一个三角剖分；在高阶情形下，则关联了一个 $\mathbf{w}$-混合剖分。这给出了从第 3 节引入的交换图到相应的（框架）二次微分分层的典范映射。本节旨在比较两侧的（轨形）基本群。

我们的首要目标是证明第 3 节中建立的相应交换图中的关系，在基本群上的诱导满射 ρ^* 下均映为零。我们首先在第 5.1 小节中，按照 [KQ20] 的策略，在简单零点（装饰）情形下完成证明，但此处直接以二次微分而非稳定性条件的语言来表述。第 5.3 小节则采用 [BMQS22] 的框架，证明高阶零点（加权）情形下相应的结果。在这一加权情形中，所有这些关系都映为零这一事实是新的。

这两种情形的一个关键区别在于，对于简单零点，这些关系生成整个核。因此，对基本群的诱导映射在对正方形、五边形和六边形关系取商后成为同构。尽管这一点隐含在 [KQ20]，中，但该结论并未在那里明确陈述；我们将在第 5.2 小节中给出直接证明。

在无标架情形下，由于对称性会置换阶相同的零点，分层往往是轨形 而非流形。因此，交换图也会成为一个轨形对象，其基本群必须解释为轨形基本群。为系统地处理这一问题，我们加入了第 5.4 小节，其中回顾了与本文相关的简化情形所需的背景知识：顶点处具有有限稳定子群、边上稳定子群平凡的图。我们在该节中通过群图的 Bass-Serre理论描述轨形基本群，并记录了一个显式表示（命题 5.8），将在第 6 节的计算中使用。

5.1. **简单零点**。 我们从装饰情形开始，此时底层曲面为 $\mathbf{S}_\Delta$ ，相关的环路是定义3.13中的环路。我们的目标是证明，这些正方形、五边形和六边形关系在映射下消失

$$\pi_1 \operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$$

引理 4.11。在此情形下，每个局部构型中涉及的轨迹结构已在 §4.2 和 §4.5 中得到全面分析（特别是命题4.14）[KQ20], ，所有这些环路的消失也可由相同思路推出，只是这里改用二次微分而非稳定性条件的语言来表述。

与加权情形不同，这些关系实际上生成了整个核，我们将在小节 5.2 中证明这一点。

命题 5.1。 设 $\mathbf{S}_\Delta$ 是一个装饰标记曲面，且 $\operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$是其有向交换图。在嵌入映射下

$$\wp_{\mathbf{S}_\Delta} : \operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \hookrightarrow \operatorname{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta),$$

对应于正方形、五边形和六边形关系的环路（见定义 *3.13*）在 $\operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中是零伦的。等价地，子群 $\operatorname{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)$包含于诱导映射的核中

$$\pi_1 \operatorname{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta).$$

证明。 **证明思路**。 我们在 $\mathbf{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中构造三个可缩乘积条带，其边界粘合成一个拓扑圆盘。通过将腔室与 $\mathbf{S}_\Delta$ 的三角剖分对应起来，该圆盘的剩余边界恰好是 $\mathbf{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中的六边形环，从而得到一个明确的零伦。正方形和五边形的情形类似且更简单。

现在，我们针对一个固定的六边形来进行这一构造。在 $\mathbf{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中固定一个由两条在三角形内相交两次的弧确定的六边形子图。选取一个 $\mathbf{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$，其三角剖分 $\mathbb{T}_0$ 是该六边形的初始顶点，并令 α_1, α_2 为相应的鞍连接。

周期归一化。取一个小的 $\delta > 0$、一个正的 $m < 1$ 和一个大的 $M \gg 1$，并安排

$$Z_{q_0}(\alpha_1) = e^{(1-\delta)\pi i}, \qquad Z_{q_0}(\alpha_2) = m\, e^{(1-3\delta)\pi i},$$
$$Z_{q_0}(\beta) = M\, e^{1/2\pi i} \quad \text{for all other standard saddles } \beta.$$

标准鞍点指由 q_0给出的水平条带内部的鞍连接。这一选择确保沿着适当选取的变形，下面这些边界上唯一预期的墙接触，是产生与 $\mathbb{T}_0$ 相邻的两个翻转的那些接触。

三个乘积条带。我们构造三个连续映射

$$\Phi_j : \ I_j \times \ell_j \ \longrightarrow \ \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \qquad (j = 1, 2, 3),$$

其中每个 $\ell_j\colon [0,1] \to \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 都是一条微分路径（即一次周期变形），而每个 I_j 都是一个旋转窗口：

$$I_1 = [0, 4\delta], \qquad I_2 = [-2\delta, 0], \qquad I_3 = [-2\delta, 2\delta].$$

我们定义

$$\Phi_j(\theta, t) \ := \ e^{\pi i \theta} \cdot \ell_j(t).$$

- 条带 *1*： $[0, 4\delta] \times \ell_1$ （图 *18*）。在本证明的所有图中，灰色区域表示一个半平面。取 ℓ_1，使得 $\ell_1(0) = q_0$，从而沿着 ℓ_1，鞍连接 α_1 旋转 -2δ，而鞍连接 α_2 旋转 2δ，同时 q_0 的所有其他标准鞍点保持不动。我们得到一个微分 $q\prime_0$，满足

$$Z_{q'_0}(\alpha_1) = e^{\pi i(1-3\delta)}, \qquad Z_{q'_0}(\alpha_2) = m\, e^{\pi i(1-1\delta)},$$
$$Z_{q'_0}(\beta) = M\, e^{1/2\pi i} \quad \text{for all other } \beta.$$

这条直线保持室。该条带由所有通过将 ℓ_1 中的每个点旋转 4δ而得到的微分组成。令 $e^{4\delta\pi i} q'_0 =: q_1$

鞍连接 α_1 和 α_2 也是旋转后的微分 $e^{4\pi i\delta} q_0$的标准鞍连接，但定向相反。因此，沿路径 $\ell_1 \times [4\delta]$ 移动相当于旋转这些标准鞍点。在这一旋转过程中， α_1 和 α_2 的相位始终不在实轴上，因此它们不会变为水平。故这条路径也保持室。

在第二行 $[0, 4\delta] \times \ell_1(1)$ 中，我们穿越了无限多个墙；而在第一行 $[0, 4\delta] \times \ell_1(0)$ 中，我们只穿越了两个墙。条带内部有一面余维二墙，我们可以通过它移动并进行同伦变形，从而避开无限多次墙穿越。

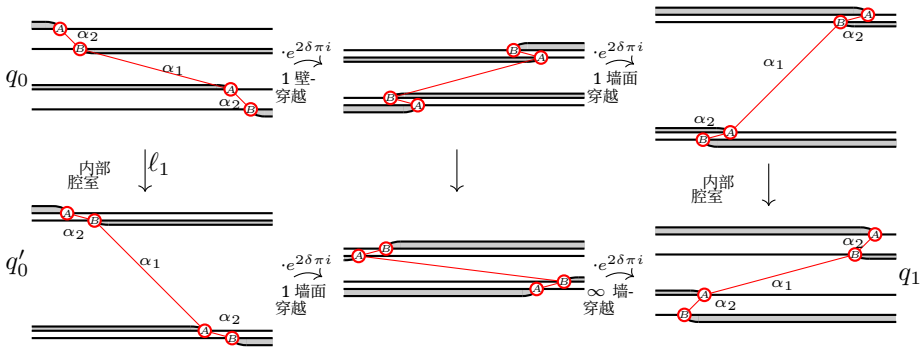


图 18。$\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$中的条带 $[0, 4\delta] \times \ell_1$

- 条带 *2:* $[-2\delta, 0] \times \ell_1$ (图 *19*). 现在我们从 q_1。

$$Z_{q_1}(\alpha_1) = e^{\delta\pi i}, \qquad Z_{q_1}(\alpha_2) = m\, e^{3\delta\pi i},$$
$$Z_{q_1}(\beta) = M\, e^{\pi i/2} \quad \text{for all} \beta.$$

选择 ℓ_2，使得 $\ell_2(0) = q_1$，从而沿着 ℓ_2，鞍连接 α_2 旋转 $1 - 4\delta$，而 q_1 的所有其他标准鞍点（包括 α_1）保持不变。最终得到一个微分 q_1'，其

$$Z_{q_1'}(\alpha_1) = e^{\pi i\delta}, \qquad Z_{q_1'}(\alpha_2) = m\, e^{(1-\delta)\pi i},$$
$$Z_{q_1'}(\beta) = M\, e^{((1/2)+4\delta)\pi i} \quad \text{for all other } \beta.$$

这条直线保持室。新的条带由我们将 ℓ_2 中的每个点旋转 -2δ后所经过的所有微分组成。

将 q_1 旋转 -2δ后，标准鞍点 α_1 被 α_3取代，而后者只有经过这次旋转才成为标准鞍点。路径 $\ell_2 \times [-2\delta, 0]$ 相当于将 α_2 旋转 $1 - 4\delta$，同时保持 α_1不变，但结果是 α_3 发生了形变。 α_3 和 α_2 的相位始终不在实轴上，因此它们不会变为水平。故这条路径也保持室。

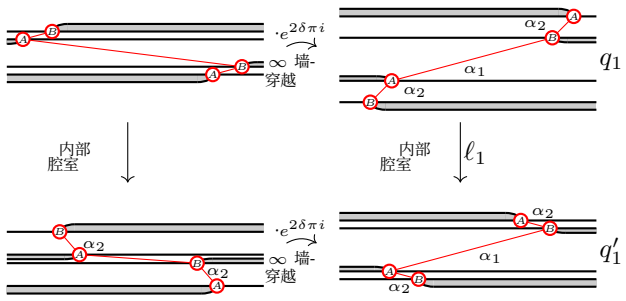


图 19. $\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 中的条带 $[-2\delta, 0] \times \ell_2$

- 条带*3*: $[-4\delta, 0] \times \ell_2$。（图 *20*）。

我们现在从 q_2 开始: $= e^{2\delta\pi i} q_1'$。

$$Z_{q_2}(\alpha_1) = e^{\delta\pi i}, \quad Z_{q_2}(\alpha_2) = m\, e^{3\delta\pi i},$$
$$Z_{q_2}(\beta) = M\, e^{\pi i/2} \text{ for all other } \beta.$$

选择 ℓ_2，使得 $\ell_1(0) = q_2$，这样沿着 ℓ_2，鞍连接 α_1旋转 2δ，鞍连接 α_2 旋转 -2δ，而 q_0 的所有其他标准鞍点保持不变。令 q_2' 为新的微分。这条线保持室。该条带由我们将 ℓ_1 中的每个点旋转 -4δ 后遇到的所有微分组成。将 ℓ_2 的两端都旋转 -4δ 后，标准鞍点 α_1 和 α_2 仍然是鞍点，但定向相反。因此，沿路径 $\ell_2 \times [-4\delta, 0]$ 移动相当于旋转这些标准鞍点。在此旋转过程中， α_1 和 α_2 的相位始终远离实轴，因此它们不会变为水平。因此，这条路径也保持室。

第一行中的旋转会导致无穷多次墙穿越，但第二行只穿越了两面墙。

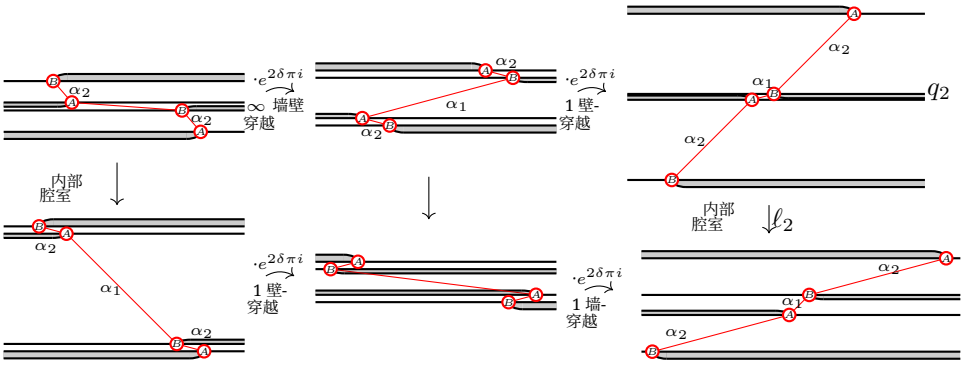


图20。FQuad$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$)中的条带 $[-4\delta, 0] \times \ell_2$

粘合。第二条带的两条水平线各自与第一条带和第三条带的一条边界线段重合（无穷次墙穿越发生之处）。

选择 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 的端点，使以下识别成立：

$$\Phi_1(1, \theta + 2\delta) = \Phi_2(0, \theta - 2\delta) \quad (\theta \in [0, 2\delta]),$$

and

$$\Phi_2(1, \theta - 2\delta) = \Phi_3(0, \theta - 4\delta) \quad (\theta \in [0, 2\delta]).$$

沿着这些旋转边粘合三个矩形，得到一个拓扑 2 胞腔（一个圆盘） D。定义 Φ: $D \to$FQuad$^{\circ}$(S_{Δ})。由构造可知，这一定义良好且连续。

边界是六边形环路。 边界 ∂D 由六条水平线段（ θ-旋转边）和三条保持室弧（竖直边）组成。这六条水平线段恰好是单次翻转 通道，实现了 EG$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$) 中六边形的六条有向边。因此，在将胞腔和墙识别为$\mathbf{S}_{\Delta}$的三角剖分后， $\Phi|_{\partial D}$ 表示像 ρ_* (H)。

结论。 由于 D 是一个圆盘，且 Φ： $D \to$ FQuad$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$) 是连续的，因此环路 $\Phi|_{\partial D}$ 在 FQuad$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$)中是零伦的。因此，六边形在 π_1FQuad$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$)中的像是平凡的。正方形和五边形的情形更简单：在这两种情况下，一个这样的乘积条带就足够了（旋转窗口包含在 $[0, 2\delta]$中）。五边形情形见图21。

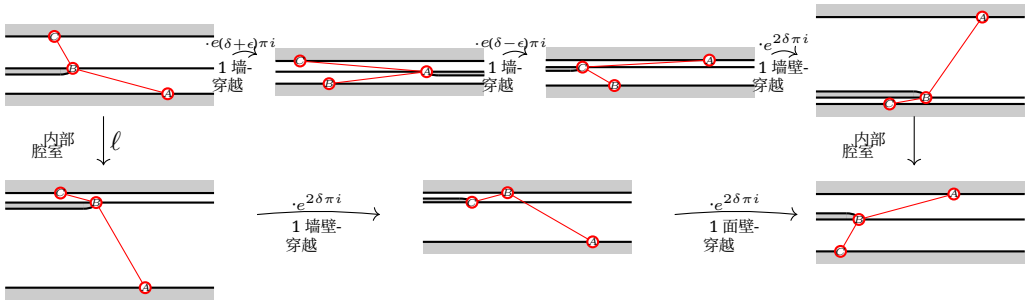


图21。FQuad$^{\mathbb{T}}$($\mathbf{S}_{\Delta}$) 中的条带 $\ell \times [0, 2\delta]$

□

5.2. **Quad(S)**的基本群。 本小节的目标是通过将模空间 Quad(**S**) 与相应的交换图进行比较，计算其（轨形）基本群。更确切地说，我们在命题 5.4中证明， （轨形）基本群 $\pi_1\mathrm{Quad}(\mathbf{S})$ 与.....的（轨形）基本群同构

$$\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S}) = \mathrm{EG}(\mathbf{S})/\,\mathrm{MCG}(\mathbf{S}),$$

施加第 3 节中的正方形、五边形和六边形关系后。此陈述隐含于 [KQ20] 中；这里我们给出一个直接证明，仅使用三角剖分和二次微分，不诉诸簇代数。

我们首先证明

$$\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\,\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) = 1 \qquad (\text{Theorem } 5.2).$$

由此立即可得，模空间 $\mathrm{FQuad}(\mathbf{S}_\Delta)$是单连通的（定理 5.3）。这一结果将是证明命题 5.4 的主要工具。

定理 5.2. 群 $\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是平凡的。

证明. 由引理 3.22 可得短正合列

$$1 \to \pi_1(\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta), \mathbb{T})/\,\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) \to \pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S}), T)/\,\mathrm{Rel}(\mathbf{S}) \xrightarrow{i_{\mathbb{T}}} \mathrm{BT}(\mathbb{T}) \to 1.$$

记 $\{\gamma_i\}$ 为 $\mathbb{T}$ 中的开弧，并记 $\{\eta_i\}$ 为它们的对偶闭弧。群$\pi_1(\mathrm{EG}(\mathbf{S})\ T)/\,\mathrm{Rel}(\mathbf{S})$ 由局部扭转生成（命题 3.10），而映射 $i_{\mathbb{T}}$ 由如下对应确定：将关于开弧 $F(\gamma_i)$在 T 中的局部扭转映至辫扭转 $B_{\eta_i}^{-1}$。

相对于标准生成元 $\mathrm{BT}(\mathbb{T})$ 的有限表示由定理 3.24 给出$\{B_\eta \mid \eta \in \mathbb{T}^*\}$。其（生成）关系正是定义 3.23 中给出的关系，并且由命题 3.25可知，这些关系在 $\mathrm{TB}(T)$中的局部扭转下成立。因此 $i_{\mathbb{T}}$ 有一个良定义的逆映射，它也将生成元映到生成元。因此， $i_{\mathbb{T}}$ 是一个同构，并且$\pi_1(\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)\ \mathbb{T})/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) = 1$，如所需。 □

定理 5.3。 基本群 $\pi_1\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是平凡的。

证明。 由命题 5.1 可知，正方形、六边形和五边形关系都属于满射的核 $\wp_*\colon \pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \to \pi_1\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$，该满射来自引理 4.11。根据核的泛性质，满射 $\wp_*$ 可通过一个映射分解

$$\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\,\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) \to \pi_1\,\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta).$$

根据定理 5.2 基本群 $\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是平凡的。因此，满射映射 $\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)/\mathrm{Rel}(\mathbf{S}_\Delta) \to \pi_1\,\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是平凡映射。

□

命题 5.4。 存在一个同构

$$\pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S}) \simeq \pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S})/\pi_1\,\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$$

轨形基本群，其中 $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \simeq \mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S}) \subset \pi_1\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S})$ 是由正方形、五边形和六边形关系生成的正规子群。

证明。 我们回顾一下，映射类群$(\mathbf{S}_\Delta)$ 作用于 $\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ ，其商为 $\mathrm{Quad}(\mathbf{S})$。根据引理4.5，此作用定义了一个覆盖

$$F : \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \to \mathrm{Quad}(\mathbf{S})$$

甲板变换群为 映射类群$(\mathbf{S}_\Delta)$。由此以及引理 4.11，我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} B_2(\mathbf{S}_\Delta) & \hookrightarrow & \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta)} \\ F(B_2(\mathbf{S}_\Delta)) & \hookrightarrow & \mathrm{Quad}(\mathbf{S}) \end{array}$$

此外，引理 4.11蕴含同构

$$\pi_1(B_2(\mathbf{S}_\Delta)) \simeq \pi_1 \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta), \quad \text{and} \quad \pi_1(F(B_2(\mathbf{S}_\Delta))) \simeq \pi_1 \mathrm{EG}^{\star}(\mathbf{S}).$$

将其与之前的图 4.11 结合，得到如下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \ker(f) & & \ker(g) & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1 \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1 \mathrm{EG}^{\star}(\mathbf{S}) & \xrightarrow{p_1} & \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1 \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1 \mathrm{Quad}(\mathbf{S}) & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{MCG}(\mathbf{S}_\Delta) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

根据定理 5.3，群 $\pi_1 \mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是平凡的。因此，核(f) $=\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 。由于映射类群上的右侧垂直恒等映射显然是单射，根据蛇引理，我们得到核的短正合列

$$0 \to \ker(f) \to \ker(g) \to 1 \to 1.$$

因此，核(g) $=$ 核(f) $=\pi_1 \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$。

根据命题 5.1，由正方形、六边形和五边形生成的子群 $\mathrm{Rel}^{\star}(\mathbf{S})$包含于 核$(g)$ 中；根据定理 5.2 ，该子群包含于 $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$中。因此，核$(g)$ $=$ $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 是由正方形、六边形和五边形生成的子群。□

Let

$$\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow Q \quad \text{and} \quad \mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta) \longrightarrow E$$

可以是任意其他基映射，其中 E 表示与 Q 中的墙与室结构同伦等价的（商）图，定义如前。与前面的证明一样，群 $\pi_1\mathrm{EG}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_\Delta)$ 自然嵌入为 $\pi_1(E)$ 的一个子群。该子群由 E 中所有正方形、五边形和六边形关系生成。我们将在下面的推论中用 $\mathrm{Rel}(E)$ 表示这个子群。

推论 5.5。 存在一个同构

$$\pi_1(Q) \cong \pi_1(E) / \mathrm{Rel}(E).$$

证明。 在命题 Q 5.4 的证明中，将 Quad(S) 替换为它。 □

在接下来的几节中，我们将使用 Quad(S)，即忘记标架和装饰点后得到的二次微分空间；或者使用 $\mathrm{Quad}^{\mathrm{lab}}$(S)，其中零点带有标记。

5.3. **高阶零点**。 本小节的目标是证明定义3.17 中的所有环路在映射下

$$\rho_{\mathbf{S_w}} : \pi_1 \,\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1 \,\mathrm{FQuad}^{\circ}(\mathbf{S_w})$$

由引理 4.14可知。由于轨迹结构在局部的表现与正方形、五边形和第一种六边形构型中的简单零点情形相似，因此证明中相应的部分可以逐字照搬。因此，只需验证第二六边形关系的消失；这种关系仅在存在高阶零点时才会出现。

这一次我们并不声称这些关系生成了 $\rho_{\mathbf{S_w}}$ 的整个核；这里只证明它们消失。

命题 5.6。 设 $\mathbf{S_w}$ 是一个加权装饰标记曲面，且$\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w})$是$\mathbf{w}$-混合剖分的有向交换图。在嵌入下

$$\wp_{\mathbf{S_w}} : \mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w}) \hookrightarrow \mathrm{FQuad}^{\circ}(\mathbf{S_w}),$$

对应于$\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w})$ （见定义 *3.17*）中所有广义正方形、五边形和六边形（两种类型）关系的环路都是零伦的。等价地，子群 $\mathrm{Rel}(\mathbf{S_w})$ 包含于诱导映射的核中

$$\pi_1 \,\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1 \,\mathrm{FQuad}^{\circ}(\mathbf{S_w}).$$

证明。 在相关鞍连接对附近，除存在一些不会影响局部墙穿越模式的额外半平面外，水平叶状结构与简单零点情形相同。因此，命题 5.1 中用于正方形、五边形和第一六边形关系的论证同样适用。我们只需证明第二六边形关系。固定由同一个多边形中相交两次的两条弧确定的一个六边形 H 子图，它位于 $\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w})$ 中。

选取 $q_0 \in$FQuad$^{\circ}$(S$_{\mathbf{w}}$)，使其混合剖分是该六边形的初始顶点，并令 α_1、α_2 为相应的鞍连接。固定一个较小的 $\delta > 0$、一个正的 $m < 1$和一个较大的 $M \gg 1$，并作如下安排

$$Z_{q_0}(\alpha_1) = e^{(1-\delta)\pi i}, \qquad Z_{q_0}(\alpha_2) = m\, e^{(1-3\delta)\pi i},$$
$$Z_{q_0}(\beta) = M\, e^{1/2\pi i} \quad \text{for all other } \beta.$$

参见图 22。这里，黑色粗线表示分隔两半的切口，其边界分别标记为 a和 b。具有相同标记的边界应视为粘合在一起。灰色区域是曲面的一部分，与本证明无关。图 22 中的水平路径对应于旋转微分。图中左侧的两个微分位于同一个腔室，因为从组合结构来看，两幅图仅相差切去下方的水平条带，将其旋转 π 后再粘合回去。右侧的两个微分也是如此。

令 ℓ 为保腔室直线，它由将 $Z_{q_0}(\alpha_1)$ 旋转 -2δ ，再将$Z_{q_1}(\alpha_1)$旋转 2δ 得到，并以微分 q_1 结束，其中

$$Z_{q_1}(\alpha_1) = e^{(1-3\delta)\pi i}, \qquad Z_{q_1}(\alpha_2) = m\, e^{(1-\delta)\pi i},$$
$$Z_{q_1}(\beta) = M\, e^{1/2\pi i} \quad \text{for all other } \beta.$$

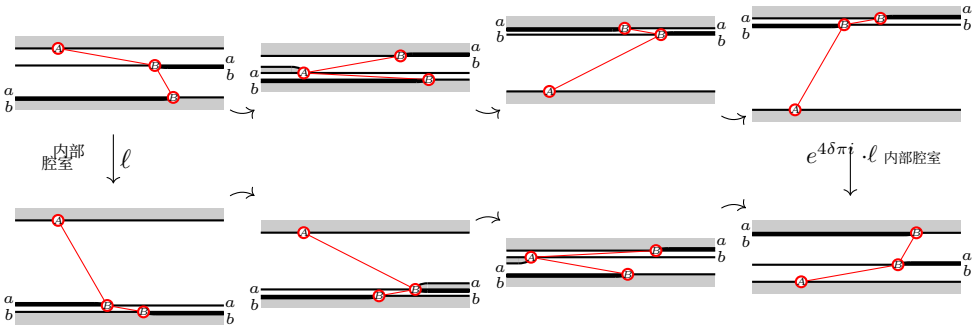
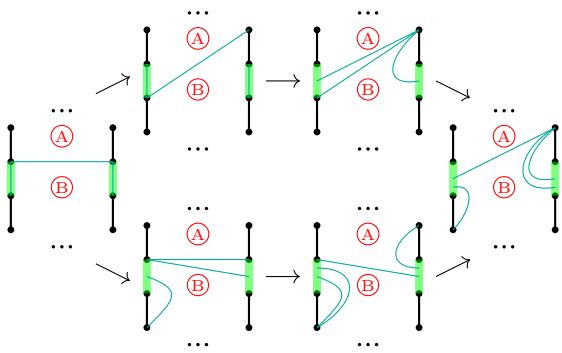


图 22. $\mathrm{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S_w})$ 中的条带 $\ell \times [0, 4\delta]$

在这条线段 ℓ 上的每一点，我们都可以旋转 4δ。这在 $\mathrm{FQuad}^{\circ}(\mathbf{S_w})$ 中给出一个可缩矩形。直线 $e^{4\delta\pi i}\ell$ （图中的右侧竖直箭头）也保持腔室。

矩形的边界由六条对应于旋转的水平线段，以及两条对应于保持腔室的形变的垂直线段组成。这些水平线段恰好是单次翻转 通道，并实现 $\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w})$ 中六边形的六条定向边。

在将胞腔和墙与混合剖分等同的意义下，该条带的边界因此表示像 $\wp_{\mathbf{S_w}}(H)$。更精确地说，沿边界每个微分都容许两条相关的鞍连接，它们对应于六边形翻转所涉及的两条边。因此，遍历条带的上、下边界分别实现了沿六边形上半部和下半部的翻转序列；对照该六边形



见图22。

□

推论 5.7. 类似地，无标架层中相应的环路$\mathrm{Rel}^{\star}(\mathbf{S_w})$ 位于.....的核中

$$\wp_* : \pi_1\,\mathrm{EG}^{\star}(\mathbf{S_w}) \twoheadrightarrow \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

关于高阶情形中的核。 与简单零点情形一样，我们得到短正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \ker(f) & & \ker(g) & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1\,\mathrm{EG}^{\circ}(\mathbf{S_w}) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1\,\mathrm{EG}^{\star}(\mathbf{S_w}) & \xrightarrow{p_1} & \mathrm{MCG}(\mathbf{S_w}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1\,\mathrm{FQuad}^{\circ}(\mathbf{S_w}) & \xrightarrow{i_2} & \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}) & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{MCG}(\mathbf{S_w}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

其中 g 由骨架的嵌入所诱导。这表明 $\ker(f)$ $=\ker(g)$。命题 5.6 表明，因此所有广义正方形、五边形和六边形关系都属于 $\ker(g)$。

在简单零点情形中，额外的输入 $\pi_1\mathbf{FQuad}^{\mathbb{T}}(\mathbf{S}_{\Delta}) = 1$ 使我们能够将 $\ker(g)$ 精确地识别为 $\mathbf{Rel}(\mathbf{S}_{\Delta})$，即由这些局部关系生成的正规子群。对于高阶零点，一般不存在这样的全局单连通性结果，因此我们只能得出这些关系包含于 $\ker(g)$ 中，而不能断言它们生成了该群。

5.4. 具有对称性的 EG 的轨形基本群。 从带框架微分或带标记零点的微分转向无框架且具有无标记零点的微分时，底层三角剖分或混合多边形剖分的对称性可能会将分层中的多个腔室，或等价地交换图中的多个顶点识别为同一个。当两个或更多零点的阶相等时，恰好会出现这种现象。因此，具有无标记零点的无框架微分的交换图自然具有轨形图的结构：顶点可能带有有限稳定子群，而所有边的稳定子均为平凡群。

为了将这一情形形式化，我们使用群图的 Bass–Serre 理论。关于背景知识，请参阅 [Dic06]；不过，在本文中我们只需要一个初等的特殊情形，即所有边群均为平凡群，且所有顶点群均为有限群。在这种情形下，轨形基本群与相应群图的 Bass–Serre 基本群一致。

设 X 表示带标记零点情形下的交换图，并设 G 是作用于 X 的有限群，该作用通过置换阶相同的零点实现。商

$$Y := X/G$$

即为无标记分层的交换图。其轨形结构由有限稳定子群

$$G_v := \{\, g \in G \mid g(\tilde{v}) = \tilde{v} \,\}$$

赋予顶点 $v \in Y$，其中 $\tilde{v}$ 是 v 在 X 中任意选取的一个提升。由于没有非平凡对称性固定翻转，所有边稳定子均为平凡群。

对于这类空间，适当的基本群概念是轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(Y)$，其定义为万有轨形覆盖的甲板变换群。与经典情形一样，每个连通图都具有一个普遍覆盖树；在轨形情形下，该树带有 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(Y)$的作用，其商为 Y，且其顶点稳定子恰好是群 G_v。

同样的数据也可以等价地描述为一个群图：底层图是 Y，处于 v 处的顶点群是 G_v，且所有边群都是平凡的。Bass–Serre 理论将 Bass–Serre 基本群$\pi_1^{\mathrm{BS}}(Y)$与该群图联系起来；该基本群作用于一棵树（即 Bass–Serre 树）上，其商为 Y，顶点稳定子为G_v。在边群平凡的情形下，该群具有特别简单的表示（见下文命题 5.8 ）。由于 Bass–Serre 树可以典范地识别为万有轨形覆盖，这两种构造产生同一个群，从而得到一个典范同构

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(Y) \;\cong\; \pi_1^{\mathrm{BS}}(Y).$$

命题 5.8 (Bass–Serre，参见 §4.1 [Dic06])。 设 Y是一个配备有限顶点稳定子群 G_v 和平凡边稳定子的连通图，且 $T \subset Y$ 是一棵生成树。那么，与该群图关联的 *Bass–Serre* 基本群为

$$\pi_1^{\mathrm{BS}}(Y) \;\cong\; \langle\, t_e \mid e \in E(Y)\setminus E(T) \,\rangle \;*\; \Big(*_{v\in V(Y)}\, G_v \Big),$$

也就是说，它是所有顶点稳定子群的自由积，再与一个由不包含在 T 中的边生成的自由群作自由积。特别地，该群作用在一棵树上，其商为 Y，顶点稳定子群为 G_v。

在我们的情形中，这棵树可典范地识别为万有轨形覆盖，因此 $\pi_1^{\mathrm{BS}}(Y)$ 与轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(Y)$一致。

特别地，稳定子平凡的顶点不作贡献，而稳定子为 $\mathbb{Z}_2$ 的顶点贡献一个 $\mathbb{Z}_2$ 因子。稍后将利用这一描述，显式计算某些分层的轨形基本群；其中非平凡的顶点稳定子群编码了混合剖分中同阶零点置换所产生的单值化。

6. 例子与新情形

在命题 5.6 中，我们为任意具有高阶零点的亚纯二次微分的未装饰且未标架的分层构造了一个自然的满射态射

$$\pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \;\twoheadrightarrow\; \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}),$$

其中 $\pi_1\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$ 是映射类群作用下的商图（见注 4.15）。我们聚焦于球面上具有4个奇点的二次微分分层。换言之，我们有以下情形

(i) 一个极点：标记曲面 $\mathbf{S}$ 是一个圆盘，且有 3 个装饰点，
(ii) 两个极点：标记曲面 $\mathbf{S}$是一个圆柱，且有 2 个装饰点。

本节的目标是考察这个满射态射是否实际上是一个同构。

我们分三步进行。首先，在亏格为 $g = 0$ 且仅有一个极点的情形下，我们直接计算 $\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$ 的基本群。这提供了一个独立于交换图形式体系的基准计算，我们将用它进行比较。接下来，作为合理性检验，我们在已被充分研究的示例 $\mathrm{Quad}(1,1,1,-7) := \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$ 中检验交换图方法，其中 $\mathbf{w} = (1,1,1)$，且 $\mathbf{S}$ 为边界上有 5 个标记点的圆盘，并表明由$\pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w})$ 得到的群与已知表示一致。最后，我们转向新的示例，即球面上具有高阶零点且至多

两个极点，其中——照例——这些极点的阶至少为 3。在此设定下，我们证明上述满射映射实际上是一个同构。

6.1. **球面上的一个极点：直接计算**。设$\mathbf{S_w}$ 是一个仅有一个边界分支、带有 $n > 2$ 个带标记零点的 wDMS，其零点阶数由权重 $w = (k_1, \ldots, k_n)$ 给出，并且有 $-(k_1 + \ldots + k_n + 2)$ 个标记点。

命题 6.1。带标记零点的分层的基本群是以下直积：

$$\pi_1 \operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) = \mathrm{P}_{n-2}(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}) \times \mathbb{Z}.$$

一个关于两次挖孔平面的纯曲面辫群与 $\mathbb{Z}$ 的直积。

尽管这种分解类似于

$$\mathrm{PB}_n \simeq \mathrm{P}_{n-2}(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$$

引理2.5中所示的纯辫群结构。此处的直积是直积而非半直积，这反映出 $\mathbb{C}^\times$-作用于$\mathrm{Quad}^{\mathrm{lab}}_{\mathbf{w}}(\mathbf{S})$ 在几何上独立于零点构型。

对于 $n = 3$，这个半直积就是直积。因此在此情形下，纯辫群 PB_3 与基本群 $\pi_1 \operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) = \mathbb{Z} \times F_2$重合。

命题证明。 固定一个坐标，将极点发送到 ∞，并将两个带标记零点发送到 0 和 1。于是，每个 $q \in \operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w})$ 都可以唯一地写成

$$q = c \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)^{k_i}\, dz^2, \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\},$$

其中 $c \in \mathbb{C}^\times$。因此

$$\mathbb{P}\operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) \ \cong\ \mathrm{F}_{n-2}(\mathbb{C} \setminus \{0,1\})$$

and

$$\operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) \ \cong\ \mathbb{P}\operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) \times \mathbb{C}^\times.$$

因此，

$$\pi_1 \operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) \cong \pi_1(F_{n-2}(\mathbb{C} \setminus \{0,1\})) \times \mathbb{Z}.$$

□

6.2. **合理性检验：** $\operatorname{Quad}(1, 1, 1, -7)$。 现在，我们希望针对球面上三个简单零点和一个阶为 5.5的极点这一情形，检验推论 7 。

带标记零点。 由上一小节可知

$$\pi_1 \operatorname{Quad}^{\mathrm{lab}}(1,1,1,-7) = \mathbb{Z} \times F_2.$$

现在，我们从交换图中重新得到同一个基本群（见注 5.5）。我们构造交换图 $(\mathrm{EG}^\star)^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w})$，其顶点对应于五边形的三角剖分，并按旋转视为等价，同时为每个三角形添加标记。

从任一顶点出发，均可沿左侧或右侧内部边进行正向翻转；分别将这些有向边记为 ℓ 和 r。所得交换图如图 23所示。

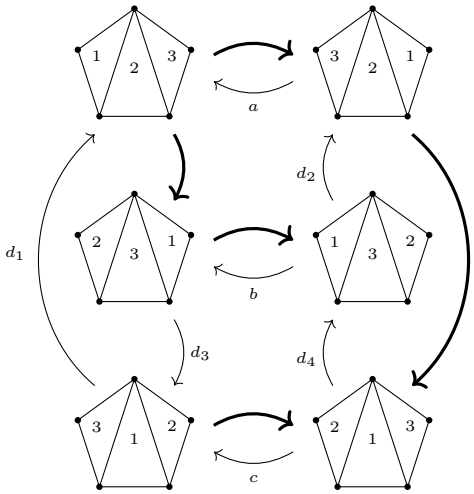


图 23. $\mathrm{Quad}^{\mathrm{lab}}(1,\ 1,\ 1,\ -7)$ 的交换图。

底层粗图的基本群由未包含在所选生成树中的边自由生成。在图 23中选取粗体边作为生成树，可得自由生成元

$$d_1, d_2, d_3, d_4, a, b, c.$$

由于每个三角剖分恰有两条内部边，且这些边只相邻一次，因此所有关系都由五边形变换产生。它们写作

$$d_3 d_1 = c = d_2 d_4 = a = d_1 d_3 = b = d_4 d_2.$$

因此，对这些关系取商后，我们得到

$$\langle z, d_1, d_2 \mid [z, d_1], [z, d_2] \rangle = \langle z, \alpha, \beta \mid [z, \alpha], [z, \beta] \rangle \cong \mathbb{Z} \times F_2,$$

其中 $z := a = b = c$, $\alpha := d_1 c$，以及 $\beta := a d_2$。

这些生成元有如下几何解释：

- z 对应于一次完整旋转，即自然的 $\mathbb{C}^\star$–作用，
- α 是绕第一和第二个零点的纯辫扭转，
- β 是绕第二和第三个零点的纯辫扭转。

这与上面的直接计算一致，并证实了命题5.4 在此情形下成立。

无标记零点。现在我们忽略零点的顺序。考虑覆盖

$$\mathrm{Quad}^{\mathrm{lab}}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$$

其覆盖群为 S_3。这是一个经典事实：

$$\pi_1 \,\mathrm{Quad}(1,1,1,-7) \simeq B_3 = \langle a, b \mid aba = bab \rangle,$$

我们现在通过交换图再次验证这一点。取商 $\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$后得到一个只有一个顶点和两个环路的图，分别标记为 a 和 b，对应于内部边的两种可能翻转（图 24）。

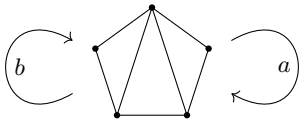


图24。商 $\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$。

该图的基本群是由两个生成元生成的自由群，

$$\pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) = \langle \ell, r \rangle.$$

我们描述诱导映射

$$g\colon \pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1 \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

我们将带标记三角形解释为编号股线。在 B_3, 生成元a 是股线 1 和 2 之间的辫扭转，而 b 是股线 2 和 3 之间的扭转。查看图 23，我们发现：

- r 对应于 ba（逆时针旋转），
- ℓ 对应于 aba （股线 1 和 3 之间的扭转）。

Thus

$$g(\ell) = aba, \qquad g(r) = ba.$$

没有方形关系，唯一的五边形关系是 $\ell^2 = r^3$。利用$aba = bab$ 在 B_3, 中，我们计算得

$$g(\ell^{-2} r^3) = g(\ell)^{-2} g(r)^3 = (aba)^{-2}(ababab) = 1,$$

因此 g 可经由该商分解

$$\pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) / \langle \ell^2 = r^3 \rangle = \langle \ell, r \mid \ell^2 = r^3 \rangle \longrightarrow \mathrm{B}_3 = \pi_1 \mathrm{Quad}(1,1,1,-7).$$

此映射是一个同构，其逆映射为

$$a \mapsto r\ell^{-1}, \qquad b \mapsto \ell^{-1} r^2.$$

结论。 交换图的基本群模去唯一的五边形关系 $\ell^2 = r^3$后与 $\pi_1 \mathrm{Quad}(1,\ 1,\ 1,\ -7)$ 经由诱导映射同构。这为推论 5.5 提供了一致性检验。

6.3. 在 $\mathbb{P}^1$ 上的三个零点和一个极点。 现在我们转而讨论亏格0曲面上的无框架、无标记微分分层，该曲面只有一个边界分支，权重为 $\mathbf{w} = (i,\ j,\ k)$。换言之，二次微分定义在 $\mathbb{P}^1$ 上，具有一个极点和三个零点，这些零点的阶不必各不相同。

根据命题 5.6 ，引理 4.16 中的映射可经由该商分解

$$\pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w}) / \mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \twoheadrightarrow \pi_1 \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

我们的目标是描述无标架且无标记分层 $\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$ 的交换图 $\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})$，确定其基本群的生成元，记录局部关系 $\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w})$（正方形、五边形以及两类六边形），并最终在所有情形下计算所得的商，包括那些因相同零点或零点阶数上的奇偶条件而产生必须加以考虑的额外对称性的情形。

三个零点具有不同阶。我们从三个零点具有不同阶的情形开始。商EG($\mathbf{S_w}$)/映射类群($\mathbf{S_w}$) 示于图25。

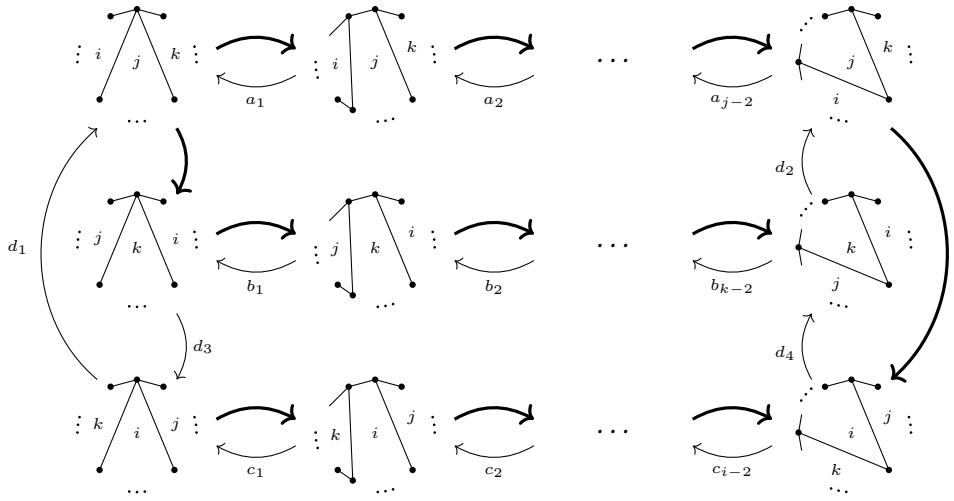


图 25. 分层 ($i,\ j,\ k$) 的交换图，其中 $i,\ j,\ k$两两不同。

此图的基本群是自由群，其生成元由所选生成树补集中的边所对应的闭路径构成。固定这样一棵生成树和一个基顶点，便得到生成元

$$a_1,\dots,a_{j-2},\ b_1,\dots,b_{k-2},\ c_1,\dots,c_{i-2},\ d_1,d_2,d_3,d_4.$$

每个生成元都由生成树之外的一条有向边，以及以所选顶点为基点的相应闭路径表示。该闭路径沿生成树中的唯一路径行至该边的起点，穿越该边，再沿生成树返回。为简便起见，我们用同一个符号表示这条边及相应的闭路径。图 25中，生成树以粗箭头标出。

在每个顶点处，若两条内部边相交，则得到一个五边形关系；若它们不相交，则得到一个方形关系：

$$\begin{aligned} d_1d_3 &= a_1 = \cdots = a_{j-2} = d_2d_4,\\ d_1d_3 &= b_1 = \cdots = b_{k-2} = d_4d_2,\\ d_3d_1 &= c_1 = \cdots = c_{i-2} = d_2d_4. \end{aligned}$$

设定

$$\begin{aligned} z := a_1 = \cdots = a_{j-2} = b_1 = \cdots = b_{k-2} = c_1 = \cdots = c_{i-2},\\ \alpha := d_1c_1\cdots c_{i-2}, \qquad \beta := a_1\cdots a_{j-2}d_2, \end{aligned}$$

我们得到商

$$\langle z,\alpha,\beta \mid [z,\alpha],[z,\beta]\rangle \cong \mathbb{Z}\times F_2.$$

当某些零点的阶相同时，相应的无标记分层可由有标记分层对置换这些不可区分零点的对称群取商得到。这种置换作用延伸到墙-室分解，因此也延伸到交换图。对于 $i = j \neq k$，相关的群是 S_2；对于 $i = j = k$，则是 S_3。在这两种情况下，商图都编码了无标记分层的墙-室结构。

关键在于，当且仅当存在一个在对称群作用下不变的腔室时，才会出现轨形点。从几何上看，当且仅当极点具有偶数个水平棱瓣时，腔室才是不变的；这也等价于相应极点的阶为偶数。用我们的记号表示，这恰好发生在 k 为偶数时。因此：

- 若 k 为偶数，则极点具有偶数个棱枝，存在不动室，商中会出现一个二阶轨形点；
- 若 k 为奇数，则极点具有奇数个棱枝，没有腔室是不动的，且该作用是自由的，因此商中没有轨形点。

同阶的两个零点。

情形 (A)：k 为偶数。

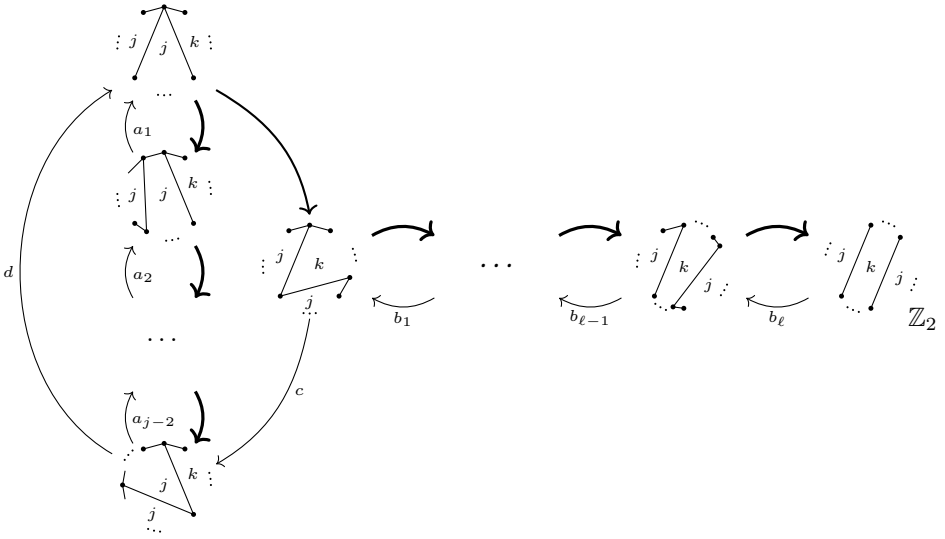


图 26. 当 k 为偶数时，分层 $(j,\ j,\ k)$ 的粗交换图。这里 $\ell := \frac{k-2}{2}$。

假设 $i = j \neq k$ 且 k 为偶数。图26展示了粗交换图，它是将图 25 按 S_2作用直接取商得到的。非平凡的稳定子标注在对应顶点下方。

实际的交换图只有一个阶为2的轨形点，它对应于 S_2 下唯一的不动室。根据命题 5.8，轨形基本群是 $\mathbb{Z}_2$（由 s 生成）与以下自由群的自由积

$$a_1, \dots, a_{j-2}, \quad b_1, \dots, b_\ell, \quad c,\ d.$$

这里， s 是该腔室中代表局部 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的环路，它会交换两个阶相同的零点。

五边形关系和正方形关系与之前相同，但轨形顶点处除外。在那里，我们得到方形关系

$$b_\ell = s^{-1} b_\ell s,$$

它是带标记交换图基本群中的方形关系映入无标记交换图基本群后的像。直观地说：翻转 b_ℓ 作用于由 S_2固定的一条边；要翻转对边，需先应用 s，再应用 b_ℓ，然后应用 s^{-1}。整理这些关系

$$dc = a_1 = \cdots = a_{j-2} = cd, \qquad dc = b_1 = \cdots = b_\ell = s^{-1} b_\ell s,$$

并令

$$z := a_1 = \cdots = a_{j-2} = b_1 = \cdots = b_\ell = cd = dc,$$

我们得到

$$\langle z, s, d \mid [z, s], [z, d], s^2 = 1 \rangle.$$

情形（B）： k **为奇数。**

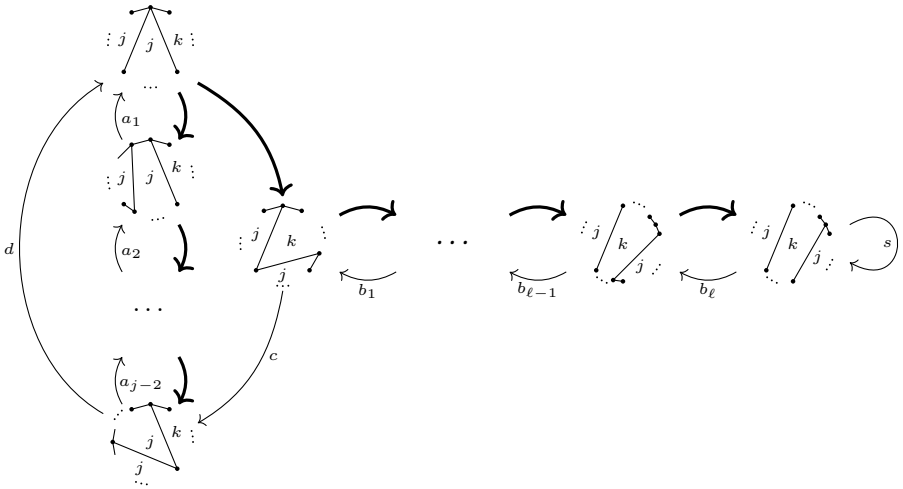


图 27. k为奇数时，分层 (j、 j、 k) 的粗交换图。其中 $\ell = \binom{k-3}{2}$。

现在假设 $i = j \neq k$ 且 k 为奇数。图 27 显示了粗交换图。在这种情况下， S_2-作用是自由的，因此不存在轨形点。

基本群现在是由以下元素生成的自由群

$$a_1, \ldots, a_{j-2}, \quad b_1, \ldots, b_\ell, \quad c,\ d,\ s.$$

关系为

$$dc = a_1 = \cdots = a_{j-2} = cd, \qquad dc = b_1 = \cdots = b_\ell = s^2.$$

令

$$z := a_1 = \cdots = a_{j-2} = b_1 = \cdots = b_\ell = cd = dc,$$

我们得到

$$\langle z, s, d \mid [z, s], [z, d], s^2 = z \rangle = \langle s, d \mid [s^2, d] \rangle.$$

同阶的三个零点。 最后，考虑 $i = j = k$。现在作用群为 S_3。

情形 (A)： k **偶数**。

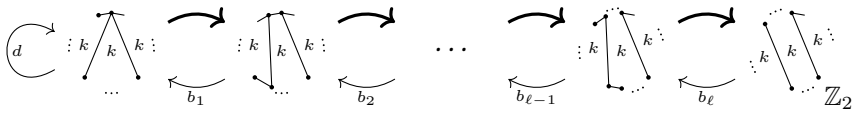


图28。 k偶数时，分层 $(k,\ k,\ k)$ 的粗交换图。此处 $\ell = \frac{k-2}{2}$ 。

——

商有一个阶为 2 的轨形点。根据命题 5.8 ，轨形基本群是由 $\mathbb{Z}_2$ (由 s生成)与一个由

$$b_1, \ldots, b_\ell,\ d.$$

关系为

$$d^3 = b_1 = \cdots = b_\ell = s^{-1} b_\ell s.$$

令

$$z := b_1 = \cdots = b_\ell = d^3,$$

我们得到

$$\langle z, s, d \mid [z, s],\ d^3 = z,\ s^2 = 1 \rangle = \langle s, d \mid [d^3, s],\ s^2 = 1 \rangle$$

情形（B）： k **奇数**。



分层 $(k,\ k,\ k)$ 的粗交换图，图29。对于 k奇数，这里 $\ell = \frac{k-3}{2}$ 。

——

现在， S_3 作用是自由的，因此没有轨形点。基本群由以下元素自由生成：

$$b_1, \ldots, b_\ell,\ d,\ s,$$

并且我们有

$$d^3 = b_1 = \cdots = b_\ell = s^2.$$

令 $z := b_1 = \cdots = b_\ell = d^3$，我们得到

$$\langle z, s, d \mid [z, s], [z, d] \rangle = \langle s, d \mid d^3 = s^2 \rangle.$$

6.4. 在 $\mathbb{P}^1$ 上有两个零点和两个极点。 现在考虑具有两个阶分别为 $-k$ 和 $-l$ 的极点，以及两个阶分别为 i 和 j的零点的分层，其中 $i<j$ 和 $k<l$。在全文中，我们都取映射类群作用下的商，因此经过适当切割粘合后仅相差一次剪切的混合剖分视为等同。从几何上看，这相当于对圆柱上的德恩扭转取商。

根据推论 5.7 存在一个满射

$$\pi_1 \mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \twoheadrightarrow \pi_1 \mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

交换图 $\mathbf{EG^\star(S_w)}$ 的粗略形状取决于差值 $k-i$ 和 $l-i$。我们首先讨论一般情形 $l-i>3$（边界情形$l-i=3$ 另行处理；在我们沿用的假设下，情形 $l-i<3$ 不会出现）。

交换图的左半部分（由 $l-i$ 控制）。

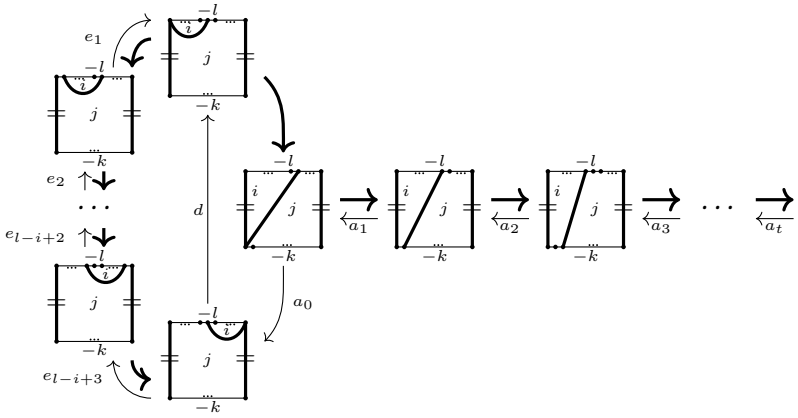


图 30. $l-i>3$ 的交换图左半部分。

图 30 展示了由 $l-i>3$控制的交换图部分。该子图的基本群自由生成于

$$e_1,\ldots,e_{l-i+3},d,a_0,a_1,\ldots,a_t, \quad \text{together with generators from the right half.}$$

在这个左半部分的每个顶点处，我们都有通常的五边形/正方形关系，这些关系共同推出

$$z := a_0 d = e_{l-i+3} = \ldots = e_2 = e_1 = d a_0 = a_1 = \ldots = a_t.$$

因此，这个半部分收缩为阿贝尔子群 $\langle z,d\rangle$，其中有 $[z,d]=1$。

右半部分（由 $k-i$控制）。根据 $k-i$ 的取值，我们区分三种情形。

情形 (A)： $k-i\geq 4$ **或** $k-i\leq 0$。

交换图见图 31 。在这两个子情形中，我们加入生成元

$$a_{t+1}, c, b_1, \ldots, b_{l-j+3}$$

并得到这些关系

$$c\cdot a_{t+1} = b_{l-j+3} = \cdots = b_2 = b_1 = a_{t+1}\cdot c = a_t.$$

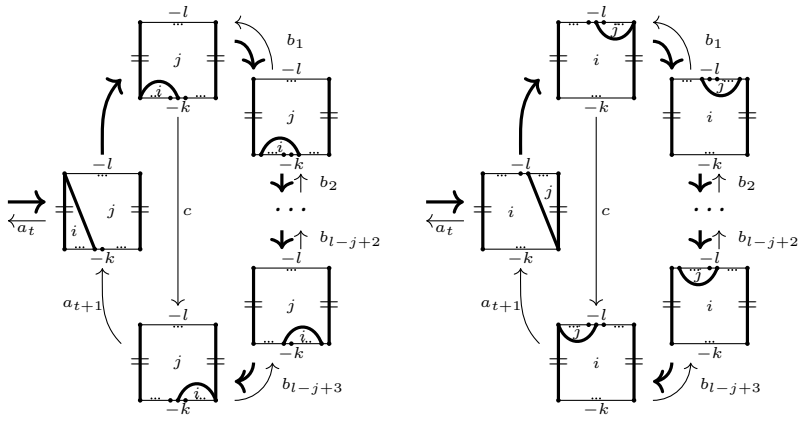


图 31. $k-i\geq 4$ （左）和 $k-i\leq 0$ （右）的交换图的右半部分。

与左半部分结合后，我们得到

$$\langle z,c,d \mid [z,c],[z,d]\rangle,$$

即 z 是中心元，且该群为 $\mathbb{Z}\times F_2$，其中 $F_2=\langle c,d\rangle$。

Case (B): $k-i=3$ or $k-i=1$.

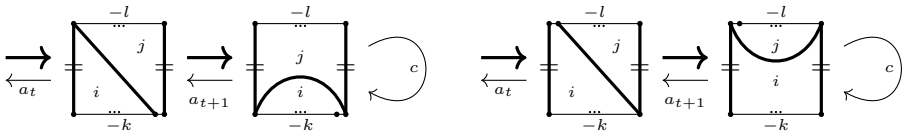


图 32. 交换图的右半部分： $k-i=3$ （左）和 $k-i=1$ （右）。

见图32 中的交换图。

在这两种子情形中，我们都添加生成元 a_{t+1} 和 c。我们有一个方形关系$a_t=a_{t+1}\cdot c$，以及最右侧顶点处的六边形（第二种类型）： $a_{t+1}\cdot c=c\cdot a_{t+1}$。因此，我们再次得到商

$$\langle z,c,d \mid [z,c],[z,d]\rangle.$$

情形（C）： $k-i=2$。

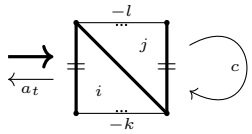


图33. $k-i=2$的交换图右半部分。

参见图33 中的交换图右半部分。我们加入 c 以及一个六边形关系（第一类）： $c\cdot a_t = a_t \cdot c$。因此，商为

$$\langle z, c, d \mid [z, c], [z, d] \rangle.$$

左侧边界情形： $l - i = 3$。

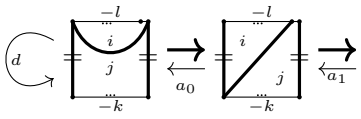


图34。 $l - i = 3$的左半部分。

将左半部分替换为 $l - i = 3$ 子图（图34）会产生关于 z 与 d的相同关系，以及对右半部分的相同耦合，因此商仍为

$$\langle z, c, d \mid [z, c], [z, d] \rangle.$$

同阶极点与不同阶零点： $l = k$ **与** $i < j$。如第6.3节所述， S_2商交换图中的轨形点恰好出现在相应微分在相同奇点的置换下具有非平凡稳定子时。在此情形中，这发生在 i （且自动地 j）为偶数时。对于奇数 i ，该作用是自由的，且商没有轨形点。

情形 (A)： i**为偶数**。

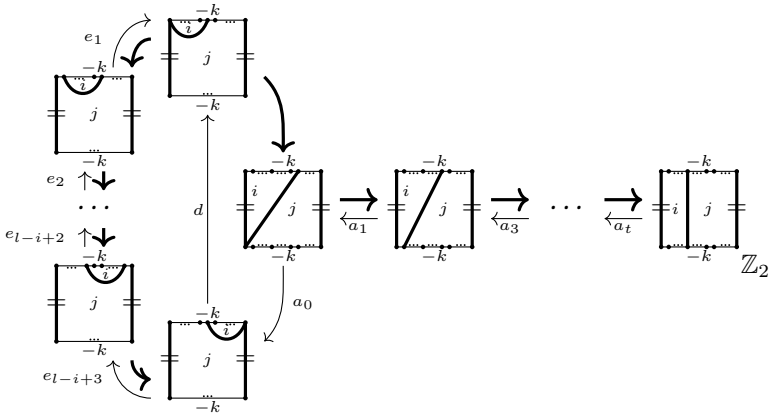


图 35. $(i, j, -k, -k)$ 在 i, j 为偶数时的粗交换图。

设 $i < j$, $k = l$ 和 i 均为偶数。图 35 展示了粗交换图，它是将图 25 按 S_2-作用直接取商所得。非平凡稳定子标示在相应顶点下方。对交换相等极点的 S_2-商进行处理后，当且仅当 i 为偶数时，最右侧外部顶点处出现一个轨形点。

轨道环 c 生成 $\mathbb{Z}_2$。唯一新增的方形关系是 $a_t = c^{-1} a_t c$，即 $[z, c] = 1$。因此，轨形基本群的商为

$$\langle z, c, d \mid [z, c], [z, d],\ c^2 = 1 \rangle.$$

情形（B）： i**奇数**。

现在假设 $i<j$， $k=l$ 且 i 为奇数。在这种情况下， S_2-作用是自由的，因此没有轨形点。交换图与图 35 中的粗图类似，但在最右侧外部顶点处多了一个自环 c。这个环表示一个真正的自由生成元，而非轨形对称。新的方形关系是 $c^2=a_t=z$，因此 $z=c^2$ 是中心元。我们得到

$$\langle c,d \mid [c^2,d]\rangle.$$

同阶零点与异阶极点： $i=j$ **和** $l>k$。

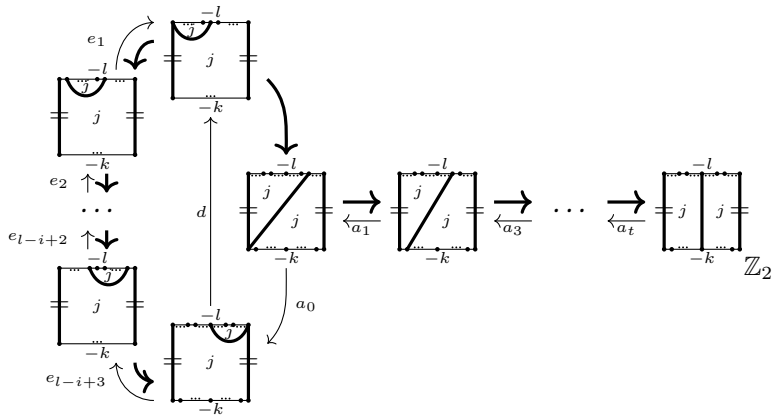


图 36。(j， j， k， l) 的粗交换图（展示的是 k， l为偶数的情况）。

相等零点的情况类似：存在一个 S_2作用，将两个同阶零点互换。

情形 (A)： k **偶数**。若 k 为偶数（因此 l 也为偶数），则商在最外侧右端顶点处有一个阶为2 的轨形点。交换图见图36。所得群为

$$\langle z,c,d \mid [z,c],[z,d],\ c^2=1\rangle.$$

情形（B）： k **奇数**。若 k 为奇数，则没有任何轨形点。交换图与图36中的粗图相似，但在最外侧右端顶点处多一个自环 c 。所得群为

$$\langle c,d \mid [c^2,d]\rangle.$$

两对相等： $i=j$ **和** $k=l$。在此情形下， S_2对零点的作用与 S_2的作用在图上定义了相同的作用。因此， $S_2\times S_2$ 商与 S_2 商重合。

情形 (A)： k， i **为偶数**。若 k 和 i 均为偶数，则商在最右侧顶点处有一个阶为 2 的轨形点。交换图见图37。所得群为

$$\langle z,c,d \mid [z,c],[z,d],\ c^2=1\rangle.$$

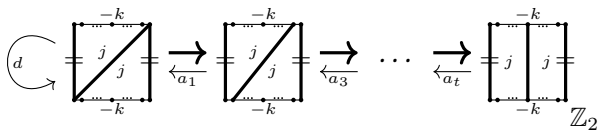


图 37。$(j,\ j,\ -k,\ -k)$ 的粗交换图（当k 为偶数时显示）。

情形（B）： $k,\ i$ **为奇数**。若 k 和 i 均为奇数，则不存在轨形点。交换图类似于图36中的粗图，但最右侧顶点处多出一个自环 c。所得群为

$$\langle c, d \mid [c^2, d]\rangle.$$

6.5. **比较与结果**。 根据推论 5.7，存在一个自然满射同态

$$\pi_1 \operatorname{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\operatorname{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{Quad}(\mathbf{S_w}),$$

它将交换图中的闭路径映射为分层中的相应环路，该环路由相关混合剖分所诱导的翻转与旋转序列定义。

在亏格 0 且有四个奇点的情形下，$\mathbf{Rel^\star(S_w)}$ 中收集的关系已生成此映射的整个核：

定理 6.2。 对于 $g = 0$ 和四个奇点，我们有一个自然同构

$$\pi_1 \operatorname{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\operatorname{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \cong \pi_1 \operatorname{Quad}(\mathbf{S_w}).$$

此外，可以根据对称类型读出所得的群：

(a) $\mathbb{Z} \times F_2$，若四个奇点的阶各不相同；***(b)*** $\langle z, c, d \mid [z, c], [z, d],\ c^2 = 1\rangle$，若两个奇点的阶相同，且其余两个的阶为偶数并且与前两个不同；***(c)*** $\langle c,\ d \mid [c^2, d]\rangle$，若两个奇点的阶相同，且其余两个的阶为奇数并且与前两个不同；***(d)*** $\langle s, d \mid [d^3, s], s^2\rangle$，若有三个阶相同的偶数阶零点；***(e)*** $B_3 = \langle s, d \mid d^3 = s^2\rangle$，若有三个阶相同的奇数阶零点。

证明。 我们证明自然满射

$$\pi_1 \operatorname{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\operatorname{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1 \operatorname{Quad}(\mathbf{S_w})$$

是一个同构。

在所有情形中，$\pi_1 \mathbf{EG^\star(S_w)/Rel^\star(S_w)}$ 的中心是无限循环群，由正方形或五边形关系的一条边生成。从几何上看，这个生成元对应于由 $\mathbb{C}^\star$-作用诱导的二次微分的整体 2π-旋转。因此，在每种情形下，我们都得到一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1 \operatorname{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\operatorname{Rel}^\star(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

其中，商群 Γ 仅取决于奇点的对称类型。具体而言，

(a) $\Gamma = F_2$, (
b) $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$,
(c) $\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$,

(d) $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$,
(e) $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$。
在几何一侧，射影化将 $\mathbb{P}\mathbf{Quad(S_w)}$ 识别为底层带标记球面的模空间：

$$\mathbb{P}\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}) \;\cong\; \begin{cases} M_{0,4}, \\ M_{0,[2]+2}, \\ M_{0,[3]+1}, \end{cases}$$

这取决于对称类型。在每种情况下， $\pi_1\mathbf{Quad(S_w)}$ 都嵌入如下中心扩张

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\star) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1\mathbb{P}\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow 1,$$

其中左侧映射由 $\mathbb{C}^\star$-旋转诱导。

一致约化。 由于两个中心 $\mathbb{Z}$-子群在自然映射下被典范地识别，只需证明诱导映射

$$\bar{\Phi}:\ \Gamma = \Big(\pi_1\,\mathrm{EG}^\star(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{Rel}^\star(\mathbf{S_w})\Big)/\mathbb{Z} \;\longrightarrow\; \pi_1\mathbb{P}\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$$

是一个同构。
无限阶生成元。 在所有对称类型中， Γ都包含无限阶生成元，它们由交换图中的显式翻转序列表示：反复翻转一条固定的边，直到恢复初始混合剖分。在到 $\mathbb{P}$ $\mathbf{Quad(S_w)}$ 的自然映射下，这样的翻转环被映射为相应带标记点的模空间中的辫型环路。将三个标记点固定在 0，1，∞ 后，该环路对应于一个标记点绕另一个标记点旋转一周的最小运动。

如果这两个点可以区分（例如，它们的阶不同），那么该环路就是全扭转，并且在带标记模空间中已经闭合。如果这两个点无法区分，那么本原环路就是交换它们的半扭转；它在带标记覆盖中提升为一条路径，其端点相差一次重标记，但在轨形商中是闭合的。在这两种情况下，这些辫型环路都代表无限阶元素，并生成 $\pi_1\mathbb{P}\mathbf{Quad(S_w)}$ 的自由部分。
有限阶生成元。 Γ 中的有限阶元素恰好有两种来源。
(i) 轨形稳定子。如果交换图的某个顶点在重标记作用下有非平凡稳定子，命题 5.8 会引入一个额外的扭元生成元。该元素由一条路径表示，这条路径提升后连接带标记覆盖的不同片，且只有在施加稳定子后才闭合。它在 $\mathbb{P}\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$ 中的像是绕相应轨形点的一条环路，因此其阶相同且有限。

(ii) 自环在模 $\mathbb{Z}$ 后成为挠元。即使所有稳定子均为平凡，对中心 $\mathbb{Z}$ 取商后仍可能出现挠元。若自环 ℓ满足$\ell^m = z$，其中 z 是中心 2π-旋转，则 ℓ 成为阶为 m 的、属于 Γ 的元素。几何上，这些元素对应于不可区分奇点的循环置换，例如两点的对换或三点的循环置换，并映射到 $\pi_1\mathbb{P}\mathbf{Quad(S_w)}$ 的标准轨形生成元。

例子。 在两个极点的阶相同且有两个零点的情形下，无限阶生成元由图35中从顶部混合剖分开始、反复翻转垂直边所得的循环表示。在诱导的

映射下，该循环对应于 $M_{0,\ [2]+2}$ 中的一条环路，其中一个有标记点绕着一个无标记点转一圈，从而得到标准的 $\mathbb{Z}$-生成元。2阶生成元或者来自非平凡稳定子，或者来自一个自环，其平方为中心的 2π-旋转；具体取决于零点阶数的奇偶性。在这两种情形下，它的像都是 $\pi_1(M_{0,\ [2]+2})$ 的典范 $\mathbb{Z}_2$-生成元。

其余所有对称类型均可用类似方法处理。在每种情形下，交换图一侧的生成元都映射到$\pi_1\mathbb{P}\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$的标准几何生成元。因此， Φ 在所有情形下都是同构；又由于两侧的中心 $\mathbb{Z}$ 相互对应，原映射

$$\pi_1\,\mathrm{EG}^{\star}(\mathbf{S_w})/\,\mathrm{Rel}^{\star}(\mathbf{S_w}) \longrightarrow \pi_1\,\mathrm{Quad}(\mathbf{S_w})$$

是一个同构。

□

参考文献

[Bir16] J. Birman.《辫子、链环与映射类群》。（AM-82），第82卷。《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，2016年。[BMQS22] A. Barbieri、M. Möller、Y. Qiu 和 J. So。二次微分作为稳定性条件：塌缩子曲面（2022）。arXiv: 2212.08433。[BS15] T. Bridgeland 和 I. Smith。二次微分作为稳定性条件。《高等科学研究所数学出版物》121（2015），第155–278页。[CP07] L. Chekhov 和 R. C. Penner。论泰希米勒理论与瑟斯顿理论的量子化。《泰希米勒理论手册》第1卷（2007）。[Dic06] W. Dicks。《图上的群作用》。施普林格，2006年，第1–34页。[FST08] S. Fomin、M. Shapiro 和 D. Thurston。簇代数与三角剖分曲面。I. 簇复形。《数学学报》201.1（2008），第83–146页。[GJP15] J. Guaschi 和 D. Juan-Pineda。《群作用手册》第II卷。载于：《数学进展讲义》第32卷，国际出版社，波士顿，2015年。章节：曲面辫群及其群环的低阶代数K理论综述，第23–75页。arXiv：1302.6536。[Hat91] A. Hatcher。论曲面的三角剖分。《拓扑学应用》40.2（1991），第189–194页。[KQ20] A. King 和 Y. Qiu。簇交换群胚与框架二次微分。《数学发明》220.2（2020），第479–523页。[Lee10] E.-K. Lee。纯辫群的正表示。《忠清数学学会志》23.3（2010），第555–555页。[Qiu16] Y. Qiu。装饰标记曲面：球面扭曲与辫扭转。《数学年刊》365.1（2016），第595–633页。