arXiv:2603.07583v1 [math.FA] 8 Mar 2026

Td不变希尔伯特模的商模的次正规性

K. S. Amritha、S. Bera、S. Chavan、S. S. Sequeira

Abstract. 本文研究多项式环 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 上的 $\mathbb{T}^d$ 不变希尔伯特模 $\mathscr{H}$ 及其商模，重点分类形如 $\mathscr{H}/[p]$ 的次正规商模，其中 p 是 d 个复变量上的齐次多项式。此分类的动机来自情形 $p(z_1,z_2)=z_1-z_2$：在该情形下，商模 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_2}/[p]$ 的次正规性$\widehat{\quad}$等价于 $\mathbb{T}$ 不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_{\kappa_1}$ 与 $\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 的模张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes_{\mathbb{C}[z]}\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 的次正规性；这一问题最早由 N. Salinas 研究。除了关于 $\mathscr{H}$ 的主齐次子模 $[p]$ 的一般结构性结果外，我们还证明，若 $\mathscr{H}/[p]$ 是次正规的，则 p 必须是无平方因子的。此外，当 $\mathscr{H}$ 是 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 或 $H^2(\mathbb{B}^d)$ $d\geqslant 1$ 时，商模 $\mathscr{H}/[p]$ 的次正规性意味着 $\deg\ p\leqslant 1.$。我们进一步证明，$H^2(\mathbb{D}^2)/[p]$（分别地，$H^2(\mathbb{B}^2)/[p]$）是次正规的，当且仅当 $\deg\ p\leqslant 1.$。若 H^2_d 表示 d 维 Drury–Arveson 模，则 $H^2_2/[p]$ 次正规，当且仅当 p 非零且 $\deg\ p\leqslant 1$。这令人惊讶，尤其是因为当 $d\geqslant 2.$ 时，H^2_d 不是次正规希尔伯特模。此外，上述现象不会出现在 Dirichlet 模 $D_2(\mathbb{B}^2)$ 中。最后，我们给出一个例子，说明即使 $\deg p=2.$，$\mathcal{U}_d$ 不变的次正规希尔伯特模 $\mathscr{H}$ 也可能具有次正规商模 $\mathscr{H}/[p]$。

Contents

1. 旋转不变 Hilbert 模块 1 2. 主要结果的陈述 4 3. 预备结果 6 4. 主要结果的证明 12 5. 说明主要结果的例子 17 附录：无平方因子多项式与 Hilbert 子模 20 参考文献 23

1. Rotation-invariant Hilbert modules

20 世纪 80 年代，R. G. Douglas 开创了一项研究计划，将模论技术应用于多变量算子理论，并倡导运用模语言以及交换代数和代数几何中的工具，为交换算子组建立模型理论（见 [19, 20]）。有关这些主题及其近期进展的概述，请参阅 [12, 25, 41, 42]。本文的研究沿着类似的思路展开，重点关注次正规商模块。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 47A13 47B20 次要分类 46E22 32A10.
*Key words and phrases.*齐次、无平方因子、莱因哈特域、哈代空间、Drury–Arveson 空间、希尔伯特模、商模、模张量、次正规。第一作者获得 PMRF 计划 2302755 资助，第二作者获得 FARE 计划 2508001 资助。

非负整数集记为 $\mathbb{Z}_+$。令 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘和单位圆。固定一个正整数 $d.$。对于 $z=(z_1,\dots,z_d)\in\mathbb{C}^d$ 和 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, 令 $z^\alpha:=z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d}$, $\alpha!:=\alpha_1!\cdots\alpha_d!$ 和 $|\alpha|:=\alpha_1+\cdots+\alpha_d$。对于 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ 和 $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, 若对每个 $j=1,\dots,d.$ 都有 $\alpha_j\leqslant\beta_j$, 则称 $\alpha\leqslant\beta$。符号 $\langle z,w\rangle$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 上的标准内积, $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 表示以复数为系数、变量为 $z_1,\dots,z_d$ 的多项式环。若对于每个 $\lambda\in\mathbb{C}.$, 都有 $p(\lambda z_1,\dots,\lambda z_d)=\lambda^m p(z_1,\dots,z_d)$, 则称 $p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 是次数为 $m\in\mathbb{Z}_+$ 的齐次多项式（记作 $\deg p=m$）。若不存在非恒定多项式 $q\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 使得 q^2 整除 $p.$, 则称多项式 $p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 无平方因子。赋范线性空间中非空子集 E 的闭线性张成记为 $\bigvee E$。对于非空集合 X 和 $x\in X$, 令 δ_x 表示集中于 $x.$ 的博雷尔概率测度。令 ℓ 表示 $[0,1]$ 上的勒贝格测度。给定可测空间 X 和 Y、X 上的测度 μ 以及可测函数 $\varphi:X\to Y$, μ 在 φ 下的推前测度记为 $\varphi_*\mu$。正博雷尔测度 μ 的支撑记为 $\operatorname{supp}\mu.$。设 Ω 是 $\mathbb{C}^d$ 中的一个区域, 即 $\mathbb{C}^d.$ 的非空开连通子集。对于函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$, 令 $Z(f)$ 表示 $f.$ 的零点集。若 Ω 在 d 维环面 $\mathbb{T}^d$ 的自然作用下不变, 则称 Ω 为莱因哈特域: 对于每个 $z=(z_1,\dots,z_d)\in\Omega$ 以及每个 $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_d)\in\mathbb{T}^d$, 点 $\zeta\cdot z:=(\zeta_1z_1,\dots,\zeta_dz_d)$ 属于 Ω。对于 $\mathbb{C}^d$ 中的莱因哈特域 Ω 及函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$, 定义 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 为 $f(z)=f(z)$, 其中 $a:=(a_1,\dots,a_d)$, 当 $a=(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{C}^d$ 时成立; b 表示 $b\in\mathbb{C}.$ 的复共轭。

设 $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子构成的含幺 C^*-代数, 其中恒等算子 I 为单位元, 算子的复合为乘法, 而有界线性算子 T 在 $\mathcal{H}$ 上唯一确定的伴随 T^* 为对合。$\mathcal{H}$ 上的一个交换 d元组 T 是一个 d-元组 $(T_1,\dots,T_d)$, 由算子 $T_1,\dots,T_d\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 组成, 并满足 $T_iT_j=T_jT_i$（对 $1\leqslant i\neq j\leqslant d$）。$T$ 的泰勒谱记作 $\sigma(T)$。关于泰勒谱的定义和基本理论, 请参阅 [16, 44]。T 的多项式函数演算使希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 成为一个上的希尔伯特模 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$:

$$\mathfrak{m}_T(p,h):=p(T)h,\quad p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d],\ h\in\mathcal{H}. \tag{1.1}$$

具有数乘 $\mathfrak{m}_T$ 的希尔伯特模 $\mathcal{H}$ 记作有序对 $(\mathcal{H},\mathfrak{m}_T)$。若对于每个 $p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d].$, $\mathfrak{m}_T(p,\cdot)=p(T)$ 都是次正规的, 我们就称 $(\mathcal{H},\mathfrak{m}_T)$ 是次正规的。根据 E. Franks 的一个结果（见 [28, 定理 0.2]）, $(\mathcal{H},\mathfrak{m}_T)$ 是次正规希尔伯特模, 当且仅当 T 是次正规的。回顾一下, 如果存在希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 以及作用在其上的交换 d-元组 $N=(N_1,\dots,N_d)$, 其各算子均为正规算子, 满足 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{K}$（作为等距嵌入）, 且对于 $j=1,\dots,d$ 有 $T_j=N_j|_{\mathcal{H}}$, 那么作用在 $\mathcal{H}$ 上的交换 d-元组 $T=(T_1,\dots,T_d)$ 就称为次正规的; 这样的交换 d-元组 N 称为 T 的正规扩张。若 $\mathcal{K}$ 是唯一一个包含 $\mathcal{H}$ 且对每个 $j=1,\dots,d.$ 都约化 N_j 的子空间, 则称 T 的正规扩张 N 为极小。

设 Ω 是复数域中一个有界的、包含原点的莱因哈特域。所谓 Ω 上的 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$, 是指 Ω 上取复值全纯函数的一个再生核希尔伯特空间, 其再生核为 $\kappa:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$, 并满足以下条件:

(C_1) κ 在原点不为零, (C_2) $\kappa(\zeta\cdot z,\ \zeta\cdot w)=\kappa(z,\ w)$ 对所有 $\zeta\in\mathbb{T}^d$ 和 $z,\ w\in\Omega$, (C_3) $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个希尔伯特模, 其数乘 $\mathfrak{m}$定义为

$$\mathfrak{m}(p,f):=p\cdot f,\quad p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d],\ f\in\mathscr{H}_\kappa,$$

(C_4) z_1中的多项式、……、z_d在 $\mathscr{H}_\kappa$.中稠密

设 $\mathscr{H}_\kappa$ 是 Ω 上的一个 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模；当区域 Ω 无关紧要时，我们简称其为 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模。根据 [11, 定理 2.11], 以及假设（C1）和（C2），存在一个由 $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ 个正实数组成的多重序列，使得

$$\kappa(z,w)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} a_\alpha\, z^\alpha\overline{w}^\alpha,\quad z,w\in\Omega,$$

并且 $\{z^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ 构成了 $\mathscr{H}_\kappa$的一个正交基。Papadakis 定理（见 [37,定理 2.10]）结合 [37, 命题 4.11],现表明

$$\{\sqrt{a_\alpha}\, z^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \text{ forms an orthonormal basis for } \mathscr{H}_\kappa; \tag{1.2}$$

关于这一事实的单变量类似结果，见 [37, 定理 4.12]。此外,

$$\kappa:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C} \text{ is jointly continuous.} \tag{1.3}$$

事实上，根据 Hartogs 定理（见 [34, 定理* 1.7.13]），映射 $(z,w)\mapsto\kappa(z,w)$ 在 $\Omega\times\overline{\Omega}$ 上是全纯的。此外，根据条件 (C3)，坐标函数 $z_1,\dots,z_d$是 $\mathscr{H}_\kappa$乘子，即,

$$f\in\mathscr{H}_\kappa\ \Rightarrow\ z_jf\in\mathscr{H}_\kappa,\quad j=1,\dots,d.$$

注意，乘以第 j 个坐标函数 z_j,$j=1,\dots,d$, 的算子 $\mathscr{M}_{z_j}$ 是 $\mathscr{H}_\kappa$. 上的有界线性算子。令 $\mathscr{M}_z$ 表示交换的d-元组 $(\mathscr{M}_{z_1},\dots,\mathscr{M}_{z_d})$。那么 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_{\mathscr{M}_z}$（见 (1.1)）。

令 $\mathbb{B}^d$ 表示 $\mathbb{C}^d$中的开单位球，$\mathcal{U}_d$ 表示复数域$d\times d$ 酉矩阵群。注意，$\mathcal{U}_d$ 自然作用于单位球 $\mathbb{B}^d$上：对于每个$z\in\mathbb{B}^d$ 以及每个 $U\in\mathcal{U}_d$，点 $U\cdot z$ 都属于 $\mathbb{B}^d$。若 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$ 定义在 $\mathbb{B}^d$ 上，则称其为 $\mathcal{U}_d$-不变，如果

$$\kappa(U\cdot z,U\cdot w)=\kappa(z,w),\quad z,w\in\mathbb{B}^d,\ U\in\mathcal{U}_d.$$

参见 [11, 定理 2.12]，其中给出了 $\mathcal{U}_d$-不变希尔伯特模的刻画。

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一个区域，且 $\kappa_j:\Omega\times\Omega\to\mathbb{C}$，$j=1$，$2$，是两个正半定核。按照 [37, 定义 5.12], ，定义

$$\kappa_1\otimes\kappa_2(z,w)=\kappa_1(z_1,w_1)\kappa_2(z_2,w_2),\quad z=(z_1,z_2),w=(w_1,w_2)\in\Omega\times\Omega.$$

$\mathscr{H}_{\kappa_1}$ 与 $\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 的张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 是定义在 $\Omega\times\Omega$ 上的希尔伯特模 $\mathscr{H}_{\kappa_1\otimes\kappa_2}$（参见 [37, 定理 5.11]）。按照 [37, 定义 5.15], ，定义

$$\kappa_1\odot\kappa_2(z,w)=\kappa_1(z,w)\kappa_2(z,w),\quad z,w\in\Omega.$$

$\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes_{\mathbb{C}[z]}\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 与 $\mathscr{H}_{\kappa_1}$ 的模张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 是 Ω 上的希尔伯特模$\mathscr{H}_{\kappa_1\odot\kappa_2}$（见 [40, 推论 3.6]）。

我们把 $\mathscr{H}_\kappa$的子模 $\mathcal{M}$，定义为 $\mathscr{H}_\kappa$ 的一个闭子空间 $\mathcal{M}$，它在 $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}_z}$. 下不变。设 p是 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$. 中的一个齐次多项式。由 p 生成的 $\mathscr{H}_\kappa$ 的主齐次子模 由 $[p]:=\bigvee\{z^\alpha p:\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\}$给出。一般来说，包含 $p\mathscr{H}_\kappa\subseteq[p]$ 可能是严格的（见例 A）。$\mathscr{H}_\kappa$ 还有另一个与齐次多项式 p自然相关的子模:

$$[p]_0:=\{f\in\mathscr{H}_\kappa:f|_{Z(p)}=0\}.$$

显然，$[p]\subseteq[p]_0$。一般而言，这一包含可能是严格的（例如 $[z_1^2]\subsetneq[z_1]=[z_1^2]_0$）。然而，若 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模，且 p 是一个非零齐次无平方多项式，则 $[p]_0=[p]$. 。这一事实的证明与正文关系不大，故置于附录中（见定理 A）。

设 $\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}:=\mathscr{H}_\kappa\ominus\mathcal{M}$，并令 $P_{\mathcal{M}}$（相应地， $P_{\mathcal{M}}^{\perp}$）表示 $\mathscr{H}_\kappa$ 到 $\mathcal{M}$ （相应地，$\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$）上的正交投影。考虑 $\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$ 上由下式给出的有界线性算子 $\mathscr{T}_{z_j,\,\mathcal{M}}$

$$\mathscr{T}_{z_j,\mathcal{M}}:=P_{\mathcal{M}}^{\perp}\mathscr{M}_{z_j}|_{\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}},\quad j=1,\ldots,d.$$

事实证明，$\mathscr{T}_{z,\,\mathcal{M}}:=(\mathscr{T}_{z_1,\,\mathcal{M}},\ldots,\mathscr{T}_{z_d,\,\mathcal{M}})$ 是一个可交换的 d-元组，且数乘 $\mathfrak{m}_{\mathscr{T}_z}$ 满足

$$\mathfrak{m}_{\mathscr{T}_z}(p,f)=P_{\mathcal{M}}^{\perp}p(\mathscr{M}_z)f,\quad p\in\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d],\ f\in\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$$

（见引理 3.1(ii)）。特别地， $\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$ 是希尔伯特模 $(\mathscr{H}_\kappa\ominus\mathcal{M},\ \mathfrak{m}_{\mathscr{T}_z})$。由于 $\mathscr{M}_z\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$， 商模 $\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$ 在 $\mathscr{M}_z^*$， 下不变，且

$$\mathscr{T}_{z_j}^*=\mathscr{M}_{z_j}^*|_{\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}},\quad j=1,\ldots,d. \tag{1.4}$$

为简便起见，且在不引起歧义的前提下，我们在记号 $P_{\mathcal{M}}$， $P_{\mathcal{M}}^{\perp}$, $\mathscr{T}_{z,\,\mathcal{M}}$中省略符号 $\mathcal{M}$。

此前已有研究考察多圆盘或单位球上的商模，见 [12, 18, 21, 23, 24, 27, 32]，；而次正规希尔伯特模的研究见 [1, 11, 17, 31, 40]。 $\mathcal{U}_d$-不变希尔伯特模已在 [2, 11, 29, 31]中讨论。关于本质约化商模和子模的简要讨论，见 [10,第 5 节。5]。

在算子论背景下，次正规性并不会自然地从一个希尔伯特模传递到它的商模；因此，下面的问题没有简单的答案。

问题 1.1。对于 Ω 上的 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$，哪些主齐次子模 $\mathcal{M}$ 的商模 $\mathscr{H}_\kappa/\mathcal{M}$ 是次正规的（分别对于 $\mathbb{B}^d$上的 $\mathcal{U}_d$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$）？

注记 1.2。设 p 是复数域 $\mathbb{C}[z]$ 中的非常数齐次多项式，也就是说，$p(z)=z^k$，其中某个整数为 $k\geqslant 1$. 。设 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}$-不变希尔伯特模。注意， $\{z^j:0\leqslant j\leqslant k-1\}$ 是 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$. 的正交基。由于只要 $k\geqslant 2$，就有 $\|\mathscr{T}_z(z^{k-1})\|=0<\|\mathscr{T}_z^*(z^{k-1})\|$，由命题 II.4.2] 可知， $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 是次正规的当且仅当 deg $p=1$. ∎

鉴于注 1.2，我们将重点讨论 $d\geqslant 2$. 上的问题 1.1。这个问题与 N. Salinas 提出的下述问题密切相关（见 [40, 注 3.7]）：模张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes_{\mathbb{C}[z]}\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 在 $\mathscr{H}_{\kappa_1}$ 和 $\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 都是次正规希尔伯特模时，是否为次正规希尔伯特模？随后，人们在加权 Bergman 空间的框架下研究了这一问题，旨在阐明一个代数概念（模张量积）与一个几何概念（次正规性）之间的确切关系。关于否定答案，请参阅 [1, 推论 1.8] 。为了解 Salinas 的问题与问题 1.1 之间的确切联系，请注意，若 $p(z_1,\ z_2)=z_1-z_2$ 和 $\mathscr{H}_{\kappa_1}$， $\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的次正规 $\mathbb{T}$-不变希尔伯特模，则 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_2}/[p]$ 为次正规，当且仅当 $\mathscr{H}_{\kappa_1}\otimes_{\mathbb{C}[z]}\mathscr{H}_{\kappa_2}$ 为次正规（见引理 3.6(iv)）。

2. Statements of the main results

以下结果回答了问题 1.1，涵盖了 $\mathbb{D}^2$ 上 Hardy 模的所有主齐次子模（见例 3.7）。

定理 2.1。设 p 是 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$. 中的非常数齐次多项式，则以下条件等价：

(i) 商模 $H^2(\mathbb{D}^2)/[p]$是次正规的，(ii) 次数 $p=1$，(iii) 存在 a，$b\in\mathbb{C}$， 不同时为零，使得 $a\mathscr{T}_{z_1,[p]}=b\mathscr{T}_{z_2,[p]}$.

在某些特殊情况下，还可以明确描述表示 $\mathscr{T}_z$ 的矩的测度（参见注 4.2）。此外，对于 $\mathbb{D}^2$ 上的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模，定理 2.1 不成立（参见例 5.2）。

本文的第二个主要结果回答了问题 1.1，适用于 $\mathbb{B}^2$ 上 Hardy 模的所有主齐次子模以及 Drury–Arveson 模（见例 3.7）。

定理 2.2。设 p 是 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ 中的非常数齐次多项式，并设 $\mathscr{H}$ 为 *Hardy* 模 $H^2(\mathbb{B}^2)$ 或 *Drury–Arveson* 模 H^2_2。那么，下列条件等价：

(i) 商模 $\mathscr{H}/[p]$ 是次正规的，(ii) $\deg p = 1$，(iii) 存在 $a, b \in \mathbb{C}$，不同时为零，使得 $a\mathscr{T}_{z_1[p]} = b\mathscr{T}_{z_2[p]}$.

定理 2.2 中 (i)⇒(ii) 和 (ii)⇒(i) 这两个蕴含关系对于 $\mathbb{B}^2$ 上的 $\mathcal{U}_2$-不变希尔伯特模并不成立（见例 5.3 和 5.4）。然而，定理 2.2 证明中的一个关键要素，即乘法 d-元组 $\mathscr{M}_z$ 是一个 m-等距算子，确保了 $\deg p \leqslant m$ （见命题 4.4）。Drury–Arveson 模 H^2_d 的一个重要性质是，若对于某个 $g \in H^2(\mathbb{D})$，$f(z) = g(z_1)$，则 $f \in H^2_d$ 和 $\|f\| = \|g\|_{H^2(\mathbb{D})}$ （见 [33, 命题 2.4]）。这一性质（参见 (4.24)）在定理 2.2 的证明中起着关键作用。定理 2.1 和 2.2 中 (iii)⇒ (ii) 这一蕴含关系的证明依赖于齐次多项式的分解，而这种分解仅在两个复变量的情形下成立（见命题 A 和注 A）。

接下来，我们陈述一些关于 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模的商模次正规性的必要或充分条件。当 $\mathcal{M}$ 是一个主齐次子模时，有如下的一般结果（关于边界表示中的类似现象，见 [18, 引理 5.5]）：

命题 2.3. 设 p 是 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 中的非常数齐次多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模。若商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 是次正规的，则 p 无平方因子。

由定理 2.1 和 2.2 可知，命题 2.3 的逆命题不成立。下述结果给出了 $\mathcal{U}_2$-不变希尔伯特模的许多两两不同构的次正规商模实例（参见引理 3.1(iii)）。

命题 2.4. 设 p 是 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ 中次数为 1 的齐次多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathcal{U}_2$-不变希尔伯特模。若 $\mathscr{H}_\kappa$ 是次正规的，则商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 也是次正规的。

下面给出本文的结构概述。在第 4 节中，我们证明定理 2.1 和 2.2，以及命题 2.3 和 2.4。所需的预备结果在第 3 节中给出。其中包括：关于 a $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模的主齐次子模的若干重要性质（见引理 3.1 和 3.2）；为一个三参数族的商模构造标准正交基（见引理 3.4）；以及一个以具体的斯蒂尔切斯矩问题表述的次正规性判据（见引理 3.6）。第 5 节给出一组例子，以说明本文的主要结果（见例 5.2–5.5）。最后，我们提出若干尚未解决的问题。附录则确立了两个关于正文中所使用的齐次多项式的严格二维事实（见命题 A 和 B），并讨论了它们在希尔伯特模中的一些应用（见定理 A 和推论 A）。表 1 总结了本文的主要结果。这里，p 表示 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 中的一个非零齐次多项式，$\mathscr{S}_d$ 表示 Ω 上的次正规希尔伯特模的集合，而 $\mathscr{TS}_d$（分别地，$\mathscr{US}_d$）表示次正规 $\mathbb{T}^d$-不变（分别为次正规 $\mathcal{U}_d$-不变）希尔伯特模的集合。

$\mathscr{H}_\kappa$	度 $p \leqslant 1 \Rightarrow \mathscr{H}_\kappa/[p] \in \mathscr{S}_d$	$\mathscr{H}_\kappa/[p] \in \mathscr{S}_d \Rightarrow$ 度 $p \leqslant 1$
$H^2(\mathbb{D}^2)$ $H^2(\mathbb{B}^2)$ H_2^2	✓	✓
$H^2(\mathbb{D}^d)$ $H^2(\mathbb{B}^d)$ H_d^2, $d \geqslant 3$	?	✓
$\mathscr{H}_\kappa \in \mathscr{TS}_2$	×	×
$\mathscr{H}_\kappa \in \mathscr{US}_2$	✓	×

TABLE 1. 商模的次正规性 les

3. PREPARATORY RESULTS

下面列出 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 上 d-元组 $\mathscr{T}_z$ 的若干基本性质，其中第一条性质在 [32, 定理 6 的证明中2] 未加证明地出现，而 Hardy 模 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的第三部分则有一个更为广泛的推广，见 [26, 推论 9]。

引理 3.1. 设 p、q、$r \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 为多项式，且 p 非常数，并设$\mathscr{H}_\kappa$ 为一个 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模。则下列陈述成立：

(i) $p(\mathscr{T}_{z,[p]}) = 0$, (ii) $q(\mathscr{T}_{z,[p]})(P^\perp f) = P^\perp(qf)$ 对任意 $f \in \mathscr{H}_\kappa$, (iii) 若$\mathscr{T}_{z,[p]}$ 与$\mathscr{T}_{z,[q]}$ 酉等价，则 $[p] = [q]$, (iv) 若 p、q、r 为齐次多项式，且$\deg\ r < \deg\ p$，则 r 属于 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$，并且

$$q(\mathscr{T}_{z,[p]})r = \begin{cases} qr & \text{if } \deg q < \deg p - \deg r, \\ 0 & \text{if } p = qr, \end{cases}$$

(v) 若 p、r 为齐次多项式，且$\deg\ p \geqslant \deg\ r + 2$，则

$$\mathscr{T}_{z_j,[p]} r = z_j r, \quad j = 1, \ldots, d.$$

证明. (i) 由(1.4)，对 $f, g \in \mathscr{H}_\kappa/[p]$,

$$\langle p(\mathscr{T}_z)f,\, g\rangle = \langle f,\, \overline{p}(\mathscr{T}_z^*)g\rangle = \langle f,\, \overline{p}(\mathscr{M}_z^*)g\rangle = \langle p(\mathscr{M}_z)f,\, g\rangle = \langle pf,\, g\rangle = 0.$$

由于 f，g 是任意的，我们得到 (i)。

(ii) 令 $f \in \mathscr{H}_\kappa$. 由于 $z_i P f \in [p]$,

$$\mathscr{T}_{z_i}(P^\perp f) = P^\perp(z_i f - z_i P f) = P^\perp(z_i f), \quad i = 1, \ldots, d. \tag{3.5}$$

将 f 替换为 $z_j f \in \mathscr{H}_\kappa$，后，我们得到

$$\mathscr{T}_{z_i}(P^\perp(z_j f)) = P^\perp(z_i z_j f), \quad i, j = 1, \ldots, d.$$

由 (3.5) 可知，对于 i，$j = 1$，$\ldots$，$d.$，$\mathscr{T}_{z_i}\mathscr{T}_{z_j}(P^\perp f) = P^\perp(z_i z_j f)$。反复应用此结论，可得对于任意 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$，$z^\alpha(\mathscr{T}_z)(P^\perp f) = P^\perp(z^\alpha f)$。因此，由 $P^\perp$ 的线性性，我们推出 (ii)。

(iii) 假设 $\mathscr{T}_{z,\ [p]}$ 与 $\mathscr{T}_{z,\ [q]\cdot}$ 酉等价。那么存在酉算子 $\mathscr{U}$: $\mathscr{H}_\kappa/[p] \to \mathscr{H}_\kappa/[q]$，使得 $\mathscr{U}\mathscr{T}_{z_j,\ [p]} = \mathscr{T}_{z_j,\ [q]}\mathscr{U}$，$j = 1$，$\ldots$，$d.$。由 (i) 部分可知 $p(\mathscr{T}_{z,\ [q]}) = \mathscr{U}p(\mathscr{T}_{z,\ [p]})\mathscr{U}^{-1} = 0$, ，因此由 (ii) 部分,

$$P_{[q]}^\perp(p) = p(\mathscr{T}_{z,[q]})P_{[q]}^\perp(1) = 0.$$

这表明 $p \in [q]$，从而 $[p] \subseteq [q]$。类似地，我们得到包含$[q] \subseteq [p]$，由此得到等式 $[p] = [q]$。

(iv) 设 $s \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 是一个齐次多项式，使得 $\deg\ s < \deg\ p$.。对于 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$，$s$ 中任意单项式的次数（等于 $\deg\ s$）小于 pz^α 中任意单项式的次数（等于 $\deg\ p + |\alpha|$）。由此可得 $\langle s,\ pz^\alpha\rangle = 0$ 对所有$\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$，并且由于 $\{pz^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\}$ 的线性张成是 $[p]$，的稠密子空间，我们得出 $s \in \mathscr{H}_\kappa/[p]$.

现假设 p, q, r 是满足 $\deg\ r < \deg\ p$ 的齐次多项式。若 $\deg\ q < \deg\ p - \deg\ r$, 则将上一段中的事实应用于 $s \in \{r, qr\}$, 我们得出 r, $qr \in \mathscr{H}_\kappa/[p]$, 从而由第 (ii) 部分, $q(\mathscr{T}_z)r = P^\perp(qr) = qr$.最后, 若 q 满足 $p = qr$, 则 $P^\perp(qr) = P^\perp(p) = 0$.

(v) 将 (iv) 应用于 $q(z) = z_j$ for $j = 1, \ldots\ldots, d$ 即可得出。 □

下面的引理基于对二元齐次多项式的分解（见命题 A）；这种分解在三元情形下并不成立（见注 A）。

引理 3.2. 设 $p, q \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 是非常数齐次多项式, 且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。那么以下结论成立:

(i) 若 $p \in [q]$, 则 q 是 p 的因子, (ii) $[p] = [q]$ 当且仅当 p 是 q 的常数倍, (iii) 若 $q(\mathscr{T}_{z,[p]}) = 0$, 则 次数 $p \leqslant$次数 q.

证明。 (i) 假设 $p \in [q]$.。于是, 存在一个多项式序列 $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$, 其中各项属于 $\mathscr{H}_\kappa$, 使得 $\{qf_n\}_{n\geqslant 0}$ 在 $\mathscr{H}_\kappa$. 中收敛到 p。结合

$$\langle f, \kappa(\cdot, w)\rangle = f(w), \quad f \in \mathscr{H}_\kappa, \ w \in \Omega, \tag{3.6}$$

而且 κ 的联合连续性（见（1.3））意味着 qf_n 在 Ω 上紧致收敛。根据魏尔斯特拉斯收敛定理（见 [34, 定理 1.7.1]）,

$$\{D^\alpha(qf_n)\}_{n\geqslant 0} \text{ converges compactly to } D^\alpha(p) \text{ for all } \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \tag{3.7}$$

其中 $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. 因此, $Z(q) \subseteq Z(p)$。根据命题 A, 存在标量 a, $b \in \mathbb{C}$, 它们不全为零, 使得

$$p(z) = (az_1 - bz_2)^k r(z), \quad q(z) = (az_1 - bz_2)^l s(z),$$

其中 k, $l \in \mathbb{Z}_+$ 和 r, $s \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ 满足 $Z(r) \cap Z(az_1 - bz_2) = \{0\}$ 且$Z(s) \cap Z(az_1 - bz_2) = \{0\}$。引入新坐标

$$w_1 := az_1 - bz_2, \ w_2 := \begin{cases} z_2 & \text{if } a \neq 0, \\ z_1 & \text{if } b \neq 0. \end{cases}$$

在这些新的共形坐标下, 在原点附近, p 和 q 具有如下形式

$$p(w) = w_1^k r(w), \quad q(w) = w_1^l s(w),$$

其中 $r(w)$ 和 $s(w)$ 在 $(0, w_2)$ 附近不为零, 其中 $w_2 \neq 0$.。由（3.7）可得,

$$\left\{\frac{\partial^m(w_1^l s f_n)}{\partial w_1^m}\right\}_{n\geqslant 0} \text{ converges compactly to } \frac{\partial^m(w_1^k r)}{\partial w_1^m} \text{ for any integer } m \geqslant 1. \tag{3.8}$$

根据一般莱布尼茨法则,

$$\frac{\partial^k(w_1^k r)}{\partial w_1^k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^{k-j} w_1^k}{\partial w_1^{k-j}} \frac{\partial^j r}{\partial w_1^j} = k!r + f \tag{3.9}$$

对于某个在 $(0, w_2)$ 附近消失的 f $w_2 \neq 0$. 因此, 若 $k < l$, 那么再次应用一般莱布尼茨法则,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^k(w_1^l s f_n)}{\partial w_1^k}(0, w_2) = 0 \neq k!r(0, w_2) \overset{(3.9)}{=} \frac{\partial^k(w_1^k r)}{\partial w_1^k}(0, w_2), \quad w_2 \neq 0,$$

因为对于 $w_2 \neq 0$, $r(0, w_2) \neq 0$ 。这个与 (3.8) 矛盾的结论表明 $k \geqslant l$.。对 q 的每个不同因子重复这一论证, 我们可推出 q 是 p. 的一个因子

(ii) 如果 p 是 q 的常数倍, 那么 $[p] = [q]$. 。现在, 如果 $[p] = [q]$, 那么 $p \in [q]$ 且 $q \in [p]$, 因此由 (i) 可知（交换 p 和 q 的角色后）, p 是 q 的常数倍。

(iii) 假设 $q(\mathscr{T}_{z,\ [p]})=0.$。由引理 3.1(ii) 可得,

$$P_{[p]}^{\perp}(q)=q(\mathscr{T}_{z,[p]})P_{[p]}^{\perp}(1)=0,$$

这意味着 $q\in[p].$ 根据 (i), p 是 q 的因子，因此 $\deg\ p\leqslant\deg\ q$。 □

下面的结果证明了定理 2.1 和定理 2.2 中条件 (ii) 与 (iii) 的等价性。

命题 3.3。设 p 是 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$中的非常数齐次多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。则以下条件等价:

(i) $\deg\ p=1$, (ii) 存在 a, $b\in\mathbb{C}$, 二者不全为零，使得 $a\mathscr{T}_{z_1,[p]}=b\mathscr{T}_{z_2,[p]}.$

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 这由引理 3.1(i) 得出。

(ii) $\Rightarrow$ (i): 根据假设, $q(\mathscr{T}_{z,[p]})=0$, 其中 $q(z_1,z_2)=az_1-bz_2.$ 因此，根据引理 3.2(iii), $\deg\ p\leqslant\deg\ q=1.$ 由于 p 不是常数，$\deg\ p=1.$ □

虽然证明主要结果只需要引理 3.4 的某些特殊情形，但我们仍将其列出，以供第 5 节后续使用。这一事实的某些特殊情形此前已见于文献（参见 [5, 第 4 节. 1], [10, 21],[22,第 7 节.4],以及 [32,推论 2 的证明.4]）。

引理 3.4。对于非负整数 r、s 和 $a\in\mathbb{C}$，考虑齐次多项式 $p(z_1,z_2)=z_1^rz_2^s($ $z_1-az_2)$。设 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。考虑由以下齐次多项式构成的集合 $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
p_n^{(j)}(z_1,z_2)&=z_1^nz_2^j,\quad 0\leqslant j\leqslant s-1,\ n\geqslant 0,\ s\geqslant 1,\\
q_n^{(j)}(z_1,z_2)&=z_1^jz_2^n,\quad 0\leqslant j\leqslant r-1,\ n\geqslant s,\ r\geqslant 1,\\
q_n^{(r)}(z_1,z_2)&=\sum_{k=r}^{n-s}\overline{a}^{k-r}\frac{z_1^kz_2^{n-k}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2},\quad n\geqslant r+s;
\end{aligned}\tag{3.10}$$

若 $r=0$（分别为 $s=0$），则相应的多项式 $q_n^{(j)}$（分别为 $p_n^{(j)}$）不包含在 $\mathcal{B}$.中。于是 $\mathcal{B}$ 构成商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$.的一组正交基

证明。我们首先证明 $\mathcal{B}$ 与 $[p]$正交。由于多项式在$\mathscr{H}_\kappa$ 中稠密（见（C4））, 只需验证每个 $p_n^{(j)}$和 $q_n^{(j)}$都与 $z^\alpha p$ 正交，其中 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^2$任意。由于 $z^\alpha p$ 中 z_2 的次数至少为 s, 由（1.2）可得 $\langle p_n^{(j)},\ z^\alpha p\rangle=0$对任意 $0\leqslant j\leqslant s-1$ 和 $n\geqslant 0.$ 均成立。类似地，由于 $z^\alpha p$ 中 z_1 的次数至少为 r, $\langle q_n^{(j)},\ z^\alpha p\rangle=0$ 对任意 $0\leqslant j\leqslant r-1$ 和 $n\geqslant s.$ 均成立。由于 $q_n^{(r)}$和 $z^\alpha p$ 是次数为 n 和 $|\alpha|+r+s+1$的齐次多项式, $\langle q_n^{(r)},$ 当$n\neq|\alpha|+r+s+1.$ 时, $z^\alpha p\rangle=0$ 成立。若对于某个 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^2$, 有 $n=|\alpha|+r+s+1$，则

$$\begin{aligned}
\langle q_n^{(r)},\,z^\alpha p\rangle &= \langle q_n^{(r)},\,z_1^{\alpha_1+r+1}z_2^{\alpha_2+s}-az_1^{\alpha_1+r}z_2^{\alpha_2+s+1}\rangle\\
&\overset{(3.10)}{=} \sum_{k=r}^{n-s}\frac{\overline{a}^{k-r}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2}\langle z_1^kz_2^{n-k},\,z_1^{\alpha_1+r+1}z_2^{\alpha_2+s}-az_1^{\alpha_1+r}z_2^{\alpha_2+s+1}\rangle\\
&\overset{(1.2)}{=} 0.
\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{B}\subseteq\mathscr{H}_\kappa/[p].$

要看出 $\mathscr{H}_\kappa \ominus \mathcal{B}$ 包含于 $[p]$, 令 $g(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^2} \hat{} g_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}_\kappa$ 属于$\mathscr{H}_\kappa \ominus \mathcal{B}$. 注意

$$\hat{g}_{n,j} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant s-1,\ n \geqslant 0,\ s \geqslant 1, \tag{3.11}$$
$$\hat{g}_{j,n} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant r-1,\ n \geqslant s,\ r \geqslant 1, \tag{3.12}$$
$$\sum_{k=r}^{n-s} a^{k-r}\hat{g}_{k,n-k} = 0, \quad n \geqslant r+s. \tag{3.13}$$

由此可知, 对每个整数 $m \geqslant r+s$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \hat{g}_{k,n-k} z_1^k z_2^{n-k} &\overset{(3.11)}{=} z_2^s \sum_{n=s}^{m}\sum_{k=0}^{n-s} \hat{g}_{k,n-k} z_1^k z_2^{n-k-s} \\
&\overset{(3.12)}{=} z_1^r z_2^s \sum_{n=r+s}^{m}\sum_{k=r}^{n-s} \hat{g}_{k,n-k} z_1^{k-r} z_2^{n-k-s} \\
&\overset{(3.13)}{=} z_1^r z_2^s \sum_{n=r+s}^{m}\sum_{k=r+1}^{n-s} \hat{g}_{k,n-k}(z_1^{k-r} - a^{k-r} z_2^{k-r}) z_2^{n-k-s}.
\end{aligned}$$

由于 $z_1^l - a^l z_2^l$, $l \geqslant 1$, 在 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ 中可被 整除, g 的部分和属于 $[p]$. 。由此可得 $g \in [p]$, 从而完成证明。□

回忆一下, 若存在定义在 $\mathbb{R}_+^d$ 上的正博雷尔测度（称为 $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ 的表示测度）, 使得 $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ 是一个*Stieltjes*矩多重序列 （当 $d = 1$时, 也称为斯蒂尔切斯矩序列）, 则

$$\gamma_\alpha = \int_{\mathbb{R}_+^d} t^\alpha \,\mathrm{d}\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

注记 3.5。 对于 $a \in [0,1)$, 考虑序列 $\left\{\frac{1}{1-a^{n+1}}\right\}_{n\geqslant 0}$. 。 注意, $\mu := \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta_{a^k}$ 在 $[0,1]$ 上定义了一个有限博雷尔测度, 并且满足

$$\frac{1}{1-a^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k(n+1)} = \int_{[0,1]} t^n \,\mathrm{d}\mu, \quad n \geqslant 0.$$

因此, $\left\{\frac{1}{1-a^{n+1}}\right\}_{n\geqslant 0}$ 是一个斯蒂尔切斯矩序列。 ∎

下一个引理是推导当 $\deg\ p = 1$时商模$\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 的次正规性的关键。

引理 3.6. 设 $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, 且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。则以下陈述成立:

(i) 若 $p(z) = z_j$, 则 $\mathscr{T}_{z_j} = 0$, $\mathscr{M}_{z_i}(\mathscr{H}_\kappa/[p]) \subseteq \mathscr{H}_\kappa/[p]$ 且 $\mathscr{T}_{z_i} = \mathscr{M}_{z_i}|_{\mathscr{H}_\kappa/[p]}$对于 $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$, (ii) 若 $p(z) = z_1 - az_2$ 对于某个 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则 $\mathscr{T}_{z_1} = a\mathscr{T}_{z_2}$ 且 $\mathscr{T}_{z_2}$ 是关于标准正交基 $\{\frac{q_n}{\|q_n\|}\}_{n\geqslant 0}$的单边加权移位, 由 $\mathscr{T}_{z_2}(\frac{q_n}{\|q_n\|}) = w_n \frac{q_{n+1}}{\|q_{n+1}\|}$给出, 其中

$$q_n(z_1, z_2) := \sum_{k=0}^{n} \overline{a}^k \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{\|z_1^k z_2^{n-k}\|^2}, \quad n \geqslant 0, \tag{3.14}$$
$$w_n := \frac{\|q_n\|}{\|q_{n+1}\|}, \quad n \geqslant 0, \tag{3.15}$$

(iii) 若对于某个 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$， $p(z) = z_1 - az_2$，则 $\mathscr{T}_z$ 在 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 上的交换算子对是次正规的，当且仅当

$$\left\{\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{|a|^{2k}}{\|z_1^k z_2^{n-k}\|^2}\Big)^{-1}\right\}_{n\geqslant 0} \text{ is a Stieltjes moment sequence,} \tag{3.16}$$

(iv) 若 $p(z_1, z_2) = z_1 - z_2$，且 $\mathscr{H}_{\kappa_j}$, $j = 1, 2$ 是定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 $\mathbb{T}$-不变希尔伯特模$\widehat{\quad}$，那么商模 $\mathscr{H}_{\kappa_1} \otimes \mathscr{H}_{\kappa_2}/[p]$ 是次正规的，当且仅当模张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_1} \otimes_{\mathbb{C}[z]} \mathscr{H}_{\kappa_2}$ 是次正规的。

证明。 (i) 若 $p(z_1, z_2) = z_1$， 那么由引理 3.4（应用于 $r = s = 0$ 和 $a = 0$），$\{z_2^n\}_{n\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$, 的正交基，因此 $\mathscr{T}_{z_1} = 0$, $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 在 $\mathscr{M}_{z_2}$ 下不变，且 $\mathscr{T}_{z_2} = \mathscr{M}_{z_2}|_{\mathscr{H}_\kappa/[p]}$. 当 $p(z_1, z_2) = z_2$.时，证明类似

(ii) 假设对于某个 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$， $p(z_1, z_2) = z_1 - az_2$。由引理 3.1(i)，$\mathscr{T}_{z_1} = a\mathscr{T}_{z_2}$。此外，由引理 3.4（应用于 $r = s = 0$），$\{\frac{q_n}{\|q_n\|}\}_{n\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 的一组标准正交基（见 (3.14)）。由 (1.2)，$\{z^\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$ 在 $\mathscr{H}_\kappa$, 中正交，因此对于每个 $m \neq n+1$ 和 $\langle z_2 q_n, \ q_{n+1}\rangle = \|q_n\|^2.$，都有 $\langle z_2 q_n, \ q_m\rangle = 0$。由此可得

$$\mathscr{T}_{z_2}(q_n) = P^\perp(z_2 q_n) = \langle z_2 q_n, q_{n+1}\rangle \frac{q_{n+1}}{\|q_{n+1}\|^2} = \frac{\|q_n\|^2}{\|q_{n+1}\|^2} q_{n+1}, \quad n \geqslant 0.$$

因此，$\mathscr{T}_{z_2}$ 是一个单边加权移位，其权重为 (3.15) 中给出的 $\{w_n\}_{n\geqslant 0}$。(iii) 注意到

$$\prod_{j=0}^{n-1} w_j^2 = \frac{\|q_0\|^2}{\|q_n\|^2} = \frac{1}{\|1\|^2} \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{|a|^{2k}}{\|z_1^k z_2^{n-k}\|^2}}, \quad n \geqslant 0.$$

由 (ii) 和 [43, 定理 4]， $\mathscr{T}_{z_2}$ 是次正规的充要条件是 (3.16) 成立。若 $\mathscr{T}_z$是次正规的，则 $\mathscr{T}_{z_2}$也如此，因此 (3.16) 成立。反过来，若 (3.16) 成立，且N 是 $\mathscr{T}_{z_2}$的正规扩张，则由于 $\mathscr{T}_{z_1} = a\mathscr{T}_{z_2}$ （见 (ii)）， $\mathscr{T}_z$ 是次正规的，其正规扩张为 $(aN, \ N)$。

(iv) 注意， $\kappa_1 \otimes \kappa_2$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\kappa_1 \otimes \kappa_2((z_1, z_2), (w_1, w_2)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m \overline{w}_1^m}{\|z^m\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_1}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n \overline{w}_2^n}{\|z^n\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_2}}} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^2} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \, \overline{w}_1^{\alpha_1} \overline{w}_2^{\alpha_2}}{\|z^{\alpha_1}\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_1}} \|z^{\alpha_2}\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_2}}}, \quad (z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2.\end{aligned}$$

由 (1.2)， $\left\{\underline{\frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\|z^{\alpha_1}\|_{\mathscr{H}_{\kappa_1}} \|z^{\alpha_2}\|_{\mathscr{H}_{\kappa_2}}}}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^2}$是 $\widehat{\mathscr{H}_{\kappa_1} \otimes \mathscr{H}_{\kappa_2}}$. 的一组标准正交基。因此,

$$\|z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}\|_{\widehat{\mathscr{H}_{\kappa_1} \otimes \mathscr{H}_{\kappa_2}}} = \|z^{\alpha_1}\|_{\mathscr{H}_{\kappa_1}} \|z^{\alpha_2}\|_{\mathscr{H}_{\kappa_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

结合 (iii) 部分（对于 $a = 1$），可知 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 是次正规的充要条件是

$$\left\{\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\|z^k\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_1}}} \frac{1}{\|z^{n-k}\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_2}}}\Big)^{-1}\right\}_{n\geqslant 0} \text{ is a Stieltjes moment sequence.}$$

正如在 [1, 式 (1.2)], 之前的讨论中所指出的，当且仅当模张量积 $\mathscr{H}_{\kappa_1} \otimes_{\mathbb{C}[z]} \mathscr{H}_{\kappa_2}$ 是次正规希尔伯特模时，这一结论成立，由此得到 (iv)。□

回顾一下， $H^2(\mathbb{D}^2)$ 与 $\widehat{\mathscr{H}_\kappa \otimes \mathscr{H}_\kappa}$ 同构，其中 κ 表示 $H^2(\mathbb{D})$ 的柯西核。因此，上述结果将 $H^2(\mathbb{D}^2)/[z_1 - z_2]$ 的次正规性与 $\mathscr{H}_{\kappa^2}$, 的次正规性联系起来，也就是说，与 $\mathbb{D}$. 上的 *Bergman*模 的次正规性联系起来。这一点已在 [21,第 5] 节中提及（另见 [37, 推论 5.17]）。

设 $\mathcal{H}$ 上有一个可交换的 d-元组 $T=(T_1,\dots,T_d)$，令

$$Q_T(X)=\sum_{j=1}^{d}T_j^*XT_j,\quad X\in\mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

我们令 $Q_T^0(I)=I$，并归纳定义 $Q_T^n(I)=Q_T\big(Q_T^{n-1}(I)\big)$ 对 $n\geqslant 1$成立。容易看出

$$Q_T^n(I)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}T^{*\alpha}T^{\alpha},\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{3.17}$$

沿用 [30], 的说法，我们称 T 为 m-等距算子，其中 $m\geqslant 1$，如果

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}Q_T^j(I)=0.$$

为简单起见，我们将 1-等距算子简称为等距算子。如果对 $j=1$，.....， d.有 $T_j^*T_j\leqslant I$（分别地， $T_j^*T_j=I$），则称 T 为压缩算子（分别地，为环面等距算子）。

以下希尔伯特模是本文的核心:

例 3.7。*Hardy* 模 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 是由解析函数$f(z)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\hat{f}_\alpha z^\alpha$ 组成的希尔伯特空间，这些函数定义在 $\mathbb{D}^d$ 上，且傅里叶系数 $\{\hat{f}_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$. 平方可和。 $H^2(\mathbb{D}^d)$ 的再生核称为柯西核，其表达式为

$$\kappa(z,w)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{d}(1-z_j\overline{w}_j)},\quad z=(z_1,\dots,z_d),\,w=(w_1,\dots,w_d)\in\mathbb{D}^d.$$

注意， $H^2(\mathbb{D}^d)$ 是一个 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模，满足

$$\langle z^\alpha,\,z^\beta\rangle_{H^2(\mathbb{D}^d)}=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha=\beta\in\mathbb{Z}_+^d,\\ 0 & \text{if } \alpha\neq\beta\in\mathbb{Z}_+^d.\end{cases} \tag{3.18}$$

因此，乘法 d元组 $\mathscr{M}_z$ 在 $H^2(\mathbb{D}^d)$上是一个环面等距算子。

其中，*Hardy* 模 $H^2(\mathbb{B}^d)$ 是解析函数 $f(z)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\hat{f}_\alpha z^\alpha$ on $\mathbb{B}^d$ 构成的希尔伯特空间，且这些函数满足

$$\sum_{\alpha\geqslant 0}|\hat{f}_\alpha|^2\frac{\alpha!(d-1)!}{(|\alpha|+d-1)!}<\infty.$$

$H^2(\mathbb{B}^d)$ 的再生核，称为 *Szegö* 核，其表达式为 $\kappa(z,w)=\frac{1}{(1-\langle z,\,w\rangle)^d},\,z,w\in\mathbb{B}^d$. 注意，$H^2(\mathbb{B}^d)$ 是一个 $\mathcal{U}_d$-不变希尔伯特模，满足

$$\langle z^\alpha,\,z^\beta\rangle_{H^2(\mathbb{B}^d)}=\begin{cases}\frac{\alpha!(d-1)!}{(|\alpha|+d-1)!} & \text{if } \alpha=\beta\in\mathbb{Z}_+^d,\\ 0 & \text{if } \alpha\neq\beta\in\mathbb{Z}_+^d.\end{cases} \tag{3.19}$$

因此，乘法 d元组 $\mathscr{M}_z$ 在 $H^2(\mathbb{B}^d)$ 上是一个等距算子。

其中，*Drury–Arveson* 模 H_d^2 是解析函数 $f(z)=\sum_{\alpha\geqslant 0}\hat{f}_\alpha z^\alpha$ on $\mathbb{B}^d$ 构成的希尔伯特空间，且这些函数满足

$$\sum_{\alpha\geqslant 0}|\hat{f}_\alpha|^2\frac{\alpha!}{|\alpha|!}<\infty.$$

H_d^2，称为 *Drury–Arveson* 核的再生核为 $\kappa(z,\,w)=\frac{1}{1-\langle z,\,w\rangle},\quad z,\,w\in\mathbb{B}^d$. 注意，$H_d^2$是一个满足以下条件的 $\mathcal{U}_d$-不变希尔伯特模

$$\langle z^\alpha,\,z^\beta\rangle_{H_d^2}=\begin{cases}\frac{\alpha!}{|\alpha|!} & \text{if } \alpha=\beta\in\mathbb{Z}_+^d,\\ 0 & \text{if } \alpha\neq\beta\in\mathbb{Z}_+^d.\end{cases} \tag{3.20}$$

由 [30, 引理 4.3] 可知， H_d^2 上的乘法 d-元组 $\mathscr{M}_z$ 是一个d-等距算子。$\diamondsuit$

引理 3.8. 设 T 是作用在 $\mathcal{H}$ 上的交换 d-元组，并设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间，且在 T. 下不变。若 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{B}^d$，则 $\sigma(T|_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathbb{B}^d$。

证明. 由 [36, 定理 1] 和 [13, 定理 1] 可知，交换 d-元组 S 的几何谱半径 $r(S) := \sup\{\|z\|_2 : z \in \sigma(T)\}$ 由下式给出

$$r(S) = \lim_{k\to\infty} \left\|Q_S^k(I)\right\|^{\frac{1}{2k}}. \tag{3.21}$$

对于任意整数 $k \geqslant 1$，注意到

$$\left\|Q_{T|_{\mathcal{M}}}^k(I)\right\| = \sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|=1} \langle Q_{T|_{\mathcal{M}}}^k(I)x,\, x\rangle \overset{(3.17)}{\leqslant} \sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1} \langle Q_T^k(I)x,\, x\rangle = \left\|Q_T^k(I)\right\|.$$

由 (3.21) 可得 $r(T|_{\mathcal{M}}) \leqslant r(T)$。这就得到了所需的推论。 □

Finally, we include a measure-theoretic fact for completeness (cf. [39, p. 308]).

引理 3.9. 设Ω 是 $\mathbb{C}^d$ 中的一个有界域，且 μ 是定义在Ω上的有限正博雷尔测度。假设 $f : \Omega \to [0, \overline{\infty})$ 是连续函数，满足$\int_\Omega f(z)\,\mathrm{d}\mu(z) = 0$. 那么， $\mu(\Omega \setminus Z(f)) = 0$，且 $\overline{\mathrm{supp}}\ \mu \subseteq Z(f)$。

4. Proofs of the main results

我们先证明命题 2.3。

命题 *2.3* 的证明。 假设对于某个 $r, q \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$， q是非恒定的。由于 p 是齐次的， p的因子 q 和 r 也都是齐次的（参见命题 B 的证明）。由于 q 是非恒定的，$\deg\ r < \deg\ p$. 因此，由引理 3.1(iv)， $r \in \mathscr{H}_\kappa/[p]$. 现在假设 $\mathscr{T}_z$ 是次正规的，且其极小正规扩张为 N。那么存在泰勒谱$\sigma(N)$上的一个正测度 μ_r ，使得

$$\langle \mathscr{T}_z^{*\alpha}\mathscr{T}_z^{\beta}(r),\, r\rangle = \int_{\sigma(N)} \overline{w}^{\alpha} w^{\beta}\,\mathrm{d}\mu_r(w), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$$

（参见定理 2.1] 的证明）。由于 $q^2(\mathscr{T}_z)r = 0$ （参见引理 3.1(iv)），

$$\int_{\sigma(N)} |q^2(w)|^2\,\mathrm{d}\mu_r(w) = \|q^2(\mathscr{T}_z)r\|^2 = 0.$$

由引理 3.9 可知 $\mathrm{supp}\,\mu_r \subseteq Z(q)$，因此

$$\|q(\mathscr{T}_z)r\|^2 = \int_{Z(q)} |q(w)|^2\,\mathrm{d}\mu_r(w) = 0.$$

再次由引理 3.1(iv)， $q(\mathscr{T}_z)r = qr$，它非零。这个矛盾表明， q 必为常数，或者等价地，p 无平方因子。□

商模 $H^2(\mathbb{D}^d)/[p]$ 的次正规性意味着 p 是线性的。

命题 4.1。设 $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 是非常数齐次多项式。若 $H^2\left(\mathbb{D}^d\right)/[p]$ 是次正规的，则 次数 $p = 1$.

证明。 根据注 1.2，我们可以假设 $d \geqslant 2$. 假设商模 $H^2(\mathbb{D}^d)/[p]$ 是次正规的，且 $\deg\ p \geqslant 2$. 由引理 3.1(iv)， $1 \in H^2(\mathbb{D}^d)/[p]$.由于 $\mathscr{M}_z$ 是压缩算子，由 (1.4) 可知 $\mathscr{T}_z$ 是压缩的。由 [14,推论 II.2， 17], 的最小正规扩张 N 是 $\mathscr{T}_z$ 的压缩算子。因此

N 的泰勒谱包含于 $\mathbb{D}^d$. 因此，存在定义在 $\mathbb{D}^d$ 上的正测度μ，使得

$$\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2 = \int_{\overline{\mathbb{D}}^d} |w^\alpha|^2 \mathrm{d}\mu(w), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{4.22}$$

由于 deg $p \geqslant 2$，结合引理 3.1(v)，可知

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{D}}^d} (1-|w_j|^2)\,\mathrm{d}\mu(w) &= \|1\|^2 - \|\mathscr{T}_{z_j}(1)\|^2 \\ &= 1 - \|z_j\|^2 \\ &\overset{(3.18)}{=} 0, \quad j = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

由于 $1-|w_j|^2$ 在 $\mathbb{D}^d$ 上非负，且μ 是正测度，根据引理 3.9，对于每个 $j = 1,$ ……， $d.$ 都有 supp $\mu \subseteq Z(1-|z_j|^2) \cap \mathbb{D}^d$。因此 supp $\mu \subseteq \mathbb{T}^d$. 这与 (4.22) 一起推出

$$\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2 = \int_{\mathbb{T}^d} 1\,\mathrm{d}\mu(w) = 1, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

然而，根据引理 3.1(ii)， $\mathscr{T}_z^\alpha(1) = P^\perp(z^\alpha)$，因此对于每个$\alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$， $\|P^\perp(z^\alpha)\| = 1$。由此可得

$$\|P(z^\alpha)\|^2 = \|z^\alpha\|^2 - \|P^\perp(z^\alpha)\|^2 \overset{(3.18)}{=} 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

这迫使对于每个 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$， $P(z^\alpha) = 0$，从而使 $P(p) = 0$或 $p \in H^2(\mathbb{D}^d)/[p]$，这产生矛盾。□

定理 *2.1* 的证明。 (ii) ⇒ (i)：由于 $\mathscr{M}_z$ 是次正规的，根据引理 3.6(i)，只要 $p(z_1, z_2) = z_1$或 $p(z_1, z_2) = z_2$. 成立， $\mathscr{T}_z$ 就是次正规的。设对某个 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$， $p(z_1, z_2) = z_1 - az_2$。根据引理 3.6(iii) 和 (3.18)，只需验证

$$\left\{\left(\sum_{k=0}^{n} |a|^{2k}\right)^{-1}\right\}_{n\geqslant 0} \text{ is a Stieltjes moment sequence.} \tag{4.23}$$

若 $|a| = 1,$ ，则这可直接由恒等式 $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t, \quad n \geqslant 0.$ 得出。若 $0 < |a| < 1,$ ，则

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |a|^{2k}} = \frac{1-|a|^2}{1-|a|^{2(n+1)}}, \quad n \geqslant 0,$$

因此，(4.23)由注 3.5 得出。若 $|a| > 1,$ ，则

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |a|^{2k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} |a|^{-2k}} \frac{1}{|a|^{2n}}, \quad n \geqslant 0.$$

由于两个斯蒂尔切斯矩序列的乘积仍是一个斯蒂尔切斯矩序列（见 [7,引理 2.1]），(4.23) 在这种情况下也成立。

(i) ⇒ (ii)：这由命题 4.1 得出。(ii)⇔(iii) 的等价性由命题 3.3 得出。 □

注记4.2. 假设 $p(z_1, z_2) = z_1 - az_2$ 对某个 $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$ 成立。由于 $\mathscr{T}_{z_2}$ 是权重为 $\{w_n\}_{n\geqslant 0}$ 、由 (3.15) 与 $\mathscr{T}_{z_1} = a\mathscr{T}_{z_2}$ 给出的单边加权移位，它

容易看出，对于 $k,l,n\geqslant 0$,

$$\gamma_a(k,l):=\Big\|\mathscr{T}_{z_1}^k\mathscr{T}_{z_2}^l\big(\frac{q_n}{\|q_n\|}\big)\Big\|^2=\begin{cases}\frac{n+1}{n+k+l+1} & |a|=1,\\ |a|^{2k}\frac{1-|a|^{2(n+1)}}{1-|a|^{2(n+k+l+1)}} & |a|\neq 1,\end{cases}$$

其中， $\{q_n\}_{n\geqslant 0}$ 如式 (3.14) 所示。这些斯蒂尔切斯矩双序列的表示测度可按如下方式计算:

- $|a|=1$: 定义 $\varphi:\ [0,1]\to[0,1]^2$，使得 $\varphi(t)=(t,\ t)$，其中 $t\in[0,1]$。于是,

$$\gamma_a(k,l)=\int_{[0,1]^2}t_1^{2k}t_2^{2l}\,2(n+1)t_1^{2n+1}\,\mathrm{d}\varphi_*\ell(t),\quad k,l\geqslant 0.$$

- $|a|<1$: 注意，对于任意 $k,\ l\geqslant 0$,

$$\gamma_a(k,l)=\int_{[0,1]^2}t_1^{2k}t_2^{2l}\big(1-|a|^{2(n+1)}\big)\sum_{m=0}^{\infty}|a|^{2m(n+1)}\,\mathrm{d}\delta_{(|a|^{m+1},\,|a|^m)}(t).$$

- $|a|>1$: 注意，对于任意 $k,\ l\geqslant 0$,

$$\gamma_a(k,l)=\int_{[0,1]^2}t_1^{2k}t_2^{2l}\,\frac{|a|^{2(n+1)}-1}{|a|^{2(n+1)}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{|a|^{2m(n+1)}}\,\mathrm{d}\delta_{(|a|^{-m},|a|^{-(m+1)})}(t).$$

这些恒等式的验证留给感兴趣的读者。 ∎

在定理 2.2 的证明中，我们需要用到命题 2.4。

命题 *2.4* 的证明。 由于 $\mathscr{M}_z$ 是次正规的，根据引理 3.6(i)，只要 $p(z_1,\ z_2)=z_1$ 或 $p(z_1,\ z_2)=z_2.$，$\mathscr{T}_z$ 就是次正规的。现在假设，对于某个 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$，有 $p(z_1,\ z_2)=z_1-az_2$。由引理 3.6 可知，只需验证式 (3.16) 成立。由于 $\mathscr{H}_\kappa$ 是 $\mathcal{U}_2$-不变的，根据 [11, 定理 2.1], ，存在一个由正实数构成的序列$\{\gamma_k\}_{k\geqslant 0}$，使得

$$\|z^\alpha\|=\gamma_{|\alpha|}\sqrt{\frac{\alpha!}{(|\alpha|+1)!}},\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^2.$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|a|^{2k}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2}=\frac{1}{\gamma_n^2}(n+1)(1+|a|^2)^n,\quad n\geqslant 0.$$

然而，由于 $\mathscr{H}_\kappa$ 是次正规的，根据 [11, 定理5.3] 和 [43, 定理 4], $\{\gamma_k^2\}_{k\geqslant 0}$是斯蒂尔切斯矩序列，因此

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{|a|^{2k}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2}\Big)^{-1}=\gamma_n^2\,\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+|a|^2)^n},\quad n\geqslant 0,$$

由于它是有限个斯蒂尔切斯矩序列的乘积，因此也是一个斯蒂尔切斯矩序列（参见 [7, 引理 2.1]）。证明至此完成。□

注记 4.3. 假设 deg $p=1.$。我们证明 $H_2^2/[p]$ 是次正规的。由于$\mathscr{M}_{z_j},\ j=1,\ 2,$ 是次正规的（参见 [35, 命题 4]），根据引理 3.6(i)，只要满足以下任一条件， $\mathscr{T}_z$ 就是次正规的: $p(z_1,\ z_2)=z_1$ 或 $p(z_1,\ z_2)=z_2.$。现在假设，对于某个 $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$，有$p(z_1,\ z_2)=z_1-az_2$。鉴于引理 3.6，只需验证 (3.16) 成立。为此，注意到

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{|a|^{2k}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2}\Big)^{-1}\overset{(3.20)}{=}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a|^{2k}\Big)^{-1}=(1+|a|^2)^{-n},\quad n\geqslant 0.$$

这是一个斯蒂尔切斯矩序列，其表示测度为 $\delta_{(1+|a|^2)^{-1}}$，因此商模 $H_2^2/[p]$ 是次正规的。 ∎

定理 2.2 的证明还需要以下事实。

命题 4.4. 设 m 为正整数， p 为 $\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$ 中的非常数齐次多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 为 $\mathbb{B}^d$ 上的 $\mathbb{T}^d$-不变希尔伯特模。假设商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 是次正规模。那么，只要满足以下任一条件，就有 次数 $p\leqslant m$：

(i) $\mathscr{M}_z$ *is an* m*-isometry,*
(ii) $\sigma(\mathscr{M}_z)\subseteq\overline{\mathbb{B}^d}$ *and*

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\|z_j^n\|^2=0,\quad j=1,\dots,d. \tag{4.24}$$

证明。 根据注 1.2，我们可以假设 $d\geqslant 2$. 由于任意 m-等距算子的泰勒谱都包含于闭单位球 $\mathbb{B}^d$ 中（见[30, 引理 3.2]之后的讨论），我们可以假设 $\sigma(\mathscr{M}_z)\subseteq\mathbb{B}^d$. 由于 $\sigma(S^*)=\{z:\ z\in\sigma(S)\}$对于 $\mathcal{H}$上的任意可交换 d- S 元组，， 由引理 3.8（应用于 $S=\mathscr{M}_z^*$和 $\mathcal{M}=\mathscr{H}_\kappa\ominus[p]$），可得 $\sigma(\mathscr{T}_z)\subseteq\mathbb{B}^d$. 根据 [38, 定理]，$\mathscr{T}_z$ 的最小正规扩张 N 的泰勒谱包含于 $\mathbb{B}^d$. 中。因此，存在一个定义在 $\mathbb{B}^d$ 上的正测度 μ，使得

$$\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2=\int_{\overline{\mathbb{B}^d}}|w^\alpha|^2\,\mathrm{d}\mu(w),\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^d. \tag{4.25}$$

假设 (i) 成立且 $\deg\ p\geqslant m+1$。由引理 3.1 的 (ii) 和 (iv) 部分，$1\in\mathscr{H}_\kappa/[p]$, 并且

$$\mathscr{T}_z^\alpha(1)=P^\perp(z^\alpha),\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{4.26}$$
$$P(z^\alpha)=0,\ |\alpha|\leqslant m, \tag{4.27}$$
$$\mathscr{T}_z^\alpha(1)=z^\alpha,\ |\alpha|\leqslant m. \tag{4.28}$$

注意到 (4.25) 与多项式定理共同推出

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\mathbb{B}^d}}\Big(1-\sum_{j=1}^d|w_j|^2\Big)^m\,\mathrm{d}\mu(w) &= \sum_{n=0}^m(-1)^n\binom{m}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2\\ &\overset{(4.28)}{=}\sum_{n=0}^m(-1)^n\binom{m}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|z^\alpha\|^2,\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{M}_z$ 是 m-等距算子，因此其值为 0。又由于 $1-\sum_{j=1}^d|w_j|^2$ 在 $\mathbb{B}^d$ 上非负，且 μ 是正测度，由引理 3.9 可得，

$$\operatorname{supp}\mu\subseteq\partial\mathbb{B}^d. \tag{4.29}$$

这一点与 (4.25) 以及 $\|f\|^2=\|Pf\|^2+\|P^\perp f\|^2$, $f\in\mathscr{H}_\kappa$ 相结合，意味着

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{\mathbb{B}^d}}\Big(1-\sum_{j=1}^d|w_j|^2\Big)^{m+k}\,\mathrm{d}\mu(w)\\ =\ &\sum_{n=0}^{m+k}(-1)^n\binom{m+k}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2\\ \overset{(4.26)}{=}\ &\sum_{n=0}^{m+k}(-1)^n\binom{m+k}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|P^\perp(z^\alpha)\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{m+k}(-1)^n\binom{m+k}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\big(\|z^\alpha\|^2-\|Pz^\alpha\|^2\big)\\
&\overset{(*)\,\&\,(4.27)}{=} -\sum_{n=m+1}^{m+k}(-1)^n\binom{m+k}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|Pz^\alpha\|^2,\quad k\geqslant 1,
\end{aligned}
$$

其中 $(*)$ 源于如下事实：对任意整数 $l>m.$，一个 m-等距算子也是一个 l-等距算子。现在由 (4.29) 可得

$$
\sum_{n=m+1}^{m+k}(-1)^n\binom{m+k}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|Pz^\alpha\|^2=0,\quad k\geqslant 1. \tag{4.30}
$$

我们对 $|\alpha|\geqslant m+1$ 采用强归纳法证明

$$
P(z^\alpha)=0,\ |\alpha|\geqslant m+1. \tag{4.31}
$$

将 $k=1$ 代入 (4.30)，得到

$$
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=m+1}}\frac{(m+1)!}{\alpha!}\|P(z^\alpha)\|^2=0\ \Rightarrow\ P(z^\alpha)=0,\ |\alpha|=m+1.
$$

这就得到 $|\alpha|=m+1.$ 时的 (4.31)。现在假设某个整数 $l\geqslant 1.$ 满足 $m+1\leqslant|\alpha|\leqslant m+l$时的 (4.31)。将 (4.30)应用于 $k=l+1,$，得到

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m+l+1}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=m+l+1}}\frac{(m+l+1)!}{\alpha!}\|Pz^\alpha\|^2\\
=&\sum_{n=m+1}^{m+l+1}(-1)^n\binom{m+l+1}{n}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d\\|\alpha|=n}}\frac{n!}{\alpha!}\|Pz^\alpha\|^2=0,
\end{aligned}
$$

由此得到 $|\alpha|=m+l+1.$ 时的 (4.31)。这就完成了 (4.31) 的证明。由于 $\deg\ p\geqslant m+1,$ $P(p)=0$ 或 $p\in\mathscr{H}_\kappa/[p],$，这就产生了矛盾。

假设 (4.24) 成立且 $\deg\ p\geqslant m+1$。由引理 3.1(iv)，$1\in\mathscr{H}_\kappa/[p]$且 $\mathscr{T}_{z_j}^n(1)=z_j^n$，其中 $n=1,\dots,m$和 $1\leqslant j\leqslant d$。特别地，对于任意 $j=1,\dots,d,$

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathbb{B}^d}}(1-|w_j|^2)^m\,\mathrm{d}\mu(w)&\overset{(4.25)}{=}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\|\mathscr{T}_{z_j}^n(1)\|^2\\
&=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\|z_j^n\|^2,
\end{aligned}
$$

根据假设 (ii)，其值为 0。由引理 3.9 可得

$$
\operatorname{supp}\mu\subseteq\bigcap_{j=1}^{d}Z(1-|w_j|^2)\cap\overline{\mathbb{B}^d},
$$

这是一个空集，因为 $d\geqslant 2.$ 然而，任何非零紧支撑正Borel测度的支撑都非空。这一矛盾表明，$\deg\ p\leqslant m.$ □

注记 4.5。命题 4.4 适用于由 κ_b 给出的核

$$
\kappa_b(z,w)=\frac{1}{(1-\langle z,\,w\rangle)^b},\quad z,w\in\mathbb{B}^d,
$$

只要 b 是满足 $1 \leqslant b \leqslant d.$ 的整数。事实上，根据 [30, 引理 4.3], ， $\mathscr{H}_{\kappa_b}$ 上的乘法 d-元组 $\mathscr{M}_z$ 是一个 $(d-b+1)$-等距算子，因此 $\sigma(\mathscr{M}_z) \subseteq \mathbb{B}^d$。由此可知，如果商模 $\mathscr{H}_{\kappa_b}/[p]$ 是次正规，则 $\deg\ p \leqslant d-b+1$。特别地，令 $b=d$，我们得到

$$\text{the subnormality of } H^2(\mathbb{B}^d)/[p] \text{ implies that } \deg p \leqslant 1. \tag{4.32}$$

此外，若 $b=1$，则

$$\text{the subnormality of } H^2_d/[p] \text{ implies that } \deg p \leqslant 1. \tag{4.33}$$

由于 (4.24) 对 $m=1$ 成立（见 (3.20)），因此 (4.33) 立即得出。 ∎

定理 *2.2* 的证明。为证明当 $H^2(\mathbb{B}^2)$ 时 (i)⇔(ii) 等价，，注意到蕴含关系 (ii) ⇒ (i) 由命题 2.4 得出，而蕴含关系 (i) ⇒ (ii) 则由 (4.32) 得出。

为证明当 H^2_2 时 (i)⇔(ii) 等价，，注意到蕴含关系 (ii) ⇒ (i) 由注 4.3 得出，而蕴含关系 (i) ⇒(ii) 则由 (4.33) 得出。

在这两种情况下，(ii)⇔(iii) 的等价性由命题 3.3 得出。 □

作为命题 2.3 证明的推论，我们得到以下关于（必然非齐次）子模的二分结论。

推论 4.6。设 p、$q \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。若商模 $\mathscr{H}_\kappa/[pq^2]$ 是次正规的，则 $[p]=[pq^2]$ 或 $[pq]=[pq^2]$。

证明。假设 $[p] \neq [pq^2].$。由于 $[pq^2] \subseteq [p]$ 和 $[p] \neq [pq^2]$，我们有 $r := P^\perp_{[pq^2]}(p) \neq 0$。假设 $\mathscr{H}_\kappa/[pq^2]$ 是次正规的。因此，存在定义在紧集 σ 上的正测度 μ_r，使得

$$\langle \mathscr{T}_z^{*m}\mathscr{T}_z^n(r),\, r\rangle = \int_\sigma \overline{w}^m w^n \,\mathrm{d}\mu_r(w), \quad m,n \in \mathbb{Z}^2_+.$$

由引理 3.1(ii),

$$q^2(\mathscr{T}_z)r = q^2(\mathscr{T}_z)P^\perp_{[pq^2]}(p) = P^\perp_{[pq^2]}(q^2p) = 0,$$

从而,

$$\int_\sigma |q^2(w)|^2 d\mu_r(w) = \|q^2(\mathscr{T}_z)r\|^2 = 0.$$

由于 $|q^2|^2$ 非负，由引理 3.9， $\mu_r(\sigma\backslash Z(q)) = 0$， 因此

$$\|q(\mathscr{T}_z)r\|^2 = \int_{Z(q)} |q(w)|^2 \,\mathrm{d}\mu_r(w) = 0.$$

然而，根据引理 3.1(ii)， $P^\perp_{[pq^2]}(qp) = q(\mathscr{T}_z)r = 0.$ 这意味着 $pq \in [pq^2]$。由于 $[pq^2] \subseteq [pq]$，我们得到 $[pq]=[pq^2].$ □

5. Examples illustrating the main results

下面我们证明，定理 2.1 对定义在 $\mathbb{D}^2$ 上的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模并不成立。为此，考虑齐次多项式 $p(z_1,\ z_2) = z_1z_2$，并注意到，根据引理 3.4（应用于 $r=0,\ s=1,$ 和 $a=0$），

$$\{z_1^m\colon\ m \geqslant 0\} \cup \{z_2^n\colon\ n \geqslant 1\} \text{ 构成 } \mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]. \text{ 的正交基} \tag{5.34}$$

现在很容易验证

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{T}_{z_1}(z_1^m) = z_1^{m+1},\ \mathscr{T}_{z_1}(z_2^n) = 0,\\ &\mathscr{T}_{z_2}(z_1^n) = 0,\ \mathscr{T}_{z_2}(z_2^m) = z_2^{m+1},\end{aligned}\right\} \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 1. \tag{5.35}$$

接下来我们陈述一个关键事实，它有助于为所需的例子确定合适的核 κ。

命题 5.1. 设 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。假设

$$\|z_1\|^2+\|z_2\|^2=\|1\|^2,\ \|z_j^n\|=\|z_j\|,\ j=1,2,\ n\geqslant 2. \tag{5.36}$$

那么商模 $\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$ 是次正规的。特别地， $\mathscr{T}_z$ 在 $\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$上是等距算子。

证明。 由 (5.34)，我们可以将 $f\in\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$ 写成 $\sum_{m=0}^\infty a_mz_1^m+\sum_{n=1}^\infty b_nz_2^n$，其中 a_m， $b_n\in\mathbb{C}$. 注意到

$$\begin{aligned}\|f\|^2-\|\mathscr{T}_{z_1}f\|^2-\|\mathscr{T}_{z_2}f\|^2&\overset{(5.35)}{=}|a_0|^2(\|1\|^2-\|z_1\|^2-\|z_2\|^2)\\+\quad\sum_{n=1}^\infty|a_n|^2(\|z_1^n\|^2-\|z_1^{n+1}\|^2)&+\sum_{n=1}^\infty|b_n|^2(\|z_2^n\|^2-\|z_2^{n+1}\|^2),\end{aligned}$$

由 (5.36) 可知其值为 0。因此， $\mathscr{T}_z$ 是等距算子，故由 [4, 命题 2],$\mathscr{T}_z$ 是次正规的。□

现在我们给出一个次正规商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 的例子，其中 $\deg\ p=2$.

例 5.2。 考虑与再生核相关的单位双圆盘 $\mathbb{D}^2$上的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$

$$\kappa(z,w)=\frac{2}{\prod_{j=1}^2(1-z_j\overline{w}_j)}-1,\quad z=(z_1,z_2),\,w=(w_1,w_2)\in\mathbb{D}^2.$$

由 (1.2) 可得

$$\|z^\alpha\|^2=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha=0,\\ \frac{1}{2} & \text{if } \alpha\in\mathbb{Z}_+^2\backslash\{0\}.\end{cases}$$

注意， $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个次正规希尔伯特模。事实上，

$$\|z^\alpha\|^2=\int_{[0,1]^2}t^\alpha\,\mathrm{d}(\delta_{(0,0)}+\delta_{(1,1)})/2,\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^2.$$

由于 (5.36) 成立，根据命题 5.1， $\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$是次正规的。 ♢

显然，例 5.2 中的希尔伯特模不是 $\mathcal{U}_2$-不变的。这引出了这样一个问题：当 $\deg\ p=2.$ 时，一个 $\mathcal{U}_2$-不变的希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$ 是否存在一个次正规商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$？ 答案是肯定的。

例 5.3. 考虑单位球 $\mathbb{B}^2$上与再生核相关联的 $\mathcal{U}_2$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_\kappa$

$$\kappa(z,w)=\frac{2}{(1-\langle z,\,w\rangle)^2}-1,\quad z,w\in\mathbb{B}^2.$$

由 (1.2) 可得

$$\|z^\alpha\|^2=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha=0,\\ \frac{\alpha!}{2(|\alpha|+1)!} & \text{if } \alpha\in\mathbb{Z}_+^2\backslash\{0\}.\end{cases} \tag{5.37}$$

那么 $\mathscr{H}_\kappa$ 是次正规希尔伯特模。事实上，由于 $\mathscr{M}_z$ 在 $H^2(\mathbb{B}^2)$ 上是次正规的，$\{\|z^\alpha\|^2_{H^2(\mathbb{B}^2)}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^2}$ （见 (3.19)）是一个斯蒂尔切斯矩序列。若 μ 是 $\{\|z^\alpha\|^2_{H^2(\mathbb{B}^2)}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^2}$ 的表示测度，则对每个 $\alpha\in\mathbb{Z}_+^2$,

$$\|z^\alpha\|^2_{\mathscr{H}_\kappa}=\frac{1}{2}\|z^\alpha\|^2_{H^2(\mathbb{B}^2)}+\frac{1}{2}\int_{[0,1]^2}t^\alpha\,\mathrm{d}\delta_{(0,0)}=\int_{[0,1]^2}t^\alpha\,\mathrm{d}\big(\mu+\delta_{(0,0)}\big)/2.$$

利用 (5.35) 和 (5.37) 容易看出，对于 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{Z}_+^2$,

$$\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2=\begin{cases}\|1\|^2_{\mathscr{H}_\kappa}=1, & \alpha=0,\\ \|z_1^{\alpha_1}\|^2_{\mathscr{H}_\kappa}=\frac{1}{2(\alpha_1+1)}, & \alpha_1\geqslant 0,\alpha_2=0,\\ \|z_2^{\alpha_2}\|^2_{\mathscr{H}_\kappa}=\frac{1}{2(\alpha_2+1)}, & \alpha_1=0,\alpha_2\geqslant 0,\\ 0, & \alpha_1\geqslant 1,\alpha_2\geqslant 1,\end{cases}$$

因此我们有

$$\|\mathscr{T}_z^\alpha(1)\|^2=\int_{\{0\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}} t^\alpha\,\mathrm{d}(\delta_0\times\ell+\ell\times\delta_0)/2,\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^2.$$

现在利用 (5.35) 不难看出，对于 $f=\sum_{m=0}^\infty a_m z_1^m+\sum_{n=1}^\infty b_n z_2^n\in\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$, $\{\|\mathscr{T}_z^\alpha(f)\|^2\}_{\alpha\geqslant 0}$ 的表示测度 μ_f 为

$$\mu_f=|a_0|^2(\ell\times\delta_0+\delta_0\times\ell)/2+\sum_{m=1}^\infty|a_m|^2(\ell\times\delta_0)/2+\sum_{n=1}^\infty|b_n|^2(\delta_0\times\ell)/2.$$

因此，对于每个 $f\in\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2].$，$\{\|\mathscr{T}_z^\alpha(f)\|^2\}_{\alpha\geqslant 0}$ 都是一个斯蒂尔切斯矩序列。由此，根据 [3, 定理 4.4]，可知 $\mathscr{H}_\kappa/[z_1z_2]$ 是次正规的。$\diamondsuit$

下面我们将证明，在命题 2.4 中，$\mathscr{H}_\kappa$ 是次正规的这一假设不能省略。回顾一下，*Dirichlet* 模块 $D_d(\mathbb{B}^d)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其核为

$$\kappa(z,w)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}\frac{|\alpha|!}{(|\alpha|+1)\alpha!}z^\alpha\overline{w}^\alpha,\quad z,w\in\mathbb{B}^d.$$

例5.4. 考虑多项式 $p(z_1,z_2)=z_1-az_2$, 其中 a 是一个非零复数。商模 $D_2(\mathbb{B}^2)/[p]$ 不是次正规的。为说明这一点，回顾 $D_d(\mathbb{B}^d)$ 上的范数由下式给出

$$\|z^\alpha\|^2=\frac{(|\alpha|+1)\alpha!}{|\alpha|!},\quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^d. \tag{5.38}$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^n\frac{|a|^{2k}}{\|z_1^kz_2^{n-k}\|^2}=\frac{(1+|a|^2)^n}{n+1},\quad n\geqslant 0.$$

注意，$\{\gamma_n:=\frac{n+1}{(1+|a|^2)^n}\}_{n\geqslant 0}$ 不是斯蒂尔切斯矩序列。事实上，对每个整数 $n\geqslant 1$，都有 $\gamma_n^2>\gamma_{2n}$。因此，由引理 3.6(iii)，商模$D_2(\mathbb{B}^2)/[p]$不是次正规的。$\diamondsuit$

现在我们给出一个例子，说明若 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个次正规的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模，则商模 $\mathscr{H}_\kappa/[p]$ 可能不是次正规的，即使在 $\deg\ p=1$ 的情形下也是如此。

例5.5. 对于实数 $s>0$, 考虑由定义在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上、关于加权面积测度 $w_s\,dA$ （其径向权函数为）平方可积的全纯函数所构成的希尔伯特空间 $L_a^2(\mathbb{D},w_s)$

$$w_s(z)=\frac{1}{s\pi}|z|^{\frac{2(1-s)}{s}},\quad z\in\mathbb{D}.$$

那么，$L_a^2(\mathbb{D},\ w_s)$ 是一个次正规 $\mathbb{T}$-不变希尔伯特模。此外，如果 κ_s 由下式给出

$$\kappa_s(z,w)=\frac{s}{(1-z\overline{w})^2}+\frac{1-s}{1-z\overline{w}},\quad z,w\in\mathbb{D},$$

那么， $L^2_a(\mathbb{D},\ w_s)$ 等于 $\mathscr{H}_{\kappa_s}$，并且满足

$$\|z^k\|^2_{\mathscr{H}_{\kappa_s}} = \frac{1}{sk+1},\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{5.39}$$

对于实数 $s_1, s_2 > 0,$，考虑双圆盘上的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模 $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\widehat{\otimes}\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\mathbb{D}^2$.注意到

$$\begin{aligned}\langle z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2},\, z_1^{\beta_1}z_2^{\beta_2}\rangle &= \langle z^{\alpha_1},\, z^{\beta_1}\rangle_{\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}}\langle z^{\alpha_2},\, z^{\beta_2}\rangle_{\mathscr{H}_{\kappa_{s_2}}}\\ &\overset{(5.39)}{=} \begin{cases}\frac{1}{(s_1\alpha_1+1)(s_2\alpha_2+1)}, & \text{if } \alpha=\beta\in\mathbb{Z}_+^2,\\ 0, & \text{if } \alpha\neq\beta\in\mathbb{Z}_+^2,\end{cases}\end{aligned}$$

因此根据 [7, 引理 2.1]， $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}$ 是一个次正规希尔伯特模。令$p(z_1, z_2) = z_1 - z_2$. 现在我们可以从 [1, 推论 1.6]和引理 3.6(iv) 得出以下事实：

- if $(3\mathfrak{s}-\mathfrak{p})^2 \geqslant 24\,\mathfrak{p}$ then $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\widehat{\otimes}\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}/[p]$ is subnormal if and only if $3\mathfrak{s} > \mathfrak{p}$,
- if $(3\mathfrak{s}-\mathfrak{p})^2 < 24\,\mathfrak{p}$ then $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\widehat{\otimes}\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}/[p]$ is subnormal if and only if $\mathfrak{s}\geqslant\mathfrak{p}$,

其中 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{p}$ 分别表示 $s_1, s_2,$ 的和与积。特别地，如果 $\widehat{\mathfrak{s}\geqslant\mathfrak{p},}$，则 $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}/[p]$ 是次正规的。此外，如果 $3\mathfrak{s}\leqslant\mathfrak{p},$，则 $\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}\otimes\mathscr{H}_{\kappa_{s_1}}/[p]$永远不是次正规的。$\diamondsuit$

我们以几个尚未解决的问题结束本文。

- 对于整数 $d\geqslant 3$，尚不清楚，对于每个次数为 1 的齐次多项式 $p\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_d]$，商模 $H^2(\mathbb{D}^d)/[p]$ 是否都是次正规的。关于 $H^2(\mathbb{B}^d)$ 或 H^2_d（当 $d\geqslant 3$ 时）的相应问题也仍未解决。
- 引理 3.1(i) 和 3.2(iii) 引出了另一个问题。若 $p\in\mathbb{C}[z_1,z_2]$ 是齐次多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是具有子模 $[p]$，的 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模，那么 p 是满足 $p(\mathscr{T}_{z,\ [p]})$ 的最小次数多项式。$= 0$. 我们不知道这一事实是否适用于维数为 $d\geqslant 3$. 的情形。
- 此外，是否存在一个非恒定齐次多项式 $p\in\mathbb{C}[z_1,z_2]$，使得商模 $D_2(\mathbb{B}^2)/[p]$ 是次正规的，仍然未知。由于 $\mathscr{M}_z$ 在 $D_2(\mathbb{B}^2)$ 上是一个 3-等距（见 [9, 推论 4.9]），由命题 4.4 和例5.4可知，任何这样的多项式 p 的次数都必须是 2 或 3。然而， $\sigma(\mathscr{M}_z)\subseteq\mathbb{B}^2$，并且

$$\|1\|^2 - 2\|z_j\|^2 + \|z_j^2\|^2 \overset{(5.38)}{=} 0,\quad j=1,2,$$

因此，命题 4.4 排除了 $\deg p = 3$ 的可能性。此外，利用引理 3.4 所作的显式计算表明，除非 p 是非零常数多项式，否则 $D_2(\mathbb{B}^2)/[p]$ 绝非次正规。

Appendix: Square-free polynomials and Hilbert submodules

在本附录中，我们给出正文所用齐次多项式的两个基本事实。我们首先讨论二元齐次多项式典范分解的存在性与唯一性（参见 [15, 第 378], [12, 页，定理 2.1 的证明。5]）。

命题A。设 m、n 为正整数，使得 $m\leqslant n$。设 p 是由 $p(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^m\alpha_k z_1^k z_2^{n-k}$ 给出的齐次多项式，其中 α_0，……，$\alpha_{m-1}\in\mathbb{C}$ 且 $\alpha_m\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.。则存在 a_1，……，$a_m\in\mathbb{C}$，使得

$$p(z) = \alpha_m z_2^{n-m}\prod_{k=1}^m(z_1 - a_k z_2). \tag{5.40}$$

此外，若对某些 c、$d\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$、$r$、$m\geqslant 0$、$s$、$n\geqslant 1$ 以及 a_1，……，a_s、b_1，……，$b_n\in\mathbb{C}$，

$$cz_2^r\prod_{k=1}^{s}(z_1-a_kz_2)=dz_2^m\prod_{k=1}^{n}(z_1-b_kz_2),$$

那么 $c=d$、$r=m$、$n=s$ 和 $\{a_1,\ldots,a_s\}=\{b_1,\ldots,b_n\}$.

证明。注意到 $p(z_1,z_2)=\alpha_m z_2^n q(z_1/z_2)$，其中 $q(w)=\sum_{k=0}^{m}\beta_k w^k$ 满足 $\beta_k=\frac{\alpha_k}{\alpha_m}$. 由于 q 是关于复变量 w 的次数为 m 的多项式，因此存在a_1，…，$a_m\in\mathbb{C}$，使得 $q(w)=\prod_{k=1}^{m}(w-a_k)$。代入 $w=z_1/z_2$，即可得到 (5.40)。由于 q 唯一确定其零点（相差一个排列），唯一性部分随即得证。□

注 A。命题 A 中的分解在三个复变量的情形下不成立。事实上，直接计算可知，齐次多项式$p(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2+z_3^2$是一个次数为 2 的不可约多项式。

■

下面的结果刻画了两个复变量中的无平方因子齐次多项式。

命题 B。两个复变量中的齐次多项式是无平方因子的，当且仅当它具有互不相同的线性因子。

证明。必要性由命题 A 得出。为证明充分性，设 p 是一个具有互不相同线性因子的齐次多项式。假设 $p=q^2r$对于某个 $q,r\in\mathbb{C}[z_1,z_2]$. 将多项式分解为齐次部分可知，齐次多项式的任意多项式因子必定是齐次的，因此 r 和 q 都是齐次的。如果 q 不是常数，那么根据命题 A，q 可以分解为线性多项式的乘积，因而 p含有线性因子的平方，这就产生了矛盾。因此，q 是常数，所以 p 是无平方因子的。□

在本附录的其余部分，我们将讨论命题 A 和 B 在希尔伯特模中的一些应用。首先，我们借助一个例子说明，$p\mathscr{H}_\kappa$ 不必是 $\mathscr{H}_\kappa$.中的闭集

例 A。设 $p(z_1,\ z_2)=z_1-z_2$. 由于序列 $\{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}(z_1^n-z_2^n)\}_{k\geqslant 1}$在$[p]$中于 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 收敛，$f(z_1,\ z_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z_1^n-z_2^n)$ 属于 $[p]$.另一方面，若对某个 $g\in H^2(\mathbb{D}^2)$，$f=pg$ 成立，则对 $z_1\neq z_2$，

$$g(z_1,z_2)=\frac{f(z_1,z_2)}{z_1-z_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}z_1^kz_2^{n-1-k},$$

它在 $\mathbb{D}^2$ 上定义了一个全纯函数，但不属于 $H^2(\mathbb{D}^2)$。因此$f\notin pH^2(\mathbb{D}^2)$。特别地，$pH^2(\mathbb{D}^2)\subsetneq[p]$. ♢

以下定理在第 1 节中曾被提及。

定理 A。设 p 是一个非零齐次无平方多项式，且 $\mathscr{H}_\kappa$ 是一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。那么 $[p]_0=[p]$.

定理 A 的证明依赖于以下一般事实：

引理 A. 设 $\mathscr{H}_\kappa$ 是 Ω 上的一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。设 p 是 $\mathbb{C}[z_1,z_2]$ 中的一个齐次多项式，使得对于某个定义在 Ω 上的全纯函数 h，有 $ph\in\mathscr{H}_\kappa$。那么 $ph\in[p]$。

证明。设 $p(z)=\sum_{l=0}^{d}\alpha_l z_1^l z_2^{d-l}$是次数为$d$的非零齐次多项式，且 $ph=f\in\mathscr{H}_\kappa$. 对于 $m\geqslant 0$，设 $h_m=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\hat{}h_{k,n-k}z_1^kz_2^{n-k}$为第 m 个

h的部分和。由于 $\mathscr{H}_\kappa$ 包含所有多项式， $ph_m \in \mathscr{H}_\kappa$ 对于每个 $m \geqslant 0$.根据 (1.2)，我们可以将 f写成 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{k,n-k}z_1^k z_2^{n-k}$. 由于 $ph = f$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{d}\sum_{k=0}^{n}\alpha_l\hat{h}_{k,n-k}z_1^{k+l}z_2^{n+d-k-l} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{d}\alpha_l z_1^l z_2^{d-l}\sum_{k=0}^{n}\hat{h}_{k,n-k}z_1^k z_2^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{k,n-k}z_1^k z_2^{n-k},\end{aligned}$$

其中，由于这些级数在紧集上一致收敛，可以对其各项进行重排（见 (1.3) 和 (3.6)）。由于两边都是齐次分解，我们得到

$$\sum_{l=0}^{d}\sum_{k=0}^{n}\alpha_l\hat{h}_{k,n-k}z_1^{k+l}z_2^{n+d-k-l} = \sum_{k=0}^{n+d}\hat{f}_{k,n+d-k}z_1^k z_2^{n+d-k}, \quad n \geqslant 0.$$

由此可得，对于整数 $m \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|ph_m - ph\|^2 &= \Big\|\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{d}\sum_{k=0}^{n}\alpha_l\hat{h}_{k,n-k}z_1^{k+l}z_2^{n+d-k-l}\Big\|^2\\ &= \Big\|\sum_{n=m+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+d}\hat{f}_{k,n+d-k}z_1^k z_2^{n+d-k}\Big\|^2,\end{aligned}$$

当 $m \to \infty$ 时，它收敛到 0。因此， $ph_m \in [p]$ 在 $\mathscr{H}_\kappa$, 中收敛到 ph ，从而 $ph \in [p]$. □

定理 *A* 的证明。 显然， $[p] \subseteq [p]_0$. 为看出反向包含，注意到由命题 A 和 B， p 可对某些 $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant j \leqslant d$ 分解为互异的线性因子 $a_j z_1 - b_j z_2$。设 $f \in \mathscr{H}_\kappa$ 使得 $f = 0$ 在 $Z(p)$ 上。由于$Z(a_1 z_1 - b_1 z_2) \subseteq Z(f)$，由 [6, 引理 2.1], $\frac{f}{a_1 z_1 - b_1 z_2}$ 全纯地延拓到 Ω。因此存在 Ω 上的全纯函数 h_1 ，使得

$$f(z_1, z_2) = (a_1 z_1 - b z_2)h_1(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2) \in \Omega.$$

由于 $Z(a_2 z_1 - b_2 z_2) \subseteq Z(f)$ 且 $Z(a_1 z_1 - b_1 z_2) \cap Z(a_2 z_1 - b_2 z_2) = \{(0,\ 0)\}$，我们有 $Z(a_2 z_1 - b_2 z_2) \subseteq Z(h_1)$。再次由 [6, 引理 2.1], $\frac{h_1}{a_2 z_1 - b_2 z_2}$ 可全纯延拓到 Ω。以同样的方式继续，我们得到 $f = ph$ ，其中某个全纯函数 h 定义在 Ω 上。因此，由引理 A, $f \in [p]$. □

我们以定理 A 的一个推论作为附录的结尾。

推论 A。设 p 是一个非常数齐次无平方因子多项式，且$\mathscr{H}_\kappa$ 是 Ω 上的一个 $\mathbb{T}^2$-不变希尔伯特模。那么

$$\mathscr{H}_\kappa/[p] = \bigvee\{\kappa_w : w \in Z(p) \cap \Omega\}.$$

特别地， $Z(p) \cap \Omega \subseteq \overline{\sigma(\mathscr{T}_{z,\,[p]})} \subseteq Z(p)$ 。

证明。 令 $\kappa_w := \kappa(\cdot, w)$, 其中 $w \in \Omega$。 根据定理 A,

$$[p] = [p]_0 = \{f \in \mathscr{H}_\kappa : \langle f, \kappa_w\rangle = 0,\ w \in Z(p) \cap \Omega\},$$

这与.....相同

$$\big\{f \in \mathscr{H}_\kappa : f \in \big(\vee\{\kappa_w : w \in Z(p) \cap \Omega\}\big)^\perp\big\} = \big(\vee\{\kappa_w : w \in Z(p) \cap \Omega\}\big)^\perp.$$

这就证明了第一部分。结合 (1.4) 和再生性质 (3.6)，可得包含关系 $Z(p) \cap \Omega \subseteq \sigma(\mathscr{T}_{z,[p]})$. 由于泰勒谱是闭集（见 [44, 定理 3.1]），我们有 $Z(p) \cap \Omega \subseteq \sigma(\mathscr{T}_{z,[p]})$. </style}剩下的包含关系由引理 3.1(i) 和谱映射性质（见 [16,推论 3.5]）得出。□

References

[1] A. Anand，S. Chavan，亚正规模的模张量积未必是亚正规的，*J. Funct. Anal.* **272** (2017)，4752–4761。[2] W. Arveson，C^*代数的子代数。III. 多变量算子理论，*Acta Math.* **181** (1998)，159–228。[3] A. Athavale，全纯核与交换算子，*Trans. Amer. Math. Soc.* **304** (1987)，101–110。[4] A. Athavale，关于联合等距算子的交织，*J. Operator Theory* **23** (1990)，339–350。[5] B. Bagchi 和 G. Misra，Nagy-Foias 特征函数的标量扰动，载于《算子理论：进展与应用》，纪念 Bela Sz.-Nagy 专辑，127 (2001)，97–112。[6] S. Bera，S. Chavan 和 S. Jain，对合不变泛函希尔伯特空间的传递原理，*J. Geom. Anal.* **35** (2025)，论文编号 354，共 17 页。[7] C. Berg，A. J. Dur
´
Ark. an，*Mat.* **42** 2004 239 257
从 Hausdorff 矩序列到 Stieltjes 矩序列的变换，( )，–。[8] S. Chavan，不具有边界性质的不可约元组，*Canad. Math. Bull.* **58** (2015)，9–18。[9] S. Chavan，S. Kumar，多个变量形式幂级数的球面对称平衡希尔伯特空间。I，*J. Operator Theory* **72** (2014)，405–428。[10] S. Chavan，G. Misra，*Notes on the Brown-Douglas-Fillmore theorem*。剑桥印度科学研究院丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2021。xi+246 页。[11] S. Chavan，D. Yakubovich，希尔伯特空间算子的球面元组，*Indiana Univ. Math.* ( )，–。*J.* **64** 2015 577 612
[12] X. Chen，K. Guo，*Analytic Hilbert modules*，Chapman & Hall/CRC 数学研究札记丛书，433。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2003。viii+201 页。[13] M. Ch¯o 和 W. ˙Zelazko，关于交换 n元算子组的几何半径，*Hokkaido Math. J.* **21** (1992)，251–258。[14] J. B. Conway，*The theory of subnormal operators*，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991。[15] D. A. Cox，J. Little，D. O'Shea，Donal，*Ideals varieties and algorithms—An introduction to* ，，，*computational algebraic geometry and commutative algebra*
第四版。《数学本科教材》。施普林格，瑞士沙姆，2015。xvi+646 页。[16] R. E. Curto，*Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory*。载于：J. B. Conway 和 B. B. Morrel（编），《算子理论近期若干成果综述》II，Pitman 数学研究札记丛书，192，Longman Scientific & Technical，哈洛，1988，第 25–90 页。[17] R. E. Curto，N. Salinas，循环亚正规
m *Amer. J. Math.* 元组 **107** 1985 113 138
的谱性质，( )，–。[18] B. K. Das，S. Gorai，J. Sarkar，关于 $H^2(\mathbb{D}^n)$的商模：本质正规性与边界表示，*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **150** (2020)，1339–1359。[19] R. Douglas，*Hilbert modules over function algebras*。《不变子空间进展及算子理论其他成果》（蒂米什瓦拉和赫库兰，1984），125–139，《算子理论：进展与应用》，17，Birkh¨auser，巴塞尔，1986。[20] R. Douglas，*On Šilov resolution of Hilbert modules*。《线性算子的特殊类别及其他主题》（布加勒斯特，1986），51–60，《算子理论：进展与应用》，28，Birkh¨auser，巴塞尔，1988。[21] R. G. Douglas 和 G. Misra，希尔伯特模的一些计算，*Journal of the Orissa Mathematical Society* **12** 1993 75 85 ，( )，–。
[22] R. G. Douglas，G. Misra，商希尔伯特模的等价性。II，*Trans. Amer. Math.* ( )，–。*Soc.* **360** 2008 2229 2264
[23] R. G. Douglas，G. Misra，C. Varughese，关于商模——任意重数情形，*J. Funct. Anal.* **174** (2000)，364–398。[24] R. G. Douglas，G. Misra，C. Varughese，*Some geometric invariants from resolutions of Hilbert modules* 。
《系统、逼近、奇异积分算子及相关主题》（波尔多，2000），241–270，《算子理论：进展与应用》，129，Birkh¨auser，巴塞尔，2001。[25] R. G. Douglas，V. I. Paulsen，*Hilbert modules over function algebras*。Pitman 数学研究札记丛书，217。Longman Scientific & Technical，哈洛；由约翰·威立父子公司在美国纽约联合出版，1989。vi+130 页。[26] S. H. Ferguson，R. Rochberg，*Description of certain quotient Hilbert modules*。《算子理论》20，93–109，Theta 丛书《进阶数学》，6，Theta，布加勒斯特，2006。[28] E. Franks，多项式亚正规算子元组，*J. Operator Theory* **31** (1994)，219–228。

[29] S. Ghara、S. Kumar、G. Misra、P. Pramanick，酉群下齐次的乘法算子交换元组，
J. Lond. Math. Soc. **109** (2024 12890, 37), 论文编号 e 页[30] J. Gleason、S. Richter，
m *Integral*-希尔
Equ. Oper. Theory **56** 2006 181 196
伯特空间上的等距交换算子元组，( ) – 。[31] K. Guo、J. Hu、X. Xu，重现 C$[z_1, \ldots, z_d]$-模上的Toeplitz代数、次正规元组与刚性， *J. Funct. Anal.* **210** (2004)，214–247。[32] K. Guo 和 P. Wang，本质正规希尔伯特模与 K-同调，III. 双圆盘上 Hardy 模的齐次商模， *Sci. China Ser. A*, 50 (2007)，387–411。[33] M. Hartz， *An invitation to the Drury-Arveson space*。解析函数空间及其应用讲义，347-413。Fields Inst. Monogr., 39[34] M. Jarnicki、P. Pflug，
First steps in several complex variables: Reinhardt domains，EMS 数学教材。欧洲数学学会 (EMS)，苏¨黎世，2008。viii+359 页。[35] A. Lubin，加权移位与次正规算子的乘积，
Indiana Univ. Math. J. **26** (1977)，839–845。[36] V. M¨uller 和 A. Soltysiak，交换希尔伯特空间算子的谱半径公式，*Studia Math.* **103** (1992)，329–333。[37] V. I. Paulsen，M. Raghupathi，
An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces 152 2016 ，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，剑桥，。x+182 页。[38] M. Putinar，次正规 n-元组的谱包含， *Proc. Amer. Math. Soc.* **90** (1984)，405–406。[39] H. L. Royden， *Real analysis*，第三版。麦克米伦出版公司，纽约，1988。xx+444 页。[40] N. Salinas，
Products of kernel functions and module tensor products，算子理论专题，219-241，Oper. Theory Adv. Appl, 32，Birkh¨auser，巴塞尔，1988。[41] J. Sarkar，
An introduction to Hilbert module approach to multivariable operator theory，载于：D. Alpay（编），算子理论。施普林格，巴塞尔，(2015)，969–1033。[42] J. Sarkar，
Applications of Hilbert module approach to multivariable operator theory，载于：D. Alpay（编），算子理论。施普林格，巴塞尔，(2015)，1035–1091。[43] J. Stochel、F. H. Szafraniec，关于无界算子的正规扩张。II，
Acta Sci. ( )，–。
Math. (Szeged) **53** 1989 153 177
[44] J. L. Taylor，多个交换算子的联合谱， *J. Funct. Anal.* **6** (1970)，172–191。

Department of Mathematics and Statistics,
Indian Institute of Technology Kanpur,Kanpur, India.*Email address*:
amrithaks22@iitk.ac.in, santu20@iitk.ac.in, chavan@iitk.ac.in, shanolas@iitk.ac.in