arXiv:2603.07588v1 [math.MG] 8 Mar 2026

2026年3月7日

平面上等半径闭球并集猜想强版本的有效性

CHADI NOUR* 和 JEAN TAKCHE

摘要。 我们证明了等半径闭球并集猜想的强版本有效。该猜想于2011年表述为 [4,猜想 2。5],在平面上。

1 引言

设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集，且 $r > 0$。我们回顾一下，若 S 满足内部 r-球面条件，则对于其每个边界点，都存在一个半径为 r 、包含于 S 且边界经过该点的闭球。这等价于说， S 是正则闭集，并且对于 S' 的每个边界点 s （即 S 的内部的补集），存在一个非零近端法向量，使其在 s 处属于 S'，且由一个 r-球面实现。这里，对于非空闭集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点 a ，如果非零向量 $\zeta \in N_A^P(a)$ ，即 A 在 a 处的近端法锥 中的向量满足以下条件，我们就称其由一个 r-球面实现：

$$\left\langle \frac{\zeta}{\|\zeta\|}, x-a \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x-a\|^2,\ \forall x \in A \quad \left[\text{or equivalently } B\left(a + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right) \cap A = \emptyset\right],$$

其中， $B(x;\rho)$表示以 x为中心、半径为 ρ 的开球。容易看出，如果S 是由相同半径 r的闭球并成的集合，那么它满足内部 r-球面条件。反过来则不一定成立，正如 [3, 例 4.1] 所示。在后一例中，Nour、Stern 和 Takche 给出了一个非空闭集 $S \subset \mathbb{R}^2$ ，它满足内部 1-球面条件，但不是由相同半径为 1 的闭球并成的集合。虽然 S 例 4.1] 中的集合 [3, 不是由相同半径为 1 的闭球并成的集合，但它是由相同半径为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的闭球并成的。这促使 Nour 、 Stern 和 Takche 在 [3, 猜想 4.4] 中提出了以下猜想，称为等半径闭球并集猜想的弱版本。

黎巴嫩美国大学比布鲁斯校区计算机科学与数学系，黎巴嫩比布鲁斯邮政信箱36号电子邮件地址：cnour@lau.edu.lb, jtakchi@lau.edu.lb。2000数学主题分类。52A20, 49J52, 49J53。关键词和短语。内外球面条件、一致闭球并性质、一致闭球并猜想、近端分析。

*通讯作者。

猜想 1.1 ([3, 猜想 4.4])。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集，满足内部 r-球面条件，其中 $r > 0$。那么存在 $r' > 0$ ，使得 S 是由相同半径为 r' 的闭球并成的集合。

在 [4], 中，Nour、Stern 和 Takche 运用非光滑分析的技巧，证明了猜想1.1 对 $r' = \frac{r}{2}$ 成立。事实上，他们证明了以下定理。

定理 1.2 ([4])。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空闭集，满足某个 $r > 0$的内部r-球面条件。那么， S 是半径为 $\frac{r}{2}$ 的闭球的并集。

在 [5, 例 2], 中，Nour、Stern 和 Takche 将 [3, 例 4.1] 推广到了 $\mathbb{R}^n$。更准确地说，对于任意 $r > 0$，他们给出了一个非空闭集 $S \subset \mathbb{R}^n$ ，该集合满足内部 r-球面条件，但对于任何$r' > \frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$，它都不是相同半径为$r'$ 的闭球的并集。因此，由于

$$\frac{r}{2} < \frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{r}{2},$$

Nour、Stern 和 Takche 推论得出， $\frac{r}{2}$ 是猜想*1.1* 中可取的 r' 最大半径，且对 $\mathbb{R}^n$ 所有 $n \geq 2$均成立。此外，由于尚未发现任何反例，使得 S 不是相同半径为$\frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$ 的闭球的并集，他们在 [5, 中提出了 3], 另见 [4, 猜想 2。5], 以下猜想，称为等半径闭球并集猜想的强版本。

猜想 1.3 ([4, 猜想 2.5])。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为非空闭集，并满足某个 $r > 0$对应的内部 r-球面条件。则 S 是半径为 $\frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$的闭球之并。

尽管猜想 1.3 提出至今已有十五年多，但即便在最低的非平凡维数下，它仍未得到解决。具体而言，在平面情形 $n = 2$ 或三维情形 $n = 3$中，既没有已知的证明，也没有反例。

本文旨在解决平面情形下的猜想 1.3。我们的主要结果见下述定理，它表明等半径闭球并集猜想的强版本在 $\mathbb{R}^2$ 成立，且常数 $\frac{r}{\sqrt{3}}$为最优。

定理 1.4。 设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 为非空闭集，并满足某个 $r > 0$对应的内部 r-球面条件。则 S 是半径为 $\frac{r}{\sqrt{3}}$的闭球之并。

定理1.4 的证明依赖于一种专用于平面情形的几何论证。关键在于，在内球条件下对边界点处的内法方向进行局部分析。在二维中，近端法锥可以表示为单位圆上的扇形，因此能够对这些方向进行排序

并通过有向角进行比较。这种结构使得识别极值法向方向，并为相应的内部相切球推导出精确的角度估计成为可能。这种论证本质上依赖于方向的一维几何性质，在高维中无法直接类比。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍全文所用的记号，并回顾与近端分析和内球条件相关的基本定义及预备结果。第3节用于证明定理1.4。在最后一节，即第4节中，我们讨论该结果可能的推广，并概述将其推广至更高维空间的前景。

2 预备知识

全文中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得内积，$\|\cdot\|$ 表示与之对应的范数。对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$，$B(x;r)$、$\overline{B}(x;r)$和 $\mathbb{S}(x;r)$分别表示以 x 为球心、半径为 r的闭球、开球和球面。对于集合$A\subset\mathbb{R}^n$，A 的闭包、内部、边界和补集分别记作 $\mathrm{cl}\,A$、$\mathrm{int}\,A$、$\mathrm{bdry}\,A$ 和 A^c。此外，令

$$A' := (\mathrm{int}\,A)^c = \mathrm{cl}\,(A^c).$$

点 x 到非空闭集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的距离记为

$$d(x,A) := \inf_{a\in A}\|x-a\|.$$

我们将 A 中距离 x最近的点组成的集合记为 $\mathrm{proj}_A(x)$，即

$$\mathrm{proj}_A(x) := \{a\in A : \|x-a\| = d(x,A)\}.$$

在平面情形下，对于两个非零向量 $u,v\in\mathbb{R}^2$，我们用 $\angle(u,v)\in[0,2\pi[$ 表示从 u到 v的唯一逆时针有向角。对于三个互不相同的点 $a,b,c\in\mathbb{R}^2$，我们用 $\angle abc$ 表示在 b 处从 a 到 c的角，即

$$\angle abc := \angle(a-b,\,c-b).$$

现在我们回顾若干非光滑分析中的概念，这些概念将在全文中使用。关于这些概念的全面介绍可参见专著[1, 2, 6–8]。设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为非空闭集，且 $a\in\mathrm{bdry}\ A$。A 在 a 处的近端法锥定义为

$$N_A^P(a) := \left\{\zeta\in\mathbb{R}^n :\ \exists\sigma>0 \text{ such that } \langle\zeta,x-a\rangle\le\sigma\|x-a\|^2,\ \ \forall x\in A\right\}.$$

如果非零向量 $\zeta\in N_A^P(a)$ 可由一个 r-球面实现，则称其为

$$\left\langle\frac{\zeta}{\|\zeta\|},x-a\right\rangle\le\frac{1}{2r}\|x-a\|^2,\ \ \forall x\in A,$$

或者等价地，如果

$$B\left(a+r\frac{\zeta}{\|\zeta\|};r\right)\cap A=\emptyset.$$

注意，对于 $y\notin A$，若 $a\in \mathrm{proj}_A(y)=\mathrm{proj}^{\mathrm{bdry}\,A}(y)$，则 $y-a\in N_A^P(a)$ 并由一个 $\|y-a\|$-球面实现，即，

$$\langle y-a,x-a\rangle\le\frac{1}{2}\|x-a\|^2,\ \ \forall x\in A.$$

称 A 的边界点 a 为 正则，如果近端法锥 $N_A^P(a)$ 是一条半直线，即存在单位向量 $\xi_a\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$N_A(a)=\{\lambda\xi_a:\lambda\ge 0\}.$$

回顾：非空闭集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 对某个 $r>0$ 满足内部 r-球面条件，是指对每个 $a\in\mathrm{bdry}\,A$ 都存在 $x\in A$ 使得

$$a\in\overline{B}(x;r)\subset A.$$

下面的基本观察将在 seque 中反复使用 l.

引理 2.1. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 非空且闭，并设 $r>0$。则 A 满足内部 r-球面条件，当且仅当 A 是正则闭的，并且对任意 $a\in\mathrm{bdry}\,A$，至少存在一个单位近端法向量 $\zeta\in N_{A'}^P(a)$，它由一个 r-球面实现。

证明。 首先假设 A 满足内部 r-球面条件。则对每个$a\in\mathrm{bdry}\,A$，存在 $x\in A$ 使得 $a\in B(x;\,r)\subset A$，这意味着 $a\in\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\ A)$。因此$\mathrm{bdry}\ A\subset\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,A)$，从而 $A=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\ A)$，即 A 是正则闭的。此外，这样一个球的存在立即给出了在a处 A' 的、由一个 r-球面实现的单位近端法向量。

反之，若 A 是正则闭的，且对每个 $a\in\mathrm{bdry}\,A$ 都存在由一个 r-球面实现的单位近端法向量 $\zeta\in N_{A'}^P(a)$，则由定义

$$B(a+r\zeta;r)\cap A'=\emptyset,$$

这意味着$B(a+r\zeta;r)\subset A$，从而 A 满足内部 r-球面条件。 □

3 定理的证明1.4

在给出证明的细节之前，我们先建立两个预备结果。我们从下面的平面几何引理开始，它将用于论证的最后一步。

引理 3.1. 设 $r>0$、 $r_0>0$、 $\alpha\in]0$、 $\pi[$, 和 $\beta\in[0,\pi[$，使得

$$0\le\beta\le\alpha\le\pi-\beta\quad and\quad r_0\sin\alpha\ge r\sin\beta\ge 0.$$

我们在 $\mathbb{R}^2$ 中考虑这三个点

$$A := (r_0 \cos\alpha, r_0 \sin\alpha),\ \ B := (r\cos\beta, r\sin\beta),\ \ and\ \ C := (-r\cos\beta, r\sin\beta).$$

分别用 S_A、 S_B 和 S_C 表示圆心为 A、 B 和 C，半径分别为 r_0、 r 和 r 的圆。令 O 表示原点，并定义点 D、 E 和 F 如下：

$$S_A \cap S_C = \{O, D\},\ \ S_A \cap S_B = \{O, E\},\ \ and\ \ S_A \cap y\text{-}axis = \{O, F\}.$$

以下断言成立：

(i) $\angle EOD = \pi - \angle CAB.(ii)$ 若 $r_0 < \frac{r}{\sqrt{3}}$，则：(a) $\angle EOD < \frac{\pi}{3}$。$(b)$ 对于圆 S_A 上位于圆 S_B 和 S_C 外部的两个点 M 和 N，有 $\angle NOM < \frac{\pi}{3}$。

–

–

证明。 几何构型如图1所示。

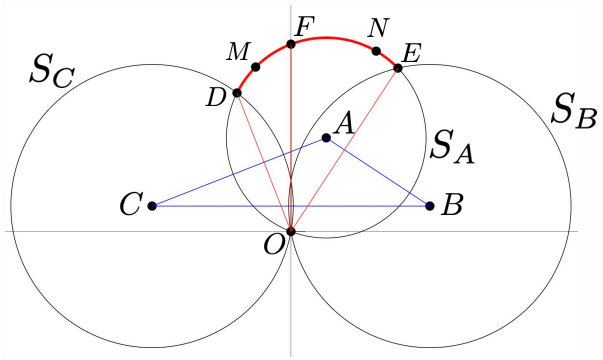

图 1。 引理3.1的几何构型

(i): $\angle EOD = \angle EOF + \angle FOD = \angle ABC + \angle BCA = \pi - \angle CAB.$

$(ii)(a)$：在三角形 ABC 中应用余弦定理，我们得到

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos(\angle CAB).$$

我们逐项计算。首先,

$$BC^2 = 4r^2\cos^2\beta = 4r^2 - 4r^2\sin^2\beta.$$

接下来,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (r\cos\beta - r_0\cos\alpha)^2 + (r\sin\beta - r_0\sin\alpha)^2 \\ &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha - 2rr_0\cos\beta\cos\alpha, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} AC^2 &= (-r\cos\beta - r_0\cos\alpha)^2 + (r\sin\beta - r_0\sin\alpha)^2 \\ &= r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha + 2rr_0\cos\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} -\cos(\angle CAB) &= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2AB.AC} \\ &= \frac{2r^2 - 2r_0^2 + 4rr_0\sin\beta\sin\alpha - 4r^2\sin^2\beta}{2\sqrt{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha)^2 - (2rr_0\cos\beta\cos\alpha)^2}} \\ &\geq \frac{2r^2 - 2r_0^2 + 4rr_0\sin\beta\sin\alpha - 4r^2\sin^2\beta}{2\sqrt{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha)^2}} \\ &= \frac{2r^2 - 2r_0^2 + 4rr_0\sin\beta\sin\alpha - 4r^2\sin^2\beta}{2(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha)}. \end{aligned}$$

由于 $r_0\sin\alpha \geq r\sin\beta$, 我们得到

$$2r^2 - 2r_0^2 + 4r\sin\beta(r_0\sin\alpha - r\sin\beta) \geq 2r^2 - 2r_0^2,$$

因此,

$$-\cos(\angle CAB) \geq \frac{2r^2 - 2r_0^2}{2(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\sin\beta\sin\alpha)} \geq \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2}.$$

于是,

$$\cos(\angle CAB) \leq \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2} = 1 - \frac{2r^2}{r_0^2 + r^2}.$$

若 $r_0 < \frac{r}{\sqrt{3}}$, 则

$$\cos(\angle CAB) < 1 - \frac{2r^2}{\frac{r^2}{3} + r^2} = 1 - \frac{2}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2},$$

因此 $\angle CAB > \frac{2\pi}{3}$。利用（$i$），可得 $\angle EOD = \pi - \angle CAB < \frac{\pi}{3}$。

(ii) (b) : $\angle NOM \leq \angle EOD < \frac{\pi}{3}$。 □

下一个引理将在定理的证明中反复使用1.4。

引理3.2。 设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 是一个非空闭集，满足某个 $r > 0$对应的内部 r-球条件。对于 $r^* \in]0, r[$, ，令 S_{r^*} 表示所有包含在 S中的半径为 r^* 的闭球之并。令 $s_0 \in$ 边界 S，并令 $x_0 \in S \cap (S_{r^*})^c$。设 $r_0 := \|x_0 - s_0\|$且 $\zeta := \frac{x_0 - s_0}{\|x_0 - s_0\|}$。[1]假设 $\zeta_{s_0} \in N_{S'}^P(s_0)$是在 s_0处由某个

[1]注意，由于 bdry $S \subset S_{r^*}$, $x_0 \neq s_0$

r'-球实现的 $x_0 \in B(s_0 + r'\zeta_{s_0}, r') \subset S$，其中 $r' < r^*$ 为某个值。那么 s_0 不是正则的，并且存在一个单位向量 u_x 以及两个不同的单位法向量 ζ_0 和 ξ_0，它们都是s_0处于 S' 的单位法向量，由一个 r-球实现，满足：

(i) $\pi \leq \angle(\zeta_0, \xi_0) \leq 2\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right)$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \leq \angle(\zeta, \zeta_0) \leq \angle(\zeta, u_x) - \frac{\pi}{2}$.

(iii) $\angle(\zeta, u_x) + \frac{\pi}{2} \leq \angle(\zeta, \xi_0) \leq 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right)$.

证明。 由于 $s_0 \in$ **bdry** S，我们有$B\left(s_0, \frac{1}{n}\right) \not\subset S$对所有 n。设$x_n \in B\left(s_0, \frac{1}{n}\right) \cap S^c$ 并令 $r_n := \|x_n - s_0\| \leq \frac{1}{n} < r_0$，当 n 充分大时。对于 $y_n := s_0 + r_n\zeta$ 使得 $\|y_n - s_0\| = r_n \leq r_0$，当 n 充分大时，我们有

$$\|y_n - s_0\| = r_n < r_0.$$

由此可得，当 n 充分大时

$$y_n \in]s_0, x_0[\subset B(s_0 + r'\zeta_{s_0}; r') \subset \overline{B}(s_0 + r'\zeta_{s_0}; r') \subset S.$$

因此，当 n 充分大时， $y_n \in \text{int}\, S$。设 C_n 是以 s_0 为圆心、半径为r_n的圆。 C_n上连接 $x_n \notin S$与 $y_n \in \text{int}\, S$的顺时针弧与**bdry** S相交于一点s_n，而 C_n 上连接 x_n 与 y_n 的逆时针弧与**bdry** S 相交于一点 s'_n。显然， C_n 上连接 s_n 与 s'_n 且包含 x_n 的开弧包含于 S^c中。定义单位向量 $u_{x_n} := \frac{x_n - s_0}{\|x_n - s_0\|}$, $u_{s_n} := \frac{s_n - s_0}{\|s_n - s_0\|}$，以及$u_{s'_n} := \frac{s'_n - s_0}{\|s'_n - s_0\|}$，并考虑 ζ_n与ξ_n，它们分别是 S' 在 s_n 与 s'_n处的单位法向量，由一个 r-球面实现，见图 2。由于这些向量均为单位向量，存在子序列（我们不重新标记），使得

$$u_{x_n} \longrightarrow u_x \text{ unit},\ u_{s_n} \longrightarrow u_s \text{ unit},\ u_{s'_n} \longrightarrow u_{s'} \text{ unit},\ \zeta_n \longrightarrow \zeta_0 \text{ unit, and } \xi_n \longrightarrow \xi_0 \text{ unit}.$$

显然,

$$0 \leq \angle(\zeta, u_{s_n}) < \angle(\zeta, u_{x_n}) < \angle(\zeta, u_{s'_n}) < 2\pi,$$

因此,

$$0 \leq \angle(\zeta, u_s) \leq \angle(\zeta, u_x) \leq \angle(\zeta, u_{s'}) < 2\pi. \tag{1}$$

由于 $\zeta_n \in N_S^P(s_n)$ 是由一个 r-球面实现的，我们有

$$\langle \zeta_n, s - s_n \rangle \leq \frac{1}{2r}\|s - s_n\|^2, \ \ \forall s \in S'.$$

在后者中取 $n \longrightarrow \infty$，并利用 $\|s_0 - s_n\| = r_n \leq \frac{1}{n}$，我们推出 –

$$\langle \zeta_0, s - s_0 \rangle \leq \frac{1}{2r}\|s - s_0\|^2, \ \ \forall s \in S'.$$

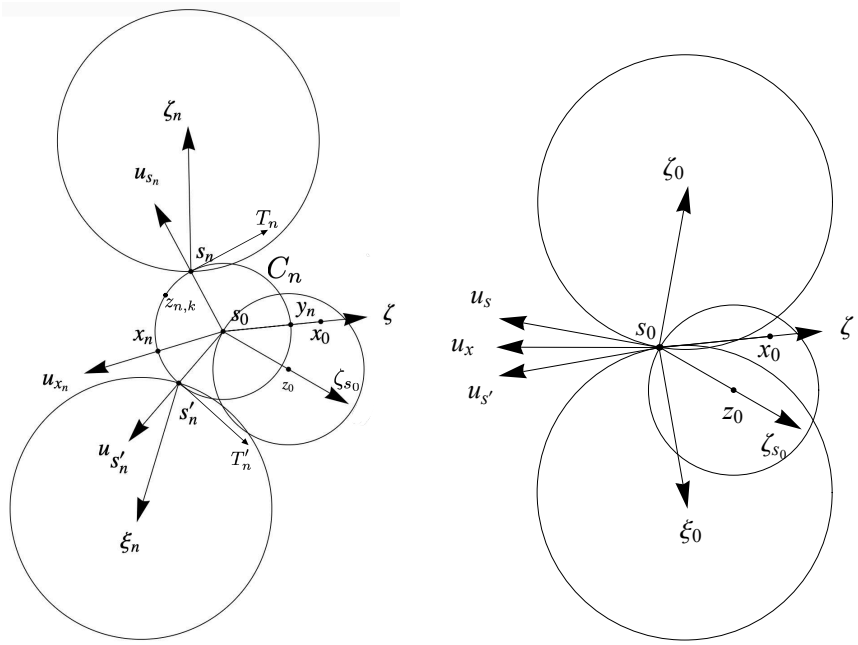

图 2. 引理证明3.2

由此可得， $\zeta_0 \in N_{S'}^P(s_0)$由一个 r-球面实现。类似地， $\xi_0 \in N_{S'}^P(s_0)$也由一个 r-球面实现。由于 $x_0 \notin S_{r^*}$、 $r^* < r$以及$B(s_0 + r\zeta_0; r) \subset S$， 我们推出$x_0 \notin B(s_0 + r\zeta_0; r)$。后者给出

$$\langle \zeta, \zeta_0 \rangle < \frac{r_0}{2r},$$

因此

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) < \angle(\zeta, \zeta_0) < 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right). \tag{2}$$

同样,

$$\langle \zeta, \xi_0 \rangle < \frac{r_0}{2r},$$

因此

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) < \angle(\zeta, \xi_0) < 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right). \tag{3}$$

由引理 2.1，我们知道 S是正则闭的，因此 $s_0 \in$边界 $S =$边界 $S' \subset S'$。再加上 $\zeta_n \in N_{S'}^P($ $s_n)$ 由一个 r-球面实现，我们推得

$$\langle \zeta_n, s_0 - s_n \rangle \leq \frac{1}{2r}\|s_0 - s_n\|^2,$$

从而

$$\langle -u_{s_n}, \zeta_n \rangle \leq \frac{r_n}{2r}.$$

取极限可得

$$\langle u_s, \zeta_0 \rangle \geq 0.$$

另一方面，由一个r-球面实现 $s_n \in \text{bdry } S = \text{bdry } S' \subset S' \text{and } \zeta_0 \in N_{S'}^P(s_0)$，我们得到

$$\langle \zeta_0, s_n - s_0 \rangle \leq \frac{1}{2r} \|s_n - s_0\|^2,$$

因此

$$\langle u_{s_n}, \zeta_0 \rangle \leq \frac{r_n}{2r}.$$

取极限可得

$$\langle u_s, \zeta_0 \rangle \leq 0.$$

因此,

$$\langle u_s, \zeta_0 \rangle = 0. \tag{4}$$

同理,

$$\langle u_{s'}, \xi_0 \rangle = 0.$$

固定足够大的 $n_\circ$ 由于连接 s_n 与 s'_n 且包含 x_n 的 C_n 开弧包含于 S^c 中，我们可以在此弧上选取点列 $(z_{n,\ k})_{k\geq 1}$，使得

$$z_{n,k} \to s_n \text{ as } k \to \infty, \text{ and } z_{n,k} \notin S \text{ for all } k.$$

Set

$$w_{n,k} := \frac{z_{n,k} - s_n}{\|z_{n,k} - s_n\|}.$$

于是，当 $k \longrightarrow \infty$ 时，$w_{n,\ k} \longrightarrow -T_n$，其中 T_n 表示在 s_n 处的 C_n 的顺时针单位切向量。由于 $z_{n,\ k} \in S^c \subset S'$，且 $\zeta_n \in N_{S'}^P(s_n)$ 可由一个 r-球面实现，因此我们有

$$\langle \zeta_n, z_{n,k} - s_n \rangle \leq \frac{1}{2r} \|z_{n,k} - s_n\|^2.$$

两边除以 $\|z_{n,\ k} - s_n\| > 0$，得到

$$\left\langle \zeta_n, w_{n,k} \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \|z_{n,k} - s_n\|.$$

令 $k \longrightarrow \infty$，得到

$$\langle \zeta_n, -T_n \rangle \leq 0, \text{ that is, } \langle \zeta_n, T_n \rangle \geq 0.$$

不妨进一步抽取子序列，假设当 $n \longrightarrow \infty$ 时，$T_n \to T_0$ 为单位向量，由此可推出

$$\langle \zeta_0, T_0 \rangle \geq 0. \tag{5}$$

Since $u_{s_n} \longrightarrow u_s$ 且 T_n 是将 u_{s_n} 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到的,– 我们有 e

$$\angle(T_0, u_s) = \frac{\pi}{2}.$$

将后者与（4）和（5）结合起来，并且由于在 $\mathbb{R}^2$ 中与 u_s 正交的方向在相差符号的意义下是唯一的，我们得出 $\zeta_0 = T_0$，因此

$$\angle(\zeta_0, u_s) = \frac{\pi}{2}.$$

同样，利用 s'_n 处的对称构造，我们得到

$$\angle(u_{s'}, \xi_0) = \frac{\pi}{2}.$$

因此（见图2），

$$\angle(\zeta, \zeta_0) = \angle(\zeta, u_s) - \frac{\pi}{2} \text{ and } \angle(\zeta, \xi_0) = \angle(\zeta, u_{s'}) + \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

利用（1）和（6），我们得到

$$\angle(\zeta, \zeta_0) = \angle(\zeta, u_s) - \frac{\pi}{2} \leq \angle(\zeta, u_x) - \frac{\pi}{2},$$

结合（2）可得(ii)。同样，

$$\angle(\zeta, \xi_0) = \angle(\zeta, u_{s'}) + \frac{\pi}{2} \geq \angle(\zeta, u_x) + \frac{\pi}{2},$$

与（3）结合可得(iii)。由(ii) 和(iii) 可得

$$\angle(\zeta, \zeta_0) \leq \angle(\zeta, \xi_0),$$

并且由于有向角在 $[0, 2\pi)$中取值，因此可得

$$\angle(\zeta_0, \xi_0) = \angle(\zeta, \xi_0) - \angle(\zeta, \zeta_0).$$

利用（2）和（3），我们推出

$$\angle(\zeta_0, \xi_0) \geq \left(\angle(\zeta, u_x) + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\angle(\zeta, u_x) - \frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

and

$$\angle(\zeta_0, \xi_0) \leq \left(2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right)\right) - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) = 2\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right).$$

这证明了（i）。特别地，$\angle(\zeta_0, \xi_0) \geq \pi$ 意味着 $\zeta_0 \neq \xi_0$，因此边界点 s_0 不是正则的。□

我们现在准备证明定理1.4。我们首先概述论证。我们采用反证法。假设存在一点 $x_0 \in S$ 不能被一个闭球覆盖，该闭球的半径为 $\frac{r}{\sqrt{3}}$ 且包含于 S。利用引理3.2，我们证明 x_0 属于一个闭球，该闭球包含于 S，且半径严格小于 $\frac{r}{\sqrt{3}}$，其边界包含 S的三个边界点，即 s_0、s'_0和s''_0，这些点不是正则的，并且可以为它们选取适当的法向量。然后，应用引理3.1，我们证明三角形 $s_0 s'_0 s''_0$ 的内角和严格小于 π，从而得出矛盾。

定理1.4的证明。反设 S 不是半径为 $\frac{r}{\sqrt{3}}$的闭球的并集，也就是说，$S_{\frac{r}{\sqrt{3}}} \subsetneq S$ 其中 $S_{\frac{r}{\sqrt{3}}}$ 表示所有

半径为 $\frac{r}{\sqrt{3}}$ 且包含于 S 中的闭球的并集。于是存在 $x_0 \in S \cap \left(S_{\frac{r}{\sqrt{3}}}\right)^c$。令 $s_0 \in \operatorname{proj}_{\operatorname{bdry} S}(x_0)$，$r_0 := \|x_0 - s_0\|$ 且 $\zeta := \frac{x_0 - s_0}{\|x_0 - s_0\|} \in N_{S'}^P(s_0)$。由于 $x_0 \in \overline{B}(s_0 + r_0\zeta) \subset S$ 且 $x_0 \notin S_{\frac{r}{\sqrt{3}}}$，我们推得 $r_0 < \frac{r}{\sqrt{3}}$。因此，对 $r^* := \frac{r}{\sqrt{3}}$、$x_0 := x_0$、$s_0 := s_0$、$\zeta := \zeta$、$\zeta_{s_0} := \zeta$ 和 $r' := r_0$ 应用引理3.2，可得 s_0 不是正则的，并且存在单位向量 u_x 以及两个不同的单位法向量 ζ_0 和 ξ_0，它们在 s_0 处是 S' 的法向量，由一个 r-球面实现，使得

$$\pi \leq \angle(\zeta_0, \xi_0) \leq 2\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right), \tag{7}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \leq \angle(\zeta, \zeta_0) \leq \angle(\zeta, u_x) - \frac{\pi}{2}, \text{ and} \tag{8}$$

$$\angle(\zeta, u_x) + \frac{\pi}{2} \leq \angle(\zeta, \xi_0) \leq 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right). \tag{9}$$

由此可得

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \leq \angle(\zeta, \zeta_0) \leq \angle(\zeta, \xi_0) - \pi \leq \pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right). \tag{10}$$

由于 $x_0 \notin S_{\frac{r}{\sqrt{3}}}$ 和 $x_0 \in \overline{B}(s_0 + r_0\zeta) \subset \overline{B}\left(s_0 + \frac{r}{\sqrt{3}}\zeta; \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$，我们推得

$$\overline{B}\left(s_0 + \frac{r}{\sqrt{3}}\zeta; \frac{r}{\sqrt{3}}\right) \not\subset S.$$

令 r_1 为满足 $B(s_0 + t\zeta; t) \subset S$ 的最大 $t > 0$。显然，我们有

$$r_0 \leq r_1 < \frac{r}{\sqrt{3}}, \ \overline{B}(s_0 + r_1\zeta; r_1) \subset S, \text{ and } \zeta \in N_{S'}^P(s_0) \text{ is realized by an } r_1\text{-sphere.} \tag{11}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们定义序列 $(x_n')_n$ 如下

$$x_n' \in \overline{B}\left(s_0 + \left(r_1 + \frac{1}{n}\right)\zeta; r_1 + \frac{1}{n}\right) \cap S^c.$$

由于序列 $(x_n')_n$ 有界，它有一个收敛到点 s_0' 的子序列（我们不重新标记该子序列），并且该点满足

$$s_0' \in \mathbb{S}(s_0 + r_1\zeta; \zeta) \cap \operatorname{cl}(S^c) \subset S \cap \operatorname{cl}(S^c) = \operatorname{bdry} S. \tag{12}$$

由于 $x_n' \in S^c \subset S'$ 和 $\zeta_0 \in N_{S'}^P(s_0)$ 可由一个 r-球面实现，因此我们有

$$\left\langle \zeta_0, \frac{x_n' - s_0}{\|x_n' - s_0\|} \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x_n' - s_0\|.$$

在后者中取 $n \longrightarrow \infty$，我们推得

$$\langle v_0, \zeta_0 \rangle \leq \frac{\|s_0' - s_0\|}{2r}, \tag{13}$$

其中 v_0 是 $\left(\frac{x'_n - s_0}{\|x'_n - s_0\|}\right)_n$ 的一个未重新标记的子序列在 $n \longrightarrow \infty$时的极限。类似地，我们有

$$\langle v_0, \xi_0 \rangle \leq \frac{\|s'_0 - s_0\|}{2r}. \tag{14}$$

断言 1： $s'_0 \neq s_0$。

若非如此，则由（13）和（14）可推出

$$\langle v_0, \zeta_0 \rangle \leq 0 \text{ and } \langle v_0, \xi_0 \rangle \leq 0. \tag{15}$$

由（11），且由于 $x'_n \in S^c \subset S'$，可得

$$\left\langle \zeta, \frac{x'_n - s_0}{\|x'_n - s_0\|} \right\rangle \leq \frac{1}{2r_1}\|x'_n - s_0\|,$$

因此，取 $n \longrightarrow \infty$ 后，

$$\langle \zeta, v_0 \rangle \leq 0$$

再加上 $x'_n \in B\left(s_0 + \left(r_1 + \frac{1}{n}\right)\zeta;\ r_1 + \frac{1}{n}\right)$ 由此可得

$$\|x'_n - s_0\| \leq 2\left(r_1 + \frac{1}{n}\right)\left\langle \frac{x'_n - s_0}{\|x'_n - s_0\|}, \zeta \right\rangle,$$

因此，在取 $n \longrightarrow \infty$ 后，

$$\langle \zeta, v_0 \rangle \geq 0,$$

我们推得

$$\langle \zeta, v_0 \rangle = 0.$$

由此可得

$$\angle(v_0, \zeta) = \frac{\pi}{2} \text{ or } \angle(\zeta, v_0) = \frac{\pi}{2}.$$

将后者与（8）和（9）结合起来，可得

$$\langle v_0, \zeta_0 \rangle > 0 \text{ or } \langle v_0, \xi_0 \rangle > 0,$$

这与（15）矛盾。

因此，

$$s'_0 \neq s_0.$$

令 $x_1 := s_0 + r_1\zeta$。显然，我们有 $s_0 \in \mathbb{S}(x_1; r_1)$。此外，由（12）可推出$s'_0 \in \mathbb{S}(x_1; r_1)$，见图 3。定义

$$r'_0 := \|x_0 - s'_0\|, \quad \zeta' := \frac{x_0 - s'_0}{\|x_0 - s'_0\|}, \text{ and } \zeta_{s'_0} := \frac{x_1 - s'_0}{\|x_1 - s'_0\|}.$$

利用（11），我们有 $x_0 \in \overline{B}(x_1; r_1) = \overline{B}(s'_0 + r_1\zeta_{s'_0}; r_1) \subset S$。由此可得

$$B(s'_0 + r_1\zeta_{s'_0}; r_1) \subset \operatorname{int} S = (S')^c,$$

因此，$\zeta_{s'_0} \in N_{S'}^P(s'_0)$可由一个 r_1-球面实现。对3.2应用引理 $r^* := \frac{r}{\sqrt{3}}$，$x_0 := x_0$，$s_0 := s'_0$，$\zeta := \zeta'$，$\zeta_{s_0} =: \zeta_{s'_0}$ 以及 $r' := r_1$，可得 s'_0 不是正则的，并且

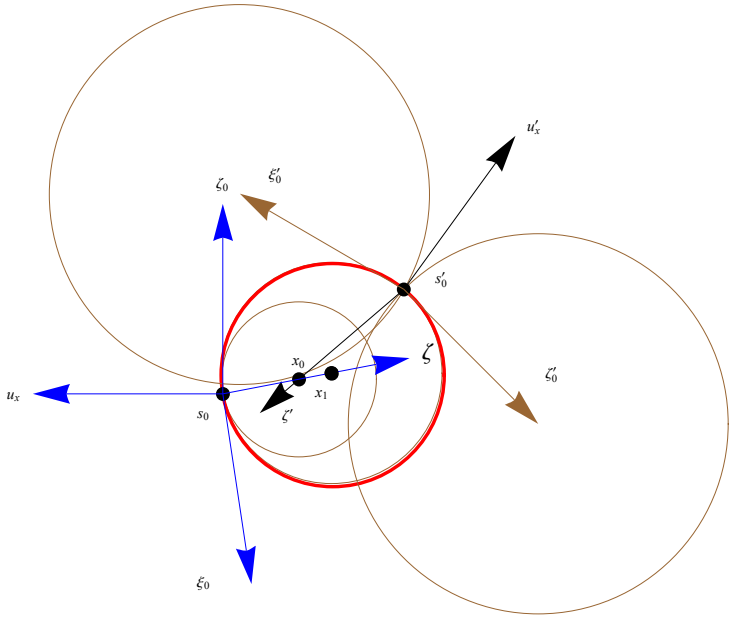

图3。边界点 s'_0 不是正则的

存在一个单位向量 u'_x 和两个不同的单位法向量 ζ'_0 以及 ξ'_0 至 S' 于 s'_0，由一个 r球面实现，见图3，使得

$$\pi \le \angle(\zeta'_0, \xi'_0) \le 2\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{r'_0}{2r}\right),$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{r'_0}{2r}\right) \le \angle(\zeta', \zeta'_0) \le \angle(\zeta', u'_x) - \frac{\pi}{2}, \text{ and}$$

$$\angle(\zeta', u'_x) + \frac{\pi}{2} \le \angle(\zeta', \xi'_0) \le 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r'_0}{2r}\right).$$

由此可得

$$\cos^{-1}\left(\frac{r'_0}{2r}\right) \le \angle(\zeta', \zeta'_0) \le \angle(\zeta', \xi'_0) - \pi \le \pi - \cos^{-1}\left(\frac{r'_0}{2r}\right). \tag{16}$$

令 $m := \frac{s_0+s'_0}{2}$，并令 ζ_1 为由下式定义的单位向量

$$\zeta_1 := \begin{cases} \frac{x_1-m}{\|x_1-m\|}, & \text{if } x_1 \neq m, \\ \text{a unit vector perpendicular to } [s_0, s'_0], & \text{if } x_1 = m. \end{cases}$$

由于 $\|x_1 - s_0\| = \|x_1 - s_0'\| = r_1$，我们有 ζ_1 垂直于 $[s_0, s_0']$。利用（11），以及 $x_1 = s_0 + r_1\zeta$ 和 $x_0 = s_0 + r_0\zeta$ 满足 $r_0 \leq r_1$这一事实，可推得

$$x_0 \in [s_0, x_1] \subset \overline{B}(x_1; r_1) = \overline{B}(m + \|x_1 - m\|\zeta_1; r_1) = \overline{B}\left(m + \sqrt{r_1^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; r_1\right) \subset S.$$

由于 $\langle s_0 - m,\ \zeta_1\rangle = 0$，我们有

$$\left\| s_0 - m - \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1 \right\|^2 = \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

由此可得

$$\begin{aligned} s_0 &\in \mathbb{S}\left(m + \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; \frac{r}{\sqrt{3}}\right) \\ &\subset \overline{B}\left(m + \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; \frac{r}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

此外,

$$\begin{aligned} \left\| x_1 - m - \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1 \right\| &= \left\| \|x_1 - m\|\zeta_1 - \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1 \right\| \\ &= \left| \|x_1 - m\| - \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2} - \sqrt{r_1^2 - \|s_0 - m\|^2} \\ &\leq \frac{r}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

则 $x_1 \in B\left(m + \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1;\ \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$。因此,

$$x_0 \in [s_0, x_1] \subset \overline{B}\left(m + \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; \frac{r}{\sqrt{3}}\right),$$

由此可得，因为 $x_0 \notin S_{\frac{r}{\sqrt{3}},=}$

$$\overline{B}\left(m+\sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2-\|s_0-m\|^2}\,\zeta_1;\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\not\subset S.$$

令 r_2 为最大的 $t>0$，使得

$$\overline{B}\left(m+\sqrt{t^2-\|s_0-m\|^2}\,\zeta_1;t\right)\subset S.$$

显然，我们有

$$r_1\le r_2<\frac{r}{\sqrt{3}}\ \text{ and }\ \overline{B}\left(m+\sqrt{r_2^2-\|s_0-m\|^2}\,\zeta_1;r_2\right)\subset S.$$

此外，对于 $x_2:=m+\sqrt{r_2^2-\|s_0-m\|^2}\,\zeta_1$，运用与证明（17）时类似的论证，参见图 4，可得

$$s_0\in\mathbb{S}(x_2;r_2)\subset\overline{B}(x_2;r_2)\subset S\ \text{ and }\ s_0'\in\mathbb{S}(x_2;r_2)\subset\overline{B}(x_2;r_2)\subset S.$$

我们接着证明，$B(x_2;r_2)$ 包含 S 的第三个边界点 s_0''，该点并非

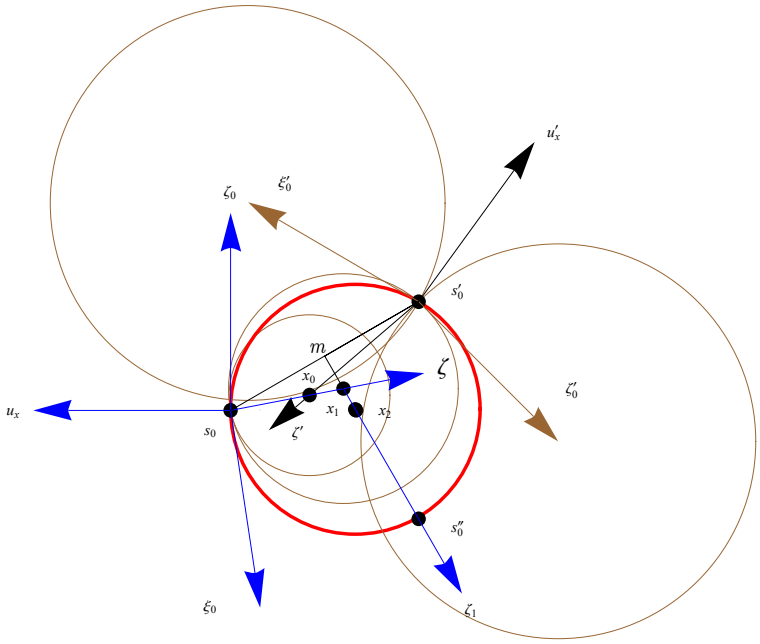

图 4. 球 $B(x_2;r_2)$

正则的。对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们如下定义序列 $(x_n'')_n$

$$x_n'' \in \overline{B}\left(m + \sqrt{\left(r_2 + \frac{1}{n}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; r_2 + \frac{1}{n}\right) \cap S^c.$$

由于序列 $(x_n'')_n$ 有界，因此它有一个子序列（不再重新标记），该子序列收敛到满足以下条件的点 s_0''

$$s_0'' \in \mathbb{S}(x_2; r_2) \cap \mathrm{cl}\,(S^c) \subset \overline{B}(x_2; r_2) \cap \mathrm{cl}\,(S^c) \subset S \cap \mathrm{cl}\,(S^c) = \mathrm{bdry}\,S.$$

断言2： $s_0'' \neq s_0$ 且 $s_0'' \neq s_0'$。

只需证明 $s_0'' \neq s_0$，因为 $s_0'' \neq s_0'$ 可用相同的论证得出。由于$x_n'' \in S^c \subset S'$ 且 $\zeta_0 \in N_S^P(s_0)$ 由一个 r- 球面实现，因此我们有

$$\left\langle \zeta_0, \frac{x_n'' - s_0}{\|x_n'' - s_0\|} \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x_n'' - s_0\|.$$

将 $n \longrightarrow \infty$ 代入后者，可得

$$\langle v_0'', \zeta_0 \rangle \leq \frac{\|s_0'' - s_0\|}{2r}, \tag{18}$$

其中，当 $n \longrightarrow \infty$时，v_0'' 是 $\left(\frac{x_n'' - s_0}{\|x_n'' - s_0\|}\right)_n$ 的一个子序列（不再重新标记）的极限。

类似地，我们有

$$\langle v_0'', \xi_0 \rangle \leq \frac{\|s_0'' - s_0\|}{2r}. \tag{19}$$

若 $s_0'' = s_0$，则由（18）和（19）可推得

$$\langle v_0'', \zeta_0 \rangle \leq 0 \ \text{ and } \ \langle v_0'', \xi_0 \rangle \leq 0. \tag{20}$$

对于 $u_0 := \frac{x_2 - s_0}{\|x_2 - s_0\|}$，我们有 $\bar{B}(s_0 + r_2 u_0;\, r_2) = \bar{B}(x_2;\, r_2) \subset S$。于是 $u_0 \in N_S^P(s_0)$，并且由一个 r_2-球面实现。由于 $x_n'' \in S^c \subset S'$，我们得到

$$\left\langle u_0, \frac{x_n'' - s_0}{\|x_n'' - s_0\|} \right\rangle \leq \frac{1}{2r_2}\|x_n'' - s_0\|,$$

因此，取 $n \longrightarrow \infty$ 后，

$$\langle u_0, v_0'' \rangle \leq 0. \tag{21}$$

另一方面，我们有

$$x_n'' \in \overline{B}\left(m + \sqrt{\left(r_2 + \frac{1}{n}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1; r_2 + \frac{1}{n}\right) = \bar{B}\left(s_0 + \left(r_2 + \frac{1}{n}\right)u_n; r_2 + \frac{1}{n}\right),$$

其中 $u_n := \frac{x_{2,n} - s_0}{\|x_{2,n} - s_0\|}$，和 $x_{2,n} := m + \sqrt{\left(r_2 + \frac{1}{n}\right)^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1$，由此可得

$$\|x_n'' - s_0\| \leq 2\left(r_2 + \frac{1}{n}\right)\left\langle \frac{x_n'' - s_0}{\|x_n'' - s_0\|}, u_n \right\rangle,$$

因此，取 $n \longrightarrow \infty$ 后，

$$\langle u_0, v_0'' \rangle \geq 0.$$

将后者与（21）结合，我们推出

$$\langle u_0, v_0'' \rangle = 0.$$

由此可得

$$\angle(v_0'', u_0) = \frac{\pi}{2} \text{ or } \angle(u_0, v_0'') = \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

我们有

$$\begin{aligned} \left\| x_1 - m - \sqrt{r_2^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1 \right\| &= \left\| \|x_1 - m\|\zeta_1 - \sqrt{r_2^2 - \|s_0 - m\|^2}\,\zeta_1 \right\| \\ &= \left| \|x_1 - m\| - \sqrt{r_2^2 - \|s_0 - m\|^2} \right| \\ &= \sqrt{r_2^2 - \|s_0 - m\|^2} - \sqrt{r_1^2 - \|s_0 - m\|^2} \\ &\leq r_2. \end{aligned}$$

于是 $x_1 \in \overline{B}(x_2; r_2)$，从而

$$x_0 \in [s_0, x_1] \subset \overline{B}(x_2; r_2) = \bar{B}(s_0 + r_2 u_0; r_2) \subset S. \tag{23}$$

由此得到 $\|x_0 - s_0\| \leq 2r_2\langle \zeta,\ u_0 \rangle$，从而 $\langle \zeta,\ u_0 \rangle \geq \frac{r_0}{2r_2} > \frac{r_0}{2r}$。将后者与（8）- （9）结合，我们得出

$$0 \leq \angle(u_0, \zeta) \leq \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r_2}\right) < \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \leq \angle(\xi_0, \zeta), \tag{24}$$

or

$$0 \leq \angle(\zeta, u_0) \leq \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r_2}\right) < \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \leq \angle(\zeta, \zeta_0). \tag{25}$$

特别是，

$$u_0 \neq \zeta_0 \text{ and } u_0 \neq \xi_0. \tag{26}$$

不失一般性，假设（24）成立；情形（25）通过类似论证也可得到相同结果。

Case 1: $0 \leq \angle(\xi_0, v_0'') < \angle(\xi_0, \zeta_0)$ (see Figure 5).

然后，利用（7）和（20），可得

$$\pi \geq \angle(\xi_0, \zeta_0) = \angle(\xi_0, v_0'') + \angle(v_0'', \zeta_0) \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

这意味着

$$\angle(\xi_0, \zeta_0) = \pi,\ \ \angle(\xi_0, v_0'') = \frac{\pi}{2},\ \text{ and } \angle(v_0'', \zeta_0) = \frac{\pi}{2}.$$

由于 $\langle v_0'',\ u_0 \rangle = 0$，因此得到 $u_0 \in \{\zeta_0, \xi_0\}$，这与（26）矛盾 .

情形2: $0 \leq \angle(\zeta_0, v_0'') < \angle(\zeta_0, \xi_0)$（见图5）。

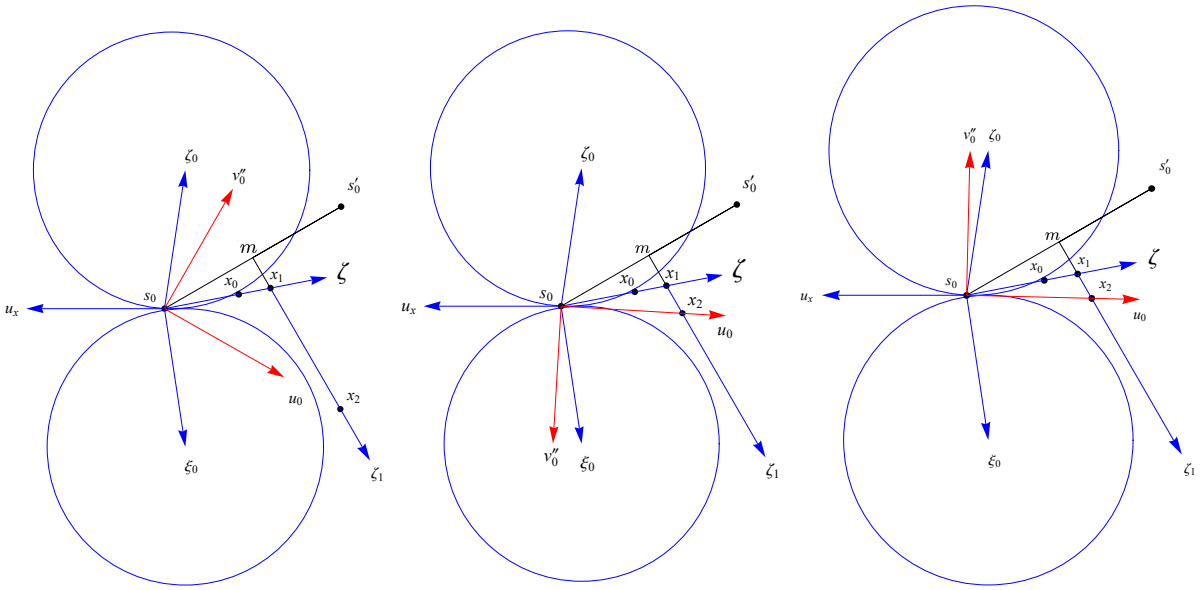

图5。$s_0'' \neq s_0$

鉴于（22），我们区分以下两种子情形。

情形2.1: $\angle(v_0'', u_0) = \frac{\pi}{2}$.

于是，

$$\begin{aligned} 0 \leq \angle(v_0'', \xi_0) = \angle(v_0'', u_0) + \angle(u_0, \zeta) - \angle(\xi_0, \zeta) &= \frac{\pi}{2} + \angle(u_0, \zeta) - \angle(\xi_0, \zeta) \\ &\overset{(24)}{\leq} \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r_2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \\ &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

这表明 $\langle v_0'', \xi_0 \rangle > 0$ 这与（20）矛盾。

情形 2.2: $\angle(u_0, v_0'') = \frac{\pi}{2}$。

那么，

$$\begin{aligned} 0 \leq \angle(\zeta_0, v_0'') = \angle(u_0, v_0'') - \angle(u_0, \zeta) - \angle(\zeta, \zeta_0) &= \frac{\pi}{2} - \angle(u_0, \zeta) - \angle(\zeta, \zeta_0) \\ &\leq \frac{\pi}{2} - \angle(\zeta, \zeta_0) \\ &\overset{(8)}{\leq} \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{r_0}{2r}\right) \\ &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

这表明 $\langle v_0'',\ \zeta_0\rangle > 0$ 这再次与（20）矛盾。

因此,

$$s_0'' \neq s_0 \text{ and } s_0'' \neq s_0'.$$

令 $r_0'' := \|x_0 - s_0''\|$, $\zeta'' := \frac{x_0 - s_0''}{\|x_0 - s_0''\|}$ 且 $\zeta_{s_0''} := \frac{x_2 - s_0''}{\|x_2 - s_0''\|}$ 由（23），可得

$$x_0 \in \overline{B}(x_2; r_2) = \overline{B}(s_0'' + r_2\zeta_{s_0''}; r_2) \subset S.$$

这表明 $\zeta_{s_0''} \in N_S^P(s_0'')$ 可由一个 r_2-球面实现。对$r^* := \frac{r}{\sqrt{3}}$, $x_0 := x_0$, $s_0 := s_0''$, $\zeta := \zeta''$, $\zeta_{s_0} =: \zeta_{s_0''}$ 以及 $r^* \coloneqq r_2$应用引理3.2，可得 s_0'' 不是正则的，并且存在一个单位向量 u_x'' 以及两个不同的单位法向量 ζ_0'' 和 ξ_0''，它们在 s_0'' 处指向S'，且可由一个 r-球面实现，见图 6，使得

$$\pi \leq \angle(\zeta_0'', \xi_0'') \leq 2\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{r_0''}{2r}\right),$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0''}{2r}\right) \leq \angle(\zeta'', \zeta_0'') \leq \angle(\zeta'', u_x'') - \frac{\pi}{2}, \text{ and}$$

$$\angle(\zeta'', u_x'') + \frac{\pi}{2} \leq \angle(\zeta'', \xi_0'') \leq 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0''}{2r}\right).$$

由此可得

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_0''}{2r}\right) \leq \angle(\zeta'', \zeta_0'') \leq \angle(\zeta'', \xi_0'') - \pi \leq \pi - \cos^{-1}\left(\frac{r_0''}{2r}\right). \tag{27}$$

利用（10），并取 $O := s_0$, $A := x_0$, $B := s_0 + r\xi_0$, $C := s_0 + r\zeta_0$, $N := s_0'$, 并

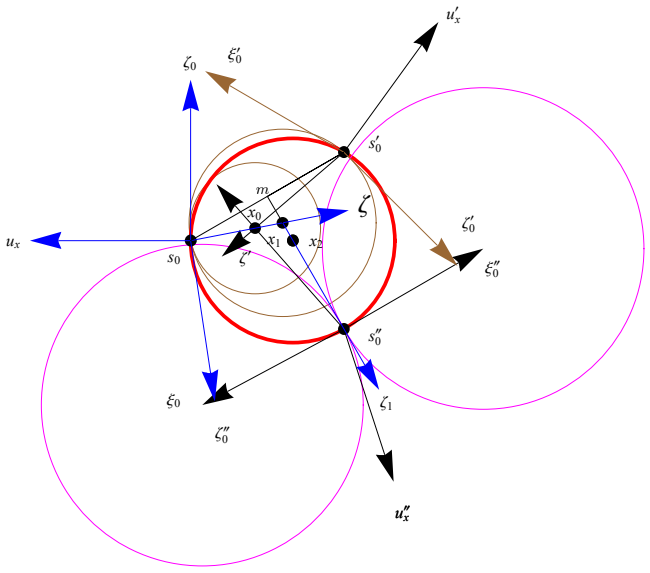

图 6. 边界点 s_0'' 不正则

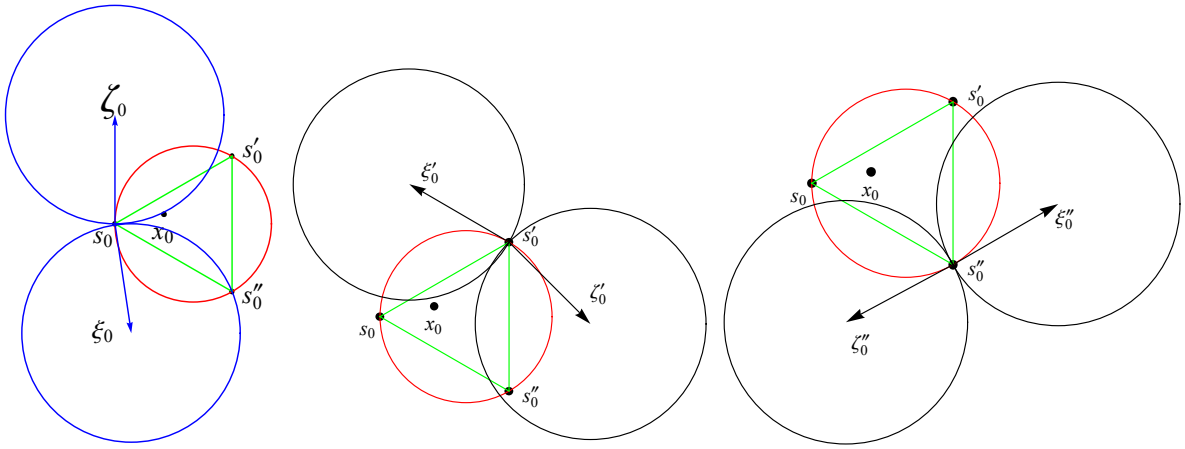

图7。角 $\angle s_0'' s_0 s_0'$、 $\angle s_0 s_0' s_0''$ 和 $\angle s_0' s_0'' s_0$

$M := s_0''$，引理3.1 的假设均已满足（见图7）。因此，

$$\angle s_0'' s_0 s_0' < \frac{\pi}{3}.$$

同理，利用（16），并取 $O := s_0'$， $A := x_0$， $B := s_0' + r\xi_0'$， $C := s_0' + r\zeta_0'$， $N := s_0$和 $M := s_0''$，引理 3.1 的假设均得到满足（见图 7）。因此，

$$\angle s_0 s_0' s_0'' < \frac{\pi}{3}.$$

同理，利用（27），并取 $O := s_0''$， $A := x_0$， $B := s_0'' + r\xi_0''$， $C := s_0'' + r\zeta_0''$， $N := s_0$和 $M := s_0'$，引理 3.1 的假设均得到满足（见图 7）。因此，

$$\angle s_0' s_0'' s_0 < \frac{\pi}{3}.$$

将这三个不等式相加，得到

$$\angle s_0'' s_0 s_0' + \angle s_0 s_0' s_0'' + \angle s_0' s_0'' s_0 < \pi,$$

这与三角形 $s_0 s_0' s_0''$ 的内角和等于 π这一事实矛盾。定理1.4 的证明至此完成。 □

注3.1. 证明表明，矛盾源于一个极值几何构型，对应于引理3.2中的角度估计取等的情形。在这种情况下，有 $\xi_0 = -\zeta_0$ （其他接触点处也同样如此），且这三个边界点位于实现相应法向方向的球面上。若 $r_0 < \frac{r}{\sqrt{3}}$，则至少有一个边界点属于其中一个球的内部，这与构造矛盾。 —

4 结论与展望

定理 1.4 的证明依赖于一种在高维情形下也有自然解释的几何机制。论证的第一步是证明：若存在一点 $x_0 \in S \cap \left(S_{\frac{r}{\sqrt{3}}}\right)^c$，那么 x_0 属于一个包含在 S中的闭球，且该闭球的边界包含 S的若干个边界点。在平面情形下，这一构造得到一个闭球，其边界包含 S 的三个非正则边界点。随后通过基于角度估计的纯二维几何论证导出矛盾。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，相同的构造表明，在相同假设下，应当能够得到一个包含于 S 中的闭球，其边界至少包含 S 的 $n+1$ 个非正则边界点。这对应于在 n 维中确定一个球面所需的最少接触点数。因此，论证的第一部分并非平面情形所特有，有可能推广到任意维度。

证明的最后一步是主要困难所在。在平面中，矛盾源于三角形内角和等于 π这一事实，以及精确的局部角度估计。该论证在高维中没有直接的对应形式，因为法锥的几何结构更加复杂，无法化约为一维的角度结构。因此，将定理 1.4 推广到 $\mathbb{R}^n$，$n \geq 3$需要为证明最后一步所使用的平面角论证寻找一个高维替代方案。

参考文献

[1] F. H. Clarke, Yu. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski：非光滑分析与控制理论，数学研究生教程 178，施普林格，纽约（1998）。[2] B. S.Mordukhovich：变分分析与广义微分。I：基础理论，施普林格，柏林（2006）。[3] C. Nour, R. J. Stern, J. Takche：邻近光滑性与外球条件，凸分析杂志 16/2（2009）501–514。[4] C. Nour, R. J. Stern, J. Takche：一致闭球并猜想的有效性，凸分析杂志 18/2（2011）589–600。[5] C. Nour, R. J. Stern, J. Takche：广义外球条件与 ϕ-凸性，离散与连续动力系统 29(2)（2011）615–622。[6] J.-P. Penot：无导数微积分，数学研究生教程 266，施普林格，纽约（2013）。[7] R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets：变分分析，数学科学基础丛书 317，施普林格，柏林（1998）。[8] L. Thibault：巴拿赫空间中的单边变分分析，世界科学出版社（2023）。