局部拉普拉斯算子：数据分析的理论与模型

Jian Liu[1],Hongsong Feng[2],和 Kefeng Liu[†1]

[1]数学科学研究中心，重庆理工大学，中国重庆 *400054*[2]数学与统计系，北卡罗来纳大学夏洛特分校，美国北卡罗来纳州夏洛特 *28223*

arXiv:2603.07591v1 [math.AT] 8 Mar 2026

摘要 尽管拓扑数据分析已成为一种强大的结构推断范式，但其基础工具，尤其是持久同调和持久拉普拉斯算子，往往难以敏锐捕捉局部结构波动，并且在处理大规模数据集时计算成本高得令人难以承受。为弥合这一差距，我们提出持久局部拉普拉斯形式体系，旨在提取精细的局部拓扑与几何特征，同时实现高效且可并行化的计算流程。在理论方面，我们证明了广义持久霍奇同构，从而确立持久局部拉普拉斯算子的调和空间与持久局部同调同构。此外，我们还推导出持久局部拉普拉斯算子与其对应的链接复形在维度平移后所得的持久拉普拉斯算子之间的酉等价。这种谱共轭为开发高效计算方案以求解持久局部谱不变量奠定了数学基础。我们进一步将这一构造推广至点云和图结构数据，并通过组合滤过刻画其持久局部谱性质。由此形成的架构天然解耦，便于大规模并行化，因此在大规模网络分析和分布式计算环境中具有独特的可扩展性。

关键词 持久同调，局部同调，持久局部拉普拉斯算子，霍奇同构，链接复形。

目录

1 引言 2

2 单纯复形上的局部拉普拉斯算子 5

2.1 单纯复形的局部同调.6 2.1.1 相对同调.6 2.1.2 局部同调.6 2.1.3 闭星、链接与开星.7

[†]通讯作者：kefengliu@cqut.edu.cn[1]**2020 数学主题分类**。主分类号 55N31；次分类号 58A14,15A63。

2.1.4 计算局部同调.7 2.1.5 局部同调与交互同调.8 2.2 局部拉普拉斯算子.9 2.2.1 内积结构与希尔伯特空间.9 2.2.2 组合拉普拉斯算子.10 2.2.3 相对链复形上的内积.10 2.2.4 相对组合拉普拉斯算子.11 2.2.5 局部拉普拉斯算子.12 2.3 计算局部拉普拉斯.13 2.3.1 计算局部拉普拉斯.13 2.3.2 示例.15

3 拓扑　　持久性与局部拉普拉斯算子　　18

3.1 持久局部同调.18

3.1.1 滤过与持久同调.18 3.1.2 持久相对同调.19 3.1.3 持久局部同调.20

3.2 DG-态射的谱理论.21

3.2.1 摩尔－彭若斯伪逆.21 3.2.2 广义态射拉普拉斯算子.22 3.2.3 广义持久调和空间.24 3.2.4 持久霍奇定理.25

3.3 持久局部拉普拉斯算子.27

3.3.1 持久相对拉普拉斯算子.27 3.3.2 持久局部拉普拉斯算子.28 3.3.3 使用链接复形计算持久局部拉普拉斯算子 30

4　数据集上的持久局部拉普拉斯算子　　31

4.1 点集上的局部拉普拉斯算子.31 4.1.1 Vietoris-Rips 过滤.31 4.1.2 点集上的持久链接复形.31 4.1.3 通过邻域过滤计算局部谱.32 4.1.4 零阶持久局部拉普拉斯算子.33 4.2 图上的局部谱分析.33 4.2.1 加权图上的持久局部不变量.34 4.2.2 图上低维持久拉普拉斯算子的计算.35 4.2.3 持久局部拉普拉斯算子的谱解释.37

5 致谢　　38

1 引言

在流形上，奇异同调、单纯同调和德拉姆同调理论自然同构，各自以独特而等价的方式刻画其底层拓扑。这些理论

从拓扑、组合和几何的不同视角诠释相同的拓扑不变量。拓扑同调不依赖度量结构，而组合方法往往缺乏局部分辨能力；相比之下，几何能更细致地描述空间。这种几何深度最优雅地体现在拉普拉斯算子中：霍奇定理指出，拉普拉斯算子的调和空间与流形的同调相对应，而非调和谱则编码了流形非对称几何及其底层度量结构的更精细细节。

在现代数据科学中，单纯复形已成为用于建模数据和对象的主要拓扑表示。尽管它们并非严格意义上的流形，但它们可作为分段线性流形或组合类比物发挥作用。虽然从这些复形中提取拓扑不变量已相当成熟，但刻画其内在几何特征仍是一项持续的挑战。单纯复形允许一种组合拉普拉斯算子 [7, 12, 13], ，它将经典图拉普拉斯算子推广到高维 [16]。然而，标准组合拉普拉斯算子往往无法分辨细粒度的局部信息。

相比之下，局部同调提供了一种精细化、局部化的视角，用以刻画空间在特定点 [11, 21]周围的拓扑特征。局部同调的理论基础植根于切除定理，该定理确立了一项基本原则：点的拓扑轮廓受到局部约束。具体而言，这一轮廓仅由该点的无穷小邻域决定，因而对环境空间的全局构型保持不变。这一进展由两个因素驱动：分析上的严谨性，以及数据驱动应用的实际需求。这些思想的自然汇合，便是在单纯复形上引入局部拉普拉斯算子。这一构造服务于一个明确目的：弥合局部拓扑与局部化几何之间的差距。

在数据分析中，静态不变量往往缺乏足够的描述能力，难以揭示复杂的结构细节。克服这一局限的一项关键进展是“持久性”范式，它能够追踪跨多个尺度的拓扑与几何特征。Carlsson、Edelsbrunner 等人提出的持久同调，通过追踪连通分支、环和空洞的演化来刻画多尺度数据结构 [6, 8, 26]。近来，这种多尺度理念已扩展至谱理论，促成了持久拉普拉斯算子及其相关谱不变量的发展 [5, 20, 23]。

尽管全局持久同调和拉普拉斯算子在捕捉数据的宏观拓扑方面卓有成效，但这些方法往往无法感知定义数据精细几何的局部结构细节。为弥合这一差距，研究者提出了持久局部同调 [9], ，后续研究又将其应用扩展至图结构数据和神经网络架构[3, 22]。然而，现有文献中显然仍缺乏对持久局部拉普拉斯算子的系统研究。我们认为，持久局部拉普拉斯算子对于应对层次化数据处理的复杂性至关重要，能够提供局部拓扑与几何演化的高分辨率多尺度特征。

从应用角度来看，持久局部拉普拉斯算子的意义远不止于概念上的推广。标准持久同调和全局持久拉普拉斯算子固有的计算瓶颈，常常限制了它们在大规模数据集中的应用。持久局部拉普拉斯算子通过提供两项主要的实际优势来解决这些局限：

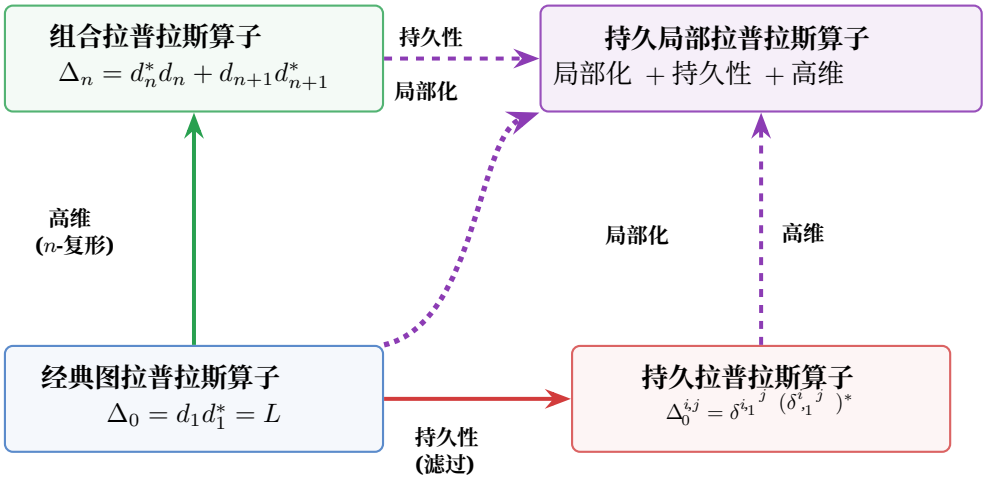


图 1：拉普拉斯算子族示意图：从经典图拉普拉斯算子到持久局部拉普拉斯算子 .

- **计算效率：** 将谱分析限制在局部子复形（链接）中，可显著降低内存开销和算法复杂度。

- **固有可扩展性：**局部特征提取天然解耦，便于大规模网络分析与分布式计算的大规模并行化。

设 K 为一个单纯复形，其关联链复形为 $C_*(K)$。经典的第 n阶组合拉普拉斯算子 Δ_n： $C_n(K) \to C_n(K)$定义为

$$\Delta_n = d_{n+1} d_{n+1}^* + d_n^* d_n,$$

其中 d_* 表示边界算子。对于 $n = 0$， Δ_0 与 K的 1-骨架的图拉普拉斯算子一致。值得注意的是，对于图 G，其团复形 $\mathrm{Clq}(G)$ 在维度零处的拉普拉斯算子可还原出标准图拉普拉斯算子 [15]。这一性质确保了图数据中高维的谱信息得到内在保留。

考虑一个单纯嵌入 $f: K \hookrightarrow L$，它诱导出一个单射链映射 $f_*: C_*(K) \hookrightarrow C_*(L)$。由此得到持久拉普拉斯算子

$$\Delta_n^f = \delta_{f_n} \delta_{f_n}^* + d_n^* d_n,$$

其中，项 $\delta_{f_n} \delta_{f_n}^*$ 刻画了“持久性”。对于不一定是嵌入的一般单纯形映射 $f: K \to L$，我们引入广义持久拉普拉斯算子

$$\Delta_n^f = \delta_{f_n} \delta_{f_n}^* + d_n^* d_n + (\mathrm{id} - f_n^\dagger f_n),$$

其中 $f_n^\dagger$ 表示 f_n的摩尔－彭若斯伪逆。因此，我们建立了广义持久霍奇同构：持久拉普拉斯算子的核 $\ker \Delta_n^f$ 与持久同调 H_n^f 同构（见定理 3.18）。

转到局部化情形，设 v 是 K中的一个顶点。 v 处的局部同调由其链接复形 $\mathrm{Lk}_K(v) = \{\sigma \in K \mid v \notin \sigma, \sigma \cup \{v\} \in K\}$刻画，通过基本同构

$$H_n(K, K \setminus \{v\}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v)).$$

关键的是，链接复形也刻画了局部拉普拉斯算子。具体而言，局部拉普拉斯算子与链接复形的第（$n-1$）个拉普拉斯算子之间存在酉等价 （定理 2.15）：

$$\Delta_n^{K,v} \cong \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}.$$

将其推广到持久化情形，我们建立了一个酉等价关系（定理 3.30）：

$$\Delta_n^{i,j} \cong \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk},i,j},$$

该等价关系表明，持久局部拉普拉斯算子与相应链接复形在维度平移后的持久拉普拉斯算子相对应。这一结果说明，持久局部拉普拉斯算子的计算可归结为构造相应的持久链接复形并对其进行谱分析。

对于实际数据分析，我们考虑点云和图结构数据，其中 Vietoris-Rips 复形和团复形具有典范滤过。我们给出了它们的链接复形的组合刻画，从而有助于高效计算持久局部拉普拉斯算子。

总而言之，本研究系统探讨了持久局部拉普拉斯算子，为其算法计算奠定了数学基础。我们从代数层面给出了形式化定义和结构性结果，并通过明确构造和刻画持久局部拉普拉斯算子，补充了这些结果，以服务于数据驱动应用。我们希望本文能引起拓扑数据分析、组合几何和谱图论领域研究者的兴趣。

本文其余部分安排如下。下一节将回顾局部同调和局部拉普拉斯算子的基本概念及其计算方面的内容。第3节将建立持久局部拉普拉斯算子的理论框架，给出其正式定义及相关结果。最后，第4节将详细介绍持久局部拉普拉斯算子在各种数据集（包括点云和图结构数据）上的构造与计算。

2 单纯复形上的局部拉普拉斯算子

局部同调是刻画空间局部拓扑特征的经典工具。它通过捕捉特定位置处的相对同调数据，为局部流形结构和奇点提供严格的度量。在这一拓扑直觉的基础上，我们引入局部拉普拉斯算子。这一算子能够在局部范围内概括单纯复形的调和与非调和组合信息，从而将传统谱分析拓展到局部视角。

在本文中，我们固定一个基域 $\mathbb{K}$，通常取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

2.1 单纯复形的局部同调

2.1.1 相对同调

设 K 是一个单纯复形，$L \subseteq K$ 是一个子复形。第 n 个相对链群记作 $C_n(K, L)$，定义为绝对链群的商

$$C_n(K, L) := C_n(K)/C_n(L),$$

其中，$C_n(K)$ 和 $C_n(L)$ 分别是在域 $\mathbb{K}$ 上由 K 和 L 的 n-单形生成的自由模。

由于边界算子 $d_n\colon C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ 将 $C_n(L)$ 映射到 $C_{n-1}(L)$ 中，因此它自然地在相对链上诱导出一个商同态

$$\bar{d}_n\colon C_n(K, L) \to C_{n-1}(K, L).$$

由关系 $d^2 = 0$ 可立即得出 $\bar{d}^2 = 0$，从而得到一个链复形 $(C_*(K, L), \bar{d}_*)$。

定义 2.1. 第 n 个相对同调群定义为该商复形的同调

$$H_n(K, L) := \frac{\ker \bar{d}_n}{\operatorname{im} \bar{d}_{n+1}}.$$

直观地说，$H_n(K, L)$刻画了 K 中边界包含在 L内的拓扑循环，实际上将子复形 L收缩为一个点，并突显了拓扑对（K，L）中相对于 L而言的同调特征。

注 2.2. 对于满足 $Y \subseteq X$的拓扑对（X，Y），可以定义相对奇异同调 $H_n(X, Y)$。相应地，任意单纯复形 K 都有一个几何实现 $|K|$，它是一个紧豪斯多夫空间。对于任意子复形 $L \subseteq K$，存在一个自然的同构

$$H_n(K, L) \xrightarrow{\cong} H_n(|K|, |L|), \quad \forall n \geq 0$$

将相对单纯同调与相对奇异同调对应起来。

2.1.2 局部同调

设 K 为一个单纯复形，$v \in K$ 为一个顶点。

定义 2.3. K 在 v 处、维度为 n的局部同调 记作 $H_n(|K|, |K| \setminus \{v\})$，定义为由删除子复形 $|K| \setminus \{v\} \hookrightarrow |K|$的包含映射导出的相对链复形的第 n阶同调。

从结构视角来看，$H_n(|K|, |K| \setminus \{v\})$衡量的是 v 在其直接邻域内成为“同调平凡”的障碍。由于相对同调具有切除性质，这些群是纯粹的局部不变量：对于几何实现 $|K|$中 v 的任意开邻域 U，切除定理给出一个典范同构

$$H_n(|K|, |K| \setminus \{v\}) \cong H_n(U, U \setminus \{v\}).$$

局部同调群 $H_n(|K|, |K| \setminus \{v\})$为顶点 v处的局部拓扑类型提供了形式化刻画，从而有效地将位置特定不变量与空间的整体结构解耦。借助切除性质分离该顶点的贡献，这些群可作为代数探针，用于检测局部奇异性，并在组合数据中识别类流形构型。

2.1.3 闭星、链接与开星

x的闭星 记作 $\mathrm{ClSt}_K(v)$，它是由 K 中所有包含 v的单形及其面构成的子复形

$$\mathrm{ClSt}_K(v) = \{\tau \in K \mid \exists \sigma \in K \text{ with } v \in \sigma \text{ and } \tau \subseteq \sigma\}.$$

点的链接 v 在 K 中的链接，是 $\mathrm{ClSt}_K(v)$ 中不包含 v的单形所组成的集合，定义如下:

$$\mathrm{Lk}_K(v) = \{\tau \in \mathrm{ClSt}_K(v) \mid v \notin \tau\}.$$

开星 $\mathrm{St}_K(v) \subset |K|$ 是所有包含 v的单形内部的并集，是$|K|$中的一个开集。对于单形 $\sigma \in K$，它在 $|K|$ 中的内部（相对于弱拓扑）是 $|K|$中与 σ 对应的重心坐标为正的点集。开星为

$$\mathrm{St}_K(v) = \bigcup_{\sigma \in K, v \in \sigma} \mathrm{int}(\sigma),$$

其中 $\mathrm{int}(\sigma)$ 是 σ 在 $|K|$中的内部。在几何实现中，$\mathrm{St}_K(v)$ 是 v的一个开邻域，因为它不包含包含 v 的单形边界。

根据切除定理，对于开星 $\mathrm{St}_K(v)$，有

$$H_n(|K|, |K| \setminus \mathrm{St}_K(v)) \cong H_n(\mathrm{St}_K(v), \mathrm{St}_K(v) \setminus \{v\}).$$

此外，我们得到

$$H_n(|K|, |K| \setminus \mathrm{St}_K(v)) \cong H_n(\mathrm{ClSt}_K(v), \mathrm{Lk}_K(v)).$$

注意，$\mathrm{Lk}_K(v)$ 是可缩的。根据同调长正合序列，我们得到同构

$$H_n(|K|, |K| \setminus \mathrm{St}_K(v)) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v)),$$

~其中 H_* 表示约化同调。这个同构为计算局部同调提供了一种直接方法。

2.1.4 计算局部同调

设 K 是一个单纯复形，且 v 是 K的一个顶点。局部同调群$H_n(|K|, |K| \setminus \{v\})$刻画了几何实现 $|K|$ 在 v附近的局部拓扑结构。

令 L 为 K 的一个子复形，其中包含 v 的闭星。根据切除定理，包含映射 $L \hookrightarrow K$ 诱导出一个同构

$$H_n(|L|, |L| \setminus \{v\}) \cong H_n(|K|, |K| \setminus \{v\})$$

对于 $n \geq 0$。

对于大型复形 K，直接计算这些局部同调群可能需要大量计算。因此，我们需要寻找一个合适的子复形 $L \subseteq K$（例如 v 的闭星），它包含 v，且规模足够小，既能简化计算，又能确保同构成立。

对于一个顶点 $v \in K$，我们将删除子复形 $K \setminus \{v\}$ 定义为 K 中与开星 $\mathrm{st}_K(v)$ 不相交的最大子复形。存在一个自然同构

$$H_n(|K|, |K| \setminus \mathrm{st}_K(v)) \cong H_n(K, K \setminus \{v\}), \quad \forall n \geq 0.$$

由于拓扑对 $(|K|, |K| \setminus \mathrm{st}_K(v))$ 与 $(|K|, |K| \setminus \{v\})$ 同伦等价，为简洁起见，我们将采用 $H_n(K, K \setminus \{v\})$ 作为 K 在 v 处的局部同调 的正式记法。此外，这导出了基本同构

$$H_n(K, K \setminus \{v\}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v)),$$

这在局部同调与顶点链接的约化同调之间建立了纯组合性的桥梁。

2.1.5 局部同调与交互同调

继承 [14, 17], 的奠基性工作，交互同调为捕捉单纯复形中的多体关系提供了一个稳健的不变量，在分子生物学和材料科学中有重要应用 [4, 18]。

设 K 和 L 是单纯复形，其相应的链复形为 $C_*(K)$ 和 $C_*(L)$，定义在 $\mathbb{K}$ 上。它们的张量积 $(\mathcal{C}_*, d)$ 是一个链复形，其边界由标准的莱布尼茨法则给出。考虑由支撑不相交的初等张量生成的子复形 $D_*(\{K, L\}) \subseteq \mathcal{C}_*$

$$S_\emptyset = \{\sigma \otimes \tau \in \mathcal{C}_* \mid \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

于是，交互链复形 定义为商复形

$$IC_*(\{K, L\}) = \mathcal{C}_* / D_*(\{K, L\}).$$

定义 2.4。 $\{K, L\}$ 的交互同调 定义为交互链复形的同调

$$H_n(\{K, L\}) = H_n(IC_*(\{K, L\})), \quad n \geq 0.$$

K 的吴特征数 由 [24], 引入，定义为 $\omega(K) = \sum_{\sigma \cap \tau \neq \emptyset} (-1)^{\dim \sigma + \dim \tau}$。该不变量枚举了 K 中所有单形的加权交集模式。

定理 2.5 ([14, 17])。 对于 $K = L$，交互贝蒂数 $\beta_n = \mathrm{秩}(H_n(K, K))$ 提供了吴特征数的范畴细化，从而得到恒等映射

$$\omega(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n.$$

此外，交互同调与局部同调之间存在一种内在的理论对应关系。

定理 2.6. 设 K 是一个单纯复形， v 是 K 中的一个顶点。交互同调与局部同调之间存在同构

$$H_n(\{K,\{v\}\}) \cong H_n(K, K\setminus\{v\}), \quad n \geq 0.$$

证明。考虑与 0-单形 $\{v\}$ 相关联的链复形 $C_*(\{v\})$。这个复形集中在 0 次，即 $C_0(\{v\}) \cong \mathbb{K}\cdot v$ 且 $C_i(\{v\}) = 0$ 对 $i > 0$成立。因此，张量积复形 $\mathcal{C}_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i(K) \otimes C_j(\{v\})$ 可简化为

$$\mathcal{C}_n = C_n(K)\otimes C_0(\{v\}) \cong C_n(K).$$

回顾子复形 $D_n(\{K,\{v\}\})$ 的定义，它由具有不相交支撑的初等张量生成

$$S_\emptyset = \{\sigma\otimes v \in \mathcal{C}_n \mid \sigma\cap\{v\} = \emptyset\}.$$

条件 $\sigma\cap\{v\} = \emptyset$ 成立，当且仅当顶点 v 不是 σ 的一个面，这意味着$\sigma \in K\setminus\{v\}$。因此，子复形 D_n 正是子复形 $K\setminus\{v\}$ 的链复形，也就是说，

$$D_n(\{K,\{v\}\}) \cong C_n(K\setminus\{v\}).$$

交互链复形定义为以下商

$$IC_n(\{K,\{v\}\}) = \mathcal{C}_n/D_n(\{K,\{v\}\}) \cong C_n(K)/C_n(K\setminus\{v\}).$$

右侧即为相对链复形 $C_n(K,\ K\setminus\{v\})$ 的定义。由于 IC_* 上的边界算子由张量积微分诱导（在这个 0 次张量的情形下，它与单纯边界算子 d_K 一致），因此我们有链复形同构

$$IC_*(\{K,\{v\}\}) \cong C_*(K, K\setminus\{v\}).$$

对两边取同调即得所需结果。 □

2.2 局部拉普拉斯算子

2.2.1 内积结构与希尔伯特空间

从此以后，我们将系数域限制为 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。鉴于 K 是一个有限单纯复形，每个链群 $C_n(K)$都是有限维向量空间。我们通过将 n-单形集合 $\{\sigma_i\}_{i\in I_n}$ 声明为标准正交基，赋予 $C_n(K)$典范内积。形式上，对于任意两个 n-单形 σ_i,σ_j，内积定义为

$$\langle\sigma_i,\sigma_j\rangle = \delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 是克罗内克δ。通过双线性延拓，对于 $C_n(K)$中的任意链$x = \sum_i a_i\sigma_i$ 和$y = \sum_i b_i\sigma_i$，我们有 $\langle x,y\rangle = \sum_i a_i b_i$。

这一构造赋予 $C_n(K)$ 有限维希尔伯特空间的结构。因此，整个链复形 $(C_*(K),\ d_*)$ 可以视为希尔伯特空间的直和。

2.2.2 组合拉普拉斯算子

$C_*(K)$ 上的希尔伯特结构允许定义上边界算子（或伴随边界算子） $d_n^*\colon C_{n-1}(K) \to C_n(K)$。该算子由伴随关系唯一确定

$$\langle d_n x, y\rangle_{C_{n-1}} = \langle x, d_n^* y\rangle_{C_n}, \quad \forall x \in C_n(K), y \in C_{n-1}(K).$$

通过边界算子与上边界算子的相互作用，我们得到了拉普拉斯-贝尔特拉米算子的组合类比。

定义 2.7. 第 n 个组合拉普拉斯算子 $\Delta_n\colon C_n(K) \to C_n(K)$ 定义为自伴算子

$$\Delta_n := d_{n+1} d_{n+1}^* + d_n^* d_n, \quad n \geq 0.$$

对于基例 $n = 0$，该算子简化为图拉普拉斯算子 $\Delta_0 = d_1 d_1^*$，因为 d_0 是零映射。

The 拉普拉斯算子 Δ_n 具有若干对谱分析至关重要的基本性质 :

- 自伴性： $\langle \Delta_n x, y\rangle = \langle x, \Delta_n y\rangle$ 对所有 $x, y \in C_n(K)$。
- 半正定性： $\langle \Delta_n x, x\rangle = \|d_{n+1}^* x\|^2 + \|d_n x\|^2 \geq 0$，从而蕴含非负谱 $\mathbf{Spec}(\Delta_n) \subset [0, \infty)$。

组合霍奇理论的一个基石，是将 Δ_n 的核与该复形的拓扑等同起来。$\ker \Delta_n$ 中的元素称为组合调和n链。

定理2.8（单纯霍奇定理）**.** 对于有限单纯复形 K，存在一个典范同构

$$\ker \Delta_n \cong H_n(K; \mathbb{R}), \quad n \geq 0.$$

上述结果的证明可见于 [16, 19]。

2.2.3 相对链复形上的内积

设(K, L)为一个单纯对，其中 L 是 K的一个子复形。由于 $C_n(K)$是有限维希尔伯特空间，子复形 $C_n(L)$构成一个闭子空间。我们借助绝对链群的正交分解，在相对链群 $C_n(K, L) \cong C_n(K)/C_n(L)$上定义内积结构。

具体而言，令 $C_n(L)^\perp$ 表示 $C_n(K)$中相对于典范内积的 $C_n(L)$正交补

$$C_n(L)^\perp := \{x \in C_n(K) \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in C_n(L)\}.$$

复形的有限维性保证了直和分解 $C_n(K) = C_n(L) \oplus C_n(L)^\perp$。因此，商映射 $\pi_n\colon C_n(K) \to C_n(K, L)$ 在正交补 $C_n(L)^\perp$ 与相对链群 $C_n(K, L)$ 之间诱导出一个规范的线性同构。

我们在 $C_n(K,L)$ 上赋予商内积，使得 $\theta_n = (\pi_n)|_{C_n(L)^\perp}$：$C_n(L)^\perp \to C_n(K,L)$ 是一个等距同构。对于任意相对链 $\alpha, \beta \in C_n(K,L)$，内积定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{C_n(K,L)} := \langle x, y \rangle_{C_n(K)},$$

其中，x和 y 分别是 α 和 β 在 $C_n(L)^\perp$中的唯一代表元。等价地，这可以表示为

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle \theta_n(x), \theta_n(y) \rangle,$$

这与 $C_n(K)$中代表元的选择无关。

在这一度量结构下，$C_*(K, L)$成为一个希尔伯特空间链复形。这一构造确保相对边界算子 d_n: $C_n(K, L) \to C_{n-1}(K, L)$ 存在良定义的伴随算子。

2.2.4 相对组合拉普拉斯算子

为将谱理论推广到相对情形，我们考虑商希尔伯特复形$(C_*(K, L)\ d_*)$上诱导的算子。相对边界算子 d_n: $C_n(K, L) \to C_{n-1}(K, L)$是使下图交换的唯一同态:

$$\bar{d}_n \circ \pi_n = \pi_{n-1} \circ d_n,$$

其中，π_n: $C_n(K) \to C_n(K, L)$是典范商映射。d_n 的良定义性由子复形条件 $d_n(C_n(L)) \subseteq C_{n-1}(L)$保证。

定义 2.9. 相对余边界算子 d_n^*: $C_{n-1}(K,L) \to C_n(K,L)$是 d_n 关于商内积的 Hilbert 伴随算子，由恒等映射定义

$$\langle \bar{d}_n \alpha, \beta \rangle_{C_{n-1}(K,L)} = \langle \alpha, \bar{d}_n^* \beta \rangle_{C_n(K,L)}, \quad \forall \alpha \in C_n(K,L), \beta \in C_{n-1}(K,L).$$

在实际计算中，d_n^* 可通过正交投影 P_n: $C_n(K) \to C_n(L)^\perp$来实现。给定相对链 $\beta \in C_{n-1}(K, L)$，令 $d \in C_{n-1}(L)^\perp$ 为其唯一的等距代表。相对余边界算子的作用随后由下式给出

$$\bar{d}_n^* \beta = \pi_n \left(P_n(d_n^* d) \right),$$

其中右端的 d_n^* 表示绝对链复形 $C_*(K)$中的伴随算子。投影 P_n 明确强制所得类梯度流位于子复形 L的正交补之内。

可以在单纯复形 [25]上定义相对组合拉普拉斯算子。

定义 2.10。n阶相对组合拉普拉斯算子 $\Delta^{K,\ n\ L}$: $C_n(K, L) \to C_n(K, L)$ 是定义如下的自伴算子

$$\Delta_n^{K,L} := \bar{d}_{n+1} \bar{d}_{n+1}^* + \bar{d}_n^* \bar{d}_n.$$

在基本情形 $n = 0$ 下，该算子简化为 $\Delta^{K,\ 0\ L} = \bar{d}_1 \bar{d}_1^*$。

相对拉普拉斯算子 $\Delta^{K,\ n\ L}$继承了其绝对对应物的基本谱性质：它是自伴且半正定的。此外，它还提供了相对同调群的谱分解。调和相对 n链的空间定义为$\mathcal{H}_n(K, L) = \ker \Delta^{K,\ n\ L}$。

定理 2.11。设(K, L) 为一个有限单纯对，且 $C_n(K, L)$ 为配备商内积的第 n 个相对链群。相对链空间存在一个典范正交分解，分解为正交子空间

$$C_n(K, L) = \operatorname{im} \bar{d}_{n+1} \oplus \operatorname{im} \bar{d}_n^* \oplus \mathcal{H}_n(K, L),$$

其中， $\bar{d}_{n+1}$ 和 $\bar{d}_n^*$ 分别是相对边界算子和上边界算子。此外，我们有一个典范同构

$$\mathcal{H}_n(K, L) \cong H_n(K, L; \mathbb{R}).$$

证明。 证明过程与经典的（绝对）霍奇分解类似，只需将分析限制在空间 $C_n(K, L)$上。

□

2.2.5 局部拉普拉斯算子

对于一个顶点 $v \in K$，我们将删除子复形 $L = K \setminus \{v\}$ 定义为 K 中与 v的开星不相交的极大子复形。因此，相对链复形 $C_*(K, K \setminus \{v\})$为 v附近紧邻区域的局部拓扑提供了一种代数编码。

定义 2.12。 顶点 v处的 n阶局部组合拉普拉斯算子，记作 $\Delta^{K,v}_n$: $C_n(K, K \setminus \{v\}) \to C_n(K, K \setminus \{v\})$，定义为自伴算子

$$\Delta_n^{K,v} := \bar{d}_{n+1}\bar{d}_{n+1}^* + \bar{d}_n^*\bar{d}_n,$$

其中， d 和 d^* 分别表示商希尔伯特空间上诱导的边界算子和上边界算子。在基本情形下，我们定义 $\Delta^{K,v}_0 = \bar{d}_1\bar{d}_1^*$。

局部拉普拉斯算子是相对拉普拉斯算子的一种典范特化，专门用于刻画奇异点处局部化的拓扑不变量和谱密度。此外， $\Delta^{K,v}_n$是一个自伴、半正定算子，其谱性质与局部几何内在相关。具体而言，该算子的核与局部同调群 $H_n(K, K \setminus \{v\})$ 同构。

定理 2.13。 设 K 是一个有限单纯复形， $v \in K$ 是一个顶点。则存在向量空间同构

$$\ker \Delta_n^{K,v} \cong H_n(K, K \setminus \{v\}; \mathbb{R}).$$

此外，每个局部同调类 $[\alpha] \in H_n(K, K \setminus \{v\}; \mathbb{R})$ 都包含唯一的调和代表元 $\gamma \in C_n(K, K \setminus \{v\})$，使得 $\Delta^{K,v}_n \gamma = 0$。

非零谱蕴含着组合曲率和局部连通结构，有效地分离出顶点对整体同调图景的相对贡献。这一构造有助于开展严谨的局部化调和分析，从而直接根据单纯复形检测局部奇异性和类流形构型。

2.3 计算局部拉普拉斯算子

2.3.1 计算局部拉普拉斯算子

设 K是一个单纯复形，且 v是 K中的一个顶点。定义映射 ϕ: $C_n(K,\ K\setminus\{v\})\ \to C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))$, 如下:

$$\phi([\tau]) = (-1)^n[v_1,\ldots,v_n],\quad n\geq 1,$$

其中，$\tau = [v, v_1, \ldots, v_n]$ 和 $[v_1, \ldots, v_n] \in \mathrm{Lk}_K(v)$ 是诱导定向。

定理 2.14. 设 K 是一个单纯复形，$v \in K$ 是一个顶点。那么存在一个链复形同构

$$\phi\colon C_*(K, K\setminus\{v\}) \longrightarrow C_{*-1}(\mathrm{Lk}_K(v)).$$

此外，关于$C_*(K, K\setminus\{v\})$ 上的商内积和 $C_{*-1}(\mathrm{Lk}_K(v))$上的标准内积，该链同构是一个等距同构。

证明。 </style}该链同构在 [21]中得到确立。

现在，我们验证它相对于 $C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))$ 上的标准内积，在 $C_n(K,\ K\setminus\{v\})$ 上保持商内积。

对于 $[x],\ [y] \in C_n(K,\ K\setminus\{v\})$，分别考虑 $[x]$ 和 $[y]$的代表元 $x' = \sum_{\tau=\{v,v_1,\ldots,v_n\}} x'(\tau)\tau$和 $y' = \sum y'(\tau)\tau \in C_n(K\setminus\{v\})^\perp$。应用 ϕ，得到τ

$$\phi([x]) = \sum_{\tau=[v,v_1,\ldots,v_n]} x'(\tau)(-1)^n[v_1,\ldots,v_n] = \sum_{\sigma\in\mathrm{Lk}_K(v)} x'(\{v\}\cup\sigma)(-1)^n\sigma,$$

$$\phi([y]) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Lk}_K(v)} y'(\{v\}\cup\sigma)(-1)^n\sigma.$$

计算 $C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))$ 中的内积，可得

$$\begin{aligned}\langle\phi([x]),\phi([y])\rangle_{C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))} &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Lk}_K(v)} \left(x'(\{v\}\cup\sigma)(-1)^n\right)\left(y'(\{v\}\cup\sigma)(-1)^n\right)\\ &= \sum_{\sigma} x'(\{v\}\cup\sigma)y'(\{v\}\cup\sigma)(-1)^{2n}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\langle\phi([x]),\phi([y])\rangle_{C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Lk}_K(v)} x'(\{v\}\cup\sigma)y'(\{v\}\cup\sigma) = \sum_{\tau=\{v,v_1,\ldots,v_n\}} x'(\tau)y'(\tau).$$

这与商内积一致

$$\langle[x],[y]\rangle_{C_n(K,K\setminus\{v\})} = \sum_{\tau=\{v,v_1,\ldots,v_n\}} x'(\tau)y'(\tau).$$

因此，我们得到

$$\langle[x],[y]\rangle_{C_n(K,K\setminus\{v\})} = \langle\phi([x]),\phi([y])\rangle_{C_{n-1}(\mathrm{Lk}_K(v))}.$$

因此，ϕ 是一个等距同构。 □

根据定理 2.14，相对链群 $C_n(K, K\setminus\{v\})$ 上的局部拉普拉斯算子可以通过链接复形 $C_*(\mathrm{Lk})$上的组合拉普拉斯算子计算。更准确地说，设

$$\Delta_n^{K,v}\colon C_n(K, K\setminus\{v\}) \longrightarrow C_n(K, K\setminus\{v\})$$

表示相对于商内积定义的组合拉普拉斯算子，并令

$$\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\colon C_{n-1}(\mathrm{Lk}) \longrightarrow C_{n-1}(\mathrm{Lk})$$

表示链接的链复形上的标准组合拉普拉斯算子。那么我们有以下结果。

定理 2.15. 设 K 是一个单纯复形，$v \in K$ 是一个顶点。那么下图

$$\begin{array}{ccc} C_n(K, K\setminus\{v\}) & \xrightarrow{\Delta_n^{K,v}} & C_n(K, K\setminus\{v\}) \\ \phi\downarrow\cong & & \cong\downarrow\phi \\ C_{n-1}(\mathrm{Lk}) & \xrightarrow{\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}} & C_{n-1}(\mathrm{Lk}) \end{array}$$

对 $n \geq 1$可交换。特别地，我们有

$$\Delta_n^{K,v} \;=\; \phi^{-1}\circ\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi, \quad n\geq 1.$$

证明。由于 $\phi\colon C_n(K, K\setminus\{v\}) \to C_{n-1}(\mathrm{Lk})$ 是一个链同构且为等距同构，我们证明 $\phi\circ\Delta^{K,}{}_n{}^{v} = \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi$。

局部拉普拉斯算子定义为 $\Delta^{K,}{}_n{}^{v} = d_{n+1}d_{n+1}^* + d_n^*d_n$ 在 $C_n(K, K\setminus\{v\})$ 上，而链接拉普拉斯算子为 $\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}} = d_n^{\mathrm{Lk}}(d_n^{\mathrm{Lk}})^* + (d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*d_{n-1}^{\mathrm{Lk}}$ 在 $C_{n-1}(\mathrm{Lk})$ 上。由于 ϕ 是链映射，$\phi\circ d_n = d_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi$ 且 $\phi\circ d_{n+1} = d_n^{\mathrm{Lk}}\circ\phi$。

为证明交换性，我们逐项验证。对于第一项，有

$$\phi\circ(d_{n+1}d_{n+1}^*) = (\phi\circ d_{n+1})\circ d_{n+1}^* = (d_n^{\mathrm{Lk}}\circ\phi)\circ d_{n+1}^*.$$

由于 ϕ 是等距同构，对于 $[a]\in C_{n+1}(K, K\setminus\{v\})$，$[b]\in C_n(K, K\setminus\{v\})$，

$$\langle d_{n+1}[a],[b]\rangle_{C_n(K,K\setminus\{v\})} = \langle\phi(d_{n+1}[a]),\phi([b])\rangle_{C_{n-1}(\mathrm{Lk})} = \langle d_n^{\mathrm{Lk}}\phi([a]),\phi([b])\rangle = \langle\phi([a]),(d_n^{\mathrm{Lk}})^*\phi([b])\rangle.$$

此外，$\langle d_{n+1}[a],[b]\rangle = \langle[a], d_{n+1}^*[b]\rangle = \langle\phi([a])\ \phi(d_{n+1}^*[b])\rangle$。因此，$\phi\circ d_{n+1}^* = (d_n^{\mathrm{Lk}})^*\circ\phi$。于是，

$$\phi\circ(d_{n+1}d_{n+1}^*) = d_n^{\mathrm{Lk}}\circ(d_n^{\mathrm{Lk}})^*\circ\phi.$$

对于第二项，我们得到

$$\phi\circ(d_n^*d_n) = (\phi\circ d_n^*)\circ d_n = ((d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*\circ\phi)\circ d_n = (d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*\circ(\phi\circ d_n) = (d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*d_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi,$$

因为通过类似的伴随论证，$\phi\circ d_n^* = (d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*\circ\phi$。将两者结合起来，

$$\phi\circ\Delta_n^{K,v} = \phi\circ(d_{n+1}d_{n+1}^* + d_n^*d_n) = d_n^{\mathrm{Lk}}(d_n^{\mathrm{Lk}})^*\circ\phi + (d_{n-1}^{\mathrm{Lk}})^*d_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi = \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi.$$

因此，该图表可交换，且 $\Delta^{K,}{}_n{}^{v} = \phi^{-1}\circ\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}\circ\phi$。 □

定理 2.15 表明，拉普拉斯算子 $\Delta^{K,\ n\ v}$ 的矩阵表示通过链同构 ϕ 所诱导的基变换，与拉普拉斯算子 $\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}$ 的矩阵表示共轭，因此算子 $\Delta^{K,\ n\ v}$ 和 $\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}$ 具有相同的谱。从这个意义上说，我们可以将 $\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk}}$ 视为局部拉普拉斯算子，它与 $\Delta^{K,\ n\ v}$ 的差异在于维数偏移 -1。

命题 2.16。设 K 是一个单纯复形，$v \in K$ 是一个顶点。那么我们有

$$\Delta_0^{K,v} = \deg v,$$

其中 $\deg v$ 表示与 v相连的边数。

证明。相对链群 $C_0(K, K \setminus \{v\}) = C_0(K)/C_0(K \setminus \{v\})$由等价类$[v]$生成，因为 $C_0(K)$由 K的所有顶点生成，而 $C_0(K \setminus \{v\})$由除 v之外的顶点生成。因此，$C_0(K, K \setminus \{v\})$是一维的，由 $[v]$张成。

接下来，考虑 d_1: $C_1(K, K \setminus \{v\}) \to C_0(K, K \setminus \{v\})$。链群 $C_1(K, K \setminus \{v\}) = C_1(K)/C_1($ $K \setminus \{v\})$由边的等价类 $[v, w]$ 生成，其中 $\{v, w\} \in K$。边界映射为

$$d_1([v, w]) = [w] - [v] = 0 - [v] = -[v].$$

这里，我们利用了 $[w] = 0$ 属于 $C_0(K, K \setminus \{v\})$这一事实。因此，$d_1$ 将每个基元素 $[v, w]$ 映射为 $[v]$的一个倍数。

假设 $d_1^*[v] = \sum_{w:\ \{v,w\}\in K} c_w[v, w]$。那么我们有

$$c_{w'} = \langle [v, w'], d_1^*[v] \rangle_{C_1} = \langle d_1[v, w'], [v] \rangle_{C_0} = -1.$$

由此可得 $d_1^*[v] = \sum_{w:\ \{v,w\}\in K} -[v, w]$。因此，有

$$d_1 d_1^*[v] = d_1 \left(\sum_{w:\ \{v,w\}\in K} (-1)[v, w] \right) = \sum_w (-1) d_1[v, w] = \sum_w (-1)(-[v]) = (\deg v)[v],$$

其中 $\deg v$ 是与 v关联的边的数量。因此，$d_1 d_1^* = (\deg v) \cdot \mathrm{id}$。 □

值得注意的是，即使单纯复形 K 非常大，也就是说，其顶点集和单形集都很庞大，局部子复形 $\mathrm{Lk}_K(v)$ 仍可能相对较小，从而显著提高计算局部信息的效率。

2.3.2 示例

示例 2.17. 考虑一个顶点为 $\{v, a, b, c\}$、边为.....的单纯复形 K

$$\{v, a\}, \{v, b\}, \{v, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}$$

和三角形 $\{v, a, b\}$，$\{v, b, c\}$。我们利用链接 $\mathrm{Lk}_K(v)$ 的拉普拉斯算子，计算顶点 v 的局部拉普拉斯算子 $\Delta^{K,\ 1\ v}$ 和 $\Delta^{K,\ 2\ v}$。

链接 $\mathrm{Lk}_K(v)$ 由顶点 $\{a, b, c\}$ 和边 $\{a, b\}$，$\{b, c\}$ 组成。链群 $C_0(\mathrm{Lk}_K(v))$ 由 $\{[a], [b], [c]\}$ 生成，C_1 $(\mathrm{Lk}_K(v))$ 由 $\{[a, b], [b, c]\}$ 生成，而高阶链均为零。

对于由 $\{[v, a], [v, b], [v, c]\}$ 生成的 $\Delta^{K,\ 1\ v}$在 $C_1(K,\ K \setminus \{v\})$ 上：拉普拉斯算子为 $\Delta_0^{\mathrm{Lk}_{K\ (v)}}$ $d_1^{\mathrm{Lk}}\ d_1^{\mathrm{Lk}\ *} + d_0^{\mathrm{Lk}\ *} d_0^{\mathrm{Lk}}$ $d_0^{\mathrm{Lk}} = 0$ $\Delta_0^{\mathrm{Lk}_K\ v} = d_1^{\mathrm{Lk}}\ d_1^{\mathrm{Lk}\ *}$ $()\,()$。由于，我们有 $()\,()$。

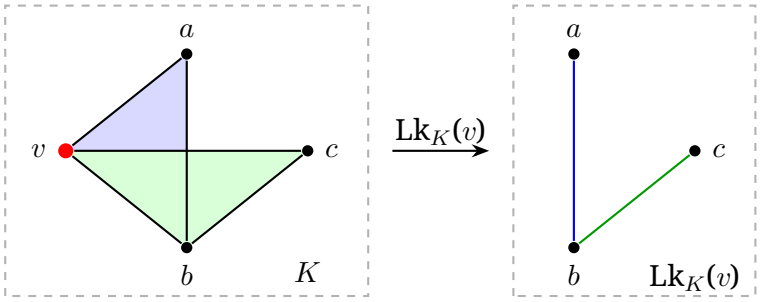


图 2：由单纯复形 K 构造链接复形。

边界算子为

$$d_1^{\mathrm{Lk}}([a,b]) = [b]-[a], \quad d_1^{\mathrm{Lk}}([b,c]) = [c]-[b].$$

相对于定义域中的基 $\{[a,b],[b,c]\}$ 与陪域中的基 $\{[a],[b],[c]\}$，相应的表现矩阵为

$$B_1^{\mathrm{Lk}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (B_1^{\mathrm{Lk}})^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因此，我们得到拉普拉斯算子的表示矩阵

$$L_0^{\mathrm{Lk}_K(v)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定理 2.15， $\Delta^{K}{}_{,1}{}^{v}$ 在相应基下的表示矩阵为

$$L_1^{K,v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于由 $\{[v,a,b],[v,b,c]\}$ 生成的 $\Delta^{K}{}_{,2}{}^{v}$ 在 $C_2(K, K\setminus\{v\})$ 上：拉普拉斯算子为 $\Delta_1^{\mathrm{Lk}_K(v)} = d_2^{\mathrm{Lk}} d_2^{\mathrm{Lk}\,*} + d_1^{\mathrm{Lk}\,*} d_1^{\mathrm{Lk}}$ $d_2^{\mathrm{Lk}} = 0$ $\Delta_1^{\mathrm{Lk}_K\,v} = d_1^{\mathrm{Lk}\,*} d_1^{\mathrm{Lk}}$ ( ) ( )。由于，我们有 ( ) ( )。因此，我们有

$$\Delta_1^{\mathrm{Lk}_K(v)} = (B_1^{\mathrm{Lk}})^* B_1^{\mathrm{Lk}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

关于相应的基， $\Delta^{K}{}_{,2}{}^{v}$ 的表示矩阵为

$$L_2^{K,v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

示例 2.18. 对于与示例 2.17 中相同的单纯复形 K，我们计算顶点 a 处的局部拉普拉斯算子。

链接 $\mathrm{Lk}_K(a)$ 由顶点 $\{v,b\}$ 和唯一的一条边 $\{v,b\}$ 组成。因此

$$C_0(\mathrm{Lk}_K(a)) = \langle [v],[b] \rangle, \qquad C_1(\mathrm{Lk}_K(a)) = \langle [v,b] \rangle,$$

带有边界算子

$$d_1^{\mathrm{Lk}}([v,b]) = [b] - [v].$$

对于由 $\{[a,v],[a,b]\}$ 生成的 $C_1(K, K\setminus\{a\})$ 上的 $\Delta^K_{,1}{}^a$：由于 $d_0^{\mathrm{Lk}} = 0$，我们有

$$\Delta_0^{\mathrm{Lk}_K(a)} = d_1^{\mathrm{Lk}} (d_1^{\mathrm{Lk}})^*.$$

相对于定义域中的基 $\{[v,b]\}$ 和陪域中的基 $\{[v],[b]\}$，

$$B_1^{\mathrm{Lk}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (B_1^{\mathrm{Lk}})^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Thus

$$L_0^{\mathrm{Lk}_K(a)} = B_1^{\mathrm{Lk}} (B_1^{\mathrm{Lk}})^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定理 2.15， $\Delta^K_{,1}{}^a$ 的表示矩阵为

$$L_1^{K,a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

相对于基 $\{[a,v],[a,b]\}$。

对于由 $\{[v,a,b]\}$ 生成的 $C_2(K, K\setminus\{a\})$ 上的 $\Delta^K_{,2}{}^a$：由于 $d_2^{\mathrm{Lk}} = 0$，我们有

$$\Delta_1^{\mathrm{Lk}_K(a)} = (d_1^{\mathrm{Lk}})^* d_1^{\mathrm{Lk}} = (B_1^{\mathrm{Lk}})^* B_1^{\mathrm{Lk}}.$$

因此

$$L_2^{K,a} = (B_1^{\mathrm{Lk}})^* B_1^{\mathrm{Lk}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

总之，顶点 a 处的局部拉普拉斯算子为

$$L_1^{K,a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_2^{K,a} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

这个例子表明，不同顶点处的局部拉普拉斯算子可能不同。

例 2.19. 考虑一个顶点集为 $\{0,1,\ldots,n\}$ 的 n-单形 K。顶点 0 的链接，记为 $\mathrm{Lk}_K(0)$，是由顶点 $\{1,2,\ldots,n\}$ 张成的 $(n-1)$-单形。因此，$\mathrm{Lk}_K(0)$ 的 1-骨架是具有 n 个顶点的完全图 K_n。作用于第 0 个链群 $C_0(\mathrm{Lk}_K(0))$ 的组合拉普拉斯算子 $\Delta^{\mathrm{Lk}_K(0)}{}_0$ 对应于 K_n 的标准图拉普拉斯算子。具体而言，该算子由一个对角元素为 $n-1$、非对角元素为 -1 的 $n\times n$ 矩阵表示，可写为

$$\Delta_0^{\mathrm{Lk}_K(0)} = nI_n - J_n,$$

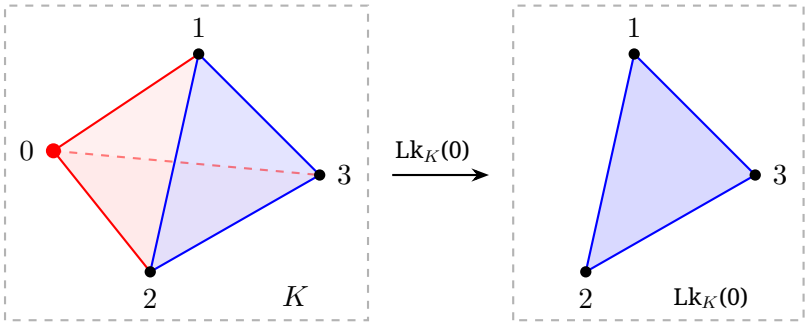


图3: l oca顶点0处一个3-单纯形的l结构。链接Lk$_K$(0)是一个2-单纯形（三角形），其组合拉普拉斯算子 $\Delta_0^{\mathrm{Lk}_K(0)}$ 定义了原复形在顶点0处的局部拉普拉斯算子 $\Delta^{K}{}_{,0\ 1}$ 。

其中 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵， J_n 是 $n \times n$ 全1矩阵。

例如，在 $n = 3$ 的情形下（其链接是一个顶点为 $\{1, 2, 3\}$ 的 2-单纯形），矩阵的形式为

$$\Delta_0^{\mathrm{Lk}_K(0)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

根据链同构 ϕ: $C_1(K,\ K \setminus \{0\}) \to C_0(\mathrm{Lk}_K(0))$，我们可以将局部拉普拉斯算子定义为 $\Delta^{K}{}_{,}$ $_{1}{}^{0} = \phi^{-1} \circ \Delta^{\mathrm{Lk}_K(0)}{}_{0}$ $\circ \phi$。在由 ϕ 诱导的基下， $\Delta^{K}{}_{,\ 0\ 1}$ 继承相同的矩阵表示。值得注意的是，由于单形固有的顶点对称性，每个顶点对应的局部拉普拉斯算子都相同。

3 拓扑持久性与局部拉普拉斯算子

持久同调刻画了全局同调特征在滤过过程中的演变，而局部同调则识别相对于边界、局限于特定点邻域内的拓扑不变量。持久局部同调融合了这两种范式，通过追踪局部同调特征在多个尺度上的持久性，从而编码依赖于尺度的几何与拓扑特征。

与这一发展的同时，我们引入了持久局部拉普拉斯算子，将关注点从纯粹的局部拓扑持久性转向局部谱持久性。它为局域调和结构和谱特征提供了多尺度刻画。

3.1 持久局部同调

3.1.1 滤过与持久同调

令 $\mathcal{K}$ 为一个以整数（$\mathbb{Z}$, $\leq$）为指标的持久单纯复形 （或一个滤过）。形式上，这是一个函子 $\mathcal{K}$: ($\mathbb{Z}$, $\leq$) $\to$ **Simp**，它从整数构成的离散范畴映射到单纯复形范畴，可通过以下长序列来直观表示

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{K}_{i-1} \xrightarrow{f^{i-1,i}} \mathcal{K}_i \xrightarrow{f^{i,i+1}} \mathcal{K}_{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

For 对于任意一对 $i \le j$，单纯形映射 $f^{i,\,j}\colon \mathcal{K}_i \to \mathcal{K}_j$ 诱导出一个同调群映射

$$f_n^{i,j}\colon H_n(\mathcal{K}_i) \to H_n(\mathcal{K}_j), \quad \text{for } n \ge 0.$$

持久同调信息由这些诱导映射的像所捕获，这些像表示从尺度 i 持续存活到尺度 j 的拓扑特征。

定义 3.1. 对于 $i \le j$，滤过 $\mathcal{K}$ 的 (i,j)-持久 n-次同调群 记为$H^{i,n}{}^{j}(\mathcal{K})$，定义为

$$H_n^{i,j}(\mathcal{K}) := \mathrm{im}(f_n^{i,j}\colon H_n(\mathcal{K}_i) \to H_n(\mathcal{K}_j)).$$

该群的秩 $\beta^{i}{}_{,n}{}^{j} = \dim H^{i}{}_{,n}{}^{j}(\mathcal{K})$ 构成 (i,j)-持久贝蒂数，它统计在指标 i 或之前诞生、并在指标 j 仍然存活的 n 维洞的数量。

持久同调能够对拓扑稳定性进行多尺度分析。具有较大持久性 $j-i$ 的特征通常与空间的底层几何结构相关联，而寿命较短的特征则常被解释为离散化或滤过过程中固有的噪声。

3.1.2 持久相对同调

持久局部同调的概念由 Fasy 等人 [9]，率先提出，随后的研究将这些局部不变量推广到图结构数据和几何深度学习架构 [3, 22]。在本节中，我们通过将持久复形视为函子，给出持久局部同调的形式化构造。

令 $\mathcal{K}\colon (\mathbb{Z},\ \le) \to \mathbf{Simp}$ 为一个持久性单纯复形。 $\mathcal{L}$ 的持久子复形 定义为 $\mathcal{K}$的一个子函子 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$。具体而言，对于每个 $i \in \mathbb{Z}$， $\mathcal{L}_i$ 都是 $\mathcal{K}_i$的子复形；对于每个 $i \le j$，下列单纯映射图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_i & \xrightarrow{f^{i}{}_{\mathcal{L}}{}^{j}} & \mathcal{L}_j \\ {\scriptstyle \iota_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_j} \\ \mathcal{K}_i & \xrightarrow[f^{i}{}_{\mathcal{K}}{}^{j}]{} & \mathcal{K}_j. \end{array}$$

这里， ι_i和 ι_j是各自尺度上的典范包含映射，而 $f^{i,}{}_{\mathcal{L}}{}^{j}$和 $f^{i,}{}_{\mathcal{K}}{}^{j}$分别是持久性单纯复形 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{K}$的转移映射。

因此，对 $(\mathcal{K},\ \mathcal{L})$ 定义了一个持久相对复形。对于任意 $i \le j$，转移映射诱导出一个对的态射 $f^{i,\,j}\colon (\mathcal{K}_i,\ \mathcal{L}_i) \to (\mathcal{K}_j,\ \mathcal{L}_j)$，进而得到相对同调群之间的一列同态

$$\bar{f}_n^{i,j}\colon H_n(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i) \to H_n(\mathcal{K}_j, \mathcal{L}_j).$$

该 $(i,\ j)$-持久局部同调随后由这个诱导映射的像刻画 p.

定义 3.2. 这一对 (i,j) 的 n 阶持久相对同调群 （记作 $H^{i,n}{}^{j}(\mathcal{K},\mathcal{L})$）定义为该诱导同态的像

$$H_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L}) := \mathrm{im}\left(\bar{f}_n^{i,j}\colon H_n(\mathcal{K}_i,\mathcal{L}_i) \to H_n(\mathcal{K}_j,\mathcal{L}_j)\right).$$

该群的秩 $\beta^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \dim H^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L})$ 称为 (i,j)-持久相对贝蒂数。相对同调群 $\{H_n(\mathcal{K}_i,\mathcal{L}_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 与诱导映射 $\{\bar{f}_n^{i,j}\}_{i\le j}$ 共同构成一个持久模。该模结构确保相对拓扑特征可分解为条形码或持久图，从而为感兴趣位点周围的局部环境提供多尺度特征。

3.1.3 持久局部同调

持久局部同调的构造依赖于在滤过过程中动态追踪一个顶点及其补集。为使这一过程形式化，我们引入持久顶点复形的概念。

定义 3.3. 一个持久顶点复形 $\mathbf{v}\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}$ 是一个持久单纯复形，其中对每个 $i\in\mathbb{Z}$，值 $\mathbf{v}_i$ 要么是单个顶点 $\{v_i\}$，要么是空集 $\emptyset$。具体而言，存在一个出生指标 $b\in\mathbb{Z}$，使得

$$\mathbf{v}_i=\begin{cases}\emptyset & \text{if } i<b\\ \{v_i\} & \text{if } i\ge b\end{cases}$$

对于所有 $j\ge i\ge b$，转移态射 $f^{i,j}_{\mathbf{v}}\colon \mathbf{v}_i\to\mathbf{v}_j$ 是单顶点集 $\{v_i\}$ 和 $\{v_j\}$之间唯一的双射，即 $f^{i,j}_{\mathbf{v}}(v_i)=v_j$。

设$\mathbf{v}\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}$是 $\mathcal{K}\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}$的一个持久化顶点子复形。我们定义持久单纯复形 $\mathcal{K}^{\mathbf{v}}\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}$，其中每个

$$\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}=\mathcal{K}_i\setminus \mathrm{St}_{\mathcal{K}_i}(\mathbf{v}_i)=\{\sigma\in\mathcal{K}_i\mid v_i\notin\sigma\}$$

是 $\mathcal{K}_i$ 的子复形，由所有不包含顶点$\mathbf{v}_i$的单形构成。特别地，如果$\mathbf{v}_i=\emptyset$，我们设 $\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}=\mathcal{K}_i$。

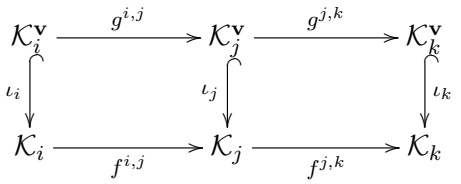
命题 3.4. 设 $\mathcal{K}$ 是一个持久单纯复形，且$\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{K}$的一个持久化顶点子复形。那么，持久单纯复形 $\mathcal{K}^{\mathbf{v}}\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}$ 是$\mathcal{K}$的一个持久子复形。

证明。 为证明 $\mathcal{K}^{\mathbf{v}}$ 是一个持久子复形，我们先验证每个 $\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$ 都是 $\mathcal{K}_i$的良定义子复形。对于任意单形 $\sigma\in\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$，根据定义可知 $v_i\notin\sigma$。如果 τ是 σ的一个面，那么 τ 必然是 $\mathcal{K}_i$的一个元素。由于 $\tau\subseteq\sigma$ 且 $v_i\notin\sigma$，顶点 v_i 不可能包含在 τ中。因此，$\tau\in\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$，这证实了 $\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$在面映射下是封闭的。

接下来，我们证明 $\mathcal{K}$ 的转移态射限制为 $\mathcal{K}^{\mathbf{v}}$的态射。对于任意$j\ge i\ge b$，令 $f^{i,j}\colon\mathcal{K}_i\to\mathcal{K}_j$为过渡单纯映射。对于任意单形 $\sigma=[u_0,\dots,u_k]\in\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$，它在 $f^{i,j}$下的像是 $\mathcal{K}_j$中由顶点 $\{f^{i,j}(u_0)\dots,f^{i,j}(u_k)\}$张成的单形。根据持久顶点复形 $\mathbf{v}$ 的定义，映射 $f^{i,j}$ 将 $\{v_i\}$与 $\{v_j\}$一一对应，因此，对于任意顶点 $u\in\mathcal{K}_i$，$f^{i,j}(u)=v_j$ 当且仅当 $u=v_i$。由假设，$v_i\notin\sigma$，故 $v_j\notin f^{i,j}(\sigma)$。因此，$f^{i,j}$将 $\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$映入 $\mathcal{K}_j^{\mathbf{v}}$。$i<b$ 或 $j<b$ 的情形显然成立。

最后，由于限制 $g^{i,j}=f^{i,j}|_{\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}}$继承自单纯映射，因此恒等映射与复合的函子公理自动成立。具体而言，对于任意 $i\le j\le k$，

关系 $g^{j,k}\circ g^{i,j}=(f^{j,k}\circ f^{i,j})|_{\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}}=f^{i,k}|_{\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}}=g^{i,k}$成立，从而保证下图可交换：



这表明 $\mathcal{K}^{\mathbf{v}}$ 是 $\mathcal{K}$的一个一致子函子，符合要求。 □

定义 3.5。 设 $\mathcal{K}$ 是一个持久单纯复形，$\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{K}$的一个持久化顶点子复形。 $\mathcal{K}$ 在$\mathbf{v}$ 处的持久局部同调 定义为一对 $(\mathcal{K},\mathcal{K}^{\mathbf{v}})$ 的持久相对同调。对于 $i\le j$ 和 $n\ge 0$，(i,j)-持久局部同调群定义为

$$H_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathbf{v}):=\operatorname{im}\left(\bar{f}_n^{i,j}\colon H_n(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i\setminus \mathrm{St}_{\mathcal{K}_i}(\mathbf{v}_i))\to H_n(\mathcal{K}_j,\mathcal{K}_j\setminus \mathrm{St}_{\mathcal{K}_j}(\mathbf{v}_j))\right).$$

此定义刻画了围绕不断演化的顶点$\mathbf{v}$ 的局部拓扑环境如何随着滤过的进行而发展并趋于稳定。通过将局部同调类从尺度i 映射到尺度 j，我们可以区分瞬态局部噪声与稳健局部特征；后者刻画了该位置的奇点或流形状结构。

3.2 DG-态射的谱理论

3.2.1 摩尔－彭若斯伪逆

定义 3.6。 微分分次（DG）内积空间是一个四元组 $(V,d,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，其中 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 是一个分次向量空间。每个分量 V_n 都配备了一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_n}$，满足 $V_n\perp V_m$，其中 $n\neq m$。微分 $d\colon V\to V$ 是一个次数为 1 的线性算子，并满足条件 $d^2=0$。

定义 3.7。 映射 $f\colon V\to W$ 在两个 DG 内积空间之间称为*DG-态射*，如果它是一个零次线性映射（即，对所有 n，$f(V_n)\subseteq W_n$），且满足 $d_W f=f d_V$。

定义 3.8。 设 $f\colon V\to W$ 是内积空间之间的一个线性映射。 f的摩尔－彭若斯伪逆 是唯一满足以下四个彭若斯条件的线性映射 $f^\dagger\colon W\to V$：(i) $ff^\dagger f=f$；(ii) $f^\dagger ff^\dagger=f^\dagger$；$(iii)$ $(ff^\dagger)^*=ff^\dagger$；$(iv)$ $(f^\dagger f)^*=f^\dagger f$。

命题 3.9。 设 V和 W 是有限维 *DG* 内积空间。对于任意态射$f\colon V\to W$，摩尔－彭若斯伪逆 $f^\dagger\colon W\to V$ 存在且唯一。

证明。 由于 V和 W 是有限维的， f 可以分解为线性映射f_n 的直和： $V_n\to W_n$。对于每个 n，内积空间中的奇异值分解定理保证了 $f_n^\dagger$的存在。因此， $f^\dagger=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}f_n^\dagger$为整个分次映射提供了唯一的伪逆。

□

命题 3.10. 设 $f\colon V\to W$ 是有限维 *DG*-内积空间之间的 *DG*-态射。摩尔－彭若斯伪逆 $f^\dagger\colon W\to V$满足以下基本性质：

(i) 复合 $P_{\mathrm{im}(f)} = ff^\dagger$ 与 $P_{(\ker f)^\perp} = f^\dagger f$ 分别是到 W 中 f 的值域上的正交投影，以及到 V 中核的正交补上的正交投影。

(ii) 对于任意 $w \in W$，向量 $v = f^\dagger w$ 是方程 $f(v) = w$ 的唯一最小范数最小二乘解。也就是说，$f^\dagger w = \arg\min\{\|u\| : \ u \in \arg\min_{z\in V} \|f(z) - w\|\}$。

(iii) 伪逆算子与伴随算子相容，即 $(f^*)^\dagger = (f^\dagger)^*$。

(iv) 如果 f 是单射，则 $f^\dagger = (f^*f)^{-1}f^*$。在 f 是等距嵌入这一特殊情况下，伪逆退化为伴随算子，即 $f^\dagger = f^*$。

证明。摩尔－彭若斯伪逆的相关性质是经典结果 [1, 2]。为完整起见，并确保本文论述清晰，我们在当前设定下给出证明。

(i) 令 $P = ff^\dagger$。根据彭若斯条件中的第一和第三个条件，有 $P^2 = (ff^\dagger f)f^\dagger = ff^\dagger = P$ 以及 $P^* = (ff^\dagger)^* = ff^\dagger = P$。因此，$P$ 是一个正交投影。由于 $\mathrm{im}(ff^\dagger) \subseteq \mathrm{im}(f)$ 且 $f = ff^\dagger f$ 意味着 $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(ff^\dagger)$，我们得出 $\mathrm{im}(P) = \mathrm{im}(f)$。类似地可证明，$f^\dagger f$ 是到 $\mathrm{im}(f^\dagger)$ 上的正交投影。根据第四个条件，$\mathrm{im}(f^\dagger) = \mathrm{im}(f^\dagger f) = \ker(f^\dagger f)^\perp = (\ker f)^\perp$。

(ii) 对任意 $w \in W$，令 $v = f^\dagger w$。最小二乘问题的任意解 u 都必须满足正规方程 $f^*fu = f^*w$。代入 $w = fv + (w - fv)$，其中 $w - fv = (I - ff^\dagger)w \in \mathrm{im}(f)^\perp = \ker(f^*)$，可知 v 满足正规方程。由于 $\mathrm{im}(f^\dagger) = (\ker f)^\perp$，$v$ 与 $\ker(f)$ 正交。根据勾股定理，对于任意其他满足 $z \in \ker(f)$ 的最小二乘解 $v' = v + z$，有 $\|v'\|^2 = \|v\|^2 + \|z\|^2 > \|v\|^2$，除非 $z = 0$。

(iii) 设 $G = (f^\dagger)^*$。我们如下验证 G 满足 f^* 的四个彭若斯条件：

$$\begin{aligned} f^*Gf^* &= f^*(f^\dagger)^*f^* = (ff^\dagger f)^* = f^*, \\ Gf^*G &= (f^\dagger)^*f^*(f^\dagger)^* = (f^\dagger ff^\dagger)^* = (f^\dagger)^*, \\ (f^*G)^* &= (f^*(f^\dagger)^*)^* = f^\dagger f, \\ (Gf^*)^* &= ((f^\dagger)^*f^*)^* = ff^\dagger. \end{aligned}$$

由于 $f^\dagger f$ 与 $ff^\dagger$ 是自伴的，条件 $(f^*G)^* = f^*G$ 与 $(Gf^*)^* = Gf^*$ 成立。由伪逆的唯一性，$(f^*)^\dagger = (f^\dagger)^*$。

(iv) 若 f 是单射，则 f^*f 是 V 上的可逆算子。容易验证 $g = (f^*f)^{-1}f^*$ 满足这四个条件。例如，$fgf = f(f^*f)^{-1}(f^*f) = f$。对于等距情形，$f^*f = \mathrm{id}_V$，这直接蕴含 $f^\dagger = (\mathrm{id}_V)^{-1}f^* = f^*$。

□

3.2.2 广义态射拉普拉斯算子

从现在起，为方便起见，所考虑的 DG 内积空间均假定为有限维。

设 $(V,\ d_V,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ 和 $(W,\ d_W,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ 是 DG 内积空间，并设 $f\colon V \to W$ 是一个 DG-态射。f 的 持久化域是空间

$$\Theta_f := \{x \in W \mid d_W x \in \mathrm{im}\, f\}.$$

令 $\iota\colon \Theta_f \hookrightarrow W$ 表示典范包含。

$$\Theta_f \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{d_W} W \xrightarrow{f^\dagger} V.$$

定义 3.11. 令 $f\colon V\to W$ 为 V 与 W 之间的 DG-态射。广义拉回微分 $\delta_f\colon \Theta_f\to V$ 为

$$\delta_f := f^\dagger d_W \iota.$$

这一构造得到以下序列

$$\Theta_f \xrightarrow{\delta_f} V \xrightarrow{d_V} V \xrightarrow{f} W\,.$$

引理 3.12. 对于任意 $x\in\Theta_f$，令 $\delta_f(x)=f^\dagger d_W\iota(x)$。则有 $d_V\delta_f(x)\in\ker(f)$。特别地，如果 f 是单射，则 $d_V\delta_f=0$。

证明. 根据持久化域 Θ_f 的定义，对于任意 $x\in\Theta_f$，存在某个 $v\in V$，使得 $d_W\iota(x)=f(v)$。对两边应用摩尔－彭若斯伪逆 $f^\dagger$，得到

$$\delta_f(x)=f^\dagger f(v)=P_{(\ker f)^\perp}(v).$$

为验证与微分 d_V 的一致性，我们考察 $\delta_f(x)$ 在 $f\circ d_V$ 下的像如下：

$$\begin{aligned} f d_V\delta_f(x) &= f d_V P_{(\ker f)^\perp}(v)\\ &= f d_V v \qquad (1)\\ &= d_W f(v) \qquad (2)\\ &= d_W^2\iota(x)=0. \end{aligned}$$

在上述推导中，(1) 是由以下事实得到的：$v-P_{(\ker f)^\perp}(v)\in\ker(f)$，而态射性质 $d_W f=f d_V$ 蕴含 $f d_V(\ker f)\subseteq d_W f(\ker f)=0$。步骤 (2) 进一步利用了态射 f 的交织性质。恒等映射 $f(d_V\delta_f(x))=0$ 蕴含 $d_V\delta_f(x)\in\ker(f)$。若 f 是单射，则 $\ker(f)=\{0\}$，由此可直接得到 $d_V\delta_f=0$。 □

注 3.13。 虽然 f 满足态射条件 $d_W f=f d_V$，但其伪逆 $f^\dagger$ 通常不满足 $d_V f^\dagger=f^\dagger d_W$。不过，只要在相关子空间（$\ker f$）$^\perp$上满足 $d_V\delta_f=0$，复合算子 $\delta_f=f^\dagger d_W\iota$ 仍可作为构造态射拉普拉斯算子的有效拉回微分。

定义 3.14。 与 $f\colon V\to W$ 相关联的广义拉普拉斯算子 $\Delta^f\colon V\to V$ 是如下算子

$$\Delta^f := \delta_f\delta_f^* + d_V^* d_V + (\mathrm{id}-f^\dagger f).$$

命题 3.15。 广义拉普拉斯算子 $\Delta^f\colon\ V\to V$ 是自伴且半正定的算子。

证明。 Δ^f的自伴性由算子 $\delta_f\delta_f^*$、$d_V^* d_V$、$-f^\dagger f$、$-f^\dagger f$ 和 id 的自伴性推出。这里，id 是自伴的，因为摩尔－彭若斯伪逆满足 $(f^\dagger f)^*=f^\dagger f$。

接下来，我们证明其半正定性。对于任意向量 $v\in V$，与 Δ^f 相关的二次型为

$$\begin{aligned} \langle\Delta^f v,v\rangle_V &= \langle\delta_f\delta_f^* v,v\rangle_V + \langle d_V^* d_V v,v\rangle_V + \langle(\mathrm{id}-f^\dagger f)v,v\rangle_V\\ &= \langle\delta_f^* v,\delta_f^* v\rangle_V + \langle d_V v,d_V v\rangle_V + \langle(\mathrm{id}-f^\dagger f)^2 v,v\rangle_V\\ &= \|\delta_f^* v\|_V^2 + \|d_V v\|_V^2 + \|(\mathrm{id}-f^\dagger f)v\|_V^2, \end{aligned}$$

这里我们利用了这样一个事实：$\mathrm{id} - f^\dagger f$ 是一个幂等自伴算子。由于内积空间中任意向量的范数平方均非负，因此对于所有 $v \in V$，都有 $\langle \Delta^f v,\ v\rangle_V \geq 0$。证明至此完成。

□

3.2.3 广义持久调和空间

设 V 和 W 为 DG 内积空间，并设 $f\colon V \to W$ 为一个 DG-态射 .

定义 3.16. 与 DG-态射 $f\colon V \to W$ 相关联的持久调和空间记作 $\mathcal{H}(f)$，定义为广义拉普拉斯算子的核

$$\mathcal{H}^f := \ker(\Delta^f) = \{v \in V \mid \Delta^f v = 0\}.$$

$\mathcal{H}(f)$ 中的元素称为 f-调和代表元。

命题 3.17. 持久调和空间 $\mathcal{H}^f := \ker \Delta^f$ 的特征刻画为

$$\mathcal{H}^f = \ker d_V \cap (\operatorname{im} \delta_f)^\perp \cap (\ker f)^\perp.$$

证明. 由于 Δ^f 自伴且半正定，元素 $v \in V$ 属于核 $\mathcal{H}(f)$ 当且仅当相应的二次型为零

$$\langle \Delta^f v, v\rangle = \|\delta_f^* v\|^2 + \|d_V v\|^2 + \|(\mathrm{id} - f^\dagger f)v\|^2 = 0.$$

当且仅当每个非负项同时为零时，这个恒等映射成立：

(*i*) $\|d_V v\|^2 = 0 \iff v \in \ker d_V$，从而确保 v 是 V 中的一个圈；

(*ii*) $\|\delta_f^* v\|^2 = 0 \iff v \in (\mathrm{im}\ \delta_f)^\perp$，根据基本关系 $\ker\ \delta_f^* = (\mathrm{im}\ \delta_f)^\perp$；

(*iii*) $\|(\mathrm{id} - f^\dagger f)v\|^2 = 0 \iff v \in \ker(\mathrm{id} - f^\dagger f)$。

回想一下，$\mathrm{id} - f^\dagger f$ 是到 $\ker\ f$ 上的正交投影；因此，$\ker(\mathrm{id} - f^\dagger f) = (\ker\ f)^\perp$。因此，我们得到所需结果 $\mathcal{H}^f = \ker\ d_V \cap (\mathrm{im}\ \delta_f)^\perp \cap (\ker\ f)^\perp$。 □

在 $f\colon V \to W$ 是等距嵌入这一特殊情形下，Moore-Penrose 伪逆满足 $f^\dagger f = \mathrm{id}_V$。因此，广义拉普拉斯算子 Δ^f 化简为

$$\Delta^f = \delta_f \delta_f^* + d_V^* d_V,$$

这正是 [20, 23]中引入的持久拉普拉斯算子的定义。此外，在这一单射假设下，核 $\ker \Delta^f$ 与 [19] 中刻画的持久调和空间相一致。因此，我们的构造可以视为将这些构造直接推广到具有非平凡核的态射。

3.2.4 持久霍奇定理

设 $f\colon\ V \to W$ 是 DG 内积空间 V 与 W 之间的 DG-态射。态射 f 自然地在相应的同调群之间诱导出一个线性映射：

$$H(f)\colon H(V) \to H(W), \quad [v] \mapsto [f(v)].$$

与 f 相关联的持久同调定义为该诱导映射的像

$$H^f = \operatorname{im}\left(H(f)\colon H(V) \to H(W)\right) \subseteq H(W).$$

在 f 为等距嵌入这一特殊情形下，持久调和空间与持久同调之间存在自然同构。然而，当 f 是任意 DG-态射时，情况会变得复杂得多。为了解决这些复杂性，我们在下面的讨论中对这种关系给出明确的刻画。

定理 3.18（霍奇同构定理）。线性映射

$$\Psi\colon \ker \Delta^f \to H^f, \quad v \mapsto [f(v)]$$

是线性空间之间的同构。

证明。根据命题 3.17，Δ^f 的核与其各组成项的核的交集相同

$$\ker \Delta^f = \ker(\delta_f^*) \cap \ker(d_V) \cap \ker(\mathrm{id} - f^\dagger f).$$

因此，元素 v 属于 $\ker \Delta^f$ 当且仅当它满足以下条件：

(i) $v \in Z(V) = \ker d_V$，将 v 视为 V 中的一个圈；

(ii) $v \in (\ker f)^\perp$，这由 $(\mathrm{id} - f^\dagger f)v = 0$ 得出；

(iii) $v \in \ker \delta_f^* = (\operatorname{im} \delta_f)^\perp$，即对于所有 $z \in \Theta_f$，$\langle v,\ f^\dagger d_W z\rangle_V = 0$。

单射性：设 $v \in \ker \Delta^f$ 满足 $\Psi(v) = [f(v)] = 0$ 属于 $H(W)$。那么 $f(v)$ 是 W 中的一个边界，这意味着存在某个 $x \in \Theta_f$，使得 $f(v) = d_W x$。由于 $ff^\dagger$ 是到 $\operatorname{im} f$ 上的正交投影，且 $d_W x \in \operatorname{im} f$，我们得到 $ff^\dagger d_W x = d_W x$。利用条件 (iii)，我们观察到

$$\|f(v)\|_W^2 = \langle f(v), d_W x\rangle_W = \langle f(v), ff^\dagger d_W x\rangle_W = \langle f^* f v, f^\dagger d_W x\rangle_V = \langle v, f^\dagger d_W x\rangle_V = 0.$$

这就要求 $f(v) = 0$，由此可得 $v \in \ker f$。结合条件 (ii)（该条件要求 $v \in (\ker f)^\perp$），我们得出 $v \in \ker f \cap (\ker f)^\perp = \{0\}$。因此，$\Psi$ 是单射。

满射性：设 $\xi \in H^f \subseteq H(W)$。根据定义，存在一个圈 $c \in Z(V)$，使得 $[f(c)] = \xi$。设 $c' = f^\dagger f(c)$ 是 c 在 $(\ker f)^\perp$ 上的正交投影。由于 $f(c') = f(c)$，因此 $[f(c')] = \xi$。现在，我们对与算子 $\delta_f \delta_f^*$ 相关的 $Z(V)$ 作正交分解，如下所示

$$Z(V) = \operatorname{im}(\delta_f|_{Z(V)}) \oplus (\ker \delta_f^* \cap Z(V)).$$

将 $c' = v + \delta_f z$ 分解，其中 $v \in \ker \delta_f^* \cap Z(V)$ 且 $z \in \Theta_f$，我们注意到 c' 和 $\delta_f z = f^\dagger d_W z$ 均属于 $(\ker f)^\perp$。因此，它们的差 v 也必定属于 $(\ker f)^\perp$。所以，v 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，从而证明 $v \in \ker \Delta^f$。最后，我们有

$$f(v) = f(c' - \delta_f z) = f(c') - f f^\dagger d_W z = f(c') - d_W z.$$

在同 调中，$[f(v)] = [f(c')] - [d_W z] = [f(c')] = \xi$，这确立了 Ψ 的满射性。 □

当 f 是等距嵌入时，Δ^f 恢复经典持久拉普拉斯算子，且该定理退化为标准的持久霍奇同构。

注 3.19。在 [10] 中探讨了将持久拉普拉斯算子类似地扩展到一般单纯映射的方法。其中的核心策略是将态射 $f\colon V \to W$ 限制到一个更小的子空间，从而诱导出一个等距同构 $\hat{f}\colon (\ker f)^\perp \to \mathrm{im}\ f$，以便定义持久拉普拉斯算子。相比之下，我们的构造并不对态射 f 本身施加此类等距约束。这种方法更符合持久同调的内在性质，因为持久同调的定义独立于任何特定的内积结构。

例 3.20。考虑一个单纯复形 K 的 1-骨架，该复形由两个三角形 $\{v_0, v_1, v_2\}$ 和 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 组成，它们共享一条公共边 e_{12}。目标空间 L 是一个单独的三角形 $\{w_0, w_1, w_2\}$。1-圈空间 $Z_1(K)$ 由两个基本循环张成

$$\gamma_1 = e_{01} + e_{12} - e_{02}, \quad \gamma_2 = e_{12} + e_{23} - e_{13},$$

其中 e_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 的定向边。我们通过顶点映射 $\phi(v_0) = w_0$, $\phi(v_1) = w_1$, $\phi(v_2) = w_2$ 和 $\phi(v_3) = w_0$ 定义单纯形映射 $\phi\colon K \to L$。诱导的链映射

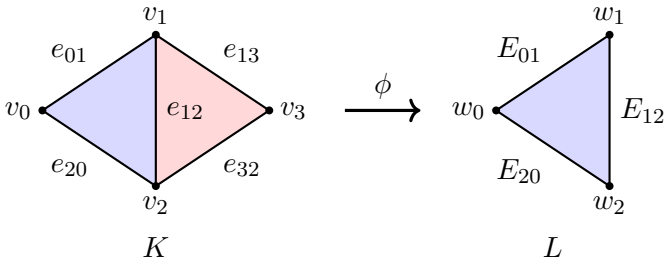


图 4：单纯形映射 $\phi\colon K \to L$ 的示意图。

$f\colon C_1(K) \to C_1(L)$ 由下式给出

$$f(e_{01}) = E_{01}, \quad f(e_{12}) = E_{12}, \quad f(e_{02}) = E_{02}, \quad f(e_{13}) = -E_{01}, \quad f(e_{23}) = -E_{02},$$

其中 E_{ij} 是 L 的边。在诱导的同调映射 $H_1(\phi)$ 下，这些圈的像为 $H_1(\phi)([\gamma_1]) = [E_{01} + E_{12} - E_{02}] = [\Gamma_L]$ 和 $H_1(\phi)([\gamma_2]) = [E_{12} - E_{02} + E_{01}]$。由于这两个圈映射到 $H_1(L)$ 中的同一个非平凡类，持久同调 H^f 是由 $[\Gamma_L]$ 张成的一维子空间。

为验证霍奇同构，我们确定核 Δ^f 中的调和代表元 $v \in$。根据定理 3.18，v 必须属于 $Z_1(K) \cap (\text{核 } f)^\perp$。链映射 f 的核由以下元素张成

$$\eta_1 = e_{01} + e_{13}, \quad \eta_2 = e_{02} + e_{23}.$$

设 $v = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2$ 是 $Z_1(K)$ 中的一个一般元素。正交条件 $v \in (\text{核 } f)^{\perp}$ 要求 $\langle v,\ \eta_1\rangle = 0$ 和 $\langle v,\ \eta_2\rangle = 0$。在边构成标准正交基的标准内积下，这些条件可得

$$\langle c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2, e_{01} + e_{13}\rangle = c_1 - c_2 = 0, \quad \langle c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2, e_{02} + e_{23}\rangle = -c_1 + c_2 = 0.$$

因此，必有 $c_1 = c_2$，这意味着调和空间 $\ker \Delta^f$ 是一维的，并由 $\gamma_1 + \gamma_2$ 张成。该结果意味着 $\dim(\ker\ \Delta^f)\ = \dim(H^f)\ = 1$。更精确地说，线性映射

$$\Psi : \operatorname{span}\{\gamma_1 + \gamma_2\} \to \operatorname{span}\{[\Gamma_L]\}, \quad v \mapsto [f(v)]$$

是调和空间与持久同调之间的一个同构。

3.3 持久局部拉普拉斯算子

3.3.1 持久相对拉普拉斯算子

设 $\mathcal{K} : (\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}$ 是一个持久单纯复形，且设 $\mathcal{L} : (\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}$ 是 $\mathcal{K}$ 的一个持久子复形。对于任意 $i \leq j$，单纯对的映射 $f^{i,\ j} : (\mathcal{K}_i,\ \mathcal{L}_i) \hookrightarrow (\mathcal{K}_j,\ \mathcal{L}_j)$ 诱导出一个自然的相对链复形态射

$$\bar{f}^{i,j} : C_*(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i) \to C_*(\mathcal{K}_j, \mathcal{L}_j).$$

通过赋予这些复形第 2.2 节中引入的商内积，$\bar{f}^{i,\ j}$ 成为微分分次内积空间之间的 DG-态射。

为在这一相对情形下定义持久拉普拉斯算子，我们采用广义构造，考虑 $\bar{f}^{i,j}$ 在度数 $n+1$处的持久化域，其定义如下

$$\Theta^{i,j}_{n+1} := \{x \in C_{n+1}(\mathcal{K}_j, \mathcal{L}_j) \mid d^j_{n+1}x \in \operatorname{im} \bar{f}^{i,j}\}.$$

这里，d^i_* 表示 $C_*(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i)$ 的相对边界算子，而 d^j_* 表示 $C_*(\mathcal{K}_j, \mathcal{L}_j)$ 对应的算子。令 $\iota :\ \Theta^{i,\ j}_{n+1} \hookrightarrow C_{n+1}(\mathcal{K}_j, \mathcal{L}_j)$ 为典范包含。相应的广义拉回微分 $\delta^{i,\ j}_{n+1} :\ \Theta^{i,\ j}_{n+1} \to C_n(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i)$ 定义为

$$\delta^{i,j}_{n+1} := (\bar{f}^{i,j}_n)^{\dagger} d^j_{n+1}\iota.$$

于是，按照以下意义，将相对持久拉普拉斯算子定义为与态射 $\bar{f}^{i,j}$ 相关联的广义拉普拉斯算子。

定义 3.21。维度为 n 的 (i, j)-持久相对拉普拉斯算子 记为 $\Delta^{i,\ j}_n :\ C_n(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i) \to C_n(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i)$，是由下式定义的线性算子

$$\Delta^{i,j}_n := \delta^{i,j}_{n+1}(\delta^{i,j}_{n+1})^* + (d^i_n)^* d^i_n + (\mathrm{id} - (\bar{f}^{i,j}_n)^{\dagger}\bar{f}^{i,j}_n),$$

其中，d^i_n 是 $C_*(\mathcal{K}_i,\ \mathcal{L}_i)$的相对边界算子，而$(\delta^{i,\ j}_{n+1})^*$ 是广义拉回微分的伴随算子。

特别地，当 $n=0$时，根据定义，相对边界算子 d_0^i 为零，而$(i,\ j)$-持久相对拉普拉斯算子可简化为

$$\Delta_0^{i,j} = \delta_1^{i,j}(\delta_1^{i,j})^* + (\mathrm{id} - (\bar{f}_0^{i,j})^\dagger \bar{f}_0^{i,j}).$$

此外，在 $i=j$的情况下，诱导态射 $\bar{f}^{i,\ j}$ 退化为恒等映射。因此，广义拉回微分 $\delta^{i,\ j}_{n+1}$ 与标准相对边界算子 d^i_{n+1}一致。在这些条件下，持久算子恢复了相对链复形的组合拉普拉斯算子

$$\Delta_n^{i,i} = d_{n+1}^i (d_{n+1}^i)^* + (d_n^i)^* d_n^i,$$

这正是标准的（非持久）相对拉普拉斯算子 Δ_n^i: $C_n(\mathcal{K}_i,\ \mathcal{L}_i) \to C_n(\mathcal{K}_i,\ \mathcal{L}_i)$。

定义 3.22. （i, j）-持久相对调和空间定义为

$$\mathcal{H}_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \ker \Delta_n^{i,j}, \quad n \geq 0.$$

定理 3.23. 对于任意 $i \leq j$，存在线性空间之间的一个同构

$$\mathcal{H}_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L}) = H_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathcal{L}), \quad n \geq 0.$$

证明. 由定理 3.18 可直接得到。 □

上述结果表明，持久拉普拉斯算子的调和空间与持久同调一致，从而建立了空间或数据集的几何与拓扑之间的联系。这也为计算持久相对同调提供了另一种方法。

3.3.2 持久局部拉普拉斯算子

为便于对持久拉普拉斯算子进行代数处理，我们将研究范围限定为嵌入单纯复形的滤过。现在考虑范畴 $\mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$，其态射由包含映射定义。这样的限制可将诱导的链映射简化为规范单射，从而为持久局部拉普拉斯算子提供稳健的基础，同时涵盖实践中遇到的各种情形。

设 $\mathcal{K}$: $(\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$是一个持久单纯复形。对于任意顶点 $v \in \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{K}_i$，我们构造一个与之对应的持久顶点复形$\mathbf{v}$: $(\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}$，其在指标 i处的取值定义为

$$\mathbf{v}_i = \begin{cases} \{v\} & \text{if } i \geq b, \\ \emptyset & \text{if } i < b. \end{cases}$$

这里，$b = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid v \in \mathcal{K}_i\}$ 表示 v 在滤过 $\mathcal{K}$中的出生指标。对于所有 $j \geq i \geq b$，转移态射 $f^{i,\ j}_{\mathbf{v}}$: $\mathbf{v}_i \to \mathbf{v}_j$是唯一的恒等映射，即 $f^{i,\ j}_{\mathbf{v}}(v) = v$。

令 $\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}} = \mathcal{K}_i \backslash \mathrm{St}_{\mathcal{K}_i}(\mathbf{v}_i) = \{\sigma \in \mathcal{K}_i \mid v_i \notin \sigma\}$。我们考虑相对链复形 $C_*(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^{\mathbf{v}})$，根据前面的构造，它带有商内积。对于任意 $i \leq j$，单纯对 $(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) \hookrightarrow (\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_j^{\mathbf{v}})$ 的包含会诱导一个自然的链映射

$$\bar{f}^{i,j} : C_*(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) \to C_*(\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_j^{\mathbf{v}}).$$

如已确立　前文所述，$f^{i,\ j}$ 是微分分次内积空间之间的 DG-态射 es.

引理 3.2 **4.** 诱导的链映射 $\bar{f}^{i,\,j}\colon\ C_*(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) \to C_*(\mathcal{K}_j,\mathcal{K}_j^{\mathbf{v}})$ 是一个等距嵌入 $g.$

证明。 考虑由 $\mathcal{K}_i \setminus \mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}$ 中的单形构成的 $C_*(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}})$ 的基。根据构造，这些恰好是包含顶点 v 的单形 $\sigma \in \mathcal{K}_i$ 。由于$\mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$ 中的转移态射是一个包含映射，因此任何这样的单形 σ 在 $\mathcal{K}_j$中都映射到自身，并且仍然包含 v。

此外，单纯复形对 $(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) \hookrightarrow (\mathcal{K}_j,\mathcal{K}_j^{\mathbf{v}})$ 的包含关系确保，生成 $C_*(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}})$ 的单形集合是生成 $C_*(\mathcal{K}_j,\mathcal{K}_j^{\mathbf{v}})$ 的单形集合的子集。由于这些相对链复形上的内积定义为使单形构成标准正交基，诱导映射 $\bar{f}^{i,j}$ 将陪域中的一个标准正交基子集映射到其自身。因此，$\bar{f}^{i,j}$由线性性在整个空间上保持内积。由此可知，$\bar{f}^{i,j}$是一个等距嵌入。

□

引理 3.24 意味着 $(\bar{f}^{i,j})^\dagger \bar{f}^{i,j} = \mathrm{id}$，因此广义持久拉普拉斯算子中的项 $\mathrm{id} - (\bar{f}^{i,j})^\dagger \bar{f}^{i,j}$为零。因此，我们得到局部情形下的以下简化定义。

定义 3.25。 对于任意 $i \le j$，维度 n 上的 (i,j)-持久局部拉普拉斯算子 记为$\Delta^{i,n\,j}\colon\ C_n(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) \to C_n(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}})$，定义为

$$\Delta_n^{i,j} := \delta_{n+1}^{i,j}(\delta_{n+1}^{i,j})^* + (d_n^i)^* d_n^i,$$

其中 d_n^i 是 $C_*(\mathcal{K}_i,\mathcal{K}_i^{\mathbf{v}})$ 的边界算子，而 $(\delta^{i}_{,n+1}{}^{j})^*$ 是广义拉回微分的伴随算子。

定义 3.26。 对于任意 $i \le j$，定义 (i,j)-持久局部调和空间如下

$$\mathcal{H}_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathbf{v}) = \ker \Delta_n^{i,j}, \quad n \ge 0.$$

持久局部拉普拉斯算子将静态局部拉普拉斯算子扩展到多尺度情形，从而能够对滤过中的局部化拓扑特征进行谱分析。

定理 3.27。 对于任意 $i \le j$，存在线性空间同构

$$\mathcal{H}_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathbf{v}) = H_n^{i,j}(\mathcal{K},\mathbf{v}), \quad n \ge 0.$$

证明。 这直接由定理 3.23 得出。 □

根据持久局部拉普拉斯算子的定义，我们引入其谱性质，以刻画局部拓扑特征的演化。

定义 3.28。 对于任意 $i \le j$，维度 n 上的持久局部谱记为$\mathbf{Spec}(\Delta^{i}_{,\,n}{}^{j})$，它是算子 $\Delta^{i}_{,\,n}{}^{j}$的特征值多重集。

这一谱公式相对于纯粹的同调持久性具有显著优势： $\Delta^{i}_{,n}{}^{j}$的非零特征值提供了局部几何的“谱特征”。随着 $j-i$ 增大，这些特征值的演化追踪 v周围邻域的结构稳定性，从而能够区分瞬态几何噪声与稳健的局部奇异性。

3.3.3 使用链接复形计算持久局部拉普拉斯算子

定义 3.29. 设 $\mathcal{K}$: $(\mathbb{Z}, \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$ 为一个持久单纯复形。对任意顶点$v \in \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{K}_i$，令 $b = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid v \in \mathcal{K}_i\}$。 v 在 $\mathcal{K}$中的持久链接复形，记为 $\mathrm{Lk}_{\mathcal{K}}(v)$: $(\mathbb{Z}, \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$，定义如下:

(*i*) 对于 $i \in \mathbb{Z}$，索引 i 处的链接复形为

$$\mathrm{Lk}_{\mathcal{K},i}(v) := \begin{cases} \mathrm{Lk}_{\mathcal{K}_i}(v) & \text{if } i \geq b, \\ \emptyset & \text{if } i < b. \end{cases}$$

(*ii*) 对于 $i \leq j$，转移态射 $g^{i,\,j}$: $\mathrm{Lk}_{\mathcal{K},\,i}(v) \to \mathrm{Lk}_{\mathcal{K},\,j}(v)$ 是包含映射$\mathcal{K}_i \hookrightarrow \mathcal{K}_j$ 在相应链接上的限制。

凭借定理 2.14 中建立的链等距 ϕ，对持久局部拉普拉斯算子 $\Delta^{i,\,n^j}$的研究可形式化地化简为对持久链接复形 $Lk_{\mathcal{K}}(v)$ 的分析。

具体而言，设 Lk_i 和 $\mathrm{Lk}j$ 是持久链接复形滤过中索引 i和 j 处的链接复形。链同构 ϕ 导出如下交换图，将定理 2.15 中的共轭关系扩展到持久情形

$$\begin{array}{ccc} C_n(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^{\mathbf{v}}) & \xrightarrow{\bar{f}_n^{i,j}} & C_n(\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_j^{\mathbf{v}}) \\ \phi \downarrow \cong & & \cong \downarrow \phi \\ C_{n-1}(\mathrm{Lk}_i) & \xrightarrow{g_{n-1}^{i,j}} & C_{n-1}(\mathrm{Lk}_j), \end{array}$$

其中 $g^{i,\,n-1^j}$ 是持久链接复形的转移态射。由于 ϕ是等距同构，它保留了拉回微分的伴随结构，满足 $(\delta^{i,\,n^j})^* = \phi^{-1} \circ (\delta^{\mathrm{Lk}}_{,\,n\;i\,j,})^* \circ \phi$，其中 $\delta^{\mathrm{Lk}}_{,\,n\;i\,j,}$ 是作用于链接过滤上的广义拉回微分。

C因此，我们得到以下通过链接计算局部持久性的结果 .

定理 3.30。 （*i, j*）-持久局部拉普拉斯算子 Δ^{i,n^j}与维度为 $n-1$ 的持久链接复形 $\mathrm{Lk}_{\mathcal{K}}(v)$ 的（*i, j*）-持久拉普拉斯算子酉等价。具体而言，

$$\Delta_n^{i,j} = \phi^{-1} \circ \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk},i,j} \circ \phi,$$

其中 $\Delta^{\mathrm{Lk}}_{,\;n-1\;i\,j,}$: $C_{n-1}(\mathrm{Lk}_i) \to C_{n-1}(\mathrm{Lk}_i)$ 定义为

$$\Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk},i,j} := \delta_n^{\mathrm{Lk},i,j}(\delta_n^{\mathrm{Lk},i,j})^* + (d_{n-1}^{\mathrm{Lk},i})^* d_{n-1}^{\mathrm{Lk},i}.$$

证明。回顾一下，$\Delta^{i,j}_{,n} = \delta^{i,n+1^j}(\delta^{i,n+1^j})^* + (d_n^i)^* d_n^i$。根据定理 2.15，相对边界算子 d_n^i 与链接边界算子 $d^{\mathrm{Lk}}_{,n-1^i}$ 通过 ϕ共轭，即 $d_n^i = \phi^{-1} \circ d^{\mathrm{Lk}}_{,n-1^i} \circ \phi$。

对于持久分量，图表的交换性意味着 $\bar{f}^{i,\,n^j}_{,} = \phi^{-1} \circ g^{i,n-1^j} \circ \phi$。由于 ϕ 是等距同构，其伴随算子与其逆算子相同（即 $\phi^* = \phi^{-1}$），由此得到以下恒等式

$$\delta_{n+1}^{i,j} = \phi^{-1} \circ \delta_n^{\mathrm{Lk},i,j} \circ \phi \quad \text{and} \quad (\delta_{n+1}^{i,j})^* = \phi^{-1} \circ (\delta_n^{\mathrm{Lk},i,j})^* \circ \phi.$$

将这些共轭关系代入 Δ^{i,n^j}的定义中，我们得到

$$\Delta_n^{i,j} = \phi^{-1} \circ \Delta_{n-1}^{\mathrm{Lk},i,j} \circ \phi.$$

该 u nitary等价直接由 ϕ 是等距同构这一事实得出。 □

定理 3.30表明，持久局部谱与持久链接复形的持久谱重合。该结果将对相对持久算子的计算归结为经典持久拉普拉斯算子，从而可以直接应用组合持久拉普拉斯算子的高效算法。

4 数据集上的持久局部拉普拉斯算子

持久局部拉普拉斯算子可以自然地应用于离散数据集，尤其是点云和图数据。本节将详细介绍在这些实际场景中构造持久局部拉普拉斯算子的方法及其计算方法。

4.1 点集上的局部拉普拉斯算子

设 X 是嵌入在度量空间（M，d）中的有限点集。为分析特定点 $x \in X$ 周围的局部拓扑演化，我们使用 Vietoris-Rips 过滤构造一系列单纯复形。

4.1.1 Vietoris-Rips 过滤

尺度为 $r \geq 0$ 的 ***Vietoris-Rips*** 复形 记作 $\mathcal{VR}(X,\ r)$，定义为这样一种单纯复形：其 k-单形由 X 中直径不超过 r 的 $k+1$ 个点的子集构成。考虑严格递增的参数序列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m$，即可得到一系列嵌套单纯复形

$$\mathcal{VR}(X, r_0) \hookrightarrow \mathcal{VR}(X, r_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{VR}(X, r_m).$$

该序列定义了单纯复形范畴中的一个持久单纯复形 $\mathcal{VR}\colon (\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$，其态射为包含态射。

4.1.2 点集上的持久链接复形

对于任意固定点 $v \in X$，v 处的局部拓扑结构由相对链复形 $C_*(\mathcal{K}_i,\ \mathcal{K}_i^v)$ 刻画，其中 $\mathcal{K}_i = \mathcal{VR}(X,\ r_i)$ 表示尺度为 r_i 时的 Vietoris-Rips 复形，而 $\mathcal{K}_i^v = \{\sigma \in \mathcal{K}_i \mid v \notin \sigma\}$ 是由所有不包含顶点 v 的单形构成的子复形。

为便于高效计算，我们调用定理 2.14 中的链等距 ϕ，并转而研究 Vietoris-Rips 过滤的持久链接复形 $\mathrm{Lk}_{\mathcal{VR}}(v)\colon (\mathbb{Z},\ \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}$。对于每个尺度 r_i，v 的链接明确写为

$$\mathrm{Lk}_{\mathcal{K},i}(v) = \{\sigma \in \mathcal{VR}(X, r_i) \mid v \notin \sigma \text{ and } \sigma \cup \{v\} \in \mathcal{VR}(X, r_i)\}.$$

设 $N_i(v) = \{u \in X \setminus \{v\} \mid d(u,\ v) \leq r_i\}$ 为尺度 r_i 下 v 的邻域。局部链环与邻域几何之间的对应关系由以下命题形式化。

命题 4.1。对于任意 $v \in X$，我们有

$$\mathrm{Lk}_{\mathcal{VR}}(v) = \mathcal{VR}(N_\bullet(v), r_\bullet)\colon (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}.$$

这里，$\mathcal{VR}(N_i(v)\ r_i)$ 表示尺度为 r_i 时 $N_i(v)$ 的 ***Vietoris-Rips*** 复形。

证明。只需证明，对于任意索引 i，单形集 $\mathrm{Lk}_{\mathcal{K},i}(v)$ 与 $\mathcal{VR}(N_i(v)\ r_i)$ 相同。根据定义，当且仅当 $v \notin \sigma$ 且 $\sigma \cup \{v\} \in \mathcal{VR}(X, r_i)$ 时，$\sigma \in \mathrm{Lk}_{\mathcal{K},i}(v)$ 成立。在 Vietoris-Rips 构造中，后一条件成立当且仅当 $\sigma \cup \{v\}$ 中的所有顶点两两之间的距离都不超过 r_i。这等价于 $\sigma \in \mathcal{VR}(N_i(v)\ r_i)$。

由于两个过滤中的转移态射均由作用于这些相同单形集的相同包含映射诱导，因此持久性单纯复形相等。 □

4.1.3 通过邻域过滤计算局部谱

基于命题 4.1 中确立的恒等关系，持久局部拉普拉斯算子的计算可简化为对邻域过滤上的标准持久拉普拉斯算子进行谱分析。

设 X 是度量空间 (M, d)中的有限点集，且 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m$ 是递增的过滤尺度序列。对于任意固定的 $v \in X$，我们得到一个邻域过滤

$$N_0(v) \hookrightarrow N_1(v) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow N_m(v),$$

其中 $N_k(v) = \{u \in X \setminus \{v\} \mid d(u, v) \le r_k\}$。这诱导出一个 Vietoris-Rips 复形过滤

$$\mathcal{VR}(N_0(v), r_0) \hookrightarrow \mathcal{VR}(N_1(v), r_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{VR}(N_m(v), r_m).$$

令 $C^i_* = C_*(\mathcal{VR}(N_i(v)\ r_i))$表示尺度 r_i处对应的链复形。对于任意一对指标 $i \le j$，单纯复形的包含诱导出一个单射链映射 $f^{i,j}_*\colon C^i_* \hookrightarrow C^j_*$。在此背景下，第3节中定义的子空间 $\Theta^{i,j}_n$可简化为

$$\Theta^{i,j}_n = \{x \in C^j_n \mid d^j_n x \in \mathrm{im}(f^{i,j}_{n-1}) \cong C^i_{n-1}\}.$$

持久结构可由以下算子序列刻画

$$\Theta^{i,j}_n \xrightarrow{\delta^{i,j}_n} C^i_{n-1} \xrightarrow{d^i_{n-1}} C^i_{n-2},$$

其中，持久边界算子 $\delta^{i,j}_n$定义为以下映射的复合

$$\Theta^{i,j}_n \xhookrightarrow{\ \iota\ } C^j_n \xrightarrow{d^j_n} C^j_{n-1} \xrightarrow{(f^{i,j}_{n-1})^*} C^i_{n-1}.$$

链接复形的 (i, j)-持久拉普拉斯算子 $\Delta^{i,j}_{n-1}\colon C^i_{n-1} \to C^i_{n-1}$ 定义如下

$$\Delta^{i,j}_{n-1} = \delta^{i,j}_n (\delta^{i,j}_n)^* + (d^i_{n-1})^* d^i_{n-1}.$$

关键的是，X 在 v, $\Delta^{v,i,j}_n$ 处的 (i, j)-持久局部拉普拉斯算子与基于邻域过滤计算的持久拉普拉斯算子 $\Delta^{i,j}_{n-1}$ 酉等价。因此，我们得到以下谱恒等式

$$\mathbf{Spec}(\Delta^{v,i,j}_n) = \mathbf{Spec}(\Delta^{i,j}_{n-1}), \quad \text{for } n \ge 1.$$

这种谱等价性确保了通过分析邻域诱导子复形，可以高效提取 v 的多尺度局部拓扑特征。pl 局部化使持久局部拉普拉斯算子能够作为一种高分辨率多尺度描述符，用于大规模数据集；在这些数据集中，计算全局持久性在计算上将难以承受。

4.1.4 第 0 阶持久局部拉普拉斯算子

命题 2.16 表明，局部拉普拉斯算子与顶点的度相同。现在我们继续研究持久性情形下的 0 阶局部拉普拉斯算子。

命题 4.2。 第 0 阶持久局部拉普拉斯算子 $\Delta_0^{v,i,j}: C_0(\mathcal{K}_i、\mathcal{K}_i^v) \to C_0(\mathcal{K}_i、\mathcal{K}_i^v)$ 定义为

$$\Delta_0^{v,i,j} = \deg_{r_j}(v),$$

其中，$\deg_{r_j}(v)$ 表示 v 的邻居数量，这些邻居与其之间的距离不超过 r_j。

证明。 根据持久局部拉普拉斯算子的定义，对于情形 $n=0$，低阶项 $(d_0^i)^* d_0^i$ 消失。因此，我们有

$$\Delta_0^{v,i,j} = \bar{\delta}_1^{i,j}(\bar{\delta}_1^{i,j})^*.$$

这里，$\bar{\delta}_1^{i,j}$ 是相对链复形之间的拉回微分。回顾一下，持久边界算子的定义域为

$$\Theta_1^{i,j} = \{x \in C_1(\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_j^v) \mid d_1^j x \in C_0(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^v)\}.$$

考虑相对链群 $C_1(\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_j^v)$ 中的一个基元素，它是一个相对 1-单形（边）$[v,w]$，满足 $d(v,w) \le r_j$。其在链复形中的边界为 $d_1^j([v,w]) = [w]-[v]$。在相对空间 $C_0(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_i^v)$ 中，任意满足 $w \neq v$ 的顶点 $[w]$ 都表示零类。因此，我们有

$$d_1^j([v,w]) = -[v].$$

这意味着，$\Theta^{i,j}_1$ 由 $\mathcal{K}_j$ 中所有与 v关联的相对 1-单形线性张成。

$\Theta^{i,j}_1$ 的维度因此恰好为 $\deg_{r_j}(v)$。相对于$\Theta^{i,j}_1$的标准基以及 C_0^i的基 $\{[v]\}$，持久边界算子 $\bar{\delta}^{i,j}_1$表示为一个 $1\times\deg_{r_j}(v)$行向量

$$M_{\bar{\delta}_1^{i,j}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

那么，持久拉普拉斯算子的矩阵表示为

$$M_{\Delta_0^{v,i,j}} = M_{\bar{\delta}_1^{i,j}}(M_{\bar{\delta}_1^{i,j}})^T = \deg_{r_j}(v).$$

这个恒等式 $\Delta_0^{v,i,j} = \deg_{r_j}(v)$完成了证明。 □

4.2 图上的局部谱分析

谱分析是处理加权网络的基石，但对于大规模图，全局分解在计算上往往难以承受。这一局限促使我们转向局部谱方法。持久局部拉普拉斯算子通过将谱分析限制在邻居诱导子图的滤过上，解决了这一难题。该工具有效地将占用大量内存的全局运算转化为可扩展的多尺度局部计算任务，从而能够从海量网络中高效提取高分辨率的拓扑特征。

4.2.1 加权图上的持久局部不变量

设 $G=(V,\ E,\ w)$ 为一个加权图，其顶点集为 V，边集为 $E\subseteq V\times V$，权函数为 w: $E\to\mathbb{R}$。对于任意实数 r，我们考虑子图

$$G_r=(V,E_r),\quad E_r=\{e\in E\mid w(e)\le r\}.$$

这定义了团复形（也称为旗复形）的一个滤过。对于任意尺度序列 $0=r_0<r_1<\cdots<r_m$，我们得到一个嵌套的单纯复形序列

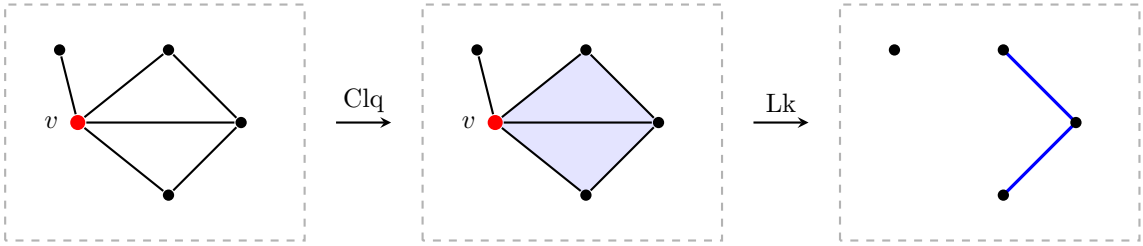
$$\mathrm{Clq}(G_{r_0})\hookrightarrow\mathrm{Clq}(G_{r_1})\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\mathrm{Clq}(G_{r_m}).$$

与上一节中的构造类似，对于任意顶点 $v\in V$ 和指标 $0\le i\le j\le m$，我们可以基于相对链复形得到持久局部同调 $H^{i,\ n}{}^{j}(G,\ v)$ 和持久局部拉普拉斯算子 $\Delta^{i,\ n}{}^{j}(G,\ v)$。

或者，也可以通过顶点的链接复形来分析局部结构。下面的命题给出了链接恒等映射的图论对应物：

命题 4.3。对于任意顶点 $v\in V$，令 $G_i[N_i(v)]$ 为由邻居集 $N_i(v)=\{u\in V\mid(u,v)\in E_i\}$诱导的子图。$v$ 的持久链接复形恒等于持久团复形

$$\mathrm{Lk}_{\mathrm{Clq}(G)}(v)=\mathrm{Clq}(G_\bullet[N_\bullet(v)])\colon(\mathbb{Z},\le)\to\mathbf{Simp}^{\hookrightarrow}.$$



(a) 图 G　(b) $\mathrm{Clq}(G)$　(c) $\mathrm{Lk}^{\mathrm{Clq}(G)}(v)$

图 5：图与其局部持久结构之间的关系。(b) 团复形 $\mathrm{Clq}(G)$ 用蓝色突出显示连通子结构。(c) 链接复形通过移除顶点 v，聚焦于邻居之间的关系结构。

对于任意 $i\le j$，令 $H^{i,n}{}^{j}(\mathrm{Clq}(G)\ v)$ 和 $\Delta^{i,n}{}^{j}(\mathrm{Clq}(G)\ v)$ 分别表示持久链接复形 $\mathrm{Clq}(G_\bullet[N_\bullet(v)])$ 的持久同调和持久拉普拉斯算子。根据相对复形与链接复形之间的对应关系，我们得到以下结构等价关系。

命题 4.4. 设 $G=(V,E,w)$ 为一个加权图。对于任意顶点 $v\in V$ 和 $i\le j$，有

(*i*) $H^{i,\ n}{}^{j}(G,\ v)\cong H^{i,\ j}_{n-1}(\mathrm{Clq}(G)\ v)$ 当 $n\ge1$;

(*ii*) $\Delta^{i,\ n}{}^{j}(G,v)$ 与 $\Delta^{i,\ j}_{n-1}(\mathrm{Clq}(G)\ v)$ 在 $n\ge1$ 时酉等价。

证明。该结论可由定理 3.30 和命题 4.3 直接得出。 □

4.2.2 图上低维持久拉普拉斯算子的计算

加权图上的 0 维（持久）局部拉普拉斯算子由顶点度给出；我们将重点转向 1 维局部拉普拉斯算子，以分析某个顶点周围的局部连通性和环结构。

由于相对拉普拉斯算子与链接拉普拉斯算子酉等价，1 维局部拉普拉斯算子 $\Delta_1(G, v)$ 的计算实际上可归结为链接复形 $\mathrm{Lk}_K(v)$ 的 0 维组合拉普拉斯算子。在团复形的情形下，该链接恰好就是诱导邻域子图 $G[N(v)]$, 的团复形，其中$N(v) = \{x \in V \mid (x, v) \in E\}$。

命题 4.5。设 $G = (V, E)$ 为一个图。对固定顶点 $v \in V$，*1* 维局部拉普拉斯算子 $\Delta_1(G, v)$ 与诱导子图 $G[N(v)]$ 的 *0* 维图拉普拉斯算子 L 酉等价。相对于以邻居 $\{u_1, u_2, \ldots, u_d\} \subseteq N(v)$为指标的标准基，表示矩阵 $L = (L_{pq})$ 为

$$L_{pq} = \begin{cases} \deg_{G[N(v)]}(u_p) & \text{if } p = q, \\ -1 & \text{if } p \neq q \text{ and } (u_p, u_q) \in E, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中 度$_{G[N(v)]}(u_p)$ 表示顶点 u_p 在诱导子图 $G[N(v)]$中的度。

证明。该结果源于如下事实：团复形 $\mathrm{Clq}(G[N(v)])$ 的0阶组合拉普拉斯算子与 $G[N(v)]$ 的标准图拉普拉斯算子完全一致。 □

考虑一个图过滤，其中 $G_i = (V_i, E_i)$ 是 $G_j = (V_j, E_j)$ 的子图。设 C_*^i 与C_*^j 分别表示与 G_i 和 G_j相关联的团复形的链复形。于是我们有

$$\Theta_{i,j} = \{x \in C_1^j \mid d_1^j x \in C_0^i\},$$

其中 $d_1^j \colon C_1^j \to C_0^j$ 是复形 C_*^j 的边界算子。我们将拉回微分$\delta^{i,}{}_1{}^j : \Theta_{i,j} \to C_0^i$ 定义为边界算子的限制，即 $\delta^{i,}{}_1{}^j x = d_1^j x$。于是，1维持久局部拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_1^{i,j} = \delta_1^{i,j} (\delta_1^{i,j})^* \colon C_0^i \to C_0^i.$$

为进行计算，令 $B_j \in \mathbb{R}^{|V_j| \times |E_j|}$ 为 G_j的关联矩阵。我们根据顶点集 V_i 和 $V_{out} = V_j \setminus V_i$对 B_j 的行进行划分。然后，写作

$$B_j = \begin{pmatrix} B_{in} \\ B_{out} \end{pmatrix},$$

其中， B_{in} 和 B_{out} 分别是由对应于 V_i 和 V_{out}中顶点的行组成的子矩阵。

命题 4.6。设 $G_i \subseteq G_j$ 如上所定义。 C_0^i 的标准基下，持久局部拉普拉斯算子 $\Delta^{i,}{}_1{}^j = \delta^{i,}{}_1{}^j (\delta^{i,}{}_1{}^j)^*$的表示矩阵为

$$L^{i,j} = B_{in} P_\Theta B_{in}^T,$$

其中， P_Θ 是将 C_1^j 投影到子空间$\Theta_{i,\ j}$上的正交投影矩阵。具体而言， P_Θ 可通过摩尔－彭若斯伪逆计算得到：

$$P_\Theta = I - B_{out}^T (B_{out} B_{out}^T)^\dagger B_{out}.$$

证明。 拉回微分 $\delta^{i,\ }{}_1{}^j$ 是边界算子 d_1^j 在 $\Theta_{i,\ j}$上的限制。对于任意 $x \in \Theta_{i,\ j}$，其像属于 C_0^i，因此我们可以将其作用写为 $\delta^{i,\ }{}_1{}^j x = B_{in} x$。伴随算子 $(\delta^{i,\ }{}_1{}^j)^*: C_0^i \to \Theta_{i,\ j}$ 由 $P_\Theta B_{in}^T$给出，其中 P_Θ 是将 C_1^j 投影到 $\Theta_{i,\ j}$上的正交投影。

因此，持久局部拉普拉斯算子为

$$\Delta_1^{i,j} = \delta_1^{i,j} (\delta_1^{i,j})^* = B_{in} P_\Theta B_{in}^T.$$

利用矩阵核的正交投影性质，可得 $P_\Theta = I - B_{out}^T (B_{out} B_{out}^T)^\dagger B_{out}$，其中 † 表示摩尔－彭若斯伪逆。因此，表示矩阵为

$$L^{i,j} = B_{in} \left(I - B_{out}^T (B_{out} B_{out}^T)^\dagger B_{out} \right) B_{in}^T,$$

如所需。 □

例4.7. 设 $G_j = (V_j,\ E_j)$ 是一个具有 $V_j = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ 和 $V_i = \{u_1, u_2\}$的图。边集 E_j 由一条直接内部边 $e_1 = (u_2,\ u_1)$ 和一条长度为 3 的外部桥路径组成，该路径由 $e_2 = (v_1,\ u_1)$、 $e_3 = (v_2,\ v_1)$ 和 $e_4 = (u_2,\ v_2)$ 构成。

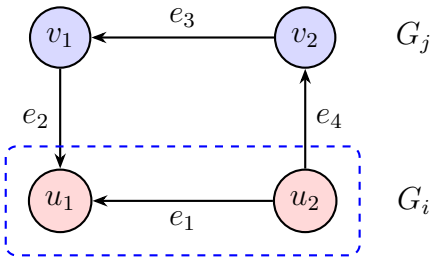


图6：图 G_i 与 G_j的示意图。

边界算子 d_1^j 由关联矩阵 B 表示，并且我们有

$$d_1^j \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} B.$$

这里，

$$B = \begin{pmatrix} B_{in} \\ B_{out} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

子空间$\Theta_{i,j}$ 定义为 B_{out}的核。求解 $B_{out}\mathbf{x} = 0$ 得到一个由正交基张成的二维子空间：

- $\xi_1 = (1,0,0,0)^T$（表示内部边 e_0）；
- $\xi_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)^T$（表示外部路径 $e_1 + e_2 + e_3$ 的链）。

到 $\Theta_{i,\ j}$ 上的正交投影矩阵由 $P_\Theta = \frac{\xi_1\xi_1^T}{\|\xi_1\|^2} + \frac{\xi_2\xi_2^T}{\|\xi_2\|^2}$ 给出。持久局部拉普拉斯算子 $L^{i,\ j}$ 通过乘积 $B_{in}P_\Theta B_{in}^T$ 计算。基向量在 B_{in} 下的像为

$$B_{in}\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_{in}\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

因此，我们得到

$$L^{i,j} = \frac{(B_{in}\xi_1)(B_{in}\xi_1)^T}{1} + \frac{(B_{in}\xi_2)(B_{in}\xi_2)^T}{3} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$L^{i,\ j}$ 的谱隙从 2（ G_i固有的值）增至 $8/3$ ，这表明持久拉普拉斯算子有效地捕捉到了 G_j中的外部路径所带来的 u_1 与 u_2 之间连通性的增强。

4.2.3 持久局部拉普拉斯算子的谱解释

在 0 维情形下，组合拉普拉斯算子与经典图拉普拉斯算子 L一致。在谱图论中， L 刻画了网络上的扩散过程。零特征值的重数对应于 0 阶贝蒂数，表示连通分支的数量。值得注意的是，第二小的特征值称为费德勒值或代数连通度，它量化了图连通性的稳健程度。这个谱隙与切格不变量密切相关，为几何瓶颈比提供了一种离散类比。

组合拉普拉斯算子将这些概念推广到高维单纯复形。根据复形的霍奇定理， k维拉普拉斯算子 Δ_k 的调和空间与 k 阶单纯同调群 $H_k(K;\mathbb{R})$ 同构。除核之外，非零谱还反映了复形的内蕴几何，例如 k维空腔的“紧密程度”或包围程度。

在持久情形下，持久拉普拉斯算子具有霍奇分解的持久版本。其调和部分自然同构于持久同调群，这是拓扑数据分析中的核心对象。与此同时，非调和谱刻画了滤过不同尺度下扩散速率的演变，以及空腔闭合的“流动”。

本文提出的局部拉普拉斯算子刻画了特定顶点邻域中的局部几何特征。具体而言，其调和空间与相应的局部同调群同构。零维局部拉普拉斯算子的谱反映顶点度，而一维局部谱则刻画其邻居之间的连通性和扩散效率。更高维的局部谱描述了该顶点周围局部空腔的存在及其相对闭合程度。

最后，持久局部拉普拉斯算子将这一方法扩展到多尺度情形。持久局部拉普拉斯算子的调和空间与相应的持久局部同调之间存在同构。其谱演化为局部空间提供了更精细的描述，捕捉扩散速度的动态变化，以及局部围闭在滤过过程中的拓扑通量。

从本质上说，经典拉普拉斯算子是刻画拓扑和几何信息的基础算子，而持久局部拉普拉斯算子则代表了它向更高维度分析、动态多尺度跟踪和局部几何描述的发展。

5 致谢

本研究部分受国家自然科学基金 [项目编号12401080], 、重庆理工大学科学研究基金、北卡罗来纳大学夏洛特分校启动研究基金、国家重点研发计划（NKPs） [项目编号 2024YFA1013201], 、重庆市自然科学基金（NSFCQ） [项目编号 CSTB2024NSCQ-LZX0040], 以及重庆市科学技术局专项项目 [项目编号 2025CCZ015]资助。

参考文献

[1] Jo˜ao Carlos Alves Barata 和 Mahir Saleh Hussein。《Moore–Penrose伪逆：理论教程综述》。巴西物理学杂志，42(1):146–165，2012。[2]Adi Ben-Israel 和 Thomas NE Greville。《广义逆：理论与应用》。施普林格，2003。[3] Gabriele Cesa 和 Arash Behboodi。通过持久局部同调层构建代数拓扑网络。载于*NeurIPS 2023 Workshop on Symmetry and Geometry in Neural Represen-tations*。[4] Dong Chen、Jian Liu、Chun-Long Chen 和 Guo-Wei Wei。用于多尺度学习的多孔材料交互拓扑变换器。*arXiv*预印本 *arXiv:2509.18573*，2025。[5] Jiahui Chen、Rundong Zhao、Yiying Tong 和 Guo-Wei Wei。演化de Rham-Hodge方法。离散与连续动力系统。*B*辑，26(7):3785，2021。[6] David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。持久图的稳定性。离散与计算几何，37(1):103–120，2007。[7] Beno Eckmann。复形中的调和函数与边值问题。*Commen-tarii Mathematici Helvetici*，17(1):240–255，1944。[8] Herbert Edelsbrunner、John Harer 等。持久同调——综述。当代数学，453(26):257–282，2008。[9] Brittany Terese Fasy 和 Bei Wang。探索拓扑数据分析中的持久局部同调。载于*2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing(ICASSP)*，第6430–6434页。IEEE，2016。[10] Aziz Burak G¨ulen、Facundo M´emoli、Zhengchao Wan 和 Yusu Wang。持久拉普拉斯算子向单纯形映射的推广。载于第*39*届国际计算几何研讨会（*SoCG 2023*），第37–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023。

[11] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，2002。[12] Anil Nirmal Hirani。《离散外微积分》。加州理工学院，2003。[13] Danijela Horak 和 J¨urgen Jost。单纯复形上的组合拉普拉斯算子的谱。数学进展，244:303–336，2013。[14] Oliver Knill。吴特征数的上同调。*arXiv*预印本 *arXiv:1803.06788*，2018。[15] Dmitry Kozlov。《组合代数拓扑》。施普林格，2008。[16] Lek-Heng Lim。图上的霍奇拉普拉斯算子。*SIAM*评论，62(3):685–715，2020。[17] Jian Liu、Dong Chen 和 Guo-Wei Wei。交互同伦与交互同调。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.16322*，2023。[18] Jian Liu、Dong Chen 和 Guo-Wei Wei。数据分析中的持久交互拓扑。数据科学基础，2025。[19] Jian Liu、Jingyan Li 和 Jie Wu。持久拉普拉斯算子的代数稳定性。同调、同伦与应用，26(2):297–323，2024。[20] Facundo M´emoli、Zhengchao Wan 和 Yusu Wang。持久拉普拉斯算子：性质、算法及其影响。*SIAM*数据科学数学杂志，4(2):858–884，2022。[21] James R Munkres。《代数拓扑基础》。CRC出版社，2018。[22] Minghua Wang、HU Yan、Ziyun Huang、Di Wang 和 Jinhui Xu。图学习中的持久局部同调。机器学习研究汇刊，2024。[23] Rui Wang、Duc Duy Nguyen 和 Guo-Wei Wei。持久谱图。生物医学工程数值方法国际期刊，36(9):e3376，2020。[24] Wu Wen-Ts¨un。组合拓扑与组合不变量。载于*Colloquium Mathe-maticum*，第7卷，第1–8页。波兰科学院。波兰科学院数学研究所，1959。[25] Xiongfeng Zhan、Xueyi Huang 和 Lu Lu。复形对的组合拉普拉斯算子与相对同调。*arXiv*预印本 *arXiv:2507.16381*，2025。[26] Afra Zomorodian 和 Gunnar Carlsson。计算持久同调。离散与计算几何，33(2):249–274，2004。