arXiv:2603.07592v1 [math.HO] 8 Mar 2026

皮科克原理作为一种保守策略

Iulian D. Toader*

（即将发表于《精密科学史档案》）

摘要：认为皮科克恒久性原理已被哈密顿引入非交换代数所推翻的观点，鉴于Peacock对四元数的积极接受以及哈密顿对其原理的认可，一直显得颇为奇怪。但这一观点不仅奇怪，而且是错误的。为了表明这一点，我批判性地分析Peacock试图拒斥其原理之可能例外的努力，例如阶乘函数以及欧拉提出的一个无穷级数。随后我论证，恒久性原理最好被理解为一种保守策略的表达，其哲学基础在于Hume的观念中的推理法则；该策略主张尽可能最大限度地保存这些法则，从而允许例外，即对这些法则的违反。按照这一解读，如果违反交换性的理由压过保存它的理由，非交换乘法并不会使皮科克原理失效。最后，我表明哈密顿在发展其四元数微积分时，正是遵循了这样一种保守策略。

*维也纳学派研究所，维也纳大学，iulian.danut.toader@univie.ac.at

1 引言

在其数学哲学史资料集所收录的一条注释中，William Ewald 写道：“Peacock 等价形式永存原理是对其符号代数的一种束缚，并使他在制定其规则时与算术定律类比得过于紧密。”（Ewald 1996, 321）如此一来，符号代数便不允许对其运算作几何解释，更重要的是，也不会为非交换运算留下余地。事实上，在另一条注释中，Ewald 写道，皮科克原理“实际上保证了符号代数将始终遵循人们所熟悉的算术定律。”（同上，449）在评述约于 Peacock 之后十年提出的 Gregory 代数时，Ewald 提到了一项重大进展：“代数在此已摆脱‘等价形式永存原理’，也不再过分依赖正实数的算术。”（同上，322）尽管允许对符号运算作几何解释，这一代数仍然不包含非交换运算——可以说已摆脱皮科克原理，但尚未完全摆脱。直到数年之后，哈密顿发现四元数，而 Cayley 与 Graves 各自独立地引入了八元数上的非结合运算，情况才有所改变。

然而，认为 Peacock 的代数不允许对其符号运算作几何解释，这一说法似乎源于误解。事实上，他认为，符号代数不一定需要算术解释，但必然可以作算术解释；显然，这也允许许多不同的解释，包括几何解释（Toader 2024, 138）。Peacock 确实认为，与几何解释相比，算术解释更为方便（若以在应用中的实用性来衡量方便程度）；但后来，他逐渐认识到几何解释（更准确地说，三角解释）确实具有重要价值。无论如何，本文关注的是这样一种说法：由于坚持等价形式恒久性原则，Peacock 的符号代数将无法容纳非交换运算。这一说法重申了一种由来已久且普遍存在的批评，即随着日益抽象的数学结构不断发展，他的原则已被证明无效。本文旨在说明，这种批评是错误的。

批评针对的是　　至少早在罗素的第四本著作《数学原理》问世时便已如此；该书写于　t-

1900年，三年后出版。罗素提到他认为哈密顿的研究秉持着“对普通代数更为自由的态度”，以及怀特海所发展的“泛代数中范围广得多、也更有趣的问题”之后，评论道：

> 演绎式泛代数的可能性，往往建立在一种假定的形式恒久性原则之上。因此，例如有人认为，复数依照这一原则，必须遵循与实数相同的加法和乘法定律。但事实上，并不存在这样的原则。……因此，形式恒久性原则应被视为纯粹的错误：算术加法以外的运算可能具有其部分或全部形式性质，但也很容易设想出缺少其中部分或全部性质的运算。（罗素 1903，377）

当然，如果假定恒久性原理规定所有数系都必须保留所有算术定律，那么人们会像罗素那样，认为非交换或非结合运算是该原理的反例，也就不足为奇了。我试图驳斥这种不留余地的批评，缘于以下简短的观察。如果这种批评是正确的，那么不仅 Peacock 对四元数持赞许态度（克罗 1967，34）会令人费解，哈密顿在自己的数学研究中运用恒久性原理（例如，从四元数到双四元数的过程中；Fisch 2017，201），也会显得若非虚伪，便相当令人困惑。此外，19世纪数学家，尤其是 Hankel，以及20世纪数学家（如冯·诺依曼；Toader 2025，第3章）后来采用这一原理，也会显得颇为神秘。提出这个显而易见却似乎遭到忽视的问题：如果数学确实已经抛弃了恒久性原理，与它彻底脱离，那么他们怎么会接受这一原理呢？四元数代数中对交换性的违背，是否可能与 Peacock 原理相容？如果可能，又是如何相容的？

为回答这些问题，本文将按以下方式展开。第二节中，我将介绍 Peacock 在1830年至1845年间提出的皮科克原理的几种表述，并指出它们之间的一些显著差异。随后，我将解释他对等价形式的理解，以及他最初关于算术代数与符号代数之间关系的构想。我重点讨论他的观点：相对于符号代数而言，像算术代数这样的从属科学具有启发作用，但不具限制性，也就是说，算术运算的含义并不会

沿用到符号代数中。作为比较，我还会提及 Kelland 提出的一种替代代数体系；该体系被大力宣传为优于 Peacock 的体系，因为它既具有启发作用，也具有限制性。

在第三节中，我开始探讨 Peacock 原则的普遍性问题。我重新审视了德摩根的一篇长篇评论，讨论他提出的异议：即使符号代数中的等价形式满足 Peacock 所阐述的普遍性条件，也就是说，即使这些形式对其变量的任意取值都成立，也不能保证他的原则具有普遍性。考虑到该原则不同表述之间的差异，我接着指出，恒久性原理允许存在这样的等价形式：它们属于符号代数，却不属于算术代数。因此，至少从某种意义上说，这并不是一条普遍原则。

在第四节中，我讨论了一个更严重的异议：Peacock 原则并不具有普遍性，因为算术代数中存在一些在符号代数中无法保持的等价形式。我重点讨论阶乘函数，它显然违反了普遍性条件。正如 Anna Bellomo 最近指出的，Peacock 尽管如此仍试图证明阶乘函数在符号代数中得以保持，因为阶乘函数可以由伽马函数导出（Bellomo 2025年，158）。但我认为他的尝试失败了，因为伽马函数违反了一项不变性条件；Peacock 本人在试图应对欧拉提出的一个无穷级数时阐述了这项条件，而欧拉当时将该级数作为恒久性原理的反例。Peacock 认为，符号代数中的等价形式必须是不变的，也就是说，对于变量的任意取值，它们的构成都不能改变。然而，欧拉无穷级数和伽马函数都会在变量取某些值时改变其构成。更重要的是，我认为 Peacock 的尝试展现了判断等价形式是否属于例外情况所需的审慎考量。

在第五节中，受到 Mic Detlefsen 对皮科克原理某项限定的强调（Detlefsen 2005, 283平方）的启发，我转而探讨我认为该原则的哲学根源：休谟关于推理法则的观念。据我理解，休谟认为，推理法则应当尽可能得到保留，因为它们在应用中，尤其是在信念形成中，十分有用。这也为例外留出了余地：尽管在实践中难以维持，违反这些法则并非不可能，

我认为，皮科克原理应被解读为这一保守策略的体现：符号代数必须尽可能保留算术代数的等价形式，因为这些形式在应用中，尤其是在计算中，十分有用。不过，这同样允许例外：符号代数可以不遵守算术代数中的等价形式；尽管在实践中不便，符号代数也可能以其他假设为基础，甚至以完全任意的假设为基础。如果这一解读正确，那么，存在属于算术代数却不属于符号代数的等价形式，并不一定会使皮科克原理失效。

在第六节中，我论证了乘法交换性确实属于这种情况：尽管四元数代数违反了这条算术定律，但这种违反并不会使恒久性原理失效。事实上，哈密顿遵循了皮科克原理，试图保留所有算术定律，但他意识到，放弃交换性的理由胜过保留它的理由。哈密顿本人对其四元数微积分发展的论述，恰好描述了我认为属于皮科克原理所体现的保守策略的那种权衡。对于更一般的数学结构，也可能得出类似的结论。

2 恒久性原理

乔治·皮科克（1791年4月9日—1858年11月8日）曾就读于剑桥三一学院，后来在那里担任讲师，并共同创立了分析学会。在他于1830年出版《代数论》之前数年，他便已被授予神职，并当选为英国皇家学会院士。该书第二版分为两卷，分别于1842年和1845年出版。皮科克积极为剑桥哲学学会撰写书评，并受邀向英国科学促进会提交报告。1837年，他成为剑桥的朗德天文学教授；但在1839年获任伊利大教堂主任牧师后，他便离开剑桥，并一直兼任这两个职位直至生命终结。然而，皮科克首先是一位数学革新者，其著作被恰当地描述为“在被迫创造性地摸索新选择的同时，试图坚守旧有事物的巧妙尝试。”（Fisch 2017，14）他所阐述的指导这类尝试的方法，

体现在他提出的等价形式恒久性原则中，该原则表述为

在《论著》第一版中，表述如下：

> 任何形式，只要在使用一般符号表示时与另一形式在代数上等价，无论这些符号表示什么，都必然为真。
> 反之，如果我们在算术代数或任何其他从属科学中发现了一种等价形式，而其中的符号虽然在形式上是一般的，但其性质是特定的，那么当符号在性质和形式上都是一般的时，该形式也必然是等价形式。（Peacock，1830年，第104页；已删去斜体）

在提交给 英国科学促进会的报告中，这一由两部分组成的表述 t
原则略有修改：

> 直接命题：凡是用一般符号表示时在代数上等价于另一形式的形式，无论这些符号表示什么，都必定仍然等价。
>
> 逆命题：在作为提示科学的算术代数中，只要符号的形式是一般的、尽管其值是特定的，那么凡是可以发现的等价形式，当这些符号的本质和形式都具有一般性时，也将继续是等价形式。（Peacock 1833，198-199；已删除斜体）

最后，在《论著》第二版的两卷中，Peacock 以更彻底的方式修改了这一表述：

> [算术代数中通过应用其规则推导出的所有结果，只要形式具有一般性、尽管值是特定的，也同样是符号代数的结果；在符号代数中，这些结果的值和形式都具有一般性。（皮科克，1842年，vi-vii）
>
> 凡是符号的形式具有一般性而值是特定时彼此等价的代数形式，在符号的值和形式都具有一般性时也同样等价。（皮科克，1845年，59）

这些原则表述之间有几处值得注意的差异，但这里我只讨论其中两点。第一，有些表述比另一些更为一般。第二，早期版本包含两个命题，一个是“正向”命题，另一个是它的“逆命题”；而后期版本只包含后者的不同形式。在讨论这些差异之前，先简要说明一下 Peacock

似乎如何理解算术代数中的等价形式这一概念：在算术代数中，符号——例如下文的变量 x、m 和 n ——表示正整数；而在符号代数中，这些符号则可以表示任意量。考察他自己的例子可以看出，他所谓的等价形式，是指运算的定律或规则，例如 $x(m+n) = xm + xn$和 $xy = yx$ 以及 $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$；但也包括通过应用规则得到的结果（即定理），例如二项式定理：

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + ...$$

所有这类形式都是数学方程。Peacock 将它们称为复数形式的“等价形式”，因为对于变量的任意取值，其左侧和右侧的表达式在数值上都相等。但在指称任一侧的表达式是另一侧的“等价形式”时，他也使用单数形式。因此，$(1+x)^m(1+x)^n$是一种与$(1+x)^{m+n}$等价的形式，就像无穷级数

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + ...$$

是$(1+x)^n$的一种等价形式。更重要的是，在 Peacock 看来，像算术代数这样的从属科学相对于符号代数而言具有启发性，但不具有限制性。这意味着，在从算术代数过渡到符号代数时，后者必须保留前者的等价形式，但不一定保留其意义。特别是，符号代数中的运算并非算术运算：例如，“+”并不表示算术加法，而表示符号加法；只有当类似$(1+x)^n$的表达式在正整数上进行解释时，后者才归约为前者。因此，根据 Peacock 的观点，符号代数的规则和定理并不具有与其算术对应物相同的意义。

Peacock认为算术代数具有启发性但不具限制性的观点受到了同时代人的质疑。爱丁堡数学教授Philip Kelland主张，算术代数应当具有启发性，但也应当具有限制性，也就是说，符号代数不仅应当保留算术代数的等价形式，还应当保留其意义。因为，

他主张，如果算术意义没有被沿用，符号代数的结果就会毫无意义，因而也就无法保证它们与算术代数结果的一致性（Kelland 1843年，120）。Kelland写道，符号代数

> 允许任何任意的定义，只要能够证明它们不会导致与算术不一致的结果。然而，必须如此这一必要性，使这门科学与Peacock先生所阐述的科学截然不同。在他的科学中，既不可能事先了解符号的性质，也不可能察觉诸运算彼此之间或与另一门科学之间的相互一致——而在我们的科学中，这种了解与察觉是不可或缺的。（前引书，110页及以下。）

Kelland似乎认为，只有当人们具备关于符号代数中变量与运算之性质的先验 知识时，才能证明一致性要求已得到满足。这种知识想必并非基于它们在正整数这一特定域上的解释，因为那将是后验 知识。他所要求的先验 知识，可以通过不仅保留等价形式、而且保留其意义来获得，也就是把运算的意义从算术代数带到符号代数之中。这表明，Kelland并不容许符号代数中存在那些在算术代数中并非等价形式的等价形式。事实上，他提出了另一种体系，他认为该体系将优于Peacock 的体系，但它或许恰可被刻画为受束缚所约束：

> 我曾尽力简要阐述的代数体系以算术为基础，并通过扩展定义、将源自从属科学的性质纳入其引入的形式，逐步向上发展。算术具有启发性，但其作用不止于此，它还具有限制性。（同上，120）

我现在转向 Peacock 原则的普遍性这一问题，并开始探讨如下问题：算术代数与符号代数中的所有等价形式，是否都在该原则所规定的意义上是永久的，还是仅有其中一部分如此？首先，我要问该原则是否允许存在这样的等价形式：它们在符号代数中是等价形式，但在算术代数中却不是。我的回答是：就规则而言是肯定的，但就定理而言是否定的。随后，我提出一个更为困难的问题：该原则能否容纳等价

算术代数中那些并非符号代数等价形式的形式。我的回答同样是肯定的；然而，这并不使皮科克原理失效。

3 直接命题

在一篇篇幅很长的评论中（分为两部分，每部分近 20 页），德摩根也探讨了算术代数与符号代数之间的关系（德摩根，1835）。他赞同 Peacock 的观点，认为从属科学不应具有约束性，但坚持认为它也不应具有提示性。德摩根提出，符号代数应当改为建立在完全任意的假设之上。他的论证大致如下：如果从属科学具有提示性，那么符号代数的结果就可能有许多不同的解释。但既然每种解释都能验证相同的定理，这就会促使人们从意义转向纯粹形式，而这意味着，原则上，任何从属科学对于符号代数的发展都可有可无：“如果要建议做出任何改变，那就应当在很大程度上放弃提示科学。”（同上，310）之所以是很大程度上而非完全放弃，是因为提示科学在数学教育中具有优势，而德摩根的评论有很大一部分正是围绕这一点展开的。

关于 Peacock 在《论著》第一版（1830年）中提出的皮科克原理，德摩根指出，虽然逆命题看起来清楚明了、没有问题，但直接命题却应当更仔细地审视：

> 因为在我们看来，原则的第一部分是所有定义的基础。这些定义的普遍性，以及由此合法得出的推论的普遍性，构成了 [符号] 代数的独特特征。……Peacock 构建这些基本假设，目的仅仅是为了证明该原则可以 [普遍] 应用。（同上，308）

德摩根认为，Peacock 假定定义符号运算的规则以及由此推导出的符号结果具有普遍性，即适用于变量的任意取值，这是正确的。这与德摩根本人提出的主张一致：符号代数应建立在完全任意的假设之上。但他也指出，假定符号代数中的等价形式

具有普遍性固然必要，却不足以确立 Peacock 原则的普遍性。德摩根认为，还需要进一步论证直接命题，并由此论证这样一项要求：符号代数中的所有等价形式都应在算术代数中得以保留。

然而，Peacock 允许符号代数中存在这样的等价形式：它们在算术代数中并不是等价形式。为了理解这一点，我们必须仔细考察他对原则的表述之间的差异；这些表述引自上一节开头。其中一项差异涉及从属科学的指定。按照 Peacock 对 1833 年逆命题的表述，它不如 1830 年的版本一般，因为其中除了算术代数之外，没有提及任何其他从属科学。这可能造成一种印象，即人们实际上认为，或者甚至认为算术代数理应是发展 Peacock 符号代数的唯一提示科学。这也可能使人产生这样的看法：后者的运算及其结果除了算术解释之外，不可能有其他解释。然而，正如我在引言中已经指出的，事实并非如此：事实上，1830 年的版本明确允许存在非算术提示科学。此外，直接命题的两个版本都允许一般符号表示非算术量。进一步说，1842 年对原则的表述以同样的方式不如 1845 年的版本一般，因为它明确提到算术代数是一门从属科学；但它也以另一种方式显得不够一般，因为它只涉及结果（即定理），而不是所有等价形式。或许最重要的差异在于，Peacock 在其原则的这些后期表述中完全删去了直接命题。这一转变该如何解释？他是否意识到，符号代数中存在这样的等价形式：当其变量取遍正整数时，这些形式不再保持等价？他是否逐渐认识到，符号运算的某些规则可能在算术代数中失效？

认为这种失败足以让 Peacock 放弃直接命题，是相当合理的。这一解释由 Menachem Fisch 提出；他很自然地假定，Peacock 必定认为直接命题既适用于符号代数的规则，也适用于由这些规则推导出的定理。但 Fisch 还作出了如下正确的

观察：“在《论著》的 [第一版中，] 直接命题 始终只应用于低层次的结果——从未应用于基本原则或运算规则的层面。”（Fisch 2017，193）然而，在我看来，Peacock 从未将直接命题应用于规则，而只应用于定理，其原因在于他实际上认为该命题只适用于定理，从不适用于规则。这一点可以从他本人对直接命题的论证中看出；该论证紧接在 1833 年对这一原则的表述之后，内容如下：

> 直接命题必定为真，因为据以推出此类等价形式 [即直接命题所涉及的那些形式] 的符号组合律，并不涉及符号的具体取值。(Peacock 1833, 199)

这一辩护有力地表明，1833年直接命题的预期应用应限于定理，即在符号代数中借助其运算规则或组合律推出 的等价形式。Peacock认为，如此限定于符号代数之定理的直接命题之所以成立，恰恰是因为符号代数的规则以一般符号表述，并不指称任何特定对象，并且它们普遍成立，对其变量的任何取值都成立。显然，他既想要普遍的规则，也想要可应用的定理。但为确保由普遍规则导出的符号代数定理的可应用性，他要求将这些定理转移到算术代数（或任何其他从属科学）中。依我的解读，这一要求正是由直接命题所表达的。

但如果它适用于定理，而不适用于规则，那么 Peacock 为什么要在《论著》第二版中删去直接命题呢？毕竟，在该版第一卷（1842年）中，他对原则的表述明确仅涉及定理。保留同样受此限制的直接命题，本来完全合情合理，而他却将其删去了。难道他意识到，符号代数中也可能存在不适用于正整数的定理吗？仔细分析后便会发现，Peacock 此举的解释在于：适用于定理而不适用于规则的直接命题，已经包含在他对逆命题背后一项假设的论证之中：

> [W]我们可以假定存在这样一种符号形式，它在形式和性质上都具有普遍性，因为它满足这类形式唯一必须满足的条件：

即与算术代数的结果完全一致，只要这些结果为两门学科所共有。（同上，199）

我认为，这段话应当这样理解：说两门科学共有某些结果（即定理），意味着这些结果可以从符号代数转移到算术代数中；在符号代数中，变量可以取任意对象，而在算术代数中，变量只能取正整数。这样的转移需要对符号代数中的变量和运算作出算术解释。因此，只要满足以下条件，我们就有理由假定符号形式的存在：转移到算术代数后，符号代数的所有定理都必须对正整数成立。Peacock 反复强调这一条件："符号结论 [必然] 与算术代数的结论完全一致"（同上，201）。不过，只要承认直接命题在 1833 年的表述中适用范围有限——它适用于定理而非规则——这实际上表达的正是该表述所提出的要求。然而，Peacock 关于完全一致的条件或许强于必要程度。Kelland 所强调的较弱要求（见上一节）或许就足以证明符号形式的存在：符号代数的任何定理经算术解释后，都不应与任何算术定理相矛盾。

我对 Peacock 这一做法的解释——他在后来阐述恒久性原理时删去了直接命题——在一定程度上挑战了这样一种观点：恒久性原理是一种束缚，即一条普遍原则，规定符号代数中的所有等价形式都必须是算术代数中的等价形式。事实并非如此。因为事实证明，正确理解后，这一原则实际上允许符号代数中存在并非算术代数规则的规则，却不允许符号代数中存在并非算术代数定理的定理（即在正整数范围内作出解释时）。但它是否也允许算术代数中的等价形式——无论是规则还是定理——并非符号代数中的等价形式?

由于这个问题通常被认为只要回答肯定，就会使该原则失效，因此我想讨论 Peacock 本人如何尝试排除逆命题的两个例外：阶乘函数和欧拉提出的一个无穷级数。即便这两次尝试成功，也不足以成为排除所有可能例外的充分理由。不过，这两次尝试

有助于澄清 Peacock 认为所有属于其原则适用范围的等价形式都必须满足的其他条件。我们将看到，考虑到这些条件后，阶乘函数和欧拉无穷级数都无法在符号代数中保留。

4 逆命题

首先考虑阶乘函数 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$。尽管这对正整数成立，但它并非对 n 的所有取值都成立，因为它显然对实数不成立。换言之，$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ 是 $n!$ 在算术代数中的等价形式，但在符号代数中则不是。因此，由于它不满足符号形式的普遍性条件，这就足以质疑 Peacock 原则的普遍性。阶乘函数不过是他追随欧拉所称的“不可解释函数 .....就其形式而言，显然仅限于其所涉及的一个或多个一般符号取整数和正值”的一个例子（前引书，210）。

为什么说是表面上如此？因为正如 Bellomo 所强调的（Bellomo 2025年，158），Peacock 指出，沿袭勒让德的做法，阶乘函数可以从他称为“超越函数”（Peacock 1833，211）的函数 $\Gamma(r+1) = \int_0^1 dx(log\frac{1}{x})^r$ 推导出来。这个函数同样沿袭勒让德的称呼，被他称为伽马函数；它对正整数有定义，也适用于 r 的其他取值，例如实数。只要注意到 $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$，就能轻易推导出阶乘函数。Peacock 曾说，这个函数“允许 r 取任意值”（同上）。事实上，他坚持认为，$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$“无论 r 取何值都成立，无论是正数还是负数、整数还是分数。勒让德显然将这个方程限定为 r 的正值”，但 Peacock 认为这“显然是不必要的限制”。（前引书，211及以下）因此，像 Peacock 一样，人们或许会倾向于认为，$\Gamma(r+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (r-2) \cdot (r-1) \cdot r$ 以隐蔽或隐含的方式保留了符号代数中的阶乘函数。

但勒让德当然是对的：当 $r < 0$ 时，伽马函数发散。尽管如此，Peacock 仍坚持认为，对于负值的r，伽马函数只是改变了它的构成：他写道，这些值提供了“函数构成发生变化的迹象”（同上

引文，215）。他的意思是，这种变化并不妨碍在符号代数中保留阶乘函数。但事实证明，这违背了 Peacock 本人对恒久性原理的应用所设定的一项必要条件——不变性 条件。要了解这一点，我们需要转而探讨他对欧拉无穷级数能否在从算术代数过渡到符号代数的过程中得以保留的讨论。

欧拉无穷级数似乎令 Peacock 着迷不已，因为他总是反复讨论它：他曾以三种不同的方式否定它，第一次是在1830年，接着是1833年，最后一次则是在1845年。他的论证值得全文引述。在此之前，为求历史准确，我应指出，Peacock 在所有回应中提及的欧拉的论文并非发表于1774年的《彼得堡院报》。这份期刊的全名是《彼得堡皇家科学院学报》，它直到1777年至1782年间才开始出版，作为《彼得堡皇家科学院新评注》（1750年至1776年）的续刊。欧拉的论文题为“Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri”，实际上于1775年发表于该续刊。

以下是 Peacock 对欧拉的首次回应：

> 文中表达的观点明确反对欧拉这位权威人士的看法。欧拉在《彼得堡院报》1774年刊载的一篇二项式定理证明序言中，否认了等价形式永恒性原则的普遍性……他所举的、用来说明这一原则并非真实且普遍成立的例外，出现在下面这个极为特殊的级数中：
>
> $$\frac{1-a^m}{1-a}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3}+\&c.$$
>
> 从前三项即可清楚看出该级数的规律：若 m是一个 [正]整数，则该级数的和为 m；他说其他取值时并非如此。但他似乎把级数的代数和与算术和混为一谈，这种混淆十分常见，而相关原则只涉及前者。（Peacock 1830年，第517页）

这里的回应基本上是说，欧拉和许多人一样，包括柯西（Peacock 1933, 192），都混淆了算术代数与符号代数之间的关系。正如我们在第二节所见，Peacock 认为从属科学具有启发意义，但并不构成限制，

也就是说，算术代数中的运算及其符号代数中的对应运算含义并不相同。然而，欧拉所谓的混淆如何关系到这个无穷级数是否是恒久性原理的一个可接受例外，这一点并不清楚。Peacock 是否暗示，尽管当 m不是正整数时，该级数的算术和不等于 m，其符号和却会等于 m? 换言之，考虑方程

$$m = \frac{1-a^m}{1-a} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3} + \&c.$$

Peacock 是否认为，在符号代数中，即使 m 不是正整数，右边的表达式仍是左边表达式的等价形式?

无论如何，他转述欧拉所说的话当然是正确的：当 m不是正整数时，若 $|a| < 1$，则各项 a^k 会随着 k 增大而趋于零。在这种情况下，该级数未必收敛到 m，因为其确切的和取决于 m 和 a的具体值。若 $|a| \geq 1$，各项a^k 不会趋于零，该级数可能发散。对于 $a = 1$，由于分母 $1 - a^k$ 变为零，该级数没有定义。几年后，Peacock 在第二次答复中指出了这一最后的细节：

> 欧拉在 1774 年的《彼得堡纪事》中否定了这一原则的普遍性，并举出一个极为奇特的级数作为该原则失效的例子
>
> $$\frac{1-a^m}{1-a} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3} + \&c.$$
>
> 当 m 是一个整数 [正数] 时，它等于 m；但对于 m 的其他取值，显然不等于 m，除非同时满足 $a = 1$: 然而，在第一种情况下，$(m+1)^{th}$ 及后续各项中出现零 因子，而在第二种情况下，每一项都化为$\frac{0}{0}$ 的形式，这些现象恰好表明了与这些 和取值相对应的等价函数的构成发生了变化。（Peacock 1833, 224；着重号为我所加）

Peacock指出，对于某些 m 和 a的取值，当分母 $1 - a^k$ 变为零，且级数中的每一项都化为$\frac{0}{0}$时，方程右边的表达式

$$m = \frac{1-a^m}{1-a} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3} + \&c.$$

会改变其构成，因此不能再视为左边表达式的等价形式。这推翻了欧拉所谓的恒久性原理反例，因为正如Peacock在第二次回应中暗示的那样，属于恒久性原理适用范围的等价形式必须是不变的。不变性被视为应用该原理的一项重要条件：它意味着符号代数中所有属于该原理适用范围的等价形式，不仅必须具有普遍性，即对变量的任意取值都成立，而且必须保持不变，即无论变量取何值，其构成都不得改变。

十年之后，Peacock再次回到欧拉无穷级数，以给出又一个回应——第三个：

> 欧拉.....在其对$(1+x)^n$ 的级数所作的著名证明中.....否认了一条与等价形式恒久性原则相当的原则的普遍适用，而唯有该原则才能使其成立：他提出了极为引人注目的级数 [.....]，作为对其真实性的一个显著例外
>
> $$\frac{1-a^m}{1-a}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3}+\&c.$$
>
> 当 m 为整数时，其和为 m，但对其他值则并非如此。
> 然而，稍加考虑便足以表明，等价形式恒久性原则并不适用于这种情况：因为如果 m 是整数，如同在算术代数中那样， m 与其在恒等式中的等价级数之间的联系
>
> $$m=\frac{1-a^m}{1-a}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^m)(1-a^{m-1})(1-a^{m-2})}{1-a^3}+\&c.$$
>
> 并未给出，换言之，并不存在关于该运算的陈述或定义，我们借此从符号 $=$一侧的 m 过渡到另一侧特定形式下的级数，因此也就没有任何依据可将该结论推广到符号的一切值，无论是依据等价形式恒久性原则还是任何其他原则：只有当那些形式上一般、数值上特定的结果是通过可定义且得到承认的过程导出时，它们才成为应用这一原则的适当对象。（皮科克，1845年，452）

此处所提出的、因欧拉无穷级数落在恒久性原理范围之外而予以拒绝的理由是：它不能被视为m的等价形式，即便在算术代数中亦不能。这是因为没有任何可定义或得到承认的运算能够从

方程左端的表达式导向其右端的表达式。这或许只意味着该无穷级数并非必然存在，但仍可被视为m的一种假设性等价形式。早在其《论著》第一版的序言中，Peacock便指出如下一点：“当一种等价形式产生于可定义运算的施行时，其存在是必然的。”（Peacock 1830年，xviii）。他接着说，若并非如此，它仍可说是假设性地存在，“仅仅凭借等价形式恒存原理”（同上）。那么，他为何不允许将欧拉无穷级数视为在符号代数中具有假设性存在的一种形式呢？这大概是因为，无法承认任何运算——无论其是否可定义——能够从方程左端的表达式导向其右端的表达式。

总而言之，我认为 Peacock 的观点是，只有在尊重以下三个条件的情况下，某种等价形式才可作为其原则的例外获准：除了符号形式的普遍性之外，符号运算的含义不得与算术运算的含义混淆；等价形式必须是不变的，即其构成不应取决于变量的任何特定取值；并且方程两边的运算都应当有明确的定义且得到认可。显然，Peacock 认为欧拉无穷级数不符合这三个条件中的任何一个。鉴于上文已经给出的理由，伽马函数至少不符合不变性条件。因此，尽管在后一种情况下他或许原本想得出相反的结论，伽马函数无法在从算术代数过渡到符号代数的过程中保持阶乘函数不变。那么，我们该怎么说呢？我们应该说，欧拉无穷级数和伽马函数都是不允许的例外，因而不属于恒久性原理的适用范围吗？还是应该说，尽管它们可以作为例外获准，但不足以推翻 Peacock 的原则？如果是后者，这些例外又该如何与该原则相协调？

5 审慎保守主义

走向调和的一条路径，或许可以追溯到对恒久性原理的一项限定；Hankel（1867, 102sq）早已认可这一限定，Detlefsen 最近也着重强调了这一点：

“恒久性原理认为，基本算术的定律应当尽可能充分地保留下来。”（Detlefsen 2005, 283sq；另见 Toader 2021 的讨论。）若将皮科克原理理解为一项指令，即在符号代数的发展过程中，尽可能充分地或尽可能广泛地保留算术代数的等价形式，那么它似乎能够容纳例外。这些例外将是一些等价形式，例如阶乘函数和欧拉无穷级数，它们超出了等价形式所能保留的最广范围。但应如何确定这一范围？正如 Detlefsen 恰当地指出：“哈密顿的四元数 .....以及 Graves 和 Cayley 的八元数.....都涉及对基本算术定律的违背。但即便是复数，也违反了一些有理由被视为标准算术定律的条件。.....那么，我们该怎么说？复数是否违反恒久性原理？”（同上）那么，四元数和八元数是否违反这一原理呢？等价形式应当保留到何种最广范围，这个范围的界限又应设在哪里？又是什么决定了这些界限?

所有这些问题都可以通过结合休谟关于推理法则恒久性的观念来解读皮科克原理，从而得到解答。这样的解读也使上述对该原则的限定变得合理：依我对休谟的理解，他主张应尽可能最大限度地保留推理法则，这主要是出于实践原因，而不是将其视为知识的先验条件。这为例外留下了空间，只要有足够有力的理由支持即可：尽管一般而言，违背推理法则在实践中难以维系，但违背它们并非不可能。将恒久性原理解读为这类保守策略的体现，意味着算术代数的等价形式应尽可能最大限度地得到保留。正如Peacock所强调的，保留它们是因为它们在应用中有用，尤其有助于计算，而不是因为它们是发展符号代数不可或缺的。类似地，他的原则也允许例外：如果有足够有力的理由支持，等价形式可以被弃用。正如我此前指出的，Peacock 承认符号代数可以建立在完全任意的假设之上，尽管他认为这样做在实践中并不方便。

此外，对这一原则的这种解读还阐明了如何确定等价形式应尽可能最大限度保留的界限。确定这一界限需要审慎权衡，即比较弃用等价形式的理由与保留它们的理由。

我在此的要点主要并非历史性的：我并不声称，皮科克对其原则的理解实际上受到了他阅读休谟的影响。然而，这样的主张也绝非牵强。因为完全有理由假定皮科克读过休谟。作为一名牧师和分析学会的创始人，他不可能忽视休谟的哲学观点。我们知道Herschel熟悉这些观点，因为他在1830年的《初步论述》中与之交锋，尤其是关于因果关系。他的父亲William Herschel是一位德国移民和皇家天文学家，发现了天王星，并曾与休谟本人相识。Babbage也在其1837年的《第九布里奇沃特论著》中讨论了休谟关于奇迹的观点。当皮科克《论著》 的第一版于1830年问世时，休谟四卷本的《哲学著作》刚刚于1826年出版。此外，皮科克以辉格党的拥护者著称（Pycior 1981, 26），鉴于人们普遍认为休谟是辉格党人的真正先驱（Snyder 2006, 14），这一点在此语境中或许并非无关紧要。诚然，鉴于当时占主导地位的引文惯例，休谟在皮科克的任何数学著作中都从未被提及。尽管如此，我认为，关于推理法则之恒久性的Hume的观念，构成了最适于理解皮科克原理的哲学背景。当然，这并不是说其他背景对于理解该原则就可能不相关或无用，例如早期剑桥哲学学会的自然史文化（参见Lambert 2013），或洛克式证据主义数学认识论（参见Richards 1992），但对这类主张的详细分析必须留待他处。

为了回顾休谟关于推理法则的观念的相关细节，我们不妨来看他在《论著》（第1.4.4.1节）中一段著名且颇具争议的文字；他在此为拒斥自己所谓的“古代哲学”作了辩护：

> 为了证明自己的立场，我必须在想象中区分两类原则：一类是恒久、不可抗拒且普遍适用的原则，例如从原因推知结果、从结果追溯原因的惯常转换；另一类则是可变的，

> 薄弱且不规则；[...] 前者是我们一切思想和行动的基础，因此一旦将其移除，人性必定立即消亡、毁灭。后者既非人类不可避免的倾向，也非生活中的必要之举，甚至毫无用处；恰恰相反，据观察，它们只出现在心智薄弱的人身上，而且与习惯和推理的其他原则相悖，只要适当加以对照和对立，便很容易被推翻。因此，前者为哲学所接受，后者则遭到摒弃。（休谟，1739年，148）

休谟所说被现代哲学摒弃的原则，是权宜的推理规则，例如，这些规则建立在将神秘性质归于物质对象的倾向之上，或建立在害怕遭幽灵折磨之上。这类规则被认为是可变的，因为面对证据和正常的证据评估能力，人们很容易放弃它们；而且，即便把神秘性质和幽灵视为虚构之物，这些规则也并无实用性。休谟所说被现代哲学采纳的原则，则是或然推理（或归纳推理）和演绎推理的定律。人们认为这些定律是恒久的，但这并不意味着它们不可能被放弃。他明确设想过将其摒弃；尽管他当然暗示不应放弃这些定律，但他确实认为它们可能被放弃，而且事实上有时确实如此。

然而，尽管推理法则可能被放弃，却不可能轻易放弃，至少不像权宜的规则那样容易。这是因为放弃这些法则在实践中会带来不便，有时甚至难以为继。事实上，这可能导致原本可以避免的死亡。设想某人站在一栋高楼上，心中权衡着从原因到结果的惯常推断，与这样一种想法之间的冲突：下方地面具有一种友善地拥抱任何坠落之物的性质。在大多数情况下，前者会推翻后者；或者更准确地说，既然原则被视为形成信念的机制（Loeb 2010, 83），那么「自己会坠亡」这一信念很容易推翻「坠落时会受到友善拥抱」这一信念。但推翻过程朝着相反方向发展，酿成悲剧，并非不可能。关键在于，在这类情况下，放弃归纳推理法则的理由，可能超过保留这些法则的理由。

如果联系演绎推理的定律来看，也许能更好地说明同一个观点。以由矛盾可推出任意命题为例。尽管按照休谟的观念，人们应当保留这一定律，但在某些情况下，人们确实可能有充分理由拒绝它。其中一种

拒绝方式，休谟或许早已知晓，乔纳森·斯威夫特在他一篇精彩的讽刺随笔中就曾暗示过：

> 因为，如果思想自由不能带来行动自由，又有什么用呢？行动自由才是所有反对基督教的论据唯一的目的，无论表面看来这一目的有多么遥远。因此，自由思想者把它视为一座建筑，其中各部分彼此紧密依存，以至于只要你拔掉一颗钉子，整座建筑就必然轰然倒塌。这一点被一位听说有人引用一段经文来证明三位一体、而该经文在一份古代手稿中却有不同读法的人巧妙地表达了出来。他立刻领会了其中的意思，并通过一连串突然而来的连锁推论，极为合乎逻辑地得出结论：“哼，如果真如你所说，那我就可以放心地嫖妓、酗酒，根本不把牧师放在眼里。”（斯威夫特，1708年，第226页）

自由思想者的逻辑推理被讽刺地描述为“一连串突然而来的连锁推论”，这一点颇为引人注目。但关键在于，斯威夫特在此暗示，保留任何支配这种推理的逻辑定律（例如由矛盾可推出任意命题）的理由，都不及放弃该定律的理由充分。因为，他认为自己所描述的行为是不道德的；这一看法削弱了这样一种信念：此类行为可以通过三位一体教义中被察觉到的不一致性来证明正当。更一般地说，休谟承认，在特殊情况下，推理法则可能遭到颠覆并被抛弃，而事实上有时确实如此。这构成了一种保守策略的基础：它不仅规定应尽可能地保留这些法则，还规定是否保留取决于对相关理由的权衡。按照这种保守策略来理解皮科克原理（我认为应当如此），它同样允许在经过审慎权衡相关理由的审议之后，颠覆并抛弃算术代数的等价形式。

现在，如果接受对皮科克原理的这种解释，那么不难看出，该原理能够容纳例外，例如本文上一节讨论的阶乘函数和欧拉无穷级数。但正如我将在下一节所展示的，也不难看出，该原理同样能够容纳哈密顿对四元数代数中交换律的拒斥。如果有理由放弃等价形式，而这些理由强于保留它们的理由，那么拒斥便与尽可能保留等价形式这一规定相容。在以四元数为例明确论证这种相容性之前，我想先指出，普遍流行的观点——

该观点认为，哈密顿对其代数的发展可被视为使皮科克原理失效，但实际上忽视了现有的历史证据。

6 四元数

在一部篇幅如书的四元数论述中（Hamilton 1853），哈密顿收录了他在都柏林三一学院担任天文学教授期间所作的讲稿。哈密顿因其在光学方面的工作于 1835 年获封爵士。他在书中阐述了一种他称为新数学方法的理论，即“ 四元数方法或演算 ”；这一方法以他将数学视为一门研究时间与空间秩序的科学为基础。这种观点促使他引入了一种向量演算，他称之为符号几何；在这种几何中，他“力图仿效 Peacock 博士的符号代数”（同上，61）。事实上，哈密顿认为，时间中时刻与步骤之间的序关系，以及空间中点与线之间的序关系，可以为符号几何中“有向距离”（即向量）的运算提供启示，却不会对其形成限制；这恰与上文第二节讨论的 Peacock 的观点完全一致。此外，从符号几何过渡到四元数代数时，向量运算的规则被视为纯代数四元数运算规则的启示，这与 Peacock 将算术代数的规则视为符号代数规则的启示如出一辙。哈密顿对 Peacock 的借鉴显而易见，也得到了恰当的承认：

> 因此，按照Peacock博士的用语，如果我们采用的是时间科学，而不仅仅是算术，或（主要是）整数的学说，那么我们就应当拥有一门极为宽广的“提示科学”（或者更确切地说，启发性科学）作为我们的基础，以便随后在其上建立起一种纯粹的符号概括的新结构。 [...] 而在我（于第七讲中）从被视为实（或在几何上被解释）的四元数，过渡到被视为虚（或在几何上未经解释）、但由四元数公式的推广而在符号上被提示的双四元数这一论述中，凡肯惠予细心阅读本书的人都会看出，我采用了一种过渡方法，即从针对特殊情形而已证明的定理，过渡到为一般情形所假定的表达式，这种方法与欧姆和Peacock的方法有着极为密切的类比。（前引书，16）

然而，我主张不能以四元数来否定皮科克原理，这一观点不仅有文本证据支持——哈密顿在其数学研究中运用了这一原则。毕竟，

而且这完全不罕见：也许他只是对一位资深同事口头上表示尊重。可是，当我们理解究竟是什么促使他拒绝交换性时，就会发现，哈密顿谨慎地采用了上述保守策略：他认为应当保留这一定律，但在权衡保留它的理由与放弃它的理由后，最终舍弃了它。

在其著作的序言中，哈密顿回顾了一系列早期尝试，试图将直线乘法运算从两个空间维度扩展到三个空间维度。他于1831年考虑的第一种几何构造并不能令他满意，因为“它没有保持乘法的分配原则；其中，和的积 并不等于积的和。”（前引书，第36页）随后他提到“另一种性质略为相似、且同样会招致类似异议的、关于空间中两条直线之积的构造”，他说这一构造于1835年出现在他的脑海中，一年后又独立地出现在他的朋友John T. Graves的脑海中。但哈密顿同样认为这一构造有缺陷，理由相同，因为他发现它“违反了分配原则”。第三种构造由John的弟弟Charles提出，它假定以三元组表示直线，并将两条直线的乘法构造为两个三元组（或三元数） $x + iy + jz$ 与 $x' + iy' + jz'$的乘法，其中 i 与 j 为虚数单位，即 $i^2 = j^2 = -1$，从而第三个三元组 $x'' + iy'' + jz''$ 即为乘积。这一运算同样不具有分配性，但它是可交换的。

因此，违背分配律是一度放弃这些早期构造时所给出的理由，这表明哈密顿认为，乘法通常遵循的定律——不仅包括分配律，也包括结合性和交换性——都应当保留，当然，前提是它们确实能够保留。事实上，当他重新思考这个问题时，曾明确表示：

> 经过我所描述的准备工作后，我（于1843年）重新致力于使三元组的一般概念适用于空间中直线的乘法，并决心保留分配原则；此前有人设想的某些体系与这一原则并不相容。起初，我还认为能够同时保留交换原则。（同上，(43)）

起初，哈密顿假设任意两条直线的乘法都满足交换性，因此虚数单位也满足交换性，于是 $ij = ji$，他意识到直线乘积无法用三元组以令人满意的方式表示。

这让他有理由怀疑交换律能否保留。正如他在讲座中进一步详细解释的那样，他还发现直线乘法不会产生唯一结果，这让他更加有理由怀疑交换性：

> 直线彼此之间的乘法已被证明会给出不同的结果，这取决于诸因子是按一种还是另一种次序来取；由此更有理由推出，四元数的乘法一般不是一种可交换的运算。（前引书，132）

然而，哈密顿并未立即放弃交换律，而是仍试图保留它。为此，他用另一种表示，即三元组 $ix + jy + kz$，取代了Charles Graves所提出的直线表示，并由此得出另一种乘法定义，其中有 $ij = +k$ 与 $ji = -k$，且带有 $i^2 = j^2 = -1$。然而，这使 k仍未确定。随后，哈密顿确定了如今众所周知的、将直线表示为四元数 $x + iy + jz + kw$的做法，其中四元数单位的乘法被取为非交换的： $i^2 = j^2 = k^2 = -1$、 $ij = -ji = k$、 $jk = -kj = i$以及 $ki = -ik = j$，并进而证明，任意两个“正交向量”（即相互垂直的直线）之积都不满足交换性： $\alpha\beta = -\beta\alpha$。他坦率承认，这“起初或许显得奇怪”（前引书，48），但指出，“出于看来更为根本的考虑，我们不得不放弃乘法的交换性质，因为它并非普遍地对直线成立。”（前引书，51）此外，哈密顿表明，与交换性不同，分配律和结合性在四元数代数中得以保留；而且，他论证说，由于二者在应用中的用处，它们都应予以保留：

> 如果《四元数演算》永久失去了这两项重要原则中的任意一项，就会变得极不完整；事实上，许多更高级的应用都必须将二者结合起来。(同上，494)

我认为，对哈密顿本人思维过程的这一描述——该过程最终使他引入了四元数——充分支持了我的主张：四元数代数中对算术交换律的违反，不能被视为使皮科克原理失效。正如

我们所看到的，哈密顿在发展其微积分时不仅运用了恒久性原理，而且他认为这一运用与他拒斥交换性之间毫无不相容之处。如果我们把皮科克原理理解为我在上一节所描述的审慎保守主义的一种表达，这一点便不足为奇。这一解释或许也能说明Peacock对哈密顿工作的认可，并消除该原理后来被其他数学家采纳这一谜团。

7 结论

在本文中，我重新审视了这样一种批评，即 Peacock 等价形式永存原理已被数学的发展所推翻，尤其是被哈密顿引入四元数所推翻。这一由罗素提出的批评一再被用来反对该原则，最近 Ewald 也提出了这一批评（另见格雷 2008年，28 以及 Bellomo 2025年，167）。我认为这一批评是错误的。

在澄清了 Peacock 关于等价形式的概念，以及他对算术代数与符号代数之间关系的构想之后，我讨论了他在 1830年 至 1845年 间给出的该原则各种表述之间的若干差异。随后我论证，这些差异表明 Peacock 允许存在不属于算术代数的符号规则。此外，我批判性地讨论了他试图保留阶乘函数并拒斥欧拉所给出的一个无穷级数的做法，但我论证，如果将皮科克原理解释为休谟就推理法则所阐述的那种保守策略的一种表达，那么这些都可以作为例外而被容纳。按照这一解释，该原则规定应在尽可能大的范围内保持等价形式，因而也允许：若存在压倒支持其保持之理由的理由，等价形式便可以被颠覆并被放弃。

最后，我指出，哈密顿四元数恰恰属于这种情况。沿着哈密顿从符号几何转向四元数演算和双四元数的过程中，最终放弃交换性的思路来看，显然他认为所有通常的定律，包括分配律、结合性和交换性，都应当保留。但他也意识到，

放弃乘法交换律的理由，超过了保留它的理由。相比之下，他认为，舍弃结合性和分配律的理由，不及保留它们的理由。其他数学家对此看法不一，但我认为，我对皮科克原理的诠释能够经受住类似于上文所讨论的潜在批评。还有人重新诠释了这一原理，并以否认四元数是数为代价，捍卫其普遍有效性（Schubert 1894, 578）。不过，这种重新诠释的论述应留待别处。

8 致谢

感谢 Jeremy Gray、Iustin P. Toader 以及一位匿名审稿人提出意见，帮助改进本文。谨此感谢奥地利科学基金（FWF）通过资助项目 10.55776/PAT3440123 提供经费支持。

9 参考文献

Bellomo, A.（2025）皮科克恒久性原理及其在 Hankel 著作中的接受情况，*HOPOS*：《国际科学哲学史学会期刊》，15，150–176；Crowe, M. J.（1967）《向量分析史：向量系统观念的演变》，圣母大学出版社，1985年第二版；多佛出版社；De Morgan, A.（1835）《代数论》，作者乔治·皮科克，《教育季刊》，9，293–311；Detlefsen, M.（2005）形式主义。《牛津数学与逻辑手册》，S. Shapiro 编，牛津大学出版社，236–317；Ewald, W. B.（1996）《从康德到希尔伯特：数学基础文献选集》，第I卷，牛津大学出版社；Fisch, M.（2017）《创造性地悬而未决：科学能动性史与哲学论》，芝加哥大学出版社；Gray, J.（2008）《柏拉图之魂：数学的现代主义转型》，普林斯顿大学出版社；Hamilton., W.（1853）《四元数讲义》，都柏林：Hodges and Smith；Hankel, H.（1867）《复数及其函数讲义》。莱比锡：Voss

Hume, D.（1739年）《人性论》，2007年版，克拉伦登出版社；Kelland, Ph.（1843年）《论演绎数学原理》。爱丁堡：亚当与查尔斯·布莱克出版社；Lambert, K.（2013）《数学自然史：乔治·皮科克与英国代数的形成》，《伊西斯》，104，278–302；Loeb, E. L.（2010）《反思与信念稳定性：关于笛卡尔、休谟与里德的论文》，牛津大学出版社；Peacock, G.（1830年）《代数论》，剑桥：J. & J. J. 戴顿出版社；Peacock, G.（1833）《分析学若干分支的近期进展与现状报告》。提交给英国科学促进会第三次会议的报告，伦敦，3，185–352；Peacock, G.（1842年）《代数论》。第二版，第I卷，剑桥：J. & J. J. 戴顿出版社；Peacock, G.（1845年）《代数论》。第二版，第II卷，剑桥：J. & J. J. 戴顿出版社；Pycior, H. M.（1981）乔治·皮科克与符号代数的英国起源。《数学史》，8，23–45；Richards, J.（1992）《十九世纪英国的上帝、真理与数学》。载于 M. J. Nye、J. L. Richards 和 R. H. Stuewer（编）《物理科学的发明：十七世纪以来数学、神学与自然哲学的交汇》，施普林格，多德雷赫特，51–78；Russell, B.（1903）《数学原理》，剑桥大学出版社；Schubert, H.（1894）算术中的一元论，《一元论者》，4，561–579；Snyder, L. J.（2006）《哲学改革：维多利亚时代关于科学与社会的辩论》，芝加哥大学出版社；Swift, J.（1708）一篇论证：在当前情形下，废除英国的基督教可能会带来一些不便，而且或许无法产生由此所期望的诸多良好结果。载于《主要作品》，A. 罗斯和 D. 伍利编，1984年，牛津大学出版社，217–227；Toader, I. D.（2021）恒久性作为一种实践原则。《数学史》，54，77–94；Toader, I. D.（2024）《玻尔对应原理只是汉克尔恒久性原理吗？》《科学史与科学哲学研究》，103，137–145；Toader, I. D.（2025年）《量子力学中的规则与意义》，《欧洲科学哲学研究》，施普林格