arXiv:2603.07623v1 [math.LO] 8 Mar 2026

经典离散结构中元组之间距离的显式仿射公式

Arthur Molina-Mounier

2026年3月10日

摘要

为回答 Ben Yaacov、Ibarlucía 和 Tsankov 提出的问题， [5], 我们展示了一种显式构造仿射公式的方法，用于表示 $\{0,1\}$ 值 $\varnothing$ 结构中两个 n 元组之间的距离，且只需使用 $\lceil \log_2 n \rceil$ 次量词交替。

目录

1 引言 21.1 论文结构.3

2 记号 3

3 算法构造 3。

3 1 理论基础 . 3 3.2 算法推导.4 3.3 定理 1.2 的证明.5

4 另一种初等构造 6.

6 4.2 经典连续理论中的可构造性 . . . . . 7 4.3 元组类型.9 4.4 可构造集的性质.9 4.5 定理 4.1 的证明.13 4.6 量词交替分析.16

第 3 节的代码清单 **20**

1 引言

连续逻辑最初于 1966 年由 Chang 与 Keisler [3], 提出，但近年来由 Ben Yaacov 等人 [6], 以现代形式加以发展并推广。它是经典模型论的推广，旨在提供一种更适合描述具有度量结构的对象的形式体系。在连续逻辑中，所有结构都具有完备有界度量空间结构，语言中定义的函数相对于该结构是连续的，谓词和公式亦然，且取实数值。连续逻辑不使用通常的布尔联结词集合，而允许使用任意连续函数。

仿射逻辑是连续逻辑的一个片段，于2014年在Bagheri [1, 2], 的工作中引入，其中联结词仅限于仿射函数。尽管它通常会损失一些表达能力，但其模型论获得了丰富的凸结构，对该结构的系统研究始于 [5]。在同一篇文章中，通过抽象方法证明：对于某一类连续度量结构，每个连续公式都可以被仿射公式任意好地逼近。这一性质尤其对具有一个类型的离散经典结构成立（而且在那里逼近是精确的）。然而，所用方法并未给出上述仿射公式的显式描述，即便对于某些使用非仿射联结词的最简单公式也是如此。

命题 1.1 ([5], 26.5, 26.7)**.** 设 $\mathcal{L} = \varnothing$ 为空语言（除度量 d外），$\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$、 M_ℓ 为具有 ℓ 个元素的唯一可数经典$\mathcal{L}$-结构， C_ℓ 为其理论。则在模 C_ℓ的意义下，每个连续公式都等于一个仿射公式。

特别地，对于所有 ℓ、 $n \geq 2$，存在 $\theta_n \in \mathcal{L}_{2n}^{aff}$，使得对于所有$M \models C_\ell$ 以及 $\bar{a}$、 $b \in M^n$，

$$\theta_n(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} 0 & if\ \bar{a} = \bar{b} \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

问题 1.1 ([5], 26.8)。 仿射公式 θ_n 是否存在一个“简单”的显式表达式?

我们通过给出这些公式的一个关于 ℓ 一致的有效构造，部分回答了这个问题。在本文余下部分，我们假设读者熟悉连续逻辑的通常概念和记号。本文的主要结果如下:

定理 1.2。 对于所有 $n \geq 2$，存在 $\theta_n \in \mathcal{L}_{2n}^{aff}$，其量词复杂度（即量词交替的次数）为 $\lceil \log_2 n \rceil$，使得对于每个 $\ell \geq 2$、每个 $\varnothing$-结构 $M \models C_\ell$ 以及每个 $\bar{a}$、$b \in M^n$，该结论均一致成立，

$$\theta_n(\bar{a}, \bar{b}) = d_n(a, b) = \begin{cases} 0 & if\ \bar{a} = \bar{b} \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

备注 1.1。 情形 $\ell = 1$ 是平凡的（$\theta_n = 0$ 对所有 n均成立），因此不再进一步讨论。

1.1 论文结构

第 3 节给出了 θ_n 的构造，并由此证明定理 1.2。不过，该构造的有效性仅在计算机辅助下得到保证；附录 A 提供了用于验证本节结论的代码。

像前文概述的那种计算机辅助证明，虽然回答了最初的问题，却无法深入阐明这一构造为何有效，其正确性证明也近乎繁琐的穷举情形。作为替代方案，第 4 节提出了一种更传统、更具概念性的构造，其正确性比计算机辅助证明更容易理解。不过，这需要稍微弱化定理 1.2，将其表述为定理 4.1。

2 记号

下文中，对于所有 $n \geq 1$ 以及任意集合 M，d_n 表示定义在 M^n 上的距离函数

$$\forall a, b \in M^n, d_n(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

此外，我们将 d_1 称为（M上的）平凡度量。

除非另有说明，我们都在 M 一个仅以平凡度量作为谓词的 $\varnothing$-结构中进行讨论，其基数为 ℓ。

3 算法构造

3.1 理论基础

以下结果证明，只需证明 d_2 等于一个仿射公式。

定理 3.1. 假设存在一个显式仿射公式 θ_2 等于 d_2。那么，对于所有 $n > 2$，都存在一个有效构造，生成仿射公式 θ_n 等于 d_n。

证明. 我们首先证明，该结果对所有形如 2^k、$k \geq 1$ 的 n 都成立。

根据假设，该性质对 $2 = 2^1$ 成立。令 $k \geq 1$，并假设已构造出 θ_{2^k}。那么，根据定义，它就是 M^{2^k} 上的平凡度量 d'。

将假设应用于这个结构，我们得到 $\theta_2^{M^{2^k}}$ 是定义在 M^{2^k} 的元素有序对上的平凡度量。根据 d' 的定义，并利用 $\left(M^{2^k}\right)^2$ 与 $M^{2^{k+1}}$ 之间的自然对应，我们可以递归地将 $\theta_2^{M^{2^k}}$ 表达式中的每个变量替换为一个由变量组成的 2^k-元组，并将 d' 的所有实例替换为等价的 θ_{2^k} 实例。

由此可得一个用 d 表示 2^{k+1}元组上平凡度量的表达式，我们可以将其定义为 $\theta_{2^{k+1}}$。

现在设 $n > 2$，其中 θ_n 尚未构造出来，并设 $k \geq 1$ 是满足 $n \leq 2^k$ 的最小值。根据上述内容，θ_{2^k} 可以有效构造。然后定义

$$\theta_n(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \theta_{2^k}(a_1, \ldots, a_n, \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{2^k - n}, b_1, \ldots, b_n, \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{2^k - n})$$

□

在唯一谓词为平凡度量的结构中，若知道一个含 n 个元素的元组中每一对元素相等还是不相等，就等同于知道该 n 元组的类型（按模型论的意义）。由于坐标对的数量有限，n 元组的类型也只有有限种。这意味着，在这种结构中，关于某个公式的任何断言，都可以通过对有限种元组类型进行穷举情形来检验。

当前的构造正是依赖这一事实。由于每种长度的元组都只有有限种类型，因此定义在这些类型上的连续函数（甚至更一般地说，实值函数）所构成的向量空间是有限维的（原命题 1.1 的证明中也用到了这一论证），其维数等于元组类型的数量（对于含 $\ell \geq 4$ 的四元组，这一数量为 15）。由于每个（仿射）公式都可以解释为这样一个函数，仿射公式在逐点相等意义下构成的空间的维数至多相同。因此，若我们找到该空间的一个生成集，就可以通过对基元素作适当的线性组合，推导出 θ_2 的表达式。

3.2 算法推导

利用公式完全由其对每一种元组类型的像刻画这一事实，我们编写了一个简单的 Python 脚本，枚举所有四元组类型，并针对 $\mathcal{L}_4^{\mathrm{aff}}$ 中的任意给定公式，计算每种类型的像，将其表示为一个向量；该向量将公式刻画到等价关系为止。随后，我们使用 NumPy 软件包计算这些向量的秩。通过反复试验，我们构造出了以下一组秩为 15 的公式；当 $\ell \geq 4$ 时，由于四元组类型的数量也是 15，这组公式构成一个基。

代码见附录 A。

以下所有公式中，自由变量最多有 4 个，来自 x、y、z、w。其中一些公式还给出了等价表达式。

- $\varphi_{1} = 1$
- $\varphi_{2} = d(x,\ y)$
- $\varphi_{3} = d(x,\ z)$
- $\varphi_{4} = d(x,\ w)$
- $\varphi_{5} = d(y,\ z)$
- $\varphi_{6} = d(y,\ w)$
- $\varphi_{7} = d(z,\ w)$
- $\varphi_{8} = \inf_{a}(1 + d(x,\ a) + d(y,\ a) + d(z,\ a)) = \{x, y, z\}$
- $\varphi_{9} = \text{下确界}_{a}(1 + d(x, a) + d(y, a) + d(w, a)) = \{x, y, w\}$
- $\varphi_{10} = \inf_{a}(1 + d(x, a) + d(z, a) + d(w, a)) = \{x, z, w\}$
- $\varphi_{11} = \text{下确界}_{a}(1 + d(y, a) + d(z, a) + d(w, a)) = \{y, z, w\}$

$\varphi_{12} = \text{上确界}(4 - d(a, x) - d(a, y) - d(a, z) - d(a, w))$

- $^{a}= (x, y, z, w)$中彼此相等的分量的最大个数
- $\varphi_{13} = \text{上确界}_{a}(d(a, x)+d(a, y)+d(a, z)-d(a, w)-2) = \begin{cases} 1 \text{若} 0 & w \in \{x, y, z\} \\ \text{否则} \end{cases}$
- $\varphi_{14} = \text{上确界}_{a}(d(a,\ x)+d(a,\ y)-d(a,\ z)-d(a,\ w)) = \begin{cases} 0 & \{a, b\} = \{c, d\} \\ \text{如果} 2 & \text{如果} \end{cases}$

$c = d \notin \{a, b\}$

1 否则

- $\varphi_{15} = \text{上确界}_{a}(2(d(a,\ x) - d(a,\ z)) + d(a,\ y) - d(a,\ w))$

问题 3.1. 第 *15* 个公式是否有一种“漂亮”的解释？或者，我们能否找到另一组公式基，使得它们都有“漂亮”的解释？

3.3 定理 1.2 的证明

使用上述基，进一步使用 NumPy 将 θ_2 表示为生成集元素的线性组合：

$$\begin{aligned} \theta_2(x,y,z,w) &= \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 - \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{15} \\ &= d(x,y) - d(x,z) - d(x,w) \\ &\quad - \inf_a(1 + d(x,a) + d(y,a) + d(z,a)) \\ &\quad + \inf_a(1 + d(x,a) + d(z,a) + d(w,a)) \\ &\quad + \sup_a(2(d(a,x) - d(a,z)) + d(a,y) - d(a,w)) \end{aligned} \tag{1}$$

将所有量词汇集到一个表达式中，我们得到

$$\begin{aligned} \theta_2(x,y,z,w) = \sup_a \sup_b \inf_c \big[& d(x,y) - d(x,z) - d(x,w) \\ & + 2d(a,x) - 2d(a,z) + d(a,y) - d(a,w) \\ & - d(b,x) - d(b,y) - d(b,z) \\ & + d(c,x) + d(c,z) + d(c,w) \big] \end{aligned}$$

尽管生成集搜索假定了 $\ell \geq 4$，因而也假定了全部四元组类型，但该公式经验证对 $\ell = 2$,3同样成立。

命题 3.2. 由上述θ_2 的定义以及定理 *3.1* 证明中的过程所得到的公式 θ_n，可以用$\lceil \log_2 n \rceil$ 次量词交替写出。

证明。 鉴于定理 3.1 的证明，只需证明：对所有 $k \geq 1$，由 θ_{2^k}构造 $\theta_{2^{k+1}}$ 仅额外引入 1 次量词交替。设 $k \geq 1$，并假设 θ_{2^k} 已写成前束范式，即量词后接一个无量词公式。

应用该构造，每个变量都被替换为一对变量，d 的每个实例都被替换为 θ_2。利用公式（1）改写 θ_2，并将负号推入量词内部后，内部的无量词公式成为三种不同形式的项之和：

- 无量词项
- 形如 $\sup \psi$ 的项，其中 ψ 无量词。
- 形如 $\inf \psi$，且 ψ 不含量词。

由于这些带量词表达式相加，我们可以按任意顺序交错排列所有量词，同时保持公式的有效性。将相同类型的量词归为一组，并使最外层量词与周围前束范式中最内层的量词相匹配，这样只会比原先增加 1 次量词交替。

由于 θ_2 有 1 次量词交替，这表明对于所有 $k \geq 1$，θ_{2^k} 都有 k 次量词交替。于是，对于任意不形如 2^k的 n，θ_n 的量词数量与$\theta_{2^{\lceil \log_2 n \rceil}}$相同，由此得证，同时也证明了定理 1.2。

□

4 另一种初等构造

4.1 概述

如前所述，本节将介绍定理 1.2 中 θ_n 的另一种构造方法，该方法采用概念性论证，不依赖计算机辅助。不过，这种方法只能证明该定理的一个稍弱版本：

定理 4.1. 对于所有 $n \geq 2$，存在 $\theta_n \in \mathcal{L}_{2n}^{aff}$，其量词复杂度为 $2\lceil \log_2 n \rceil - 1$，使得对于每个 $\ell \geq 3$、每个 $\varnothing$-结构 $M \models C_\ell$以及每个 $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$，上述结论均一致成立，

$$\theta_n(\bar{a}, \bar{b}) = d_n(a, b) = \begin{cases} 0 & if\ \bar{a} = \bar{b} \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

需要用到 $\ell \geq 3$ 假设的点将通过像上面那样加框来突出显示。化简到 $n = 2$ 情形仍然成立：

定理 4.2。 假设存在一个显式仿射公式 θ_2，当 $\ell \geq 3$ 时等于 d_2。那么对于所有 $n > 2$，都存在一个有效构造，能够构造出仿射公式 θ_n，当 $\ell \geq 3$ 时等于 d_n。

证明。 证明与定理 4.2 的证明类似。唯一的区别在于确保 $\left|M^{2^k}\right| \geq 3$，从而 $\theta_2^{M^{2^k}}$ 确实等于有序对上的平凡度量。这总是成立的，因为

$$\ell > 1 \quad k \geq 1 \qquad \left|M^{2^k}\right| \geq 2^{2^1} = \text{，} \text{，所以。}$$

$4 > 3$

□

注 4.1. 本构造所依赖的主要结果是：集合 $X = \{(a, b, c, d) \in M^4 \mid a = c \vee b = d\}$ 满足某种有效可定义形式，由此我们将能够在第4.5节中推出 θ_2 的一个表达式。

4.2 经典连续理论中的可构造性

定义 4.3. 给定语言 $\mathcal{L}$，度量 $\mathcal{L}$-结构是经典的，如果该语言中每个谓词（包括距离）的值域都包含在 $\{0, 1\}$中。连续 $\mathcal{L}$-理论是经典的，如果它的所有模型都是经典的。我们将用 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 表示经典 $\mathcal{L}$-结构类。

定义 4.4 （回顾：仿射可定义集）. 固定 $n > 0$ 以及语言 $\mathcal{L}$ 。设 $\mathcal{C}$ 为度量 $\mathcal{L}$-结构的一个类。一个（一致）仿射可定义集（定义于 $\mathcal{C}$）由一族非空集合$(D_M)_{M\in\mathcal{C}}$ 给出，使得对每个 $M \in \mathcal{C}$、 $D_M \subseteq M^n$成立，并由 ψ 给出一个在$\mathcal{C}$上仿射可定义的 $\mathcal{L}$-谓词，即仿射 $\mathcal{L}$-公式的一致极限（在 $M \in \mathcal{C}$上一致），其在每个 $M \in \mathcal{C}$ 中的解释 ψ^M 等于 $d(x, D_M) = \inf_{a\in D_M} d(x, a)$。

此外，$(D_M)_{M\in\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的仿射可定义集，当且仅当对于每一个含一个自由变量 x 及附加变量 y的仿射 $\mathcal{L}$-公式，$\varphi\ x\ y$ $x\ y$ (,)，存在一个等于$\inf_{x\in D_M} \varphi^M$(,)的仿射可定义谓词。

定义 4.5 （可构造集）。 固定 $n > 0$。我们称一族集合 $D = (D_M)_M$ 一个 $\mathcal{L}$-结构是（仿射）可构造的，如果存在仿射公式 $f \in \mathcal{L}_n^{\text{aff}}$使得

$$\forall M \text{ an } \mathcal{L}\text{-structure}, D_M = \arg\min_{x\in M^n} f^M(x) = \left\{a \in M^n \mid f^M(a) = \inf_{x\in M^n} f^M(x)\right\}$$

在这种情况下，我们将记作 $D = \operatorname{argmin}_x f(x)$。整数 n 是 D的维数。

例 4.2。 使得对每一个 $\mathcal{L}$-结构M都有$\Omega_M = M$的可定义集Ω是可构造的，因为 Ω ＝最小值点集 0。

命题 4.6。 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ 上的每个可构造集在 $\mathcal{C}_\mathcal{L}$上都是可定义的。

证明。 通过结构归纳，在经典度量结构中，每个公式取有限值集，且该值集不依赖于特定结构的选择，因为谓词所取的值始终位于 $\{0, 1\}$中。特别地，值域的有限性意味着经典结构中的所有极小值点都非空，即所有最小值都能达到。

此外，由于值域是离散的，存在 $\varepsilon > 0$ ，使得对于所有经典的 $\mathcal{L}$-结构 M 和 $a \in M^n$,

$$f(a) > \inf_{a'\in M^n} \implies f(a) \geq \varepsilon + \inf_{a'\in M^n} f(a')$$

设 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathrm{aff}}_{n+m}$。通过归纳法并利用 $\mathcal{L}$ 中包含的界（尤其是对 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ 一致），存在 $r,\ s \in \mathbb{R}$，使得一致地有 $r \le \varphi \le s$。

固定 $b \in M^m$。令 $A = \text{最小值点集}_x\, f(x)$。我们声称

$$\inf_{a\in A} \varphi(a,b) = \inf_a \Big(\Big(\frac{s-r}{\varepsilon}+1\Big)\Big(f(a) - \inf_z f(z)\Big) + \varphi(a,b)\Big) \tag{2}$$

设 $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$。如上所述，$A_M \neq 0$，且对所有 $a \in A_M$，右侧下确界中的表达式等于 $0 + \varphi(a,\ b)$，根据定义，该值小于或等于 s。

根据 ε 的定义，若 $a \notin A_M$，

$$f(a) - \inf_z f(z) \ge \varepsilon$$

因此

$$\begin{aligned}\Big(\frac{s-r}{\varepsilon}+1\Big)\Big(f(a) - \inf_z f(z)\Big) + \varphi(a,b) &\ge \Big(\frac{s-r}{\varepsilon}+1\Big)\varepsilon + \varphi(a,b)\\ &\ge s - r + \varepsilon + r\\ &= s + \varepsilon\\ &> s\end{aligned}$$

因此，只有当 $a \in A$ 时才能取到下确界，故结论成立。类似地，我们有

$$\sup_{a\in A} \varphi(a,b) = \sup_a \Big(-\Big(\frac{s-r}{\varepsilon}+1\Big)\Big(f(a) - \inf_z f(z)\Big) + \varphi(a,b)\Big) \tag{3}$$

□

注 4.3。需要注意的是，也可以改用可定义谓词而非单纯的公式来定义可构造性，而大多数一般定理在作相应调整后仍然成立。上一个命题的逆命题此时也成立，因为到可定义集的距离，根据定义是一个可定义谓词。

注记 4.4. 为便于直观理解，可构造性可以理解为一种有效可定义形式：若 A 是一个可构造集，只要我们知道（或能够有效构造）一个显式公式 f，使得$A =$ 最小值点集 f，则对 A 的每一次量化都可以显式地改写为关于 f 的表述。

在本文其余部分，若能根据所概述的步骤导出该构造结果的显式表达式，我们就称该构造是“有效的”。

记号。定理 1.2 的表述可以通过引入理论 $C_{\ge 3}$（即至少含有 3 个元素的结构的理论），并对所有 M 的模型进行量化来改写。除非另有说明，以下我们将 M 视为理论 C_ℓ、$\ell \ge 3$（等价地：$C_{\ge 3}$ 的一个模型）中的一个普通模型。

4.3 元组的类型

定义 4.7（类型标记）。设 $\mathcal{L} = \varnothing$。令 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 为一个 n-元组。其类型 tp(a) 可按以下步骤标记：

1. 将所有等于 a_1 的元素标记为**0**。2. 当仍有未标记的元素时，按照坐标的顺序取第一个元素，并使用尚未用作标签的最小自然数，将所有与它相等的元素标记。

此过程会输出一个有限的自然数序列 $(t_k)_{1 \le k \le n}$，满足 $t_1 = 0$，且对于所有 $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$t_{k+1} \le \max_{1 \le i \le k} t_i + 1$$

它与起始元组具有相同的类型（相对于自然数的相等关系）。

此外，每个这样的序列恰好表示一种类型，即满足以下条件的元组的类型：两个坐标上的元素相等，当且仅当这两个坐标上的标签相等。这表明，这类序列的集合与 n-元组的类型之间存在双射。[1]

例 4.5。在 $\mathbb{N}$ 中，(5，3，5，6) 的类型可用**0102**表示，而 (5，6，4，4) 的类型可用**0122**表示。

有两种有序对类型：**00**、**01**。

有 5 种三元组类型：**000**、**001**、**010**、**011**、**012**。

有 15 种四元组类型：**0000**、**0001**、**0010**、**0011**、**0012**、**0100**、**0101**、**0102**、**0110**、**0111**、**0112**、**0120**、**0121**、**0122**、**0123**。

备注 4.6：在非空语言 $\mathcal{L} \neq \varnothing$ 中，这种标记描述了结构的空语言约化中的类型。

由于公式的值只取决于其参数的类型，因此就量化而言，我们可以使用上述标记来枚举集合内元组的类型，并且可以将给定集合与其元素的类型集合视为同一对象。例如，如果 $A = \{(a,\ a) \mid a \in M\}$，我们可以写成 $A = \{\mathbf{00}\}$。

4.4 可构造集的性质

备注 4.7。如果我们不考虑整个 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$，而只考察给定的一个经典结构 M，那么 φ 和 f（进而还有 A）就可以取为带有 M 中参数的公式，而不会改变结论或证明。换句话说，如果固定 $b \in M$ $A = {}_x f\ x\ b\ \subseteq$，那么 $\arg\min_M(,)$ 在其中是可定义的。

记号。如果 A 是一个可构造集，除非另有说明，f_A 表示满足 $A = \arg\min_x f_A(x)$ 的公式。此外，如果 A 是通过有效构造得到的，那么 f_A 就表示应用该构造所得到的公式。

命题 4.8（可构造性的稳定性）。固定一种 $\mathcal{L}$ 语言。我们将在经典的 $\mathcal{L}$结构 M 中工作。

[1]这类序列的数量（因而也是足够大空间中类型的数量）作为 n 的函数，以及其他描述方式，见 [4]

1. 如果 A、 A' 是可构造的，那么 $A \times A'$ 也是可构造的。

2. 如果 A 是可构造的，那么从 A 到其坐标子集的每个投影都是可构造的。

3. 如果 A 和 A' 都是可构造的、彼此不相交且维数相同，那么 $A \cap A' =$ 最小值点集$(f_A + f_{A'})$ 是可构造的。

4. 如果 $B \subseteq M^n$ $f \in \mathcal{L}_n^{aff}$ $A =$ $_{x \in B} f\ x\ \subseteq$ 是可构造的，并且，那么 M^n 最小值点集 ( ) 是可构造的。

5. 如果 $A \subseteq M^n$ 是可构造的， $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ 和 $B \subseteq M^k$ 是可构造的，那么

$$A' = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A \mid (a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in B\}$$

是可构造的，条件是它非空。

6. 如果 $A \subseteq M^{n+m}$ 是可构造的，并且如果 $a \in M^n$ 满足 $\exists a' \in M^m$，$(a, a') \in A$，那么

$$A' = \left\{a' \in M^m \mid (a, a') \in A\right\}$$

在 $\mathcal{L}(a)$ 中是可构造的，并且 $f_{A'}(x') = f_A(a, x')$。

第 *5* 项是概括公理的受限形式，以下将广泛使用。

证明。 1. 若 $A =$ 最小值点集$_x$ $f_A(x)$ 且 $A' =$ 最小值点集$_{x'}$ $f_{A'}(x')$，

$$A \times A' = \arg\min_{x, x'} \left(f_A(x) + f_{A'}(x')\right)$$

2. 假设 A 的维数为 n，即 $A =$ 最小值点集$_{a_1, \ldots, a_n}$ $f_A(a_1, \ldots, a_n)$，且 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ 对于某个 $k \in [\![1, n]\!]$。令 $j_1 < \cdots < j_{n-k}$ 为 $[\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ 的递增枚举。则

$$\{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}), a \in A\} = \arg\min_{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}} \inf_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n-k}}} f_A(a_1, \ldots, a_n)$$

3. 与第 1 项类似。

4. 与命题 4.6 类似。令 $r, s \in \mathbb{R}$ 满足 $\forall x \in M^n, r \leq f_A\ x\ \leq s$ $\varepsilon > 0$ $\forall x \in M^n\ f_B\ x\ > 0 \implies$ ( ), 并令满足 ,( ) ( ) inf ( ) $f_B\ x\ \geq\ _y f_B\ y\ + \varepsilon$ 的。然后定义

$$g(x) = \left(\frac{s - r}{\varepsilon} + 1\right)(f_B(x) - \inf_y f_B(y)) + f_A(x)$$
$$A' = \arg\min_x g(x)$$

如果 $x \in B$，即 $f_B(x) = \inf_y f_B(y)$，那么

$$g(x) = f_A(x) \leq s$$

现在假设 $x \notin B$，即 $f_B(x) \geq \varepsilon$。那么

$$\begin{aligned} g(x) &\geq s - r + \varepsilon + f_A(x) \\ &\geq s - r + \varepsilon + r \\ &= s + \varepsilon \\ &> s \end{aligned}$$

因此 $\forall x \in B, \forall y \notin B, g(x) < g(y)$，从而

$$A' = \arg\min_x g(x) = \arg\min_{x \in B} g(x) = \arg\min_{x \in B} f_A(x)$$

5. 设 $\tilde{f}_B \in \mathcal{L}_n^{\text{aff}}$为一个公式，使得 $\tilde{f}_B(a_1, \ldots, a_n) = f_B(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$。则

$$A' = \arg\min_{(a_1,\ldots,a_n) \in \arg\min_x \tilde{f}_B(x)} f_A(a)$$

根据前一项，它是可构造的。注意，即使陈述中所定义的 A' 为空，上述等式的右端仍然是良定义的，但不会描述同一个集合。

6. 我们有

$$A' = \arg\min_{x'} f_A(a, x')$$

事实上，$\inf_{x'} f_A(a, x') \geq \inf_{x,x'} f_A(x, x')$，并且根据对 a的假设我们有相等，因此每个 $a' \in$最小值点集$_{x'} f_A(a, x')$都满足

$$f_A(a, a') = \inf_{x'} f_A(a, x') = \inf_{x,x'} f_A(x, x')$$

即 $(a, a') \in A$。

□

命题 4.9. 设 $\mathcal{L}$ 是一种语言，且 a、$b \in M$。那么集合 $\{a, b\}$ 在 $\mathcal{L}(a, b)$ 中是可构造的。

证明。
观察可知，

$$\{a, b\} = \arg\min_x \left(d(a, x) + d(b, x)\right)$$

□

命题 4.10 (有用的"联结词")。以下集合都是可构造的：

$$\Delta = \{(a, b) \mid a = b\} = \{\mathbf{00}\} \tag{4}$$

$$\bar{\Delta} = \{(a, b) \mid a \neq b\} = \{\mathbf{01}\} \tag{5}$$

$$U = \{(a, b, c) \mid c = a \ \vee \ c = b\} = \{(a, b, c) \mid c \in \{a, b\}\} = \{\mathbf{000}, \mathbf{010}, \mathbf{011}\} \tag{6}$$

此外，对于每个 p、q、r、$s \in M$，我们都有

$$\inf_x \left(d(p,x)+d(q,x)+d(r,x)+1\right) = |\{p,q,r\}| \quad (7)$$

$$|\{p,q,r\}| + \text{上确界}\left(d(p,\ x)+d(q,\ x)+d(r,\ x)-d(s,\ x)-2\right) = |\{p,q,r,s\}| \quad (8)$$

证明。
对于命题的第一部分：

- $\Delta =$ 最小值点集$_{a,\ b}\, d(a,\ b)$。
- $\Delta =$ 最小值点集$_{a,\ b} -d(a,\ b)$
- $U =$ 最小值点集$_{a,\ b,\ c}(d(a,\ c)+d(b,\ c)-d(a,\ b))$

我们对式（7）分情况讨论：

- 若 $p=q=r$，则 $x=p=q=r$ 给出预期值 1。
- 若 $p=q\neq r$ （由于公式关于其自由变量对称，我们可以考虑它们的任意排列），则取 $x=p=q$ 确实得到值 2。
- 否则，若 p,q,r 彼此均不相同，则当 x 等于其中任意一个时，最小值便达到；此时所得值正如所需为 3。

对于式（8），注意到求和的第二项在$s \notin \{p,q,r\}$时等于 1，否则等于 0：若 $s \in \{p,q,r\}$，不失一般性地设 $s=r$，则对所有 x，$d(r,x)-d(s,x)=0$，且对所有 $x \notin \{p,q\}$ （由于 $\ell \geq 3$，这些变量必定存在），最大值 0 均可达到。否则，$x=s$ 给出最大值 1。□

推论 4.11 (一维并集)。如果 A、B 是可构造的且维数为 *1*，那么 $A \cup B$ 是可构造的。

证明。根据命题 4.8（1 和 3），集合

$$(A \times B \times M) \cap U = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in \{a,b\}\}$$

是可构造的，其在第三坐标上的投影为 $A \cup B$，因此根据命题 4.8（2），$A \cup B$ 也是可构造的。□

命题 4.12 (一维补集)。如果 A 是可构造的、不同于 M，且维数为 *1*，那么它在 M 中的补集 A^c 也是可构造的。

证明。注意，对于所有 $x \in M$，

$$\inf_{a \in A} d(x,a) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，

$$A^c = \arg\min_x - \inf_{a \in A} d(x,a)$$

这是可构造的，因为 A 是 .

假设 $A \neq M$是必要的，以确保前面的相等成立。如果 $A=M$，$\inf_{a \in A} d(x,\ a)$始终等于 0，因此 $\arg\min_x -\inf_{a \in A} d(x,\ a) = M$，而不是 $\varnothing$。□

注 4.8。 d 取值于 $\{0,1\}$这一点对前两个命题都至关重要（具体而言，在推论 4.11 的情形中，这关系到 U的定义），因此，只有在定义了 θ_n 之后，这些证明才能推广到高维。

记号 (可构造的理解式)。 为使记号不那么繁琐，从现在起，只要显然可以通过构造定义，我们就会自由地书写理解式，例如 $\{(a,b,c) \in X \mid a \neq b\}$ for $\big\{(a,b,c) \in X \mid (a,b) \in \bar{\Delta}\big\}$；根据命题 4.8 (5)，只要 X 是可构造的，它就是可构造的。

我们还会在这类理解式中使用存在量词，因为它们可以通过投影来解释。例如，

$$\{(a,b,c) \mid \exists d \neq c, d \in \{a,b\}\}$$

应解释为集合

$$\{(a,b,c,d) \mid d \neq c \ \wedge \ d \in \{a,b\}\} = \big\{(a,b,c,d) \mid (c,d) \in \bar{\Delta} \ \wedge \ (a,b,d) \in U\big\}$$

在其前三个坐标上的投影；根据命题 4.8 (2 和 5)，该投影是可构造的。

4.5 定理 4.1 的证明

现在，可构造集的概念已经得到恰当的介绍，我们可以陈述注 4.1 中提到的中间结果：

命题 4.13. 集合 $X = \big\{(a,b,c,d) \in M^4 \mid a = c \ \vee \ b = d\big\}$ 是可构造的。

在证明定理 4.13 之前，我们需要陈述并证明几个中间引理。

引理 4.14. 集合 $C_{\leq 2} = \{(a,b,c) \mid |\{a,b,c\}| \leq 2\}$ 是可构造的。

证明。 考虑可构造集 $E = \{(a,b,c,d) \mid c \neq d\}$。对于所有 $(a,b,c,d) \in E$, $c \neq d$ 因此 $|\{a,b,c,d\}| \geq 2$，且该最小值可以达到。于是

$$E' = \operatorname*{arg\,min}_{(a,b,c,d) \in E} |\{a,b,c,d\}| = \{(a,b,c,d) \mid c \neq d \ \wedge \ |\{a,b,c,d\}| = 2\}$$

利用式（8）和命题 4.8（4），这是可构造的。接着，我们可以将$C_{\leq 2}$ 定义为 E' 在其前三个坐标上的投影，由命题 4.8（2）可知它是可构造的。更明确地说，

$$C_{\leq 2} = \{(a,b,c) \mid \exists d \neq c, |\{a,b,c,d\}| = 2\}$$

确实，如果 $|\{a,b,c\}| = 1$，那么任意 $d \neq c$ 都可以。如果 $|\{a,b,c\}| = 2$，则集合中有一个元素不同于 c，可以令 d 等于该元素。然而，如果 $|\{a,b,c\}| = 3$，那么无论选择哪个 d，$|\{a,b,c,d\}| > 2$ 都成立，这就证明了相等。 □

引理 4.15. 该集合

$$A_1 = \{(a,b,c,d) \mid |\{a,b,c\}| \leq 2 \ \vee \ b = d\}$$

是可构造的。

引理 4.16. 该集合

$$A_2 = \{(a,b,c,d) \mid |\{b,c,d\}| \leq 2 \ \vee \ c = a\}$$

是可构造的。

证明。 由对称性，第一个结果推出该推论。

我们来证明

$$\{(a,\ b,\ c,\ d) \mid |\{a,b,c\}| \leq 2 \ \vee \ b = d\} = \{(a,\ b,\ c,\ d) \mid \exists e,\ |\{a,e,c\}| \leq 2 \ \wedge (b = e \ \vee \ b = d)\}$$

$\boxed{\subseteq}$ 如果 $|\{a,b,c\}| \leq 2$，则 $e = b$ 成立。否则，任意 $e \in \{a,c\}$ works.

$\boxed{\supseteq}$ 如果 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 属于右侧，则 $b = d$ 且结果是显然的，或者 $b = e$，即 $|\{a,b,c\}| \leq 2$。

最后，由引理 4.14 和命题 4.9 可知，该相等的右端是可构造的。 □

注记 4.9。 考虑可构造集 $A_1 \cap A_2$。通过分情况分析可知，该集合恰好包含类型 **0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0102, 0110, 0111, 0112, 0121, 0122**。直观而言，所有因基数原因而不能包含在 X 中的类型（如定理 4.13 的陈述中所述）都已被排除。

在其余类型中，**0011**,**0110**,**0112**, **0122** 仍有待排除。

引理 4.17。该集合

$$B = \{(a,b,c) \mid a = b = c \ \vee \ (a \neq b \ \wedge \ b \neq c)\} = \{\mathbf{000}, \mathbf{010}, \mathbf{012}\}$$

是可构造的。

证明。 我们声称

$$B = \{(a,b,c) \mid \exists d \neq c, \exists e \neq a, b \in \{a,d\} \ \wedge \ b \in \{c,e\}\}$$

$\boxed{\subseteq}$ 设 $(a,\ b,\ c) \in B$。若 $a = b = c$，则任取 d 和 e 均可。若 $a \neq b$ 且 $b \neq c$，则 $d = e = b$ 成立。

$\boxed{\supseteq}$ 设 $(a,\ b,\ c)$ 是右侧中的一个元素，并令 $d,\ e$ 如定义所述。若 $b = a$，则由于 $a \neq e$ 且 $b \in \{c,e\}$，我们有 $b = c$，从而 $a = b = c$。否则，若 $b \neq a$，则 $b = d \neq c$，即 $a \neq b$ 且 $b \neq c$。

最后，由命题 4.9 可知，右侧是可构造的。 □

引理 4.18。 集合 $A_3 = \{(a,b,c,d) \mid a = c \ \vee (b,c,d) \in B\}$ 是可构造的。

证明。 我们来证明

$$A_3 = \{(a,b,c,d) \mid \exists e, (b,e,d) \in B \ \wedge \ c \in \{a,e\}\}$$

$\boxed{\subseteq}$ 设 $(a,\ b,\ c,\ d) \in A_3$。若 $a = c$，则要么 $b = d$，我们可以选取 $e = b = d$；要么 $b \neq d$，我们选取一个不同于二者的 e（利用 $\ell \geq 3$），从而无论哪种情况，$(b,\ e,\ d) \in B$。否则，若 $(b,\ c,\ d) \in B$，取 $e = c$ 即可。

$\boxed{\supseteq}$ 设 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 是右侧中的一个元素，并按定义取 e。若 $a = c$，则无需处理，因此假设 $a \neq c$。必有 $c = e$，因此 $(b,\ e,\ d) = (b,\ c,\ d) \in B$。

最后，由于 B 是可构造的，A_3 也是可构造的。 □

这些看似互不相干的结果实际上是一个更广泛定理的推论：

命题 4.19（受限并）。设 $n > 1$，且 P、Q 是维数为 n 的两个可构造集合。再假设对于所有 $x \in M^{n-1}$，存在 a、$b \in M$ 使得 $(a、\ x) \in P$ 以及 $(b、\ x) \in Q$。则 $P \cup Q$ 是可构造的。

证明。我们断言

$$P \cup Q = \left\{(a,x) \in M \times M^{n-1} \mid \exists b, \exists c, (b,x) \in P \ \wedge\ (c,x) \in Q \ \wedge\ a \in \{b,c\}\right\}$$

其中右侧显然是可构造的。

$\boxed{\subseteq}$ 设 $(a,\ x) \in P \cup Q$，其中 $a \in M$、$x \in M^{n-1}$。若 $(a,\ x) \in P$，那么只需取 $b = a$，以及任意满足 $(c,\ x) \in Q$ 的 c 即可（根据假设，这样的元素总是存在）。情形 $(a,\ x) \in Q$ 类似。

$\boxed{\supseteq}$ 如果（$a,\ x$）属于右侧（含 $a \in M$、$x \in M^{n-1}$），那么存在 $b,\ c$，使得（$b,\ x$）$\in P$，（$c,\ x$）$\in Q$，并且 $a = b$ 或 $a = c$。无论是哪种情况，我们都有（$a,\ x$）$\in P$ 或（$a,\ x$）$\in Q$。 □

现在我们已经具备证明定理 4.13 所需的工具。

定理 *4.13* 的证明。我们将证明 $X = A_1 \cap A_2 \cap A_3$，根据命题 4.8 (3) 以及引理 4.15、4.16 和 4.18，可构造出它。

$\boxed{\subseteq:}$ 令 $t = (a,\ b,\ c,\ d) \in X$。假设 $b = d$。根据 A_3 的定义，$a = c$ 这种情况甚至更简单，因此我们可以假设 $a \neq c$。于是有 $t \in A_1$，并且由于 $|\{b,c,d\}| = |\{b,c\}| \leq 2$，也有 $t \in A_2$。由于 $a \neq c$ 且 $|\{a,b,c\}| \leq 2$，要么 $b = a$，此时 $b \neq c \neq d$；要么 $b = c$ 且 $b = c = d$。无论如何，$(b,\ c,\ d) \in B$、$t \in A_3$，因此 $t \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$。

$\boxed{\supseteq:}$ 令 $t = (a,\ b,\ c,\ d) \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$，并首先假设 $b \neq d$。由 $t \in A_2$ 可知，若 $a = c$，则结论成立；否则 $|\{b,c,d\}| \leq 2$。于是，由于 $t \in A_3$，若 $a = c$，结论也成立；否则 $(b,\ c,\ d) \in B$。由于 $b \neq d$，必有 $b \neq c \wedge c \neq d$，但在这种情况下 $|\{b,c,d\}| > 22$，矛盾。

现在假设 $a \neq c$。由于 $t \in A_3$，我们有 $(b,\ c,\ d) \in B$。由于 $t \in A_1$，我们有 $b = d$（结论成立），或者 $|\{a,b,c\}| \leq 2$，因此 $a = b \neq c$ 或 $a \neq b = c$。在前一种情况下，$(b,\ c,\ d) \in B$ 蕴含 $c \neq d$；但由 $t \in A_2$ 和 $a \neq c$ 可知，$|\{b,c,d\}| \leq 2$，这迫使 $b = d$。在后一种情况下，$(b,\ c,\ d) \in B$ 蕴含 $b = c = d$，且无论哪种情况都有 $b = d$。

在所有情况下，$t \in X$，并且 X 是可构造的。 □

推论 4.20. 我们可以按如下方式定义 θ_2：

$$\theta_2(a,b,c,d) = \sup_{\substack{x \in \{a,c\} \\ y \in \{b,d\} \\ (a,b,x,y) \in X}} (d(a,x) + d(b,y))$$

证明. 根据可构造性，设 $f_X \in \mathcal{L}_4^{\mathrm{aff}}$为定义 X的公式。则

$$X' = \{(x, y) \mid (a, b, x, y) \in X\}$$

根据命题 4.8 (6)， $\mathcal{L}(a, b)$ 中是可构造的，因为 $(a, b, a, b) \in X$。

因此，该量化等价于对 $E = \{a, c\} \times \{b, c\} \cap (\,)$ 的量化；根据命题 . 和命题 4.8 (1 和 3)，它在 $(,,,)$ 上是可构造的。

我们还必须检验这个公式是否确实符合 θ_2 所需的性质。如果 $(x, y) \in E$，根据定义 $x = a$ 或 $y = b$，因此 $d(a, x) + d(b, y) \leq 1$。

如果 $a = c$ 且 $b = d$，那么 $E = \{(a, b)\}$ 且

$$\theta_2(a, b, c, d) = \sup_{(x,y)\in E} (d(a, x) + d(b, y)) = d(a, a) + d(b, b) = 0$$

否则，例如若 $a \neq c$（另一种情况可由对称性类似地处理），则 $(c, b) \in E$，并且达到 1 的最大值，且 $\theta_2(a, b, c, d) = 1$。 □

推论 4.21 (一般并集)。 设 A、B 为维数为 n 的可构造的对象。那么 $A \cup B$ 是可构造的。

证明。 应用定理 4.2，我们得到 d_n 的一个仿射表达式。类似于一维情形，我们定义

$$U_n = \left\{(a, b, c) \in M^{3n} \mid c \in \{a, b\}\right\} = \arg\min_{a,b,c} \left(d_n(a, c) + d_n(b, c) - d_n(a, b)\right)$$

证明的其余部分与推论 4.11 相同。 □

上述证明策略依赖于 $\ell \geq 3$ 这一假设，而取 $\ell = 2$ 会使证明在关键步骤处失效，而且这种失效似乎难以轻易修复。

问题 4.1。 在 $\ell = 2$ 的情形下，是否存在类似于定理 *4.13* 的构造？如果存在，它能否导出一个对所有 $\ell \geq 2$ 都一致的构造？

4.6 量词交替分析

感谢推论 4.20 和定理 4.2，我们已经得到了关于 θ_n 对所有 $n \geq 2$ 的表达式。为完成定理 4.1 的证明，我们必须证明它们的量词复杂度为 $2\lceil \log_2 n \rceil - 1$。为此，我们需要展开对可构造集的嵌套量化，并检查最终表达式在量词交替方面的表现。

查看等式 (3)（见第 7 页命题 4.6 的证明），量词（因而也包括额外的量词交替）可能有两个来源：

- $\inf_z f(z)$ 子表达式。
- 量化表达式 φ。

注意，在这个方程中，前者被否定了两次，这意味着它会先验地与最外层的 sup 产生额外的量词交替，而这正是证明推论 4.20 时所用的量词。因此，

有必要检查能否将其改写成不会产生多余量词交替的形式。

量词交替的另一个潜在来源是命题 4.8 (2)，证明中经常会隐式地用到它，而其定义公式使用了下确界量化。幸运的是，可以绕开这一特定结果：

备注 4.10. 假设 $A \subseteq M^2$ 是可构造的，并令 $A' = \pi_1(A)$ $= \{a \in M \mid \exists a',\ a\ a'\ \in A\}$ φ $=$ (,) 。那么对于所有公式，

$$\inf_{a \in A'} \varphi(a) = \inf_{(a,a') \in A} \varphi(a)$$

这自然可以推广到高维和更复杂的投影。

要应用这一结果，我们对第 4.5 节中使用的定义作如下修改：

$$\begin{aligned}
C_{\leq 2} &= \{(a,b,c,d) \mid c \neq d \wedge |\{a,b,c,d\}| = 2\} = \operatorname*{arg\,min}_{\{(a,b,c,d), c \neq d\}} |\{a,b,c,d\}| \\
A_1 &= \{(a,b,c,d,e,f) \mid (a,e,c,f) \in C_{\leq 2} \wedge b \in \{d,e\}\} \\
A_2 &= \{(a,b,c,d,e,f) \mid (b,e,d,f) \in C_{\leq 2} \wedge c \in \{a,e\}\} \\
B &= \{(a,b,c,d,e) \in \{(a,b,c,d,e), a \neq e \wedge c \neq d\} \mid b \in \{a,d\} \wedge b \in \{c,e\}\} \\
A_3 &= \{(a,b,c,d,e,f,g) \mid (b,e,d,f,g) \in B \wedge c \in \{a,e\}\} \\
X &= \big\{(a,b,c,d,e_1,\ldots,e_7) \mid \\
&\qquad (a,b,c,d,e_1,e_2) \in A_1 \\
&\qquad \wedge (a,b,c,d,e_3,e_4) \in A_2 \\
&\qquad \wedge (a,b,c,d,e_5,e_6,e_7) \in A_3\big\} \\
X' &= \{(x,y,e_1,\ldots,e_7) \mid (a,b,x,y,e_1,\ldots,e_7) \in X \wedge x \in \{a,c\} \wedge y \in \{b,d\}\} \\
\theta_2(a,b,c,d) &= \sup_{(x,y,e_1,\ldots,e_7) \in X'} d(a,x) + d(b,y)
\end{aligned}$$

下文中，我们将直接使用第 4.4 节和第 4.5 节的结果与定义。

$$
\begin{aligned}
f_{X'}(x,y,e_1,\ldots,e_7) &= f_X(a,b,x,y,e_1,\ldots,e_7) \\
&\quad + d(x,a) + d(x,c) \\
&\quad + d(y,\ b) + d(y,\ d) \\
f_X(a,b,x,y,e_1,\ldots,e_7) &= f_{A_1}(a,b,x,y,e_1,e_2) \\
&\quad + f_{A_2}(a,b,x,y,e_3,e_4) \\
&\quad + f_{A_3}(a,b,x,y,e_5,e_6,e_7) \\
f_{A_1}(a,b,x,y,e_1,e_2) &= f_{C\le 2}(a,x,e_1,e_2) + d(b,y) + d(b,e_1) \\
f_{C\le 2}(a,x,e_1,e_2) &= K_1(-d(e_1,e_2) - \inf_{a',x',e_1',e_2'} -d(e_1',e_2')) \\
&\quad + |\{a,e_1,x,e_2\}| \\
|\{a,e_1,x,e_2\}| &= \inf_z (d(a,z) + d(e_1,z) + d(x,z)) \\
&\quad + \sup_w (d(w,a) + d(w,e_1) + d(w,x) - d(w,e_2) - 2) \\
f_{A_2}(a,b,x,y,e_3,e_4) &= f_{C\le 2}(b,y,e_3,e_4) + d(x,a) + d(x,e_3) \\
f_{A_3}(a,b,x,y,e_5,e_6,e_7) &= f_B(b,e_5,y,e_6,e_7) + d(x,a) + d(x,e_5) \\
f_B(b,e_5,y,e_6,e_7) &= K_2(2 - d(b,e_7) - d(y,e_6)) \\
&\quad + d(e_5,b) + d(e_5,e_6) \\
&\quad + d(e_5,y) + d(e_5,e_7)
\end{aligned}
\tag{9--16}
$$

最后

$$
\begin{aligned}
\theta_2(a,b,c,d) = \sup_{(x,y,e_1,\ldots,e_7)} \Bigg[& \\
& - K_0\left(f_{X'}(x,y,e_1,\ldots,e_7) - \inf_{x',y',e_1',\ldots,e_7'} f_{X'}(x',y',e_1',\ldots,e_7')\right) \\
& + d(a,x) + d(b,y)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中 K_0，K_1，K_2 是如公式（2）中所选取的实常数。注意 K_0 前面的负号。

注意到公式（17）中的 inf 是对除 a，b 之外的每个变量取值的，因此我们可以作出如下观察：

- 式 (12) 中的下确界可以简化为 -1。
- 在式 . (12) 得出

$$\inf_{a,b,c\neq d} |\{a,b,c,d\}| = 2$$

.

- 对式 (11) 和 (14) 做同样的处理，也都能通过选取 $y = e_1 = b$ （分别为 $x = e_3 = a$）得到 2
- 根据 K_2的定义，只有当$b \neq e_7$ 且 $y \neq e_6$ 时才能达到最小值（这是可能的，因为 $\ell > 1$）。在这种情况下， $d(e_5,b) + d(e_5,e_7) \geq 1$ 且 $d(e_5,y) + d(e_5,e_6) \geq 1$，这意味着最小值至少为 2。取 $e_4 = y = b$ 即可达到该值。

- 与上文类似，公式（15）中对 a, b 的每个变量取下确界为 2
- 因此

$$\inf_{x,y,e_1,\ldots,e_7} f_X(a,b,x,y,e_1,\ldots,e_7) = 2+2+2 = 6$$

and

$$\begin{aligned}\inf_{x,y,e_1,\ldots,e_7} f_{X'}(x,y,e_1,\ldots,e_7) &= 6 + \inf_x \left(d(x,a)+d(x,c)\right) + \inf_y \left(d(y,b)+d(y,d)\right) \\ &= 6 + d(a,c) + d(b,d)\end{aligned}$$

将此表达式代入公式（17）并展开所有定义，我们得到如下结果：

引理 4.22. 公式 θ_2 可以写成一个sup，它对一个inf、一个sup（二者均在公式（13）中）以及许多其他无量词项之和进行量化。因此，θ_2 可以仅用一次量词交替写出。

事实上，被量化公式的特殊形式使我们能够陈述一个较强的结果：

命题 4.23. 由上述 θ_2 的定义以及定理 *3.1* 中的过程得到的公式 θ_n，可以用 $2\lceil \log_2 n \rceil - 1$ 次量词交替写出。

证明。类似于命题 3.2 的证明。关键区别在于，将度量的所有实例替换为 θ_2 之后对表达式的分析。

具体而言，假设 $k \geq 1$，且 θ_{2^k} 的表达式已化为前束范式。将变量替换为变量有序对，将 d 的实例替换为 θ_2，并将负号移入量词内部后，原先的无量词内层公式变为三种不同形式的项之和：

- 无量词项
- 形如 $\sup(\sup(\cdots) + \inf(\cdots) + \cdots)$ 的项，对应于前面带加号的原 d 实例。
- 形如 $\inf(\inf(\cdots) + \sup(\cdots) + \cdots)$ 的项，对应于前面带减号的原 d 实例。

后两者可以改写为只含一次量词交替的公式。由于这些带量词表达式是求和的，我们可以将它们交错排列，同时保持公式的有效性，只要不改变它们的相对顺序。很容易看出，任何前束范式的写法都至少包含两次量词交替。若使求和式最外层的量词与初始前束范式最内层的量词相匹配，则只需在原有数量上增加两次量词交替。由于 θ_2 可以写成只含一次量词交替的形式，由此通过归纳法证明了该结论。

□

第3节的代码清单

导入NumPy **作为** np**从** t y pi n g **导入**
C a l l a b l e**导入** i t e r t o o l s **作为** i t

仿射公式的基本定义类 Var: counter def __初始化__(自身): 自身 .key Var.counter Var.counter def __哈希__(自身): 返回自身 .key 类 求值: def __ 初始化 __(自身，free_ 变量 _ 字典: 字典 [Var，整数]): 自身.dictionary free变量字典 自身.max_值 = 最大值(free_ 变量_ 字典.值()) def __获取项__(自身，变量: Var): 返回自身.dictionary 变量] def __设置项__(自身，变量，值): 如果 值 > 自身.max值 + 1: 引发断言错误 否则如果 值 == 自身.max值 + 1: 自身.max值 = 值 自身.dictionary 变量] = 值 def pop(自身，变量): 自身.dictionary.pop(变量) 自身.max_值 = 最大值(自身.dictionary.值())类 公式: def __ 初始化 __(自身，vars_to_bind: 集合 [Var]): 自身.to bind = vars to bind_ _ _ def 求值(自身，求值: 求值) -> 浮点数: 引发 NotImplementedError类 距离(公式): def __初始化__(自身，第一: Var，第二: Var): super().__初始化__({第一，第二}) 自身.first = 第一 自身.second = 第二 def 求值(自身，求值) -> 浮点数:

返回 0 **如果** 求值 [自身.第一] == 求值 [自身.第二] **否则** 1

类 仿射组合(公式): **定义** __初始化__(自身, 常量: **浮点数** , *组合: **元组** [**浮点数** , 公式]): **super**().__初始化__(**集合**().union(*(x.to_bind **对于** x **在** 组合))) 自身.const = 常量自身.comb = 组合

定义 **求值**(自身, 求值) -> **浮点数**: r = 自身.常量
对于 系数, f **在** 自身.组合: r += 系数 * f. **求值**(求值)**返回** r

定义 r(): x = np.随机.randint(−2,
3)**打印**(x)**返回** x

类 量词(公式):**定义** __初始化__(自身, 函数: 可调用 [[**浮点数**, **浮点数**], **浮点数**], 公式_约束: 可调用

fresh_var = 变量() form = form_constr(fresh_var)
bound = **集合**(form.to_bind) bound.remove(fresh_var)# 如果不在内部则抛出键错误 **super**().__init__(bound) self.func = func self.var = fresh var_ self.公式 = form

求值(self, valuation): valuation[self.var] = 0 res = self.公式.**求值**(valuation) **对于** vl **在值域**(1, **min**(L, (valuation.max_val + 1) + 1)): valuation[self.var] = vl res = self.func(res, self.公式.**求值**(valuation)) valuation.pop(self.var)**返回** res

类 InfQuantifier(Quantifier):**定义** __init__(self, form_constr: Callable [[变量], 公式]): **父类**().__init__(**min**, form_constr)**类** SupQuantifier(Quantifier):**定义** __init__(self, form_constr: Callable [[变量], 公式]): **父类**().__init__(**max**, form_constr)# 原始 *d_2*
类 D2(公式):**定义** __init__(self, *变量: 变量):

```
    父类().__init__(集合(变量)):self.变量 =变量 求值(self,val:
Valuation) ->浮点数:(a,b,c,d) =self.变量 返回 0 如果(val[a
],val[b]) ==(val[c],val[d]) 否则 1


# 生成基数为 'n' 的所有类型-基数不超过 'max_card' 的元组定义 generate_types(n,max_
card =None):如果 max card 是 None:max card =n + 1 ts = [[0]]对于 _ 在值域(1,n):
new_ts = []对于 t 在 ts:new_ts.extend(t + [i]对于 i 在值域(最小值(最大值(t) + 2,max_
card))) ts = new ts 返回 ts


如果 name == 'main':
n = 4# ℓ, 可以改成 2 或 3L = 4free = [Var()
对于 _ 在值域(n)]# 生成所有类型的元组 types =
generate_types(n,max_card=L)# φ_i, i 从 1 到
15公式: 列表 [公式] = [仿射组合(1.0),

    *[Distance(free[i],free[j]) 对于 i 在值域 (3) 对于 j 在值域 (i + 1, 4)],
    *[下确界量词(λ a:仿射组合(1.0,(1,距离(a,自
    由 [c[0]])),(1,距离(a,自由 [c[1]])),(1,距离
    (a,自由 [c[2]])))) 对于 c 属于 it.组合(值域(4),
    3)],上确界量词(λ a:仿射组合(4.0,(-1,距离(
    a,自由 [0])),(-1,距离(a,自由 [1])),(-1,距
    离(a,自由 [2])),(-1,距离(a,自由 [3])),)),上
    确界量词(λ a:仿射组合(-2.0,
```

(1,距离(a,自由 [0])),(1,距离(a,自由 [1])),(1,距离(a,自由 [2])),(−1,距离(a,自由 [3])),)),上确界量词(λa:仿射组合(0,(1,距离(a,自由 [0])),(1,距离(a,自由 [1])),(−1,距离(a,自由 [2])),(−1,距离(a,自由 [3])))),上确界量词(λa:仿射组合(0,(2,距离(a,自由 [0])),#2(1,距离(a,自由 [1])),(−2,距离(a,自由 [2])),(−1,距离(a,自由 [3]))#−2)),仿射组合(0.0,(1,距离(自由 [0],自由 [1])),(−1,距离(自由 [0],自由 [2])),(−1,距离(自由 [0],自由 [3])),(−1,下确界量词(λa:仿射组合(1.0,(1,距离(a,自由 [0])),(1,距离(a,自由 [1])),(1,距离(a,自由 [2])))),(1,下确界量词(λa:仿射组合(1.0,(1,距离(a,自由 [0])),(1,距离(a,自由 [2])),(1,距离(a,自由 [3])))),(1,上确界量词(λa:仿射组合(0,(2,距离(a,自由 [0])),(−2,距离(a,自由 [2])),

(1, 距离(a, 自由[1])), (−1, 距离(a, 自由[3])))))# 为每个公式计算向量，并存储为矩阵 A =np.ndarray((len(公式), len(类型))) for i, f in enumerate(公式): for j, t in enumerate(类型): 值 =求值({自由[i]: t[i] for i in 值域(n)}) A[i, j] =f.求值(值) # 检查该集合是否生成 assert np.linalg.矩阵_秩(A) >=len(类型) theta_2 =上确界量词(lambda a: 上确界量词(lambda b: 全称量词(lambda c: 仿射组合(0, (1, 距离(自由[0], 自由[1])), (−1, 距离(自由[0], 自由[2])), (−1, 距离(自由[0], 自由[3])), (2, 距离(a, 自由[0])), (−2, 距离(a, 自由[2])), (1, 距离(a, 自由[1])), (−1, 距离(a, 自由[3])), (−1, 距离(b, 自由[0])), (−1, 距离(b, 自由[1])), (−1, 距离(b, 自由[2])), (1, 距离(c, 自由[0])), (1, 距离(c, 自由[2])), (1, 距离(c, 自由[3])))))

检查 *theta_2*等于_*2*对于t 在types:d_2 = 0如果(t[0], t[1]) ==(t[2], t[3]) 否则1 断言d_2 ==theta_2. 求值(Valuation({free[i]: t[i] 对于i 在值域(n)}))

参考文献

[1] Seyed-Mohammad Bagheri。“利普希茨结构的线性模型理论”。
载于：数学逻辑档案53.7–8（2014年11月），第897–

927。国际标准连续出版物号：0933-5846。数字对象标识符：10.1007/s00153-014-0395-6。网址：https://doi.org/10.1007/s00153-014-0395-6。[2] Seyed-Mohammad Bagheri。连续逻辑线性片段的同构定理。2019年。arXiv：1910.00776[math.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/1910.00776。[3] Chen Chung Chang与H. Jerome Keisler。连续模型论。（*AM-58*）。普林斯顿大学出版社，1966年。国际标准书号：9780691079295。网址：http://www.jstor.org/stable/j.ctt1b9x2b1（访问日期：2025年12月10日）。[4] N. J. A. Sloane。整数序列在线百科全书中的序列*A000110*（无日期）https://oeis.org/A000110。访问日期：2025年5月28日。[5] Itaï Ben Yaacov、Tomás Ibarlucía与Todor Tsankov。仿射逻辑中的极值模型与直积分。2024年。arXiv：2407.13344 [math.LO]。网址：https://arxiv.org/abs/2407.13344。[6] Itaï Ben Yaacov等。“度量结构的模型论”。载于：模型论及其在代数与分析中的应用。Zoé Chatzidakis等编。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，2008年，第315–427页。