arXiv:2603.07636v1 [nlin.SI] 8 Mar 2026

关于 Gelfand–Dickey 层级的代数几何解

Zejun Zhou *

中国科学技术大学数学科学学院，合肥 *230026*，中国

摘要

在 [14] 中，Dubrovin 引入了一个 A_1 型无限常微分方程组，并给出了构造 KdV层级代数几何解的一种简单方法（另见 [15, 4]）。在 [34] 中，该无限常微分方程组被推广为 $\mathfrak{g}$ 型无限常微分方程组，其中 $\mathfrak{g}$ 为任意单李代数。本文基于 A_n 型无限常微分方程组与 Dubrovin 方法，给出了 Gelfand–Dickey 层级代数几何解的一种简单构造。作为应用，我们给出了相关 Riemann θ 函数的 N 点函数公式。

1 引言

设 $n \geq 1$ 为整数。具有 n 个未知函数的 Gelfand–Dickey 层级是一族无穷的偏微分方程 [8], ，定义为

$$\frac{\partial L}{\partial T_k^a} = [(L^{\frac{a}{n+1}+k})_+, L], \quad a = 1, \dots, n, k \geq 0. \tag{1}$$

Here

$$L := \partial^{n+1} + v_1\partial^{n-1} + v_2\partial^{n-2} + \cdots + v_n, \tag{2}$$

并且 ∂ 被理解为 $\partial_{T_0^1}$（详见 [8] ）。当 $n = 1$ 时，它就是著名的 Korteweg–de Vries（ KdV）层级。

在 [16, 30], 中，Dubrovin 和 Novikov（另见 Matveev 和 Its [22]）提出了一种给出 KdV层级一族精确解的方法；另见 [27]。这些被称为 KdV层级的代数几何解，亦称有限带解。在他们的方法中，KdV层级被转化为一条超椭圆曲线的雅可比簇中一点的演化，该曲线是微分算子 L 的谱曲线。在 [9, 10], 中，Dickson–Gesztesy–Unterkofler 给出了 Boussinesq 层级的代数几何解，相关的谱曲线为三次曲线。这是 $n = 2$ 时的情形。也有关于与三次曲线和四次曲线相关的代数几何解的研究（例如 [36, 33]）。当 $n \geq 3$ 时，据我们所知，Gelfand–Dickey 层级的代数几何解似乎尚未通过显式谱曲线给出。

在 [24, 25] 中，对于每个紧黎曼曲面，Krichever 利用 θ-函数构造了 Kadomtsev–Petviashvili（KP）层级的代数几何解；另见 [18,

*zzj24601@mail.ustc.edu.cn

23, 28, 32]。Gelfand–Dickey 层级是 KP层级的一个约化，因此原则上可以使用 Krichever方法构造 Gelfand–Dickey 层级的代数几何解。然而，显式构造仍有待研究。

最近，Dubrovin [14] 通过矩阵劳伦级数 $W(\lambda) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})((\lambda^{-1}))$ 引入了一个含有无穷多个未知量的无限可交换常微分方程系统。若将 $W(\lambda)$ 截断至第 g 项，则相应的常微分方程组解给出 [14]一个 KdV 层级的代数几何解，该解与 $\lambda^g W(\lambda)$ 的谱曲线有关。

$$C : \mu^2 = \det(\lambda^g W(\lambda)) = \lambda^{2g+1} + \sum_{k=1}^{2g+1} q_k \lambda^{2g+1-k} . \tag{3}$$

相应的 τ-函数可以用这条谱曲线的 θ-函数表示（参见 [14,29]）。基于矩阵预解式方法，[14] 还得到了关于 θ-函数的一些有趣性质（参见 [4, 5]）。这种由 [14] 得到代数几何解的新方法（另参见 [15]）直接而简洁。

在 [12] 中，KdV 层级被推广为 $\mathfrak{g}$ 型 Drinfeld–Sokolov层级，其中$\mathfrak{g}$ 是任意单李代数，而 KdV 层级对应于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$。在 [34] 中，Dubrovin 的无限常微分方程系统从 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 推广到 $\mathfrak{g}$。[34] 已证明，无限常微分方程系统的解导出了 $\mathfrak{g}$ 型 Drinfeld–Sokolov 层级的 τ-函数 [5] 。

正如 [34], 所建议的，可以将Dubrovin构造 $\mathfrak{g}$ 型Drinfeld–Sokolov层级的代数几何解的新方法 [14, 15] 加以推广。本文将在 $\mathfrak{g} = A_n$ 情形下完成这一工作。

设 $W(\lambda) \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ 由下式给出

$$W(\lambda) = \Lambda(\lambda) + \sum_{k\geq 0}^{m} \frac{W_k}{\lambda^k} . \tag{4}$$

Here

$$\Lambda(\lambda) = \lambda E_{n+1,1} + \sum_{k=1}^{n} E_{k,k+1} \tag{5}$$

是循环元，而 W_0 是下三角矩阵。 $\lambda^m W(\lambda)$的谱曲线由下式给出

$$C : S(\lambda, \mu) := \det(\mu I_{n+1} - \lambda^m W(\lambda)) = 0 . \tag{6}$$

在一般情形下，其亏格为 $g = {}^{mn}{}_{(n+1)\,2}$。~~设 $a_1,\ldots$~~ $, a_g, b_1, \ldots, b_g \in H_1(C, \mathbb{Z})$为其典范圈，$\omega_1, \ldots, \omega_g$为 C上相应的规范化全纯微分。在第2节中我们将证明， C 在无穷远点处仅有一个点 ∞_C ，且局部坐标可取为

$$z := \lambda^{-1/(n+1)} . \tag{7}$$

定义向量 $\boldsymbol{V}_{(k)} = (V_{(k)\,1}, \ldots, V_{(k)g})$， $k \geq 1$ 通过

$$\omega_i(z) = -\sum_{k\geq 1} V_i^{(k)} z^{k-1} dz , \quad i = 1, \ldots, g , k \geq 1 . \tag{8}$$

设 $\omega(P,\ Q)$， $P,\ Q \in C$为基本归一化双微分（见 [20]）。设当 $P,\ Q$ 靠近 ∞_C时， $z,\ w$为 $P,\ Q$ 的局部坐标。由下式定义$q_{i,\ j}$， $i,\ j \geq 1$

$$\omega(z, w) = \frac{dz dw}{(z-w)^2} + \sum_{i,j\geq 1} q_{i,j} z^{i-1} w^{j-1} dz dw . \tag{9}$$

在 C上存在 $W(\lambda)$的特征向量的自然线丛 $\mathcal{L}$，并且我们将在第2节证明 $\mathcal{L}$ 的次数为 $-g-n$。我们可以将零次除子与其在阿贝尔–雅可比映射下的像等同起来。设 $-\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ 为 $\mathcal{L}$的一个除子，我们定义

$$\boldsymbol{u} := \mathcal{D}_{\mathcal{L}} - (n+1)\infty_C - \Delta \in J(C)\,. \tag{10}$$

这里 Δ 是黎曼除子，其次数为 $g-1$。

遵循Dubrovin [15]，我们将在第2节证明

命题1。由下式定义的函数 $Z(t_1, t_2, \dots)$

$$Z(t_1, t_2, \dots) := \exp\left(\sum_{i,j\geq 1}\frac{1}{2}q_{i,j}t_it_j\right)\theta\left(\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)} - \boldsymbol{u}\right) \tag{11}$$

是对应于 $W(\lambda)$ 的 τ-函数，即 *[34]*中的无限常微分方程的解的 τ-函数（因此也是***Gelfand–Dickey*** 层级的 τ-函数）。这里 θ 是与(6)相关的 θ-函数 *[13, 14, 15]*，并且 $t_{a+(n+1)k} := T_k^a$，$a = 1, \dots, n$, $k \geq 0$。

在 [14, 15] 中，Dubrovin证明了来自KdV层级和 N-波层级的代数几何解的 θ-函数的对数导数公式。此外，他利用这些公式证明了$\log\theta$ 在某些点处的泰勒系数的某些组合全都是有理数。我们也将把这些推广到A_n。

下面定义一个矩阵值函数

$$\Phi(P) := \frac{S(\lambda, W) - S(\lambda, \mu)}{W - \mu}\,, \quad P = (\lambda, \mu) \in C\,. \tag{12}$$

这里我们取变换 $W(\lambda) \mapsto \lambda^m W(\lambda)$。定义 $\Pi(P)$ 为

$$\Pi(P) := \frac{\Phi(P)}{S_\mu(\lambda, \mu)}\,, \quad P = (\lambda, \mu) \in C\,. \tag{13}$$

下面的定理将在第3节中证明。

定理1。对于任意 $n \geq 1$、$N \geq 2$，设 λ_1、……、λ_N 是互不相同的复数，并令$P_1 =$（λ_1、μ_1）……、$P_N =$（λ_N、μ_N）为 C 上由（6）给出的 N个点。定义 ω_N 为

$$\omega_N(P_1, \dots, P_N) := \sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{g}\frac{\partial^N \log\theta(\boldsymbol{u})}{\partial u_{i_1}\dots\partial u_{i_N}}\omega_{i_1}(P_1)\dots\omega_{i_N}(P_N) + \delta_{N,2}\omega(P_1, P_2)\,, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 由（10）定义。于是有

$$\omega_N(P_1, \dots, P_N) = -\frac{1}{N}\sum_{s\in S_N}\frac{\operatorname{Tr}\big(\Pi(P_{s_1})\dots\Pi(P_{s_N})\big)d\lambda_1\dots d\lambda_N}{\prod_{i=1}^N(\lambda_{s_{i+1}} - \lambda_{s_i})}\,. \tag{15}$$

这里，S_N 是由 N 个元素组成的置换群，且 $s_{N+1} := s_1$。

对于 $n = 1$ 的情形，定理1 已在 [14] 中得到证明。作为定理1的直接推论，我们有以下结论

推论 1. 设 $W(\lambda) \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})[\lambda, \lambda^{-1}]$ 由 (4) 给出。若 $W(\lambda)$ 的每个元素都属于 $\mathbb{Q}[\lambda, \lambda^{-1}]$ 和 $N \geq 3$，则 $\log\theta\left(\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)} - \boldsymbol{u}\right)$在 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ 处的所有 N 阶泰勒系数都是有理数。

对于 $n=1$ 的情形，推论 1 已在 [14] 中证明。

在 [14] Dubrovin 还证明了，KdV层级的每个 τ-函数都可以由超椭圆曲线的 θ-函数逼近。我们将把这一结果推广到 Gelfand–Dickey 层级。

本文的组织如下。在第2节中，我们将通过求解 [34] 中定义的常微分方程来证明命题1。在第3节中，我们将证明定理1。第4节讨论一个例子。

2 Gelfand–Dickey 层级的代数几何 τ-函数

本节将证明命题1。我们的证明主要沿用 [14, 15] 中的思路，并建立在 [34] 的基础上。

2.1 $W(\lambda)$ 的常微分方程组

Let 我们回顾 [34] 中为一个元素 $W(\lambda) \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})((\lambda^{-1})$ 引入的常微分方程组):

$$W(\lambda) = \Lambda(\lambda) + W_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_k}{\lambda^k}\,. \tag{16}$$

我们总是假设 W_0 是下三角的。定义 [34] 上的泊松括号 $\mathcal{P} := \mathbb{C}[(W_k)_{ij} | k \geq 1$ 或 $k=0,$ $i \geq j]$ 如下:

$$\left\{ W(\lambda) \underset{'}{\otimes} W(\mu) \right\} := [P(\lambda-\mu), W(\lambda)\otimes 1 + 1 \otimes W(\mu)]. \tag{17}$$

Here

$$P(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{E_{ij}\otimes E_{ji}}{\lambda}\,. \tag{18}$$

$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})((\lambda^{-1}))$ 的主分次为

$$\deg E_{ij} = j-i\,, \quad \deg\lambda = n+1\,. \tag{19}$$

It h已证明 [34] 对任意 $W(\lambda)$，都存在唯一的一对 $(U(\lambda)\ H(\lambda))$，其形式为 :

$$U(\lambda) = \sum_{k\geq 1} U^{[-k]}(\lambda) \in \operatorname{Im}\operatorname{ad}_{\Lambda(\lambda)}\,, \quad \deg U^{[-k]}(\lambda) = -k\,, \tag{20}$$

$$H(\lambda) = \sum_{k\geq 0} H^{[-k]}(\lambda) \in \operatorname{Ker}\operatorname{ad}_{\Lambda(\lambda)}\,, \quad \deg H^{[-k]}(\lambda) = -k\,, \tag{21}$$

满足

$$e^{-\operatorname{ad}_{U(\lambda)}} W(\lambda) = \Lambda(\lambda) + H(\lambda)\,. \tag{22}$$

矩阵 $H(\lambda)$ 可唯一写成

$$H(\lambda) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{k\geq -1} \frac{h_{a,k}}{n+1} \Lambda(\lambda)^{n+1-a} \lambda^{-k-2}\,. \tag{23}$$

这里 $h_{a,\ k} \in \mathcal{P}$。 $W(\lambda)$ 的基本矩阵预解式定义如下

$$R_a(\lambda) := e^{\operatorname{ad}_{U(\lambda)}} \Lambda(\lambda)^a\,, \quad a=1,\ldots,n\,. \tag{24}$$

定义哈密顿流

$$\frac{dW(\lambda)}{dT_k^a} = \{h_{a,k}, W(\lambda)\}\ . \tag{25}$$

所有流 $\frac{d}{dT_k^a}$, $a = 1, \dots, n$, $k \geq 0$ 彼此可交换，因此常微分方程组 (25) 对任意初值都有一个解 $W(\lambda, \boldsymbol{T}) \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})[\lambda, \lambda^{-1}][[\boldsymbol{T}]]$。这里 $\boldsymbol{T} = (T_k^a)_{a=1,\dots,n,\, k\geq 0}$。常微分方程组 (25) 的 τ-结构 $F_{a,k;b,l}$, $a, b = 1, \dots, n$, $k, l \geq 0$ 定义如下：

$$\sum_{k,l\geq 0} \frac{F_{a,k;b,l}}{\lambda^{k+1}\nu^{l+1}} = \frac{\mathrm{Tr}(R_a(\lambda)R_b(\nu))}{(\lambda-\nu)^2} - \delta_{a+b,n+1}\frac{a\lambda + b\nu}{(\lambda-\nu)^2}\,, \quad a, b = 1, \dots, n\,. \tag{26}$$

对于常微分方程组 (25) 的任意解，都存在一个 $\tau(\boldsymbol{T})$，使得

$$F_{a,k;b,l}(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial^2 \log \tau(\boldsymbol{T})}{\partial T_k^a \partial T_l^b}\,. \tag{27}$$

这个 $\tau(\boldsymbol{T})$ 称为解 $W(\lambda, \boldsymbol{T})$ 的 τ-函数，并已证明它是 Gelfand–Dickey 层级 [34]的一个 τ-函数。

令 $N \geq 2$，定义多项式 $F_{a_1,k_1;\dots,a_N,k_N} \in \mathcal{P}$ 如下：

$$F_{a_1,k_1;\dots;a_N,k_N} := \frac{d^N \log \tau}{dT_{k_1}^{a_1} \dots dT_{k_N}^{a_N}}. \tag{28}$$

已证明 [34]：

$$\begin{aligned}\sum_{k_1,\dots,k_N\geq 0} \frac{F_{a_1,k_1;\dots;a_N,k_N}}{\lambda_1^{k_1+1}\dots\lambda_N^{k_N+1}} = -\frac{1}{N}\sum_{s\in S_N} \frac{\mathrm{Tr}\big(R_{a_{s_1}}(\lambda_{s_1})\dots R_{a_{s_N}}(\lambda_{s_N})\big)}{\prod_{i=1}^N(\lambda_{s_i}-\lambda_{s_{i+1}})} \\ -\delta_{N,2}\delta_{a_1+a_2,n+1}\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\,.\end{aligned} \tag{29}$$

因此，对于解 $W(\lambda, \boldsymbol{T})$，我们可以得到 $\tau(\boldsymbol{T})$ 的 N 阶泰勒系数生成级数的显式表达式：

$$\begin{aligned}\sum_{k_1,\dots,k_N\geq 0} \frac{\frac{\partial^N \log\tau}{\partial T_{k_1}^{a_1}\dots\partial T_{k_N}^{a_N}}(\mathbf{0})}{\lambda_1^{k_1+1}\dots\lambda_N^{k_N+1}} = -\frac{1}{N}\sum_{s\in S_N} \frac{\mathrm{Tr}\big(R_{a_{s_1}}(\lambda_{s_1},\mathbf{0})\dots R_{a_{s_N}}(\lambda_{s_N},\mathbf{0})\big)}{\prod_{i=1}^N(\lambda_{s_i}-\lambda_{s_{i+1}})} \\ -\delta_{N,2}\delta_{a_1+a_2,n+1}\frac{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\,, \quad N \geq 2\,.\end{aligned} \tag{30}$$

关于限制在截断 $W(\lambda)$ 上的常微分方程，$n = 1$ 已进行了研究 [14]。这个受限常微分方程组也见于 [29]。受这些工作的启发，我们考虑由 (4) 给出的 $W(\lambda)$ 情形。[19] 已证明，对于任意正的 M, N，子空间

$$\left\{ W(\lambda) \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})((\lambda^{-1}))\,|\,W(\lambda) = \sum_{k=-M}^{N} W_k \lambda^k \right\} \tag{31}$$

是 $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})((\lambda^{-1}))$ 的泊松子流形。因此，空间

$$\left\{ W(\lambda) \in \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})((\lambda^{-1}))\,|\,W(\lambda) = \Lambda(\lambda) + W_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{W_k}{\lambda^k} \right\} \tag{32}$$

是泊松子流形 (31) 与式 (16) 给出的 $W(\lambda)$ 空间的交，因此其自身也是一个泊松子流形。因此，常微分方程组 (25) 可限制在该子空间上，并成为一个有限维哈密顿系统。该常微分方程组的解和τ-函数将在后续小节中讨论。

2.2 谱曲线与特征向量线丛

在本小节及下一小节中，对于由式 (4) 给出的 $W(\lambda)$，我们作如下变换：

$$W(\lambda) \mapsto \lambda^m W(\lambda)\,. \tag{33}$$

回顾一下，相应的谱曲线 C 由式 (6) 定义，其形式为

$$C:\ S(\lambda,\mu)=\mu^{n+1}-\lambda^{m(n+1)+1}+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m(n+1-k)} s_{k,j}\lambda^j\mu^k=0\,. \tag{34}$$

这条曲线称为 $(n+1, m(n+1)+1)$-曲线；参见 [6]。此处及下文中，我们假设它在仿射部分没有奇点。

对于固定的 λ，令 $\mu_1(\lambda)\ldots,\mu_{n+1}(\lambda)$ 为方程 (34) 的 $n+1$ 个根。由于 $\lambda\to\infty$，它们满足以下公式：

$$\mu_k(\lambda)=e^{2k\pi\sqrt{-1}/(n+1)}\lambda^{m+\frac{1}{n+1}}+o\left(\lambda^{m+\frac{1}{n+1}}\right),\quad k=1,\ldots,n+1\,. \tag{35}$$

因此，覆盖 $C\xrightarrow{\lambda}\mathbb{P}^1$ 在 $\mathbb{P}^1$中无穷远点上方的点 ∞_C 处发生分歧，而 λ 在 ∞_C 处的分歧指标为 $n+1$。在 ∞_C 附近，我们有如下参数化：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}=z^{n+1}\,,\\[2mm] \dfrac{\mu}{\lambda^m}=\dfrac{1}{z}+O(1)\,,\quad z\to 0\,.\end{cases} \tag{36}$$

利用黎曼–赫尔维茨公式，我们可以证明 C 的亏格为 $g=\frac{mn}{(n+1)\ 2}$。

对于点 $P=(\lambda,\mu)\in C$，我们可以将其与 $W(\lambda)$ 的特征向量 $\boldsymbol{\psi}(P)\in\mathbb{C}^{n+1}$ 相关联：

$$W(\lambda)\boldsymbol{\psi}(P)=\mu\boldsymbol{\psi}(P)\,. \tag{37}$$

若 P 不是分歧点，则 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 位于一个一维子空间中。当 P 是分歧点时，设 ζ 为 P 附近的局部坐标，且 $\zeta(P)=0$。则亚纯特征向量 $\boldsymbol{\psi}(\zeta)$ 可写为

$$\boldsymbol{\psi}(\zeta)=\zeta^d\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\zeta)\,,\quad \tilde{\boldsymbol{\psi}}(0)\in\mathbb{C}^{n+1}\backslash\mathbf{0}\,. \tag{38}$$

设 $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(0)$ 为与 $P\in C$ 相关联的特征向量。这就完成了 C 上 $W(\lambda)$ 的特征向量的线丛 $\mathcal{L}$ 的定义。(38) 中的整数 d 是亚纯截面 $\boldsymbol{\psi}(\zeta)$ 在 P 处的阶。

设 $P=(\lambda_0,\mu_0)\in C\backslash\infty_C$ 为分歧点。用 s 表示 λ 在 P 处的分歧指标。于是我们可以选取局部坐标 $\zeta=(\lambda-\lambda_0)^{\frac{1}{s}}$。设 $\boldsymbol{\psi}(\zeta)$ 为 P 附近的局部截面：

$$W(\zeta^s+\lambda_0)\boldsymbol{\psi}(\zeta)=\mu(\zeta)\boldsymbol{\psi}(\zeta)\,,\quad \mathrm{ord}_P\boldsymbol{\psi}(\zeta)=0\,. \tag{39}$$

由于 P 不是奇点，当 $\zeta\to 0$时我们有如下展开：

$$\mu(\zeta)=\mu_0+\mu'(0)\zeta+o(\zeta)\,,\quad \mu'(0)\neq 0\,. \tag{40}$$

现在在点 $\zeta=0$处对(39)求导 k 次，（$k<s$）。于是有

$$W(\lambda_0)\boldsymbol{\psi}^{(k)}(0)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mu^{(k-l)}(0)\boldsymbol{\psi}^{(l)}(0)\,. \tag{41}$$

这里，$*^{(k)}$ 表示对 ζ 求 k 阶导数。

引理 1. $W(\lambda_0)$ 的特征值为 μ_0 的根空间具有以下基:

$$\boldsymbol{\psi}^{(0)}(0), \ldots, \boldsymbol{\psi}^{(s-1)}(0)\,. \tag{42}$$

这里，导数 $*^{(k)}$ 是关于 P附近的局部坐标 $\zeta = (\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{s}}$ 求得的 - .

证明。 $W(\lambda_0)$的特征值 μ_0 对应的根空间是 s维的，并且由 (41) 可知， $\boldsymbol{\psi}^{(0)}(0)\ldots$, $\boldsymbol{\psi}^{(s-1)}(0)$ 属于该空间。因此，只需证明它们线性无关。假设存在一个线性关系

$$\sum_{k=0}^{s-1} c_k \boldsymbol{\psi}^{(k)}(0) = \mathbf{0}\,. \tag{43}$$

设 M 是满足 $c_M \neq 0$的最大数。由 (41)，我们有

$$(W(\lambda_0) - \mu_0)^M \left(\sum_{k=0}^{s-1} c_k \boldsymbol{\psi}^{(k)}(0) \right) = c_M M!(\mu'(0))^M \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}\,. \tag{44}$$

这个结果表明 $c_M = 0$，因为 $\mu'(0) \neq 0$ 且 $\boldsymbol{\psi}(0) \neq \mathbf{0}$。因此我们得到矛盾，这意味着 $c_k = 0$, $k = 0,\ldots, s-1$。所以 $\boldsymbol{\psi}^{(0)}(0)\ldots, \boldsymbol{\psi}^{(s-1)}(0)$ 线性无关。引理得证。

□

现在考虑 ∞_C附近的一个局部截面 $\boldsymbol{\psi}(z) = (\psi_1(z)\ldots, \psi_{n+1}(z))^T$。回忆一下，$z = \lambda^{-1/(n+1)}$。可以验证

$$\psi_k(z) = z^{d-k+1} + o\left(z^{d-k+1}\right)\,, \quad k = 1, \ldots, n+1\,. \tag{45}$$

这里 d 等于 $\mathrm{ord}_{\infty_C} \boldsymbol{\psi}(z) + n$。

回忆一下， $\mathcal{L}$ 是 $W(\lambda)$ 的特征向量线丛。我们可以使用 [2, 第 5] 章中的方法来证明， $\mathcal{L}$ 的次数为 $-g - n$。

现在通过以下条件固定一个特征向量 $\boldsymbol{\psi}(P)$:

$$\boldsymbol{\psi}(P) = (1, \psi_2(P), \ldots, \psi_{n+1}(P))^T\,, \quad P \in C\,. \tag{46}$$

在下文中，我们将这个 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 称为 $W(\lambda)$ 的归一化特征向量。它在 ∞_C 处的展开为

$$\psi_i(z) = z^{-i+1} + o\left(z^{-i+1}\right)\,, \quad z \to 0\,, \quad i = 1, \ldots n+1\,. \tag{47}$$

因此，这个特征向量 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 在 ∞_C处有一个 n 阶极点，而 C的仿射部分上其余的 g个极点为 $Q_1, \ldots, Q_g$。定义除子 $\mathcal{D}$ 为

$$\mathcal{D} := Q_1 + \cdots + Q_g\,. \tag{48}$$

可以证明， $l(\mathcal{D}) = \dim\ H^0(C,\ \mathcal{O}(\mathcal{D})) = 1$，这意味着 $\mathcal{D}$是一个非特殊除子。

设 G 为一个下三角矩阵，且其对角元全为 1。我们称 $W(\lambda) \mapsto GW(\lambda)G^{-1}$为 $W(\lambda)$ 的一个规范变换。显然， C和 $\mathcal{D}$在规范变换下不变。

到目前为止，对于形如 (4) 的 $W(\lambda)$，我们已将其与谱曲线 C以及一个次数为 g的非特殊除子 $\mathcal{D} = Q_1 + \cdots + Q_g$联系起来。反过来，给定数据 C 和 $\mathcal{D}$，我们可以确定规范变换下的 $W(\lambda)$。

引理 2。 设 C 是由 (34)给出的代数曲线。设 $\mathcal{D} = Q_1 + \cdots + Q_g$ 是 C 上的一个非特殊除子，且 Q_1、……、$Q_g \neq \infty_C$。设 $G = (g_{ij})$ 是一个 $(n+1)\times(n+1)$ 下三角矩阵，使得 $g_{ii} = 1$、$i = 1$、……、$n+1$。那么，存在唯一一个形如 (4) 的矩阵 $W(\lambda)$，其谱曲线为 C。并且，归一化特征向量 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 的极点位于 Q_1、……、Q_g，而 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 在 ∞_C 处的 *Laurent* 展开为

$$\psi_i(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_{ik}}{z^{k-1}} + O(z) \,. \tag{49}$$

证明。 现在，由于 $\mathcal{D}$ 是一个非特殊除子，利用黎曼–罗赫定理，我们得出

$$l(\mathcal{D} + k\infty_C) = k+1 \,, \quad k = 0, \ldots, n+1 \,. \tag{50}$$

因此，我们可以选取 ψ_1、……、$\psi_{n+1} \in L(\mathcal{D} + n\infty_C)$，使其满足（49）。这里 $L(\mathcal{D} + n\infty_C)$:$= \{f | (f) + \mathcal{D} + n\infty_C \geq 0\}$。显然，$\psi_1(P) = 1$。记 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1$、……、$\psi_{n+1})^T$。对于任意 $\lambda \in \mathbb{P}^1$，令 $P_1 = (\lambda, \mu_1)$……，$P_{n+1} = (\lambda, \mu_{n+1})$ 为 $n+1$ 个位于 λ 上方的 C 点。定义矩阵:

$$\Psi(\lambda) := (\boldsymbol{\psi}(P_1), \ldots, \boldsymbol{\psi}(P_{n+1})) \,. \tag{51}$$

令 $\hat{}\mu(\lambda) = \mathrm{diag}(\mu_1$、……、$\mu_{n+1})$。矩阵值函数 $\Psi(\lambda)\hat{}\mu(\lambda)\Psi(\lambda)^{-1}$ 与 P_1、……、P_{n+1} 的排列顺序无关，因此是 $\mathbb{P}^1$ 上关于 λ 的良定义亚纯函数。取 $\Psi(\lambda)\hat{}\mu(\lambda)\Psi(\lambda)^{-1}$ 在 ∞ 处的 Laurent 展开:

$$\Psi(\lambda)\hat{\mu}(\lambda)\Psi(\lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{N} W_k \lambda^k + O(\lambda^{-1}) = W(\lambda) + O(\lambda^{-1}) \,. \tag{52}$$

这里 $W(\lambda)$ 是展开中的多项式部分。现在考虑定义在 C 上的向量值亚纯函数

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(P) = W(\lambda)\boldsymbol{\psi}(P) - \mu(P)\boldsymbol{\psi}(P) \,, \quad P = (\lambda, \mu) \in C \,. \tag{53}$$

˜向量函数 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 的极点只能位于 $Q_1, \ldots, Q_g$，且当 ∞_C 趋于无穷时，其极限等于˜到 $\mathbf{0}$。由于 $\mathcal{D}$ 是一个非特殊除子，我们得出 $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$。因此， C 是 $W(\lambda)$ 的谱曲线，而 $\boldsymbol{\psi}(P)$ 是 $W(\lambda)$ 的特征向量。由展开式（35）和（49）可知， $W(\lambda)$ 具有形式（4）。根据公式 $W(\lambda) = \Psi(\lambda)\hat{}\mu(\lambda)\Psi(\lambda)^{-1}$，可以推出 $W(\lambda)$ 的唯一性。 □

对于 $W(\lambda)$ 的对偶特征向量的对偶线丛 $\mathcal{L}^\dagger$，可以重复上述构造:

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger(P) W(\lambda) = \mu \boldsymbol{\psi}^\dagger(P) \,. \tag{54}$$

考虑归一化对偶特征向量。

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger(P) = (\psi_1^\dagger, \ldots, \psi_n^\dagger, 1) \,. \tag{55}$$

与上述论证类似，我们有

引理 3. 归一化对偶特征向量 $\boldsymbol{\psi}^\dagger$ 在 ∞_C 处有如下展开:

$$\psi_j^\dagger(z) = z^{-n-1+j} + o\left(z^{-n-1+j}\right) \,, \quad j = 1, \ldots, n+1 \,. \tag{56}$$

并且 $\boldsymbol{\psi}^\dagger$ 在 C 的仿射部分上有 g 个极点 $Q_1^\dagger$,.. ., $Q_g^\dagger$。除子

$$\mathcal{D}^\dagger = Q_1^\dagger + \cdots + Q_g^\dagger \tag{57}$$

也是一个非特殊除子。

2.3 θ函数公式

我们将在本小节中推导将 $W(\lambda)$ 与 θ-函数联系起来的公式。首先，我们证明以下对 [15, 引理 2.6] 的推广。

命题2。 假设 $\lambda \in \mathbb{P}^1$ 不是分支点，并且 P_i（λ、 μ_i）、 $i = 1$、...、 $n = 1$ 是$n + 1$ 上位于 λ 之上的 C 个不同点。记 Π_i（λ）：$= \Pi$（λ、 μ_i），则有

$$\Pi_i \cdot \Pi_j = \delta_{i,j}\Pi_i\,, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \Pi_i(\lambda) = I_{n+1}\,, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \Pi_i(\lambda) = W(\lambda)\,. \tag{58}$$

证明。 使用与 [15]中相同的方法。 □

上述命题意味着， Π_i、 $i = 1$、...、 $n+1$ 是将 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的列向量映射到ker($\mu_i I - W(\lambda)$)的投影算子。现在我们可以用 Π_i、 $i = 1$、...、 $n+1$表示$W(\lambda)$的基本矩阵预解式。当 $\lambda \to \infty$时， $n+1$ 个点 P_1、...、 P_{n+1} 的坐标为

$$z(P_j) = e^{\frac{2\pi j\sqrt{-1}}{n+1}} \lambda^{\frac{1}{n+1}}\,, \quad j = 1, \ldots, n+1\,. \tag{59}$$

由方程（22）、（23）和（24）可知， $R_a(\lambda)$与 $W(\lambda)$具有相同的特征向量。设 $\boldsymbol{\psi}(z)$是 $W(\lambda)$在 ∞_C的一个小邻域上定义的特征向量。则有以下方程

$$R_a(\lambda)\boldsymbol{\psi}(z) = z^{-a}\boldsymbol{\psi}(z)\,, \quad a = 1, \ldots n\,. \tag{60}$$

因此， $R_a(\lambda)$ 可以表示为 Π_j:

$$R_a(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} z(P_j)^{-a}\Pi_j\,. \tag{61}$$

当 $P \to \infty_C$ 时，由方程 (59) 和 (61)， $\Pi(P)$ 的展开如下:

$$\Pi(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{a=1}^{n} z^a R_a(\lambda) + I_{n+1}\right)\,. \tag{62}$$

令 $\Omega(P) := \Pi(P)d\lambda$。由方程 (29)，我们得到 $N \geq 2$ 的如下展开。

$$-\frac{1}{N}\sum_{s\in S_N} \frac{\mathrm{Tr}\big(\Omega(z_{s_1})\ldots\Omega(z_{s_N})\big)}{\prod_{i=1}^{N}(\lambda_{s_{i+1}} - \lambda_{s_i})} - \delta_{N,2}\frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} =$$
$$\sum_{a_1,\ldots,a_N=1}^{n}\ \sum_{l_1,\ldots,l_N=0}^{\infty} F_{a_1,l_1;\ldots;a_N,l_N} z_1^{a_1+(n+1)l_1-1}\ldots z_N^{a_N+(n+1)l_N-1} dz_1\ldots dz_N\,. \tag{63}$$

现在我们需要用谱曲线 C 和除子 $\mathcal{D}$ 来表示 $\Omega(P)$ 的各项。

由于 $\Phi(P)$ 是关于 $W(\lambda)$ 和 μ 的多项式，因此它在 $C\backslash\infty_C$ 上必定全纯。因此， $\Omega(P)$ 的各个分量在 $C\backslash\infty_C$ 上全纯。令 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger$为归一化特征向量和对偶特征向量。命题2告诉我们

$$\Omega_{ij} = \frac{\psi_i\psi_j^\dagger}{\boldsymbol{\psi}^\dagger\boldsymbol{\psi}}d\lambda\,. \tag{64}$$

现在利用公式 (47) 和 (56)，我们得到

$$\Omega_{ij}(z) = -(1+o(z))\frac{dz}{z^{n+2+i-j}}\,. \tag{65}$$

由上式可知，$\Omega_{1,n+1}$ 在 ∞_C处有一个二阶极点。根据$\Omega(P)$的定义：$=\Pi(P)d\lambda$，以及命题2，我们知道 $\psi_j(P)$ $=\Omega_{j,n+1}(P)$ $\Omega_{1,n+1}(P)$。由于Ω_{ij}在 C的仿射部~~分上没~~有极点，我们得出 $Q_1,\ldots,Q_g$必定是$\Omega_{1,n+1}$的零点。类似地，$Q_1^\dagger,\ldots,Q_g^\dagger$也是$\Omega_{1,n+1}$的零点。因此，$\Omega_{1,n+1}$的 $2g$个零点恰好是 $Q_1,\ldots,Q_g,Q_1^\dagger,\ldots,Q_g^\dagger$。这类微分可以用 θ-函数表示，下面给出详细过程。

回顾一下，我们已经引入了

$$\boldsymbol{u} := \mathcal{D}_{\mathcal{L}} - (n+1)\infty_C - \Delta = \mathcal{D} - \infty_C - \Delta \in J(C) \tag{66}$$

作为雅可比簇中对应于线丛 $\mathcal{L}$的一个点。由于 C 上的典范除子是

$$K_C = 2\Delta = (\Omega^1_{n+1}) = \mathcal{D} + \mathcal{D}^\dagger - 2\infty_C\,. \tag{67}$$

因此我们也有

$$-\boldsymbol{u} = \mathcal{D}^\dagger - \infty - \Delta\,. \tag{68}$$

黎曼的一个重要定理（参见 [20]）指出：设 $\boldsymbol{u}\in J(C)$，且令 Δ 为 C上的黎曼除子，则

1. 若 $\theta(\boldsymbol{u})\neq 0$，则 $P\in C$的函数 $\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})$有 g个零点 $P_1,\ \ldots,\ P_g$。除子 $\mathcal{A}=P_1+\cdots+P_g$是非特殊的，并满足

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{A} - \infty_C - \Delta\,. \tag{69}$$

2. 若 $\theta(\boldsymbol{u})=0$，则存在一个次数为 $g-1$ 的有效除子 $\mathcal{B}$，使得

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{B} - \Delta\,. \tag{70}$$

令 $E(P,\ Q)$ 为素形式，参见 [20]。

$$E(P,Q) = \frac{\theta[\nu](Q-P)}{\sqrt{\sum\omega_i(P)\partial_{u_i}\theta[\nu](0)}\sqrt{\sum\omega_k(Q)\partial_{u_k}\theta[\nu](0)}}\,. \tag{71}$$

这里 ν 是一个非奇异奇半周期。设 ζ 是点 $p\in C$邻域中的局部坐标，且 $P,\ Q$ 是该邻域中的两点。那么在 $Q=P$附近，素形式可表示为

$$E(P,Q) = \frac{\zeta(Q)-\zeta(P)}{\sqrt{d\zeta(P)d\zeta(Q)}}(1+S(p)(\zeta(Q)-\zeta(P))^2+\text{higher order terms})\,, \tag{72}$$

其中，$S(p)$ 是由 p确定的常数。

以下引理是对 [15, 命题214]的推广。

引理 4. 微分形式 $\Omega_{1,n+1}$ 可写为

$$\Omega_{1,n+1}(P) = -\frac{\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,\infty_C)^2dz(\infty_C)}\,. \tag{73}$$

证明。 根据黎曼定理，我们知道 $\theta(\boldsymbol{u}) \neq 0$，因为 $\mathcal{D}$ 是非特殊的。 $\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})$ 的零点恰为 $Q_1,\ldots,Q_g$。类似地， $\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})$ 的零点为$Q_1^\dagger,\ldots,Q_g^\dagger$。因此可以验证，右侧是一个定义良好的微分形式，其零点与极点和 $\Omega_{1,n+1}(P)$ 相同。然后，通过比较 ∞_C 处的展开系数，我们得出该恒等式。 □

$L(\mathcal{D}+n\infty_C)$中的亚纯函数由以下引理给出。

引理5. 设

$$\phi_i(P)=\frac{\partial_{z(Q)}^{i-1}\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)\sqrt{dz(Q)}}\Big|_{Q=\infty_C}}{(i-1)!\frac{\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,\infty_C)\sqrt{dz(\infty_C)}}},\quad i=1,\ldots,n+1\,. \tag{74}$$

则 $\phi_i(P)$ 是 C上定义良好的亚纯函数，并且是 $L(\mathcal{D}+n\infty_C)$的基。此外，当 P 接近 ∞_C 时，我们有

$$\phi_i(z)=\frac{1}{z^{i-1}}+o\left(\frac{1}{z^{i-1}}\right). \tag{75}$$

证明。 首先我们可以验证， $\phi_i(P)$、 $i=1$，……， $n+1$ 是 C上定义良好的亚纯函数。因为 $\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})$仅在 Q_1，……， Q_g处有零点，所以我们知道$(\phi_i(P))+\mathcal{D}+N\infty_C\geq 0$。这里 N 是一个很大的正整数。现在我们考虑当 P接近 ∞_C时的 $\phi_i(P)$。由素形式(72)的性质，我们有

$$\phi_i(z)=\frac{\sqrt{dz}}{(i-1)!\frac{\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,\infty_C)\sqrt{dz(\infty_C)}}}\,\partial_w^{i-1}\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,w)(w-z)}\Big|_{Q=\infty_C}. \tag{76}$$

这里 $w:=z(Q)$，并且

$$E(z,w)=\frac{w-z}{\sqrt{dzdw}}h(z,w)\,,\quad h(z,w)=1+\text{higher order terms}\,. \tag{77}$$

So

$$\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,w)} \tag{78}$$

当 $z=w=0$时等于1，并且当z， w 很小时是全纯的。因为

$$\partial_w^{i-1}\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,w)(w-z)}\Big|_{w=0}=-\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}\frac{(i-1-k)!}{z^{i-k}}\,\partial_w^k\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,w)}\Big|_{w=0}, \tag{79}$$

由方程（76）可得以下结果

$$\phi_i(z)=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{-\partial_w^k\frac{\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,w)}\Big|_{w=0}}{-k!\frac{\theta(P-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})h(z,0)z^{-1}}}\cdot\frac{1}{z^{i-k}}=\frac{1}{z^{i-1}}+o\left(\frac{1}{z^{i-1}}\right). \tag{80}$$

因此方程（75）得证。现在容易看出， $\phi_i(P)\in L(\mathcal{D}+n\infty_C)$， $i=1,\ldots,n+1$，并且它们构成 $L(\mathcal{D}+n\infty_C)$的基。 □

类似地

$$\phi_j^\dagger(P)=\frac{\partial_{z(Q)}^{n+1-j}\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)\sqrt{dz(Q)}}\Big|_{Q=\infty_C}}{(n+1-j)!\frac{\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,\infty_C)\sqrt{dz(\infty_C)}}}\,,\quad j=1,\ldots,n+1\,, \tag{81}$$

构成空间 $L(\mathcal{D}^\dagger+n\infty_C)$ 的一组基。现在来考虑内积:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\phi_i(Q)\phi_i^\dagger(P)=\frac{\partial_{z(R)}^n\frac{\theta(P-R+\boldsymbol{u})\theta(Q-R-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,R)E(Q,R)dz(R)}\Big|_{R=\infty_C}}{n!\frac{\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})\theta(Q-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,\infty_C)E(Q,\infty_C)dz(\infty_C)}}\,. \tag{82}$$

定义微分

$$H_{PQ}(R):=\lambda(R)\frac{\theta(P-R+\boldsymbol{u})\theta(Q-R-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,R)E(Q,R)}\,. \tag{83}$$

它在点 $R=P$、 Q、 ∞_C 处有极点。其留数之和为零，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{R=\infty_C}H_{PQ}(R)&=-(\mathrm{res}_{R=P}H_{PQ}(R)+\mathrm{res}_{R=Q}H_{PQ}(R))\\&=-\lambda(P)\cdot\frac{\theta(Q-P-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(Q,P)}-\lambda(Q)\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)}\\&=(\lambda(P)-\lambda(Q))\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)}\,.\end{aligned} \tag{84}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})\theta(Q-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,\infty_C)E(Q,\infty_C)dz(\infty_C)}\sum_{i=1}^{n+1}\phi_i(Q)\phi_i^\dagger(P)\\=&\frac{1}{n!}\partial_{z(R)}^n\frac{\theta(P-R+\boldsymbol{u})\theta(Q-R-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,R)E(Q,R)dz(Q)}\Big|_{R=\infty_C}\\=&\mathrm{res}_{R=\infty_C}H_{PQ}(R)\\=&(\lambda(P)-\lambda(Q))\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)}\,.\end{aligned}$$

因此我们得到如下有趣的公式。

$$\frac{\theta(P-\infty_C+\boldsymbol{u})\theta(Q-\infty_C-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,\infty_C)E(Q,\infty_C)dz(\infty_C)}\sum_{i=1}^{n+1}\phi_i(Q)\phi_i^\dagger(P)=(\lambda(P)-\lambda(Q))\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})E(P,Q)}\,. \tag{85}$$

假设 λ 不是分支点，并设 P_1、.....、 $P_{n+1}\in C$ 是位于 λ 上方的 $n+1$ 个不同点。那么我们有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\phi_i(P_j)\phi_i^\dagger(P_k)=0\,,\quad j\neq k\,. \tag{86}$$

因为 $Q_1,\ldots,Q_g$ 是归一化特征向量 $\boldsymbol{\psi}(P)$的极点，我们有

$$\psi_i=\sum_{k=1}^{n+1}a_{ik}\phi_k\quad i=1,\ldots,n+1\,. \tag{87}$$

由(47)和(75)可知，$(a_{ik})_{1\le i,k\le n+1}$ 是下三角矩阵，且其对角元素为1。设 $P=(\lambda,\mu)\in C$，该向量

$$\boldsymbol{\phi}(P)=(\phi_1,\dots,\phi_{n+1})^T \tag{88}$$

是矩阵 $A^{-1}W(\lambda)A$ 的特征向量，其特征值为 μ，其中 $A=(a_{ik})$。恒等式 (86) 表明

$$\boldsymbol{\phi}^\dagger(P)=(\phi_1^\dagger,\dots,\phi_{n+1}^\dagger) \tag{89}$$

是 $A^{-1}W(\lambda)A$的对偶特征向量。因此

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger A=\boldsymbol{\phi}^\dagger\,. \tag{90}$$

而方程 (87) 可以写成

$$\boldsymbol{\psi}=A\boldsymbol{\phi}\,. \tag{91}$$

下面的命题是定理1的特殊情形 $N=2$ 。该命题推广了 [15, 定理1。1]

命题3。设 P、Q 是 C上的两个不同点，则

$$\frac{\operatorname{Tr}(\Omega(P)\Omega(Q))}{(\lambda(P)-\lambda(Q))^2}=\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,Q)^2}\,. \tag{92}$$

证明。由方程 (90) 和 (91)，可得

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger(P)\boldsymbol{\psi}(Q)=\boldsymbol{\phi}^\dagger(P)\boldsymbol{\phi}(Q)\,. \tag{93}$$

由引理4和等式（85）即可证明该命题（例如参见 [17]）。 □

Fay [20] 证明了以下恒等式:

$$\frac{\theta(P-Q+\boldsymbol{u})\theta(P-Q-\boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u})^2E(P,Q)^2}=\sum_{j,k=1}^{g}\frac{\partial^2\log\theta(\boldsymbol{u})}{\partial u_j\partial u_k}\omega_j(P)\omega_k(Q)+\omega(P,Q)\,. \tag{94}$$

结合命题3，我们得到

$$\frac{\operatorname{Tr}(\Omega(P)\Omega(Q))}{(\lambda(P)-\lambda(Q))^2}=\sum_{j,k=1}^{g}\frac{\partial^2\log\theta(\boldsymbol{u})}{\partial u_j\partial u_k}\omega_j(P)\omega_k(Q)+\omega(P,Q)\,. \tag{95}$$

2.4 命题1的证明

本小节将描述常微分方程组（25）的解在由（4）给出的 $W(\lambda)$ 上限制时的 τ-函数。

回想一下，$t_{a+(n+1)k}:=T_k^a$。我们用 $W(\lambda,\boldsymbol{t})$、$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\dots)$ 表示（25）的一个解。这里假设 $W(\lambda,\boldsymbol{t})$ 不依赖于 $t_{(n+1)k}$、$k\ge 1$。

在下面的讨论中，我们使用以下记号:

$$M_k(\lambda):=(R_1(\lambda)^k)_+\,,\quad k\ge 1\,. \tag{96}$$

此处及下文我们用 $(*)_+$ 表示多项式部分。回顾 $R_a(\lambda)=R_1(\lambda)^a$,$a=1,\dots,n$，以及 $R_1(\lambda)^{n+1}=\lambda I_{n+1}$。根据 [34] 中的结果以及 $W(\lambda,\boldsymbol{t})$ 与 $t_{(n+1)k}$ 无关这一条件，从常微分方程（25）可得到以下方程:

$$\frac{dW(\lambda,\boldsymbol{t})}{dt_k}=[M_k(\lambda),W(\lambda,\boldsymbol{t})]\,,\quad k\ge 1\,. \tag{97}$$

因此， $W(\lambda,\boldsymbol{t})$ 的谱曲线 C 在流 $\frac{d}{dt_k}$ 下保持不变。

$\boldsymbol{\psi}(P,\ \boldsymbol{t})$ 是 $W(\lambda,\ \boldsymbol{t})$ 的归一化特征向量。考虑常微分方程组$\boldsymbol{v}(P,\ \boldsymbol{t}) = (v^1(P,\ \boldsymbol{t})$。 .. , $v^{n+1}(P,\ \boldsymbol{t}))$:

$$\frac{d\boldsymbol{v}(P,\boldsymbol{t})}{dt_k} = M_k(\lambda,\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}(P,\boldsymbol{t})\,,\quad k\geq 1\,. \tag{98}$$

在 [34] 中，已证明

$$\frac{\partial M_k(\lambda,\boldsymbol{t})}{\partial t_l} - \frac{\partial M_l(\lambda,\boldsymbol{t})}{\partial t_k} + [M_k(\lambda,\boldsymbol{t}), M_l(\lambda,\boldsymbol{t})] = 0\,. \tag{99}$$

因此，(98) 中的流 $\frac{d}{dt_k}$ 彼此可交换。因此，可以同时求解常微分方程组 (98)。设初值为

$$\boldsymbol{v}(P,\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{0})\,. \tag{100}$$

因为

$$\frac{d}{dt_k}\left((W(\lambda,\boldsymbol{t})-\mu)\,\boldsymbol{v}(P,\boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{0}\,. \tag{101}$$

因此， $\boldsymbol{v}(P,\ \boldsymbol{t})$ 是 $W(\lambda,\ \boldsymbol{t})$ 的特征向量。我们有

$$\boldsymbol{v}(P,\boldsymbol{t}) = v^1(P,\boldsymbol{t})\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t})\,. \tag{102}$$

因为 $R_1(\lambda)$ 的特征值为 z^{-1}，对于 $k\geq 1$ ，我们有

$$(R_1(\lambda)^k)_+\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t}) = z^{-k}\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t}) - (R_1(\lambda)^k)_-\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t})\,. \tag{103}$$

因此，由 (96) 可得

$$M_k(\lambda,\boldsymbol{t})\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t}) = z^{-k}\boldsymbol{\psi}(P,\boldsymbol{t}) + o(1)\,,\quad P\to\infty_C\,, k\geq 1\,. \tag{104}$$

因此，当 P 接近 ∞_C 时，我们有如下展开

$$v^i(z,\boldsymbol{t}) = e^{\sum_{k\geq 1} t_k z^{-k}}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{g_{ij}}{z^{j-1}} + O(z)\right)\,. \tag{105}$$

特别地

$$v^1(z,\boldsymbol{t}) = e^{\sum_{k\geq 1} t_k z^{-k}}\left(1+O(z)\right)\,. \tag{106}$$

还可以验证， $\boldsymbol{v}(P,\ \boldsymbol{t})$ 在 C 的仿射部分上只有 g 个极点 $Q_1(\boldsymbol{0}). . . ,\ Q_g(\boldsymbol{0})$。令 $\Omega^{(k)}$ 为归一化的第二类微分:

$$\Omega^{(k)}(z) = \frac{-k}{z^{k+1}}dz - \sum_{i\geq 0} q_{i,k} z^{i-1}dz\,, \tag{107}$$

$$\oint_{a_i}\Omega^{(k)} = 0\,,\quad \oint_{b_i}\Omega^{(k)} = V_i^{(k)}\,, i = 1,\dots g\,. \tag{108}$$

贝克–阿赫泽尔理论中的标准事实表明,

$$v^1(P,\boldsymbol{t}) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} t_k\int_{\infty_C}^P \Omega^{(k)}\right)\frac{\theta\left(\int_{\infty_C}^P \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{u} + \sum_{k\geq 1} t_k \boldsymbol{V}^{(k)}\right)}{\theta\left(\int_{\infty_C}^P \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{u}\right)}\,. \tag{109}$$

这里的积分 $\int_{\infty_C}^{P}\Omega^{(k)}$ 被视为

$$\int_{\infty_C}^{P}\Omega^{(k)}=\lim_{Q\to\infty_C}\int_{Q}^{P}\Omega^{(k)}+\frac{1}{z(Q)^k}\,. \tag{110}$$

根据黎曼定理，当 $\boldsymbol{u}-\sum_{k\geq 0}t_k\boldsymbol{V}^{(k)}\in J(C)\backslash(\Theta)$ 时，函数 $v^1(P,\boldsymbol{t})$ 有 g 个零点。由 (102) 可知，这些零点为 $Q_1(\boldsymbol{t})\ldots,Q_g(\boldsymbol{t})$，并且

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})=Q_1(\boldsymbol{t})+\cdots+Q_g(\boldsymbol{t})-\infty_C-\Delta=\boldsymbol{u}-\sum_{k\geq 0}t_k\boldsymbol{V}^{(k)}\,. \tag{111}$$

由 (105) 可得

$$\psi_i(z,\boldsymbol{t})=e^{\sum_{k\geq 1}\left(t_kz^{-k}-t_k\int_{\infty_C}^{z}\Omega^{(k)}\right)}\frac{\theta(\int_{\infty_C}^{z}\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{u})\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{g_{ij}}{z^{j-1}}\right)}{\theta(\int_{\infty_C}^{z}\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{u}+\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)})}+O(z)\,, \tag{112}$$

其中g_{ij} 为常数。

我们注意到，(25) 的解 $W(\lambda,\boldsymbol{t})$ 存在，只要

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{u}-\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)}\in J(C)\backslash(\Theta)\,. \tag{113}$$

这里 (Θ) 是 $J(C)$ 中 θ除子的记号。

对于给定的谱曲线 C， g 个极点的演化可以用它们的坐标 (λ_i,μ_i)、 $i=1,\ldots,g$ 来描述。下列方程可视为 [16] 中 Dubrovin 方程的类似物。

推论2. 设 $\phi_j(\lambda,\mu)$、 $j=1$、…、 g 是如下形式的不同单项式

$$\phi_j(\lambda,\mu)=\lambda^{ml-k}\mu^{n-l}\,,l=1,\ldots,n\,,\quad k=1,\ldots,ml\,. \tag{114}$$

则微分形式 $\alpha_j=\frac{\phi_j(\lambda,\mu)d\lambda}{S_\mu(\lambda,\mu)}$、 $j=1$、…、 g 构成 C 上全纯微分形式空间的一组基。归一化特征向量的极点 $Q_j=(\lambda_j,\mu_j)$ $j=1$、…、 g 的演化方程如下。

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^T}{dt_k}=A(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})^{-1}\boldsymbol{U}^{(k)}\,,\quad k\geq 1\,. \tag{115}$$

Here $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_g)$、 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_g)$。矩阵 $A(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ 的各项定义如下

$$A(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})_{i,j}:=\frac{\phi_i(\lambda_j,\mu_j)}{S_\mu(\lambda_j,\mu_j)}\,,\quad i,j=1,\ldots,g\,. \tag{116}$$

向量 $\boldsymbol{U}^{(k)}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{U}^{(k)}=(U_1^{(k)},\ldots,U_g^{(k)})^T\,,\quad U_j^{(k)}:=\mathrm{res}_{\infty_C}z^{-k}\alpha_j\,. \tag{117}$$

证明。 由（111）可得

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt_k}=\sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{\omega}(Q_j)\frac{dQ_j}{dt_k}=-\boldsymbol{V}^{(k)}=\mathrm{res}_{\infty_C}z^{-k}\boldsymbol{\omega}\,. \tag{118}$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_g)^T$。我们得到

$$\sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{\alpha}(Q_j)\frac{dQ_j}{dt_k}=\mathrm{res}_{\infty_C}\left(z^{-k}\boldsymbol{\alpha}\right)=\boldsymbol{U}^k\,. \tag{119}$$

因此我们有

$$A(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\frac{d\boldsymbol{\lambda}^T}{dt_k}=\boldsymbol{U}^{(k)}\,. \tag{120}$$

推论得证。 □

现在我们可以证明命题1。

命题*1*的证明。 设 $W(\lambda,\boldsymbol{t})$ 为 (25) 的解，其初值为 $W(\lambda)$。将关于 $N=2$ 的 (95) 与 (63) 结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{a,b=1}^{n}\sum_{k,l\geq 0}F_{a,k;b,l}(\boldsymbol{t})z_1^{a+k(n+1)-1}z_2^{b+l(n+1)-1}dz_1dz_2\\ =&\sum_{i,j=1}^{g}\sum_{k,l\geq 1}\frac{\partial^2\log\theta(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}))}{\partial u_i\partial u_j}V_i^{(k)}V_j^{(l)}z_1^{k-1}z_2^{l-1}dz_1dz_2+\sum_{k,l\geq 1}q_{k,l}z_1^{k-1}z_2^{l-1}dz_1dz_2\,.\end{aligned}$$

这里我们使用了展开 (8) 和 (9)。比较上述方程两边的系数，由 (111) 可得下列方程。

$$\begin{aligned}F_{a,k;b,l}(\boldsymbol{t})=&\sum_{i,j=1}^{g}V_i^{(a+k(n+1))}V_j^{(b+l(n+1))}\frac{\partial^2\log\theta(\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)}-\boldsymbol{u})}{\partial u_i\partial u_j}+q_{a+k(n+1),b+l(n+1)}\\ =&\frac{\partial^2\log\theta(\sum_{k\geq 1}t_k\boldsymbol{V}^{(k)}-\boldsymbol{u})}{\partial t_{a+(n+1)k}\partial t_{b+(n+1)l}}+q_{a+k(n+1),b+l(n+1)}\,,\quad a,b=1,\ldots n\,,\ k,l\geq 0\,.\end{aligned} \tag{121}$$

由方程 (107) 和 (108)，我们有 $\boldsymbol{V}^{((n+1)k)}=\boldsymbol{0}$,$q_{k(n+1),l}=0$,$k,l\geq 0$。因此由 (11) 给出的函数 $Z(\boldsymbol{t})$ 不依赖于 $t_{(n+1)k}$，$k\geq 1$，并且满足 τ-函数的定义 (27)。该命题得证。

□

注 1. 我们指出，结合 *Krichever* 的方法（参见 *[18, 29, 32]*）和引理 *2*，也可以得到命题*1*。

3 应用

本节将证明定理1，并给出我们结果的一些应用。

定理*1*的证明。 对于命题1中给出的 τ-函数，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{a_1,\ldots,a_N=1}^{n}\sum_{l_1,\ldots,l_N=0}^{\infty}F_{a_1,l_1;\ldots;a_N,l_N}z_1^{a_1+(n+1)l_1-1}\ldots z_N^{a_N+(n+1)l_N-1}dz_1\ldots dz_N\\ =&\sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^{g}\frac{\partial^N\log\theta(\boldsymbol{u})}{\partial u_{j_1}\ldots\partial u_{j_N}}\omega_{j_1}(z_1)\ldots\omega_{j_N}(z_N)+\delta_{N,2}\left(\omega(z_1,z_2)-\frac{dz_1dz_2}{(z_1-z_2)^2}\right)\,.\end{aligned}$$

这里我们使用了方程(8)、(9)以及以下事实

$$q_{k(n+1),l} = 0\,, \quad \boldsymbol{V}^{(k(n+1))} = \mathbf{0}\,, \quad k, l \geq 1\,. \tag{122}$$

结合式（63），得到方程（15）。 □

现在我们给出定理1的一个应用。
按照 [38], ，对于任意幂级数 $\tau(\boldsymbol{t})$，定义

$$G_{\tau,N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N := \sum_{k_1,\ldots,k_N \geq 1} \frac{\partial^N \log \tau(\boldsymbol{t})}{\partial t_{k_1} \ldots \partial t_{k_N}}\bigg|_{\boldsymbol{t}=\mathbf{0}} \prod_{i=1}^{N} \frac{d\xi_i}{\xi_i^{k_i+1}}\,, \quad N \geq 1\,. \tag{123}$$

根据式（11）和（14），多重微分$G_{Z,\ N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N$等于 to

$$(-1)^N \omega_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) - \delta_{N,2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - \xi_2)^2}\,, \tag{124}$$

其中， $\omega_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$是 ω_N在 $P_1 = \cdots = P_N = \infty_C$处关于 $\xi_k := z(P_k)^{-1}$, $k = 1, \ldots, N$的局部展开。令 $\boldsymbol{\psi}^\dagger$, $\boldsymbol{\psi}$ 由式（46）和（55）给出。于是，根据定理1，我们有

$$\omega_N = -\frac{1}{N} \sum_{s \in S_N} \prod_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\psi}^\dagger(P_{s_{j+1}}) \boldsymbol{\psi}(P_{s_j})}{\boldsymbol{\psi}^\dagger(P_{s_{j+1}}) \boldsymbol{\psi}(P_{s_{j+1}})} \frac{d\lambda(P_{s_{j+1}})}{\lambda(P_{s_j}) - \lambda(P_{s_{j+1}})}\,. \tag{125}$$

通过与命题3的证明类似的论证，我们得到以下公式 a:

$$\frac{\boldsymbol{\psi}^\dagger(Q) \boldsymbol{\psi}(P)}{\boldsymbol{\psi}^\dagger(Q) \boldsymbol{\psi}(Q)} \frac{d\lambda(Q)}{\lambda(P) - \lambda(Q)} = \frac{\theta(Q - P + \boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u}) E(Q, P)} \frac{\theta(Q - \infty_C - \boldsymbol{u}) E(P, \infty_C)}{\theta(P - \infty_C - \boldsymbol{u}) E(Q, \infty_C)}\,. \tag{126}$$

现在由 (126)，我们有

$$\omega_N = -\frac{1}{N} \sum_{s \in S_N} \prod_{j=1}^{N} B(P_{s_j}, P_{s_{j+1}})\,, \quad N \geq 2\,, \tag{127}$$

其中

$$B(P, Q) := \frac{\theta(Q - P + \boldsymbol{u})}{\theta(\boldsymbol{u}) E(Q, P)}\,. \tag{128}$$

该公式已在 [23] 中针对一般黎曼曲面得到。当谱曲线在 ∞ 处无分歧时，与 (127) 类似的公式也出现在 [15] 中。容易验证， $B(P, Q)$ 在 $P = Q = \infty_C$ 处关于 ξ 具有如下展开: $= z(P)^{-1}$, $\eta := z(Q)^{-1}$:

$$B(\xi, \eta) = \begin{cases} A(\xi, \eta) \sqrt{d\xi d\eta}\,, & i = j\,, \\ \dfrac{\sqrt{d\xi d\eta}}{\xi - \eta} + A(\xi, \eta) \sqrt{d\xi d\eta}\,, & i \neq j\,, \end{cases} \tag{129}$$

其中

$$A(\xi, \eta) = \sum_{i,j \geq 0} A_{i,j} \xi^{-i-1} \eta^{-j-1}\,. \tag{130}$$

因此，由Zhou定理， [38, 35, 1], 方程（127）进而推出命题1。从几何上看， $A_{i,\ j}$ 是 Z（$\boldsymbol{t}$）的仿射坐标（参见 [31, 18, 37, 3]），关于单李代数中的类似情形也可参见 [7] 。

参见 [14], 的

$$f(\boldsymbol{t}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 1} f_{i_1,\ldots,i_n} t_{i_1} \ldots t_{i_n} \,, \tag{131}$$

定义该级数的第 d 阶截断为

$$[f(t)]_d = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq d} f_{i_1,\ldots,i_n} t_{i_1} \ldots t_{i_n} \,. \tag{132}$$

定理 2. 设 $\tau(\boldsymbol{t}) \in \mathbb{C}[[\boldsymbol{t}]]$ 是 *Gelfand–Dickey* 层级的任意 τ-函数。那么对于任意 $d \geq 1$，都存在一个正整数 $m \leq \binom{d+n-1}{n+1}$，使得我们可以找到由 (34) 给出的代数曲线 ~~C~~ 以及一个 $\boldsymbol{u} \in J(C)\backslash(\Theta)$，满足:

$$[\log \tau(\boldsymbol{t})]_d = [\log \theta(\sum_{k=1}^{d} t_k \boldsymbol{V}^{(k)} - \boldsymbol{u})]_d + \alpha + \sum_{k=1}^{d} \beta_k t_k + \sum_{k_1+k_2\leq d} \gamma_{k_1,k_2} t_{k_1} t_{k_2} \,. \tag{133}$$

这里， α、 β_k 和 $\gamma_{k_1,\,k_2}$ 是适当的常数。

证明。 在泊松代数 $\mathcal{P}$上定义扩展分次:

$$\deg_e (W_k)_{ij} = 1 + i - j + k(n+1) \,, \tag{134}$$

其中 $k > 0$ 或 $k = 0$ ，且 $i \geq j$。通过定义扩展分次，我们使 $W(\lambda)$ 成为齐次的:

$$\deg_e W(\lambda) = 1 \,. \tag{135}$$

因此，如果 $f,\ g \in \mathcal{P}$ 是 $\mathcal{P}$中的齐次多项式，那么它们的泊松括号也齐次:

$$\deg_e \{f, g\} = \deg_e f + \deg_e g - n - 2 \,. \tag{136}$$

在扩展分次下，我们有

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}^{[j]} \,. \tag{137}$$

这里， $\mathcal{P}^{[j]}$ 表示扩展分次下次数为 j 的齐次分量。根据定义 (26)，我们有

$$\deg_e F_{a,k;b,l} = a + k(n+1) + b + l(n+1) \,. \tag{138}$$

此外，根据 (29)，我们还有

$$\deg_e F_{a_1,k_1;\ldots,a_m,k_m} = \sum_{j=1}^{m} a_j + (n+1)k_j \,. \tag{139}$$

因为对于 $(W_k)_{ij} \in \mathcal{P}$ ，我们有

$$\deg_e (W_k)_{ij} \geq 1 - n + k(n+1) \,. \tag{140}$$

Let

$$\mathcal{P}_m := \mathbb{C}[(W_k)_{i,j} | 1 \leq k \leq m \,,\ \text{or}\, k = 0, i \geq j] \,. \tag{141}$$

因此我们有

$$\mathcal{P}^{[d]} \subset \mathcal{P}_m \,, \text{ for all } m \geq \left[\frac{d+n-1}{n+1}\right] . \tag{142}$$

根据 [34],, Gelfand–Dickey 层级的任意 τ-函数都是方程 (25) 的解 $W(\lambda,\ \boldsymbol{t})$ 的 τ-函数。令 $W(\lambda)$ 为初值，则相应的 τ-结构为

$$F_{a_1,k_1;\ldots;a_l,k_l} = \left.\frac{\partial^l \log\tau(\boldsymbol{t})}{\partial t_{a_1+(n+1)k_1}\ldots\partial_{a_l+(n+1)k_l}}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}} . \tag{143}$$

将截断后的 $W(\lambda)$ 记为

$$[W(\lambda)]_m := \sum_{i=0}^{m} \frac{W_i}{\lambda^i} + \Lambda(\lambda)\,. \tag{144}$$

选取满足以下条件的最小 m

$$[W(\lambda)]_m = [W(\lambda)]_{[\frac{d+n-1}{n+1}]}\,. \tag{145}$$

由于 (142)，如果

$$\deg_e F_{a_1,k_1,\ \ldots;a_l,k_l} = \sum_{i=1}^{l} a_i + (n+1)k_i \leq d\,, \quad l \geq 2\,, \tag{146}$$

那么，当我们将 $W(\lambda)$ 替换为 $[W(\lambda)]_m$ 时，$F_{a_1,\ k_1,\ \ldots\ldots;\ a_l,\ k_l}$ 的值不会改变。这意味着

$$\left.\frac{\partial^l \log\tau(\boldsymbol{t})}{\partial t_{k_1}\ldots t_{k_l}}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}}\,, \quad \sum k_i \leq d\,, l \geq 2\,, \tag{147}$$

当我们将 $\tau(\boldsymbol{t})$ 替换为具有初值的解 $W_m(\lambda,\ \boldsymbol{t})$ 的 τ-函数时，其值不会改变

$$W_m(\lambda, \boldsymbol{0}) = [W(\lambda)]_m\,. \tag{148}$$

一般情况下，$\lambda^m[W(\lambda)]_m$ 的谱曲线在其仿射部分没有奇点，并且 $W_m(\lambda,\ \boldsymbol{t})$的 τ-函数可由式（11）给出。因此，定理 2 得证。 □

4 例子

在展示一个具体例子之前，我们先介绍一种在[11] 中开发的显式算法，用于计算由式（48）定义的除子 $\mathcal{D}$。在本节中，我们始终假设 $W(\lambda)$具有截断形式（4），且其谱曲线在仿射部分没有奇点。

令 e^* 为行向量

$$e* := (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}\,. \tag{149}$$

定义多项式

$$D(\lambda) := \det \begin{pmatrix} e^* \\ e^*W(\lambda)\lambda^m \\ e^*W(\lambda)^2\lambda^{2m} \\ \vdots \\ e^*W(\lambda)^n\lambda^{nm} \end{pmatrix} . \tag{150}$$

并定义多项式 $r_{j,\ k}(\lambda)$, j, $k=1$, ..., $n+1$ 为

$$\Delta_{j,1}(\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^{n+1} r_{j,k}(\lambda)\mu^{n+1-k}\,. \tag{151}$$

这里$\Delta_{j,1}$ 是矩阵 $\mu I_{n+1}-\lambda^m W(\lambda)$的代数余子式，因此$r_{j,1}=\delta_{j,1}$。下面的命题说明如何计算矩阵 $W(\lambda)$的除子 $\mathcal{D}$ 。

命题 ([11]). 设 $\mathcal{D}=Q_1+\cdots+Q_g$，且 $Q_i=(\lambda_i,\mu_i)$。则 $D(\lambda)$ 是次数为 g的多项式，其零点为 λ_1,...,λ_g。

假设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_g$互不相同，则矩形矩阵 $C(\lambda)=(r_{j,k}(\lambda))_{1\le j\le n+1,1\le k\le n}$在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_g$ 处取值的秩为 n。对每个 $k=1,\ldots,g$，设 C_k 为矩阵 $C(z_k)$的一个非零 n阶子式。

$$C_k:=(C(\lambda_k)_{i_s,j})_{1\le s,j\le n}\,. \tag{152}$$

^令 C_k 为通过更改 C_k 的最后一列得到的矩阵

$$r_{i_s,n}\mapsto r_{i_s,n+1}\quad s=1,\ldots,n\,. \tag{153}$$

Then

$$\mu_k=-\frac{\det\hat{C}_k}{\det C_k}\,. \tag{154}$$

$n=1$ 情形已在 [14]中讨论。

本节将更详细地讨论 $n=2$ 情形。

在这种情况下，令

$$W(\lambda)=\begin{pmatrix} u_1(\lambda)+u_2(\lambda) & u_3(\lambda) & u_4(\lambda)\\ u_5(\lambda) & -u_2(\lambda) & u_6(\lambda)\\ u_7(\lambda) & u_8(\lambda) & -u_1(\lambda)\end{pmatrix}\,. \tag{155}$$

Here

$$u_i(\lambda)=\lambda\delta_{i,7}+u_{i,-1}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{u_{i,k}}{\lambda^{k+1}}\,,\quad i=1,2,5,7,8\,, \tag{156}$$

$$u_i(\lambda)=\delta_{i,3}+\delta_{i,6}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{u_{i,k}}{\lambda^{k+1}}\,,i=3,4,6\,. \tag{157}$$

$W(\lambda)$ 的谱曲线是一个亏格为 $g=3m$ 的黎曼曲面。根据命题 4，我们计算多项式 (150)。

$$\begin{aligned} D(\lambda)&=\lambda^{3m}\left(-u_1(\lambda)u_3(\lambda)u_4(\lambda)+u_2(\lambda)u_3(\lambda)u_4(\lambda)+u_3(\lambda)^2u_6(\lambda)-u_4(\lambda)^2u_8(\lambda)\right)\\ &=\lambda^{3m}+\text{l.o.t.}\,. \end{aligned} \tag{158}$$

令 $\lambda_1,..,\lambda_g$为 $D(\lambda)$ 的零点， μ_k、 $k=1,..,g$由命题 4 中的算法给出。那么， $Q_k=(\lambda_k,\mu_k)\in C$，而 $\mathcal{D}=Q_1+\cdots+Q_g$是与 $W(\lambda)$ 对应的除子。

当 $m=1$ 显式公式为

$$\begin{aligned} D(\lambda)=&\lambda^3+\left(-u_{4,0}u_{1,-1}+u_{2,-1}u_{4,0}+2u_{3,0}+u_{6,0}\right)\lambda^2\\ &+(-u_{1,-1}u_{3,0}u_{4,0}+u_{2,-1}u_{3,0}u_{4,0}\\ &-u_{8,-1}u_{4,0}^2-u_{1,0}u_{4,0}+u_{2,0}u_{4,0}+u_{3,0}^2+2u_{3,0}u_{6,0})\lambda\\ &-u_{1,0}u_{3,0}u_{4,0}+u_{2,0}u_{3,0}u_{4,0}+u_{3,0}^2u_{6,0}-u_{4,0}^2u_{8,0}\,, \end{aligned} \tag{159}$$

$$\mu_k=-\frac{\lambda_k^2+(u_{2,-1}u_{4,0}+u_{3,0}+u_{6,0})\lambda_k+u_{2,0}u_{4,0}+u_{3,0}u_{6,0}}{u_{4,0}}\,,\quad k=1、2、3。 \tag{160}$$

在这种情况下，我们可以将全纯微分选为

$$\alpha_i = \frac{\lambda^{i-1} d\lambda}{S_\mu(\lambda,\mu)}\,, \quad i = 1,\dots,2m\,, \tag{161}$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda^{i-2m-1}\mu d\lambda}{S_\mu(\lambda,\mu)}\,, \quad i = 2m+1,\dots,3m\,. \tag{162}$$

Let

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_\mu(\lambda_1,\mu_1)} & \cdots & \frac{1}{S_\mu(\lambda_g,\mu_g)} \\ \frac{\lambda_1}{S_\mu(\lambda_1,\mu_1)} & \cdots & \frac{\lambda_g}{S_\mu(\lambda_g,\mu_g)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\lambda_1^{2m-1}}{S_\mu(\lambda_1,\mu_1)} & \cdots & \frac{\lambda_g^{2m-1}}{S_\mu(\lambda_g,\mu_g)} \\ \frac{\mu_1}{S_\mu(\lambda_1,\mu_1)} & \cdots & \frac{\mu_g}{S_\mu(\lambda_g,\mu_g)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\mu_1\lambda_1^{m-1}}{S_\mu(\lambda_1,\mu_1)} & \cdots & \frac{\mu_g\lambda_g^{m-1}}{S_\mu(\lambda_g,\mu_g)} \end{pmatrix}. \tag{163}$$

$\mathcal{D}$ 的演化可描述为

$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1}{dt_k} \\ \vdots \\ \frac{d\lambda_g}{dt_k} \end{pmatrix} = A^{-1}\boldsymbol{U}^{(k)}\,. \tag{164}$$

这里， $\boldsymbol{U}^{(k)}$ 由方程（117）给出。当 $m=1$ 时，我们写出第一流。

$$\frac{d\lambda_i}{dt_1} = \frac{S_\mu(\lambda_i,\mu_i)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k}{\prod_{j\neq k}(\lambda_j-\lambda_k)}\right)^{-1}, \quad i=1,\dots,3\,. \tag{165}$$

我们列出限制在 W（λ）上的前两个 τ结构，其中 $m=1$。

$$F_{1,0;1,0} = -\frac{1}{3}u_{8,-1} - \frac{1}{3}u_{5,-1} - \frac{1}{3}u_{1,-1}^2 - \frac{1}{3}u_{2,-1}^2 - \frac{1}{3}u_{1,-1}u_{2,-1} + \frac{2}{3}u_{4,0} \tag{166}$$

$$= -\frac{1}{3}h_{1,-1} - \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k}{\prod_{j\neq k}(\lambda_j-\lambda_k)}\right)^{-1}, \tag{167}$$

$$\begin{aligned} F_{1,0;2,0} = {} & \frac{1}{3}u_{3,0} + \frac{1}{3}u_{6,0} + \frac{1}{3}u_{2,-1}u_{4,0} - \frac{2}{3}u_{1,-1}^2u_{2,-1} - \frac{2}{3}u_{1,-1}u_{2,-1}^2 \\ & + \frac{2}{3}u_{8,-1}u_{1,-1} + \frac{2}{3}u_{8,-1}u_{2,-1} - \frac{2}{3}u_{5,-1}u_{1,-1} - \frac{2}{3}u_{7,-1} \end{aligned} \tag{168}$$

$$= -\frac{2}{3}h_{2,-1} - \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k\sum_{j\neq k}\lambda_j}{\prod_{j\neq k}(\lambda_j-\lambda_k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu_k}{\prod_{j\neq k}(\lambda_j-\lambda_k)}\right)^{-1}. \tag{169}$$

这里，$h_{1,\ -1}$，$h_{2,\ -1}$ 是哈密顿量，显式公式为

$$h_{1,-1} = u_{1,-1}^2 + u_{1,-1}u_{2,-1} + u_{2,-1}^2 + u_{4,0} + u_{5,-1} + u_{8,-1}\,, \tag{170}$$

$$\begin{aligned} h_{2,-1} = {} & u_{1,-1}^2u_{2,-1} + u_{1,-1}u_{2,-1}^2 + u_{5,-1}u_{1,-1} - u_{8,-1}u_{1,-1} \\ & + u_{2,-1}u_{4,0} - u_{8,-1}u_{2,-1} + u_{3,0} + u_{6,0} + u_{7,-1}\,. \end{aligned} \tag{171}$$

令 $r_1 = F_{1,\ 0;1,\ 0}$，$r_2 = F_{1,\ 0;2,\ 0}$。它们满足用正规坐标表示的 Boussinesq 方程。

$$\frac{\partial r_1}{\partial t_2} = \frac{\partial r_2}{\partial t_1}\,, \tag{172}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial t_2} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^3 r_1}{\partial (t_1)^3} - 4r_1\frac{\partial r_1}{\partial t_1}\,. \tag{173}$$

Let

$$v_1 = 3r_1\,, \tag{174}$$

$$v_2 = \frac{3}{2}\frac{\partial r_1}{\partial t_1} + \frac{3}{2}r_2\,. \tag{175}$$

我们得到

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_2} = -\frac{\partial^2 v_1}{\partial (t_1)^2} + 2\frac{\partial v_2}{\partial t_1}\,, \tag{176}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial (t_1)^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial^3 v_1}{\partial (t_1)^3} - \frac{2}{3}v_1\frac{\partial v_1}{\partial t_1}\,. \tag{177}$$

这些是关于 t_2 的 Gelfand–Dickey 层级 (1)，其中 $L = \partial^3 + v_1\partial + v_2$。方程 (165) 可视为 Boussinesq 层级的 Dubrovin 方程。

在 [9, 10]，中，Dickson–Gesztesy–Unterkofler 得到了 Boussinesq 层级的两系列代数几何解，它们与亏格为 $g = 3m$ 和 $g = 3m + 1$ 的代数曲线相关，$m \geq 1$。本文仅涉及与亏格为 $g = 3m$ 的曲线相关的解。

特别地，当 $m = 1$ 时，并考虑

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{62}{3\lambda} & 1 & \frac{4}{\lambda} \\ -4 & -\frac{8}{3\lambda} & 1 \\ \lambda - \frac{121}{\lambda} & 7 & \frac{70}{3\lambda} \end{pmatrix}\,. \tag{178}$$

$\lambda W(\lambda)$ 的谱曲线为

$$C : \mu^3 - (7\lambda^2 + \frac{16}{3})\mu - \lambda^4 - \frac{47\lambda^2}{3} + \frac{128}{27} = 0\,. \tag{179}$$

与一般情形不同，C 的仿射部分上有三个节点。因此C 是一条有理曲线，并可由 $w \in \mathbb{P}^1$ 参数化

$$\begin{cases} \lambda = w^3 - 4w \\ \mu = w^4 - 3w^2 - \dfrac{8}{3}\,. \end{cases} \tag{180}$$

除节点外，该映射是一一对应的。对于 C 上的每个节点，都有两个与之对应的 w 值，我们用 b_j,c_j, $j = 1, 2, 3$ 表示这两个值。在本例中:

$$b_1 = -2,\, b_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\, b_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\,, c_1 = 2,\, c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},\, c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \tag{181}$$

而 C 上的第 i个节点是具有

$$w = b_i, c_i\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{182}$$

从Mumford [27], 的观点来看，我们可以把这条曲线视为亏格为3的曲线的极限。通过选取适当的循环 $a_i, b_i,\ i=1,2,3$。周期矩阵各元素的极限为

$$B_{ij}=\log\frac{(b_j-b_i)(c_j-c_i)}{(b_j-c_i)(c_j-b_i)}\,,\quad i\neq j\,. \tag{183}$$

当 $i=j$ 时，我们有

$$\mathrm{Re}(B_{jj})\to-\infty\,. \tag{184}$$

对任意 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^g$，记 $\tilde{\boldsymbol{u}}=(u_1-\frac{B_{11}}{2},\cdots,u_g-\frac{B_{gg}}{2})$。$\theta$-函数的极限是奇异曲线 C 的广义雅可比簇的θ-函数，由 Mumford [27] 引入（另见 [26]）。

$$\theta(\tilde{\boldsymbol{u}})\to\theta_M(\boldsymbol{u}) \tag{185}$$

Here

$$\theta_M(u_1,u_2,u_3)=\sum_{m\in\{0,1\}^3}\exp\left(\sum_{i<j}B_{ij}m_im_j+\sum_{j=1}^{3}u_jm_j\right)\,. \tag{186}$$

我们仍然可以考虑由此 $W(\lambda)$ 得到的极点除子:

$$\mathcal{D}=Q_1+Q_2+Q_3\,. \tag{187}$$

在这个例子中，我们有

$$w(Q_1)=0,\ w(Q_2)=\sqrt{2},\ w(Q_3)=-\sqrt{2}\,. \tag{188}$$

在这条奇异曲线上，归一化全纯微分形式变为

$$\omega_j=\frac{dw}{w-b_j}-\frac{dw}{w-c_j}\,,\quad i=1,\dots,3\,. \tag{189}$$

$J(C)$ 中的点 $\boldsymbol{u}$ 是

$$\boldsymbol{u}=\mathcal{D}-\infty_C-\Delta=\sum_{i=1}^{3}\int_{\infty_C}^{Q_i}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{K}_\infty\,. \tag{190}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_3)$，且 $\boldsymbol{K}_\infty=2\infty_C-\Delta$ 是黎曼常数，见 [20, 13]。$\boldsymbol{K}_\infty$ 的极限为

$$K_j-\frac{B_{jj}}{2}\to\tilde{K}_j=\pi\sqrt{-1}-\sum_{k\neq j}\log\frac{c_k-b_j}{c_k-c_j}\,. \tag{191}$$

因此，$u_j-\frac{B_{jj}}{2}$、$j=1,2,3$的极限分别为

$$u_j-\frac{B_{jj}}{2}\to\tilde{u}_j=\sum_{k=1}^{3}\log\frac{w(Q_k)-b_j}{w(Q_k)-c_j}+\pi\sqrt{-1}-\sum_{k\neq j}\log\frac{c_k-b_j}{c_k-c_j}\,. \tag{192}$$

为了得到 $Z(t)$，我们仍需计算向量 $\boldsymbol{V}^{(k)}$ 和常数 $q_{k,l}$。对于 $\boldsymbol{V}^{(k)}$，等式 (8) 仍然成立，即

$$\boldsymbol{\omega}(\lambda)=\frac{1}{3}\sum_{k\geq1}\boldsymbol{V}^{(k)}\lambda^{-\frac{k}{3}-1}d\lambda\,. \tag{193}$$

由此公式可得向量 $\boldsymbol{V}^{(k)}$。C 上的基本归一化双微分为

$$\omega(w_1, w_2) = \frac{dw_1 dw_2}{(w_1 - w_2)^2}\,. \tag{194}$$

利用 (9)，我们得到如下用于计算 $q_{j,k}$ 的方程：

$$\frac{dw_1 dw_2}{(w_1 - w_2)^2} = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} + \sum_{j,k\geq 1} q_{j,k} z_1^{j-1} z_2^{k-1} dz_1 dz_2\,. \tag{195}$$

Here

$$z = \lambda^{-\frac{1}{3}} = (w^3 - 4w)^{-\frac{1}{3}}\,. \tag{196}$$

因此，τ-函数为

$$Z(\boldsymbol{t}) = e^{\sum_{k,l\geq 1} \frac{1}{2} q_{k,l} t_k t_l} \theta_M(\tilde{\boldsymbol{u}} - \sum_{k\geq 1} t_k \boldsymbol{V}^{(k)})\,. \tag{197}$$

正如我们已表明的，这个 τ-函数是 (11) 中那个函数的极限。

在这个具体例子中，令 $t_1 = x, t_2 = t$ 以及其他 t_k 等于 0。τ-函数为

$$\begin{aligned} Z(x,t) = e^{-\frac{2x^2}{3} - \frac{16t^2}{9}} \big(1 + 5e^{4x} + 2e^{-\sqrt{5}t+x} + 2e^{-\sqrt{5}t+5x} + 2e^{\sqrt{5}t+x} \\ + 2e^{\sqrt{5}t+5x} + 5e^{2x} + e^{6x}\big)\,. \end{aligned} \tag{198}$$

令 $r_1 = \frac{\partial^2 \log Z(x,t)}{\partial x^2}$，$r_2 = \frac{\partial^2 \log Z(x,t)}{\partial x \partial t}$，我们可以验证它们满足 Boussinesq 方程 (172) 和 (173)。这是一个正则三孤子解。关于 Gelfand–Dickey 层级的正则孤子的详细描述，可参阅 [21]。还可以验证 $\log Z(x,t)$ 的 N 阶 Taylor 系数均为有理数。

致谢

我要感谢 Di Yang 教授的建议和有益讨论，以及 Cheng Zhang 教授提出的有益建议。本工作得到国家自然科学基金委员会（编号 12371254）和中国科学院（编号 YSBR-032）的资助。

参考文献

[1] A. Alexandrov, B. Bychkov, P. Dunin-Barkowski, M. Kazarian, S. Shadrin（2025）。通过 $x - y$ 交换关系实现的 KP 可积性，*Selecta Mathematica*，31，文章编号 42。

[2] O. Babelon、D. Bernard、M. Talon（2009）。经典可积系统导论，剑桥大学出版社。[3] F. Balogh、D. Yang（2017）。Witten–Kontsevich τ 函数的 Zhou 显式公式的几何解释。《数学物理通讯》，107：1837–1851。[4] M. Bertola、B. Dubrovin、D. Yang（2016）。KdV层级的关联函数及其在交数中的应用 over$\mathcal{M}_{g,\ n}$。*Physica D*：非线性现象，327：30–57。

—

[5] M. Bertola、B. Dubrovin、D. Yang（2021）。单李代数、Drinfeld–Sokolov层级与4点相关函数。莫斯科数学杂志，21(2): 233–270.[6] V. M. Buchstaber、D. V. Leykin（2008）。(n, s)-曲线族上阿贝尔函数关于参数求导问题的解。泛函分析及其应用，42(4): 268–278。译自*Funktsional nyi Analiz i EgoPrilozheniya*，42(4): 24–36，2008.[7] M. Cafasso、A. du Crest de Villeneuve、D. Yang（2018）。Drinfeld-Sokolov层级、tau函数与广义Schur多项式。对称、可积性与几何：方法与应用，14，文章编号104，17页。[8] L. A. Dickey（2003）。孤子方程与哈密顿系统，第2版，世界科学出版社。[9] R. Dickson、F. Gesztesy、K. Unterkofler（1999）。Boussinesq层级的代数几何解。数学物理评论，11(07): 823–879 。[10] R. Dickson、F. Gesztesy、K. Unterkofler（1999）。Boussinesq层级的一种新方法。*Mathematische Nachrichten*，198(1): 51–108。[11]P. Diener、B. Dubrovin（1994）。R-矩阵形式下的代数几何Darboux坐标。SISSA预印本88/94 FM。[12] V. G. Drinfeld、V. V. Sokolov（1985）。李代数与Korteweg–de Vries型方程。苏联数学杂志，30:1975–2036。译自Itogi Nauki i Tekhniki，Seriya Sovremennye Problemy Matematiki（Noveishie Dostizheniya），24: 81–180，1984。[13] B. Dubrovin（1981）。θ函数与非线性方程。俄罗斯数学综述，36(2): 11–92。译自Uspekhi Matem. Nauk 36(2)。[14] B. Dubrovin（2019）。用θ函数逼近tau函数。数论与物理通讯，13: 203–223。[15] B. Dubrovin（2020）。 $\mathbb{Q}$ 上的代数谱曲线及其tau函数，载于：R. Donagi、T. Shaska（编）可积系统与代数几何，2: 41–91。剑桥大学出版社。[16] B. Dubrovin、S. P. Novikov（1974）。Korteweg-de Vries方程与Sturm-Liouville方程的周期问题及其与代数几何的联系。苏联科学院报告，219: 19–22。[17] B. Dubrovin、D. Yang、D. Zagier（2020）。黎曼球面的Gromov–Witten不变量。理论与应用数学季刊，16(1): 153–190。[18] V. Enolski、J. Harnad（2011）。与代数曲线相关的KP tau函数的Schur函数展开。俄罗斯数学综述，66(4):767–807。译自*Uspekhi Mat. Nauk*，66(4): 137–178。[19] L. D. Faddeev、L. A. Takhtajan（2007）。孤子理论中的哈密顿方法，施普林格科学与商业媒体。

[20] J. Fay（1973）。黎曼曲面上的θ函数。施普林格数学讲义，第352卷，施普林格。[21] S. Huang、Y. Kodama、C. Li（2025）。Gel'fand-Dickey约化下KP孤子的非交叉排列与顶点算子。数学物理通讯，406，文章编号304。[22] A. R. Its、V. B. Matveev（1975）。具有有限多个间隙的Hill算子。泛函分析及其应用，9: 65–66。[23] N. Kawamoto、Y. Namikawa、A. Tsuchiya、Y. Yamada（1988），黎曼曲面上共形场论的几何实现。数学物理通讯，116: 247–308。[24] I. M. Krichever（1976）。Zaharov-Šabat方程及其周期解的代数几何构造。苏联科学院报告，227(2): 291–294。[25] I. M. Krichever（1977）。用代数几何方法积分非线性方程。泛函分析及其应用，11: 12–26。[26] Y. Kodama（2024）。KP孤子与黎曼θ函数。数学物理快报，114，文章编号41。[27] D. Mumford（1983），*Tata* θ函数讲义，第I、II卷，Birkhäuser Boston，马萨诸塞州。[28] A. Nakayashiki（2016）。通向θ函数的Tau函数方法。国际数学研究通讯，2016(17): 5202–5248。[29] A. Nakayashiki、F. Smirnov（2001），仿射超椭圆Jacobi簇的上同调与可积系统。数学物理通讯，217: 623–652。[30] S. P. Novikov（1974）。Korteweg—de Vries方程的周期问题。泛函分析及其应用，8: 236–246。[31] M. Sato、Y. Sato（1983）。作为无穷维Grassmann流形上动力系统的孤子方程。北荷兰数学研究，81: 259–271。[32] G. Segal、G. Wilson（1985）。环群与KdV型方程。*Publ. Math.IHES*，61: 5–65。[33] Y. Xu、X. Geng、Y. Zhai（2024）。半离散Boussinesq方程的黎曼θ函数解。*Physica D*，470，A部分，文章编号134398。[34] D. Yang、C. Zhang、Z. Zhou。与单李代数相关的无穷可交换常微分方程系统。arXiv:2404.16458。[35] D. Yang、J. Zhou（2025）。从Toda层级到KP层级。对称、可积性与几何：方法与应用，21，文章编号068。[36] X. Zeng、M. Jia、X. Geng（2025）。广义Drinfel'd-Sokolov层级的代数几何拟周期解。几何分析杂志，35，文章编号201。[37] J. Zhou。Witten-Kontsevich Tau函数的显式公式。arXiv:1306.5429。[38] J. Zhou。一点的涌现几何与镜像对称。arXiv:1507.01679。