arXiv:2603.07640v1 [math.AP] 8 Mar 2026

山边型问题的变号解。

MOHAMED BEKIRI 和 MOHAMMED ELAMINE SEBIH

Abstract. 本文研究带边紧流形上涉及山边型算子的临界椭圆方程变号解的存在性。在某些几何条件下，可以保证此类解的存在。

1. Introduction and statement of results

给定一个维数为M， g且边界光滑的紧黎曼流形，其数量曲率为 $n \geq 3$, R_g 。1960年，Yamabe [15] 指出，对于所有紧黎曼 n维流形，M， g)都存在一个共形度量 $\tilde{g}$ ，它与 g 共形，且其数量曲率 $R_{\tilde{g}}$ 为常数。换言之，若将共形形变写作 $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ (其中 $u \in C^{\infty}(M)$ $u > 0$)，则数量曲率 $R_{\tilde{g}}$ 满足方程

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} R_{\tilde{g}} u^{2^\star - 1}, \tag{1.1}$$

其中 $\Delta_g := -\text{div}_g(\nabla)$ 是 Laplace-Beltrami算子， $2^\star = \dfrac{2n}{n-2}$ 是临界Sobolev 指数。山边问题归结为求解方程

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} R_g u = \lambda u^{2^\star - 1}, \tag{1.2}$$

其中 λ 是一个实参数，解 u 必须光滑且严格为正。

这一问题由 Yam- abe [15], Trudinger [14], Aubin [2] 和 Schoen [12] 通力合作，得以彻底解决。有关详情，请参阅 Lee- Parker [11]的经典论文。

我们注意到，如果 u是问题（1.2）的变号解，那么$\tilde{g} = |u|^{\frac{4}{n-2}} g$ 不是度量，因为 $\tilde{g}$ 不光滑，并且在 u的零点集上消失。

Date: 2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号: 53A99, 58J05, 53C21。*Key words and phrases.*变号解，山边型算子，带边紧流形，变分方法。

方程（1.2）的一个自然而有趣的推广是考虑

$$\Delta_g u + au = \lambda f |u|^{2^\star - 2} u, \tag{1.3}$$

其中 a、 f 是光滑函数， λ 是一个实参数。多位作者研究了该方程的变号解问题。例如，近期众多相关文献中，仅举数例：Atkinson-Br´ezis-Peletier [1], 、Cao-Noussair [5]、Djadli-Jourdain [6], 、Hebey-Vaugon [8], 和 Holcman [10]。

本文研究具有光滑边界 $\partial M \neq \emptyset$的光滑紧黎曼流形（$M$， g）上以下 Yamabe 型问题的变号解的存在性，其中流形维数为 $n > 3$。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla u) + bu = \lambda f |u|^{2^\sharp - 2} u & \text{in} \quad M, \\ u = \phi & \text{on} \quad \partial M, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 a， b， $f \in C^\infty(M)$ 、 a， f 是 M 上的正函数，且 $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ 是临界 Sobolev 指数，边界数据 $\phi \in C^\infty(\partial M)$ 是一个变号函数。更具体地说，我们寻求函数a， b和 f 满足什么条件，使问题（1.4）存在一个变号解。

我们的结果扩展了 Holcman [10] 的工作，其中研究了一个涉及共形拉普拉斯算子的椭圆问题。我们的主要结果由以下定理给出：

定理 1.1. 设(M, g) 为一个维数为$n > 3$ 且具有光滑边界 $\partial M \neq \emptyset$的紧黎曼流形。假设 $a, b, f \in C^\infty(M)$，其中$a > 0$, $f > 0$ 位于 M上。令 $x_0 \in \mathrm{Int}(M)$ 为 M 内部的一点，满足 $f(x_0) =$ 最大值$_M$ f。在以下假设下

- 算子 $-$散度$g(a\nabla) + b$ 是强制的，
- 在点 x_0处，我们有

$$(n-2)(n-4)\frac{\Delta_g f(x_0)}{f(x_0)} - 2(n-2)R_g(x_0) + 8(n-1)\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - (n^2-4)\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} < 0, \tag{1.5}$$

存在一个正实数 λ 和一个非平凡解 $u = w + h \in H_0^1(M) \cap C^{2,\alpha}(M)$ 满足方程 (1.4)，其中 w 是泛函 I 在 $H_0^1(M)$ 上定义的极小化元，定义为

$$I(w) = \int_M \left(a|\nabla w|^2 + bw^2\right) dv_g,$$

在约束条件 $\displaystyle\int_M f|w+h|^{2^\sharp} dv_g = \gamma$ 下， h 是线性问题的唯一解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla h) + bh = 0 & in\ M, \\ h = \phi & on\ \partial M. \end{cases}$$

此外，当边界数据 ϕ 变号时， u也变号。

定理1.1的证明基于 Yam- abe 提出的论证方法 [15]。该策略首先为以下一族亚临界问题构造解的极小化序列:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla u)+bu=\lambda f|u|^{q-2}u & \text{in} \quad M, \\ u=\phi_1 & \text{on} \quad \partial M, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $q\in\left(2,2^\sharp\right)$ 是亚临界指数。

第二步，我们证明在适当的几何条件下，该极小化序列收敛于临界问题（1.4）的一个非平凡光滑解，当亚临界指数 q 趋于 $2^\sharp$。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾将在全文中用到的一些定义和预备结果。第3 节和第4 节分别研究亚临界方程和临界方程。最后，第5节专门讨论测试函数。

2. Terminology and general notations

在本节中，我们回顾后文所需的一些结果与性质。设（M， g）是一个维数为 $n\geq 3$、带边界的光滑紧黎曼流形。Sobolev空间 $H_0^1(M)$定义为 $C^\infty(M)$（光滑函数空间）关于如下等价范数的完备化：$\|\cdot\|_{H_0^1(M)}$（见 Aubin [3]）

$$\|u\|_{H_0^1(M)}^2=\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2. \tag{2.1}$$

注 2.1. *Sobolev*嵌入定理断言，嵌入$H_0^1(M)\subset L^q(M)$ 是

- *continuous for all* $1<q\leq 2^\sharp=\dfrac{2n}{n-2}$,
- *compact for all* $1<q\neq 2^\sharp$.

现在，我们定义 $K_0>0$，作为欧氏Sobolev不等式中的最佳常数

$$\|u\|_{2^\sharp}^2\leq K_0\|\nabla u\|_2^2.$$

Talenti [13] 计算出了这个常数的精确值。他证明了

$$\frac{1}{K_0}=\frac{n(n-2)}{4}\,\omega_n^{2/n}, \tag{2.2}$$

其中 ω_n 表示单位 n-球（$\mathbb{S}^n$， h）的体积，该球赋有其标准度量。

我们称定义在 $H_0^1(M)$ 上的算子 $P_g:=-\operatorname{div}_g(a\nabla)+b$ 是强制的，如果存在 $\Lambda>0$，使得对于所有 $u\in H_0^1(M)$

$$\int_M uP_g(u)\,dv_g\geq\Lambda\|u\|_{H_0^1(M)}^2,$$

其中

$$\int_M uP_g(u)\,dv_g = \int_M \left(a|\nabla u|^2 + bu^2\right)\,dv_g.$$

我们还回顾如下索伯列夫不等式，它将在若干估计中起关键作用。该不等式由 Hebey 与 Vaugon [9]。

引理 2.1. 设 (M, g) 为维数 $n > 3$ 、具有光滑边界的光滑紧黎曼流形。则对任意 $\varepsilon > 0$，存在$B_\varepsilon \in \mathbb{R}$，使得对所有 $u \in H_0^1(M)$，有

$$\|u\|_{2^\sharp}^2 \leq (K_0 + \varepsilon)\,\|\nabla u\|_2^2 + B_\varepsilon\,\|u\|_2^2\,. \tag{2.3}$$

3. Construction of Subcritical Solutions

在本节中，我们证明次临界问题（1.6）解的存在性。首先，我们陈述如下有用的引理，它将边界数据 ϕ 延拓为与（1.4）相关联的齐次问题的唯一光滑解，该解定义在整个流形 M上。

引理 3.1。 设 (M, g) 是一个维数为 $n > 3$ 、带有光滑边界的光滑紧黎曼流形。假设算子 $-\mathrm{div}_g(a\nabla)+b$ 是强制的。那么下列问题：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla h) + bh = 0 & in \quad M, \\ h = \phi & on \quad \partial M, \end{cases} \tag{3.1}$$

存在唯一解 $h \in C^{2,\,\alpha}(M)$ 其中某个 $\alpha \in (0,\ 1)$。

证明。 证明是经典的。由 Lax-Milgram 定理可知，解的存在性和唯一性成立，因为该算子是强制的，且边界条件相容。此外，标准椭圆正则性理论蕴含$h \in C^{2,\,\alpha}(M)$，其中某个 $\alpha \in (0,\ 1)$。□

我们寻求形如 $u = w + h$ 的解，其中 h 是线性问题 (3.1) 的解，而 w 满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla w) + bw = \lambda f|w+h|^{2^\sharp-2}(w+h) & \text{in} \quad M, \\ w = 0 & \text{on} \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.2}$$

给定 $q \in (2,\ 2^\sharp)$，我们考虑与临界问题 (3.2) 相关的次临界问题：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla w) + bw = \lambda f|w+h|^{q-2}\,(w+h) & \text{in} \quad M, \\ w = 0 & \text{on} \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.3}$$

我们将能量泛函 I定义在 $H_0^1(M)$上，记为

$$I(w) = \int_M \left(a|\nabla w|^2 + bw^2\right)\,dv_g.$$

我们用 $\mu_{\gamma,\ q}$ 表示泛函 I 在约束集上的最小值

$$\mathcal{H}_{\gamma,q}=\left\{w\in H_0^1(M)\text{ such that }\int_M f|w+h|^q\ dv_g=\gamma\right\},$$

其中 γ 是一个满足条件的正常数

$$\int_M f|h|^{2^\sharp}\ dv_g<\gamma. \tag{3.4}$$

下面的引理保证约束集$\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$ 非空。

引理 3.2. 若

$$\int_M f|h|^{2^\sharp}\ dv_g<\gamma,$$

则，约束集 $\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$ 非空。

证明。令

$$F_q(t)=\int_M f\ |t\psi_1+h|^q\ dv_g,$$

其中 ψ_1 是算子 $-\text{div}_g(a\nabla)$对应于第一特征值 λ_1 的特征函数，即

$$\begin{cases}-\operatorname{div}_g(a\nabla\psi_1)=\lambda_1\psi_1 & \text{in } M,\\ \psi_1=0 & \text{on } \partial M.\end{cases}$$

显然，当 q 趋近于 $2^\sharp$ 时， F_q 是连续的，且满足

$$F_q(0)=\int_M f\,|h|^q\ dv_g<\gamma,\quad \lim_{t\to+\infty}F_q(t)=+\infty.$$

根据介值定理，存在$t_{\gamma,\ q}>0$ 使得

$$F_q(t_{\gamma,q})=\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1+h|^q\ dv_g=\gamma.$$

因此$t_{\gamma,\ q}\psi_1\in\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$，这意味着约束集非空，至此引理得证。□

根据下述命题，我们证明泛函 I的最小值$\mu_{\gamma,\ q}$ 可由属于$\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$的光滑函数取得。

命题 3.1。 设(M,g) 是一个维数为 $n>3$ 且边界光滑的光滑紧黎曼流形。假设:

(i) *the operator* $-\operatorname{div}_g(a\nabla)+b$ *is coercive;*

(ii) $\displaystyle\int_M f|h|^{2^\sharp}\,dv_g<\gamma.$

于是，对于所有 $q\in(2,\ 2^\sharp)$，存在一个实数 $\lambda_{\gamma,\ q}$ 以及一个光滑函数$w_{\gamma,\ q}\in\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$，它是问题 (3.3)的解，同时也是 I 的极小化元。

证明。 首先，我们证明最小值 $\mu_{\gamma,\,q}$是有限的。对于 $u \in H_0^1(M)$，H¨older 不等式给出

$$\left| \int_M bu^2 \, dv_g \right| \leq V_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \|b\|_\infty \left(\int_M |u|^q \, dv_g \right)^{\frac{2}{q}}, \tag{3.5}$$

其中 $V_g(M)$ 是 M 的体积。此外，由于 $|u|^q \leq 2^{q-1}\big(|u+h|^q+|h|^q\big)$，对于每个 $u \in H_0^1(M)$，我们得到

$$\int_M |u|^q \, dv_g \leq 2^{q-1}(\min_M f)^{-1}\gamma. \tag{3.6}$$

将 (3.6) 代入 (3.5) 得到

$$\left| \int_M bu^2 \, dv_g \right| \leq V_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \|b\|_\infty \left(2^{q-1}(\min_M f)^{-1}\gamma \right)^{\frac{2}{q}}. \tag{3.7}$$

因此，

$$I(u) \geq \int_M a|\nabla u|^2 \, dv_g - C(\gamma, q), \tag{3.8}$$

其中 $C(\gamma,\ q) = V_g(M)^{1-\frac{2}{q}} \|b\|_\infty \left(2^{q-1}(\min_M f)^{-1}\gamma \right)^{\frac{2}{q}} \geq 0$，这表明$\mu_{\gamma,\,q} > -\infty$。

设 $(w_i)_i$ 是 I 在$\mathcal{H}_\gamma$上的极小化序列，q。由（3.7）以及 I的定义，当 i足够大时，有

$$\int_M a|\nabla w_i|^2 \, dv_g \leq \mu_{\gamma,q} + 1 + C(\gamma, q). \tag{3.9}$$

由此可得

$$\int_M |\nabla w_i|^2 \, dv_g \leq (\min_M |a|)^{-1}\big(\mu_{\gamma,q} + 1 + C(\gamma, q)\big). \tag{3.10}$$

另一方面，（3.7）给出了 $\|w_i\|_2^2$的一致界。因此

$$\|w_i\|^2_{H_0^1(M)} \leq (\min_M |a|)^{-1}\big(\mu_{\gamma,q} + 1 + C(\gamma, q)(\|b\|_\infty + \min_M |a|)\big). \tag{3.11}$$

因此，$(w_i)_i$在 $H_0^1(M)$中有界。由自反性，存在一个子序列（仍记为(w_i)），使得

$$\begin{aligned}
&(a) \quad w_i \rightharpoonup w_{\gamma,q} \quad \text{weakly in } H_0^1(M),\\
&(b) \quad w_i \to w_{\gamma,q} \quad \text{strongly in } L^s(M) \text{ for all } s < 2^\sharp,\\
&(c) \quad \|w_{\gamma,q}\|_{H_0^1(M)} \leq \liminf_i \|w_i\|_{H_0^1(M)}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$I(w_{\gamma,q}) \leq \liminf_i I(w_i) = \mu_{\gamma,q}.$$

此外，根据控制收敛定理，

$$\int_M f|w_{\gamma,q} + h|^q \, dv_g = \lim_i \int_M f|w_i + h|^q \, dv_g = \gamma.$$

因此，$w_{\gamma,\,q} \in \mathcal{H}_{\gamma,\,q}$ 和 $I(w_{\gamma,\,q}) = \mu_{\gamma,\,q}$。根据拉格朗日的一个著名定理，可知存在一个乘子 $\lambda_{\gamma,\,q}$，使得对所有 $\varphi \in H_0^1(M)$，

$$\int_M (a\nabla w_{\gamma,q} \cdot \nabla\varphi + b w_{\gamma,q}\varphi)\, dv_g = \lambda_{\gamma,q} \int_M f|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}(w_{\gamma,q}+h)\varphi\, dv_g.$$

等价地，$w_{\gamma,\,q}$ 是一个弱解，满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla w_{\gamma,q}) + b w_{\gamma,q} = \lambda_{\gamma,q}\, f|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}(w_{\gamma,q}+h) & \text{in} \quad M, \\ w_{\gamma,q} = 0 & \text{on} \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.12}$$

最后，根据标准椭圆正则性理论（参见 Gilbarg–Trudinger [7]），有 $w_{\gamma,\,q} \in C^{2,\,\alpha}(M)$，其中某个 $\alpha \in$ 属于 $(0,\ 1)$。□

4. Convergence to a critical solution

本节中，我们考察极小化序列 $(w_{\gamma,\,q})_q$ 在指数 q 趋于 $2^\sharp = \dfrac{2n}{n-2}$ 时的行为。我们首先断言以下结论成立。

命题 4.1。假设

$$\int_M f|h|^{2^\sharp}\, dv_g < \gamma.$$

于是，下列断言成立：

(i) 拉格朗日乘子序列$(\lambda_{\gamma,\,q})_q$ 严格为正且有界。(ii) 序列$(w_{\gamma,\,q})_q$在 $H_0^1(M)$ 中有界，并且弱收敛于临界方程(3.2)的光滑解 $u \in C^{2,\,\alpha}(M)$ 。

证明。 我们回顾条件

$$\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\, dv_g < \gamma,$$

当 q 充分接近 $2^\sharp$时成立。为证明 (i)，我们将方程 (3.12) 乘以 $w_{\gamma,\,q}$ 并在 M 上积分，得到

$$\begin{aligned} 0 \le \mu_{\gamma,q} &= \int_M \left(a|\nabla w_{\gamma,q}|^2 + b w_{\gamma,q}^2\right) dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \int_M f\,|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q}+h)\, w_{\gamma,q}\, dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \int_M f\,|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q}+h)\,(w_{\gamma,q}+h-h)\, dv_g \\ &= \lambda_{\gamma,q} \left(\gamma - \int_M f\,|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q}+h)\, h\, dv_g\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

根据假设 $\int_M f\,|h|^{2^\sharp}\,dv_g < \gamma$，并利用 H¨older 不等式，我们得到

$$\int_M f\,|w_{\gamma,q}+h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q}+h)\,h\,dv_g \le \gamma^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \gamma. \tag{4.2}$$

由（4.1）和（4.2）可得 $\lambda_{\gamma,\ q} \ge 0$。此外，若 $\lambda_{\gamma,\ q}=0$，则有$w_{\gamma,\ q}=0\in\mathcal{H}_{\gamma,\ q}$，即，

$$\int_M f|h|^q\,dv_g = \gamma,$$

这与假设矛盾

$$\int_M f|h|^q\,dv_g < \gamma, \tag{4.3}$$

因此$\lambda_{\gamma,\ q}\neq 0$。为证明序列 $(\lambda_{\gamma,\ q})_q$ 有界，我们记 ψ_1 为算子 $-\mathrm{div}_g(a\nabla)$ 的第一个特征值 λ_1 对应的特征函数。它满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_g(a\nabla\psi_1)=\lambda_1\psi_1, & \text{in} \quad M,\\ \psi_1=0, & \text{on} \quad \partial M,\\ \int_M \psi_1^2\,dv_g = 1. \end{cases}$$

我们设

$$F(t,q)=\int_M f|t\psi_1+h|^q\,dv_g.$$

根据引理 3.2，存在 $t_{\gamma,q}>0$ ，使得 $t_{\gamma,q}\psi_1\in\mathcal{H}_{\gamma,q}$。也就是说

$$F(t_{\gamma,q},q)=\int_M f|t_{\gamma,q}\psi_1+h|^q\,dv_g=\gamma.$$

为了证明

$$\frac{\partial F}{\partial t}\,(t_{\gamma,q},q)\neq 0,$$

我们采用反证法。假设

$$\frac{\partial F}{\partial t}\,(t_{\gamma,q},q)=0.$$

我们可以写成

$$\begin{aligned} t_{\gamma,q}\,\frac{\partial F}{\partial t}\,(t_{\gamma,q},q) &= qt_{\gamma,q}\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1+h|^{q-2}\,(t_{\gamma,q}\psi_1+h)\,\psi_1\,dv_g\\ &= q\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1+h|^{q-2}\,(t_{\gamma,q}\psi_1+h)\,(t_{\gamma,q}\psi_1+h-h)\,dv_g\\ &= q\left(\gamma-\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1+h|^{q-2}\,(t_{\gamma,q}\psi_1+h)\,h\,dv_g\right)\\ &= 0. \end{aligned}$$

因此

$$\gamma = \int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1 + h|^{q-2}\,(t_{\gamma,q}\psi_1 + h)\,h\,dv_g. \tag{4.4}$$

另一方面，由 H¨older 不等式以及.....的假设

$$\int_M f\,|h|^q\,dv_g < \gamma,$$

我们可推得

$$\begin{aligned}\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1 + h|^{q-2}\,(t_{\gamma,q}\psi_1 + h)\,h\,dv_g &\le \left(\int_M f\,|t_{\gamma,q}\psi_1 + h|^q\,dv_g\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f\,|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}}\\ &< \gamma,\end{aligned}$$

这与关系式（4.4）矛盾。因此

$$\frac{\partial F}{\partial t}\,(t_{\gamma,q}, q) \neq 0.$$

由隐函数定理可知，函数 $t_{\gamma,\ q}$ 关于 q 连续。因此，存在一个与 q 无关的常数 C（γ） > 0，使得

$$\begin{aligned}\int_M \big(a|\nabla w_{\gamma,q}|^2 + bw_{\gamma,q}^2\big)\,dv_g &\le I\big(t_{\gamma,q}\psi_1\big)\\ &= t_{\gamma,q}^2\,I(\psi_1)\\ &\le C(\gamma)\big(\lambda_1 + \|b\|_\infty\big).\end{aligned} \tag{4.5}$$

根据（4.2）以及上述估计，我们得到

$$\begin{aligned}0 < \lambda_{\gamma,q} &= \frac{\displaystyle\int_M \big(a|\nabla w_{\gamma,q}|^2 + bw_{\gamma,q}^2\big)\,dv_g}{\displaystyle\int_M f\,|w_{\gamma,q} + h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q} + h)\,w_{\gamma,q}\,dv_g}\\ &= \frac{\displaystyle\int_M \big(a|\nabla w_{\gamma,q}|^2 + bw_{\gamma,q}^2\big)\,dv_g}{\gamma - \displaystyle\int_M f\,|w_{\gamma,q} + h|^{q-2}\,(w_{\gamma,q} + h)\,h\,dv_g}\\ &\le \frac{I(t_{\gamma,q}\psi_1)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}}}\\ &\le \frac{C(\gamma)\big(\lambda_1 + \|b\|_\infty\big)}{\gamma - \gamma^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_M f|h|^q\,dv_g\right)^{\frac{1}{q}}}\\ &\le C'(\gamma, h).\end{aligned}$$

因此，序列 $(\lambda_{\gamma,\,q})_q$ 在 $q \to 2^\sharp$时仍有界。因此，存在一个子序列，仍记作 $(\lambda_{\gamma,\,q})_q$，使得 $\lim_{q\to 2^\sharp} \lambda_{\gamma,\,q} = \lambda$。现在我们来证明命题的第二个结论。由估计式（4.5）以及算子 $-\mathrm{div}_g(a\nabla) + b$ 的强制性，可推知序列 $\{w_{\gamma,q}\}_q$ 在自反空间 $H^2_{3,\,0}(M)$ 中有界。因此，存在 $w \in H^1_0(M)$，使得在取一个子序列后，

$$
\begin{aligned}
&(a)\ w_{\gamma,q} \rightharpoonup w && \text{weakly in } H^1_0(M),\\
&(b)\ w_{\gamma,q} \to w && \text{strongly in } L^s(M) \text{ for all } s < 2^\sharp,\\
&(c)\ w_{\gamma,q} \to w && \text{a.e. in } M.
\end{aligned}
$$

将 $q \to 2^\sharp$代入方程（3.12）并取极限，我们推得w 是临界方程（3.2）的弱解。因此，令$u := w + h$，可得 u 是方程（1.4）的弱解。根据 Gilbarg-Trudinger 的正则性理论 [7], ，可推出 $u \in C^{2,\,\alpha}(M)$ 对任意 $0 < \alpha < 1$成立。证明完毕。□

4.1. **非平凡解的条件**。

注 4.1. 显然，如果边界数据 $\phi \not\equiv 0$，则 (1.4) 的解不恒等于零（即 $u \not\equiv 0$）。另一方面，如果 $\phi = 0$，则$h = 0$，从而 $u = w$。在此情况下，在附加假设下，我们证明 w 是的非平凡解

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}_g(a\nabla w) + bw = \lambda f|w|^{2^\sharp-2}w & in \quad M,\\
w = 0 & on \quad \partial M.
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

我们希望 formulate 确保问题（4.6）存在非平凡解的条件。对于任意 $u \in H^1_0(M) \setminus \{0\}$，我们定义

$$
I(u) = \int_M \left(a|\nabla u|^2 + bu^2\right)\, dv_g.
$$

相应的瑞利商为

$$
Q(u) = \frac{I(u)}{\left(\int_M f|u|^{2^\sharp}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}}.
$$

相应的极小化问题为

$$
\mu = \inf_{u\in H^1_0(M)\setminus\{0\}} Q(u). \tag{4.7}
$$

由于 Q 中的两项都是一次齐次的， Q在将 u 乘以任意非零常数后保持不变。因此，极小化问题（4.7）可以重新表述为

$$
\mu = \inf_{u\in\mathcal{H}_\gamma} I(u), \tag{4.8}
$$

其中

$$\mathcal{H}_\gamma = \left\{ u \in H_0^1(M) \ : \ \int_M f|u|^{2^\sharp} \, dv_g = \gamma \right\},$$

且 $\gamma > 0$ 按（3.4）选取。我们有以下引理。

引理 4.1。 次临界极小值 $\mu_{\gamma,\ q}$ 收敛于临界极小值 μ，其由 （4.8）给出，当 q 趋于 $2^\sharp$时。

证明。 该结果本质上源于以下事实：与次临界方程相关联的拉格朗日乘子序列（$\lambda_{\gamma,\ q}$）$_q$收敛于 λ，即临界方程的拉格朗日乘子。事实上，由公式（4.1），我们有

$$\mu_{\gamma,q} = \lambda_{\gamma,q} \left(\gamma - \int_M f|w_{\gamma,q} + h|^{\,q-2}(w_{\gamma,q} + h)h \, dv_g \right).$$

由于

$$\lim_{q \to 2^\sharp} \lambda_{\gamma,q} = \lambda,$$

and

$$\lim_{q \to 2^\sharp} \int_M f|w_{\gamma,q} + h|^{\,q-2}(w_{\gamma,q} + h)h \, dv_g = \int_M f|w + h|^{2^\sharp - 2}(w + h)h \, dv_g,$$

我们推得

$$\lim_{q \to 2^\sharp} \mu_{\gamma,q} = \lambda \left(\gamma - \int_M f|w + h|^{2^\sharp - 2}(w + h)h \, dv_g \right).$$

此外，由命题 4.1的证明可知 μ 是泛函的最小值

$$I(w) = \int_M \left(a|\nabla w|^2 + bw^2 \right) \, dv_g \quad \text{on } \mathcal{H}_\gamma.$$

因此，

$$\begin{aligned} \mu &= \int_M \left(a|\nabla w|^2 + bw^2 \right) \, dv_g \\ &= \lambda \int_M f|w + h|^{2^\sharp - 2}(w + h)w \, dv_g \\ &= \lambda \left(\gamma - \int_M f|w + h|^{2^\sharp - 2}(w + h)h \, dv_g \right) \\ &= \lim_{q \to 2^\sharp} \mu_{\gamma,q}. \end{aligned}$$

□

命题 4.2. 设 w 是极小化序列 $(w_{\gamma,q})_q$ 在 $H_0^1(M)$ 中的弱极限，并假设

$$K_0 \left(\min_M a \right)^{-1} \left(\max_M f \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \gamma^{-\frac{2}{2^\sharp}} \mu < 1, \tag{4.9}$$

其中 $\mu = \lim_{q \to 2^\sharp} \mu_{\gamma,q}$ 且 K_0 表示最佳索伯列夫常数。那么 w 是问题 (4.6)的非平凡解。

证明。 我们用反证法。假设 $w \equiv 0$，那么 $(w_{\gamma,\ q})_q$ 在 $H_0^1(M)$ 中弱收敛于 0。由于 $H_0^1(M)$ 紧嵌入于$L^2(M)$，因此当 $q \to 2^\sharp$ 时，$(w_{\gamma,\ q})_q$ 在 $L^2(M)$ 中强收敛于 0。于是

$$\gamma^{\frac{2}{q}} = \left(\int_M f |w_{\gamma,q}|^q \, dv_g \right)^{\frac{2}{q}} \leq \left(\max_M f \right)^{\frac{2}{q}} V_g(M)^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^\sharp}} \left(\int_M |w_{\gamma,q}|^{2^\sharp} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^\sharp}},$$

其中 $V_g(M)$ 表示 M 的体积。应用索伯列夫不等式（2.3）（参见引理 2.1），我们推得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $B_\varepsilon > 0$使得

$$\gamma^{\frac{2}{q}} \leq \left(\max_M f \right)^{\frac{2}{q}} V_g(M)^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^\sharp}} \left((K_0 + \varepsilon) \|\nabla w_{\gamma,q}\|_2^2 + B_\varepsilon \|w_{\gamma,q}\|_2^2 \right). \tag{4.10}$$

由于 $I(w_{\gamma,\ q}) = \mu_{\gamma,\ q}$，我们有

$$\int_M a |\nabla w_{\gamma,q}|^2 \, dv_g = \mu_{\gamma,q} - \int_M b w_{\gamma,q}^2 \, dv_g. \tag{4.11}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla w_{\gamma,q}|^2 \, dv_g &\leq (\min_M a)^{-1} \int_M a |\nabla w_{\gamma,q}|^2 \, dv_g \\ &\leq (\min_M a)^{-1} \left(\mu_{\gamma,q} - \int_M b w_{\gamma,q}^2 \, dv_g \right) \\ &\leq (\min_M a)^{-1} \Big(\mu_{\gamma,q} + \|b\|_\infty \|w_{\gamma,q}\|_2^2 \Big). \end{aligned} \tag{4.12}$$

结合（4.10）和（4.12），我们得到

$$\begin{aligned} \gamma^{\frac{2}{q}} \leq \left(\max_M f \right)^{\frac{2}{q}} V_g(M)^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^\sharp}} \Big\{ &(K_0 + \varepsilon)(\min_M a)^{-1} \big(\mu_{\gamma,q} + \|b\|_\infty \|w_{\gamma,q}\|_2^2 \big) \\ &+ B_\varepsilon \|w_{\gamma,q}\|_2^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

令 $q \to 2^\sharp$ 趋于极限，并注意到

$$\|w_{\gamma,q}\|_2^2 = o(1) \qquad \text{and} \qquad V_g(M)^{\frac{2}{q} - \frac{2}{2^\sharp}} = 1 + o(1),$$

我们得出

$$K_0 \left(\min_M a \right)^{-1} \left(\max_M f \right)^{\frac{2}{2^\sharp}} \gamma^{-\frac{2}{2^\sharp}} \mu \geq 1,$$

这与假设（4.9）矛盾。因此， $w \not\equiv 0$。 □

5. Test functions and geometric conditions

本节旨在借助测试函数对条件（4.9）进行评估。为此，我们考虑一组以点 x_0 为中心的法坐标$(x^1、\ x^2、...、\ x^n)$，其中函数 f 取得最大值（即 $f\ （\ x_0）\ = \max_M\ f$）。设 $B\ （\ x_0,\ \delta）$为以 x_0 为中心、半径为 δ 的测地球，使得度量 g 在点 x_0 处的内射半径 $i_g\ （\ M）$大于 2δ。设 η 为如下定义的光滑截断函数

$$\eta(x)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad x\in B\left(x_0,\delta\right),\\ 0 & \text{if} \quad x\in M-B\left(x_0,2\delta\right).\end{cases}$$

对于 $\varepsilon>0$，我们将径向函数 $u_\varepsilon\in C^\infty(M)$ 定义为

$$u_\varepsilon(x)=\eta(x)\,v_\varepsilon(x),$$

其中

$$v_\varepsilon(x)=\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

其中 $r=d_g(x,\ x_0)$。我们的目标是估计

$$\mu_\varepsilon=\int_M\left(a|\nabla u_\varepsilon|^2+bu_\varepsilon^2\right)\,dv_g, \tag{5.1}$$

and

$$\gamma_\varepsilon=\int_M f\,|u_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g, \tag{5.2}$$

通过径向函数 u_ε，这将用于证明该商

$$Q_\varepsilon=K_0\left(a(x_0)\right)^{-1}\left(f(x_0)\right)^{\frac{2}{2^\sharp}}\gamma_\varepsilon^{-\frac{2}{2^\sharp}}\,\mu_\varepsilon, \tag{5.3}$$

当 ε 足够小时，严格小于 1。我们回顾以下初等恒等式（见 [2]），这些恒等式将在后续计算中用到。

引理5.1。 [2] 设 p、q 为两个正实数。对于 $p-q>1$，令

$$I_p^q=\int_0^\infty\frac{t^q}{(1+t)^p}\,dt.$$

那么，以下结论成立：

(1) $I_{p+1}^q=\dfrac{p-q-1}{p}I_p^q$、 $\quad I_{p+1}^{q+1}=\dfrac{q+1}{p-q-1}I_{p+1}^q$。

(2) 若 $\delta\in\mathbb{R}^+$，则极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_0^\delta\frac{t^q}{(t+\varepsilon)^p}\,dt-\frac{I_p^q}{\varepsilon^{p-q-1}}\right)$$

当 $p-q-1>0$ 时有限。

(3) 若 $\delta\in\mathbb{R}^+$，则极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_0^\delta\frac{t^q}{(t+\varepsilon)^p}\,dt-\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

在 $p-q-1=0$ 时有限。

引理 5.2。 [2] 设 (M,g) 是一个黎曼流形，且 $(x^1,\dots,x^n)$ 是在 $x_0 \in M$处为中心的一组法坐标。记 $S(r)$ 为以 r 为半径、以 x_0 为中心的测地球面，其中 $r < d$ (d 表示流形 M的内射半径）。定义

$$G(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S(r)} \sqrt{|g|}\, d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 和 ω_{n-1} 分别表示$(n-1)$-欧几里得单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$的体积元和体积，且 $|g|$是黎曼度量的行列式。我们有

(1) $\sqrt{|g|}$ 在 $r=0$ 的邻域内的泰勒展开由下式给出

$$\sqrt{|g|} = 1 - \tfrac{1}{6} R_{ij} x^i x^j + o(r^2),$$

其中 R_{ij} 是里奇曲率的分量。

(2) $G(r)$ 在 $r=0$ 的邻域内的泰勒展开由下式给出

$$G(r) = 1 - \frac{R}{6n} r^2 + o(r^2).$$

对于 Q_ε的泰勒展开，我们区分两种情况：$n>4$ 的情况和 $n=4$的情况。

5.1. **的泰勒展开 Q_ε 对于 $n>4$**。首先，我们分别估计 μ_ε 在（5.1）中的各项。为此，我们采用与 [4, 10]中类似的论证。我们先考察 μ_ε中的主导项。我们有

$$\int_M a|\nabla u_\varepsilon|^2\, dv_g = \int_{B(x_0,\delta)} a|\nabla v_\varepsilon|^2\, dv_g + \int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} a|\nabla(\eta v_\varepsilon)|^2\, dv_g. \tag{5.4}$$

此外，我们注意到

$$\nabla v_\varepsilon = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} = -(n-2)\frac{r v_\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2}.$$

使用极坐标及以下展开式（见引理5.2）

$$\sqrt{|g|} = 1 - \tfrac{1}{6} R_{ij} x^i x^j + o(r^2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\delta)} a|\nabla v_\varepsilon|^2\, dv_g &= \int_0^\delta r^{n-1} \Big(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r}\Big)^2 \Big(\int_{S(r)} a\sqrt{|g|}\, d\Omega \Big) \\ &= \omega_{n-1}(n-2)^2 \\ &\quad \times \int_0^\delta \frac{r^{n+1} v_\varepsilon^2}{(\varepsilon^2+r^2)^2} \left(a(x_0) - \left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{2n} + \frac{a(x_0)}{6n} R_g(x_0) \right) r^2 + o(r^2) \right) dr\end{aligned}$$

其中 ω_{n-1} 表示$(n-1)$-欧几里得单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$的体积。利用变量替换 $r=\varepsilon\sqrt{t},\ dr=\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}$，并令 $\varepsilon\to 0$，我们得到 ——=

$$\int_{B(x_0,\delta)} a|\nabla v_\varepsilon|^2\,dv_g =\omega_{n-1}(n-2)^2 2^{n-3} \times\left(a(x_0)I_n^{\frac{n}{2}}-I_n^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{2n}+\frac{a(x_0)}{6n}R_g(x_0)\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right).$$

由关系式

$$I_n^{\frac{n}{2}+1}=\frac{n+2}{n-4}I_n^{\frac{n}{2}},$$

我们推得

$$\int_{B(x_0,\delta)} a|\nabla v_\varepsilon|^2\,dv_g =\omega_{n-1}(n-2)^2 2^{n-3} I_n^{\frac{n}{2}} a(x_0) \times\left(1-\frac{n+2}{2n(n-4)}\left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)}+\frac{R_g(x_0)}{3}\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.5}$$

同理，由于 $\varepsilon\to 0$ 且 $n>4$，我们得到

$$\int_{B(x_0,2\delta)-B(x_0,\delta)} |\nabla(\eta v_\varepsilon)|^2\,dv_g = O(\varepsilon^{n-2}). \tag{5.6}$$

将（5.5）、（5.6）代入（5.4），并利用关系式

$$\omega_n=2^{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}\omega_{n-1}\ \text{ and }\ I_n^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{n-2}I_n^{\frac{n}{2}-1},$$

我们推得

$$\int_M a|\nabla u_\varepsilon|^2\,dv_g=\frac{n(n-2)\omega_n}{4}a(x_0)\left(1-\frac{n+2}{2n(n-4)}\left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)}+\frac{R_g(x_0)}{3}\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.7}$$

对于 μ_ε 中的剩余项，我们有

$$\int_M bu_\varepsilon^2\,dv_g=\int_{B(x_0,\delta)} bv_\varepsilon^2\,dv_g+\int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} b(\eta v_\varepsilon)^2\,dv_g. \tag{5.8}$$

结合极坐标与展开式

$$\sqrt{|g|}=1-\tfrac{1}{6}R_{ij}x^ix^j+o(r^2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\delta)} bv_\varepsilon^2\,dv_g &= \int_0^\delta r^{n-1}v_\varepsilon^2\left(\int_{S(r)} b\sqrt{|g|}\,d\Omega\right)\\ &= \omega_{n-1}\int_0^\delta r^{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+r^2}\right)^{n-2}\\ &\quad\times\left(b(x_0)-\left(\frac{\Delta_g b(x_0)}{2n}+\frac{b(x_0)R_g}{6n}\right)r^2+o(r^2)\right)dr.\end{aligned}$$

进行变量替换 $r=\varepsilon\sqrt{t}$，$dr=\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}$，并令 $\varepsilon\to 0$，得到

$$\int_{B(x_0,\delta)} bv_\varepsilon^2\,dv_g = 2^{n-3}\omega_{n-1}\left(b(x_0)I_{n-2}^{\frac{n}{2}-1}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right),$$

其中

$$I_{n-2}^{\frac{n}{2}-1}=4\frac{(n-2)(n-1)}{n(n-4)}I_n^{\frac{n}{2}}.$$

因此，

$$\int_{B(x_0,\delta)} bv_\varepsilon^2\,dv_g = 2^{n-3}I_n^{\frac{n}{2}}\omega_{n-1}\left(4b(x_0)\frac{(n-2)(n-1)}{n(n-4)}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.9}$$

类似地，容易验证

$$\int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} b(\eta v_\varepsilon)^2\,dv_g = O(\varepsilon^{n-2}). \tag{5.10}$$

将（5.9）和（5.10）代入（5.8），并利用这些关系

$$\omega_n = 2^{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}\omega_{n-1}\ \text{ and }\ I_n^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{n-2}I_n^{\frac{n}{2}-1},$$

我们最终推出

$$\int_M bu_\varepsilon^2\,dv_g = \omega_n\left(b(x_0)\frac{(n-1)}{(n-4)}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.11}$$

将（5.7）和（5.11）代入（5.1），我们得到

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon &= \frac{n(n-2)\omega_n}{4}\,a(x_0)\\ &\quad\times\left\{1+\frac{1}{2n(n-2)(n-4)}\left(8(n-1)\frac{b(x_0)}{a(x_0)}-(n^2-4)\Big(\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)}+\frac{R_g(x_0)}{3}\Big)\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right\}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

现在，为了估计 γ_ε，我们将其分为两部分。也就是说

$$\gamma_\varepsilon = \int_{B(x_0,\delta)} f\,|v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g + \int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} f\,|\eta v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g. \tag{5.13}$$

利用极坐标以及展开式

$$\sqrt{|g|} = 1 - \tfrac{1}{6}R_{ij}x^i x^j + o(r^2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\delta)} f|v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g &= \int_0^\delta r^{n-1}|v_\varepsilon|^{2^\sharp}\left(\int_{S(r)} f\sqrt{|g|}\,d\Omega\right)\\ &= \omega_{n-1}\int_0^\delta r^{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+r^2}\right)^n\\ &\quad\times\left(f(x_0) - \left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n}R_g\right)r^2 + o(r^2)\right)dr.\end{aligned}$$

再次进行变量替换 $r = \varepsilon\sqrt{t}$, $dr = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}$, 并令 $\varepsilon \to 0$, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\delta)} f|v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g =& 2^{n-1}\omega_{n-1}\\ &\times\left(I_n^{\frac{n}{2}-1}f(x_0) - I_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{2n} + \frac{f(x_0)}{6n}R_g(x_0)\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right).\end{aligned}$$

利用这些关系

$$I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{n-2}I_n^{\frac{n}{2}-1} \quad\text{and}\quad \omega_n = 2^{n-1}I_n^{\frac{n}{2}-1}\omega_{n-1},$$

我们推得

$$\int_{B(x_0,\delta)} f|v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g = \omega_n f(x_0)\left(1 - \frac{1}{2(n-2)}\left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{f(x_0)} + \frac{R_g(x_0)}{3}\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.14}$$

容易验证

$$\int_{B(x_0,2\delta)\setminus B(x_0,\delta)} f|\eta v_\varepsilon|^{2^\sharp}\,dv_g = O(\varepsilon^{n-2}). \tag{5.15}$$

将（5.14）和（5.15）代入（5.13），得到

$$\gamma_\varepsilon = \omega_n f(x_0)\left(1 - \frac{1}{2(n-2)}\left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{f(x_0)} + \frac{R_g(x_0)}{3}\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.16}$$

因此,

$$\gamma_\varepsilon^{-\frac{2}{2^\sharp}} = \omega_n^{\frac{2-n}{n}} f(x_0)^{\frac{2-n}{n}}\left(1 + \frac{1}{2n}\left(\frac{\Delta_g f(x_0)}{f(x_0)} + \frac{R_g(x_0)}{3}\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right). \tag{5.17}$$

最后，将（5.12）和（5.17）代入（5.3），并利用以下事实

$$\frac{1}{K_0} = \frac{n(n-2)}{4}\,\omega_n^{2/n},$$

我们得出

$$Q_\varepsilon = 1 + \frac{H(x_0)}{2n(n-2)(n-2)(n-4)}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

其中

$$H(x_0) = (n-2)(n-4)\frac{\Delta_g f(x_0)}{f(x_0)} - 2(n-2)R_g(x_0) + 8(n-1)\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - (n^2-4)\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)}.$$

由于条件（1.5）（见定理1.1），量 H（x_0）严格为负。因此

$$Q_\varepsilon < 1.$$

5.2. **的泰勒展开当** $n = 4$**时。** 在这种情况下，我们使用与之前相同的技巧。注意到 γ_ε 的展开式与前一种情况相同。我们从 μ_ε 中的首项开始，并考虑以下估计（见引理 5.2）：对于任意实数 p，q满足 $p - q - 1 = 0$，当 $\varepsilon \to 0$时，有

$$\int_0^{(\frac{\delta}{\varepsilon})^2} \frac{t^q}{(1+t)^p} dt \sim \log \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_M a|\nabla u_\varepsilon|^2 \, dv_g &= \omega_{n-1}(n-2)^2 2^{n-3} \\ &\quad \times \left(I_n^{\frac{n}{2}} a(x_0) - \left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{2n} + \frac{a(x_0)}{6n} R_g(x_0) \right) \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= \omega_{n-1}(n-2)^2 2^{n-3} I_n^{\frac{n}{2}} a(x_0) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{2nI_n^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + \frac{R_g(x_0)}{3} \right) \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2) \right).\end{aligned}$$

利用这些关系，

$$\omega_n = 2^{n-1} I_n^{\frac{n}{2}-1} \omega_{n-1} \quad \text{and} \quad I_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{n-2} I_n^{\frac{n}{2}-1},$$

我们推得

$$\begin{aligned}\int_M a|\nabla u_\varepsilon|^2 \, dv_g =& \omega_n \frac{n(n-2)}{4} a(x_0) \\ &\times \left(1 - \frac{1}{2nI_n^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + \frac{R_g(x_0)}{3} \right) \varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2) \right).\end{aligned} \tag{5.18}$$

对于剩余项，我们有

$$\int_M b v_\varepsilon^2 \, dv_g = 2^{n-3} \omega_{n-1} \left(b(x_0)\varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2) \right). \tag{5.19}$$

将（5.18）和（5.19）代入（5.1），我们得到

$$\mu_\varepsilon = \frac{n(n-2)\omega_n}{4}\, a(x_0)$$
$$\times \left\{1 + \frac{1}{6nI_n^{\frac{n}{2}}(n-2)^2}\left(6n\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - (n-2)^2\left(\frac{3\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + R_g(x_0)\right)\right)\varepsilon^2 \log\frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2)\right\}. \tag{5.20}$$

的展开式与前一种情况相同。将（5.12）和（5.20）代入（5.3），并利用

$$\frac{1}{K_0} = \frac{n(n-2)}{4}\,\omega_n^{2/n},$$

我们最终得到

$$Q_\varepsilon = 1 + \frac{1}{6nI_n^{\frac{n}{2}}(n-2)^2}\left\{6n\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - (n-2)^2\left(\frac{3\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + R_g(x_0)\right)\right\}\varepsilon^2 \log\frac{1}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^2).$$

由条件（1.5）（见定理 1.1），对于 $n = 4$，有

$$6n\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - (n-2)^2\left(\frac{3\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + R_g(x_0)\right) = 4\left(6\frac{b(x_0)}{a(x_0)} - \frac{3\Delta_g a(x_0)}{a(x_0)} + R_g(x_0)\right) < 0.$$

因此，

$$Q_\varepsilon < 1.$$

References

[1] F. Atkinson、H. Br´ezis、L. Peletier，具有临界Sobolev指数的椭圆方程的节点解，*J. Differential Equations 85 (1990), 151 170*。

[2] T．Aubin，关于标量曲率的非线性微分方程与 Yamabe 问题，*J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269-296.*

[3] T. Aubin，黎曼几何中的某些非线性问题，*Springer (1998)*

[4] M. Bekri、黎曼流形上的紧流形非线性临界指数的四阶椭圆方程的节点解，*1421-1437.*

[5] D. Cao - E. S. Noussair，具有临界指数的半线性椭圆问题的多个正解与节点解，*Indiana University Mathematics Journal 44 ， ， (1995) 1249-1271.* Z. Djadli、A. Jourdain，紧黎曼流形上带扰动项的标量曲率型方程的节点解，《意大利数学联合会公报》Soc. Artic. Ric. Mat. (8), 5 (2002), No 1, 205-226.

[6] D. Gilbard、N. Trudinger，二阶椭圆偏微分方程，*Springer- Verlag 1983.*

[7] E. Hebey、M. Vaugon，具有临界Sobolev增长的非线性椭圆方程的节点解的存在性与多重性，*J. Funct. Anal. 119(2) (1994), 298-318.*

[8] E. Hebey、M. Vaugon，完备黎曼流形上Sobolev嵌入定理的最佳常数问题，*Duke Math. J. 79 235–279 1995.*

[9] D. Holcman，带边界的非局部共形平坦黎曼流形上的节点解 *Comment. Math. Helv. 76 (2001) 373-387.*

[10] J.M. Lee、T. Parker，山边问题。*Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 17, (1987), 37-91.*

[11] A. Bahri、J. M. Coron，关于涉及临界Sobolev指数的某些半线性椭圆方程的变分问题，*Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), no. 3, 253-294.*

[12] R M. Schoen，将黎曼度量共形形变为常数量曲率。 *J. Differential Geom. 20 (1984) 479-495.* ， ，
[13]
， G. Talenti ；索伯列夫不等式中的最佳常数，
Ann. di Matem. Pura ed Appl. 110 ， *353-372.* N.S.
(1976) [14]
Trudinger，关于紧流形上黎曼结构共形形变的评述，
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 265–274. ， ，H. Yamabe，关于紧流形上
[15]
黎曼结构的形变，*Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.*

Mohamed Bekiri, Laboratory of Geomatics, Ecology and Environment (LGEO2E), Department of Biology Faculty of Natural and Life Sciences University , , , Mustapha Stambouli of Mascara Algeria.
Email address: mohamed.bekiri@univ –mascara.dz

Mohammed Elamine Sebih, Laboratory of Geomatics, Ecology and Environment (LGEO2E), Department of Mathematics, Faculty of Exact Sciences, University Mustapha Stambouli of Mascara , Algeria.
Email address: ma.sebih@univ-mascara.dz