由 Hurst指数为 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ *的 TFBM 驱动的粗糙微分方程

Lijuan Zhang, Jianhua Huang†,

School of Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 210000, China

†*College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*

arXiv:2603.07675v1 [math.DS] 8 Mar 2026

摘要 我们研究了由 Hurst指数为 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ 且 tempered参数为 $\lambda > 0$ 的 tempered分数布朗运动驱动的粗糙微分方程。首先，通过分段线性逼近，我们在几乎处处的意义下将 tempered分数布朗运动规范提升为三阶几何粗糙路径。随后，运用Doss-Sussmann技术并结合停时贪婪序列，我们构造了一个适当的变换，在粗糙微分方程的解与相应常微分方程的解之间建立双射关系。由此得到原方程解的存在唯一性。基于这一结果并应用 Gronwall引理，我们进一步推导出解的范数的上界，从而对其增长提供定量控制。**关键词：** tempered分数布朗运动、粗糙路径理论、粗糙微分方程

AMS学科分类。60H10,37B25,60G22, 93E15

1 引言

本文致力于研究以下粗糙微分方程:

$$dy_t = f(y_t)dt + g(y_t)dB_t^{H,\lambda}, \quad t \in [a,b], \quad y_a \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

其中， $B^{H,\lambda}$表示具有 Hurst指数 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ 和 tempered参数 $\lambda > 0$ 的 tempered分数布朗运动。该模型在模拟研究中具有重要应用价值。Gatheral 等人 [11] 将其称为粗糙分数随机波动率模型，并指出当 $H < \frac{1}{3}$ 时，该模型能够更准确地刻画金融市场的波动率特征；Boniece 等人 [1] 证明， $H = \frac{1}{3}$ 与湍流惯性区间中的 Davenport谱完全对应。这意味着，对于 $H < \frac{1}{3}$ ，该模型不仅能够有效捕捉金融市场中更粗糙的波动行为，还能揭示低频动力学特征

*本研究得到国家自然科学基金委员会项目（批准号：12371198）的资助。

†通讯作者：Jianhua Huang。电子邮箱:
zhanglj@nau.edu.cn, jhhuang32@nudt.edu.cn

以及经典惯性区间之外的湍流特征，从而赋予该模型深刻的物理意义和广阔的应用前景。

粗糙路径理论由 T. Lyons 于 1998 年在其开创性工作中正式提出 [16]。该理论为分析由低正则路径驱动的微分方程的动力学行为提供了系统的数学框架。Lyons 通过适当地为低正则驱动路径增添“额外的结构信息”，将原始轨迹提升为更高维张量空间中的粗糙路径。基于这一提升，他定义了粗糙路径积分，并建立了粗糙微分方程解的适定性理论。该理论不仅解决了由不规则路径驱动的微分方程的适定性问题，还在多种奇异方程的研究中发挥着关键作用，例如 Kardar-Parisi-Zhang方程以及奇异外力驱动的 Navier-Stokes方程。

随着研究的推进，关于粗糙路径驱动的随机微分方程动力学行为的理论框架日益完善。Friz-Victoir 意义下粗糙微分方程解的存在唯一性首次在 [20] 中得到确立。受粗糙噪声扰动的微分方程解的局部指数稳定性在 [?]中得到证明。 [23]探讨了非线性乘性粗糙路径驱动的粗糙偏微分方程的随机吸引子的存在性。A. Neamtu 等人 [19]采用适当离散化的 Lyapunov-Perron型方法，分析了粗糙微分方程的不变流形。L. Duc [8] 研究了粗糙微分方程的全局拉回吸引子的存在性与上半连续性，并在 [9]中进一步探讨了渐近稳定性和全局稳定性判据。 [2]研究了粗糙噪声驱动的演化方程随机吸引子的上半连续性。

在上述关于粗糙噪声驱动的随机微分方程的研究中，大多数结果都聚焦于粗糙噪声的Hölder指数满足 $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 的情形。然而，对于较低正则性粗糙噪声（$\alpha < \frac{1}{3}$）驱动的系统，相关研究仍相对不足。本文旨在为Hurst指数为 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$、tempered参数为 $\lambda > 0$ 的tempered分数布朗运动驱动的粗糙微分方程建立解的存在唯一性理论。本文分为两部分：

(1) 首先，我们将 tempered分数布朗运动提升到三步几何粗糙路径框架中。核心方法基于分段线性逼近，并通过运用 Borel-Cantelli引理，证明逼近序列几乎必然收敛，从而完成提升的构造。在这一过程中，关键在于深入利用 tempered分数布朗运动的协方差

结构以及第二类修正贝塞尔函数 $K_H(t)$ 的相关基本性质——包括求导公式、递推关系和有界性估计——以克服由参数范围 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ 导致的 Borel-Cantelli引理中级数发散问题。这保证了分段线性逼近几乎必然收敛。

– –

(2) 随后，通过应用 Doss-Sussmann技术，我们构造一个变换 $y_t = \varphi(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, z_t)$，该变换在粗糙微分方程 (1.1) 的解 y_t 与一个相关常微分方程的解 z_t 之间建立一一对应关系。我们首先证明该常微分方程的解在一个较小的局部时间区间内存在且唯一，从而在以下假设下，得到原粗糙微分方程 (1.1) 的解在该区间内局部存在且唯一：

(H_1) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是全局 Lipschitz 连续的，Lipschitz常数为 C_f；(H_2) g要么属于 $C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d))$，且满足

$$\|g\|_{\infty,C_g} := \max\left\{\|g\|_\infty, \|Dg\|_\infty, \|D_g^2\|_\infty, \|D_g^3\|_\infty\right\} < \infty. \tag{1.2}$$

为将这一结果推广到任意区间，我们构造一个停时贪心序列，将时间轴划分为若干区间。在每对相邻停时之间的每个较小子区间上，我们反复应用 Doss-Sussmann技术，并通过拼接这些解，证明方程 (1.1) 的解在整个区间上存在且唯一。在此基础上，我们进一步利用 Gronwall引理推导出解的范数上界。

本文结构安排如下。第 2 节汇总有关 TFBM 和粗糙路径理论的一些必要预备知识。第 3 节将 tempered分数布朗运动提升到三步几何粗糙路径框架中。第 4 节建立由 TFBM 驱动的粗糙微分方程解的存在唯一性理论，并给出解的一些重要估计。附录中，我们给出了一些非常有用的性质，这些性质将在全文中频繁用到。

2 预备知识

2.1 TFBM

一种 tempered分数布朗运动（TFBM），记为 $\{B_t^{H,\lambda}\}_{t\geq 0}$，其 Hurst指数为 $H \in (0, 1)$，截尾参数为 $\lambda > 0$，最初由 Meerschaert 和

Sabzikar [18] 提出。它是一种中心化高斯随机过程，满足 $\mathbb{E}[B_t^{H,\lambda}] = 0$ 对任意$t \geq 0$，并具有如下协方差结构

$$\mathbb{E}[B_s^{H,\lambda} B_t^{H,\lambda}] = \frac{1}{2}\left[C_t^2|t|^{2H} + C_s^2|s|^{2H} - C_{t-s}^2|t-s|^{2H}\right] \tag{2.1}$$

对于任意 $t,\ s \geq 0$。这里，函数 C_t^2对于 $t > 0$ 定义为

$$\begin{aligned} C_t^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left[e^{-\lambda|t|(1-x)_+}(1-x)_+^{-\alpha} - e^{-\lambda|t|(-x)_+}(-x)_+^{-\alpha}\right]^2 dx \\ &= \frac{2\Gamma(2H)}{(2\lambda)^{2H}|t|^{2H}} - \frac{2\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(2\lambda)^H|t|^H} K_H(\lambda|t|), \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $C_0^2 = 0$。在上述表达式中，$(x)_+ = xI_{(x>0)}$、$\alpha = \frac{1}{2} - H$ 和 $K_v(t) = \int_0^\infty e^{-t\text{双曲余弦}^x}\cosh(vx)dx$ 表示 [12] 和 $t > 0$时的第二类修正贝塞尔函数$v > 0$。

2.2 粗糙路径

令 $I = [\min I,\ \max I] \subset \mathbb{R}$为一个紧时间区间，并记 $|I| := \max I - \min I$ 和 $I^2 := I \times I$。对于任意有限维向量空间 W，令 $C(I,\ W)$ 表示连续路径 $y:\ I \to W$ 所构成的空间，其赋予上确界范数$\|\cdot\|_{\infty,\ I}$ 定义为$\|y\|_{\infty,\ I} = \sup_{t\in I}\|y_t\|$，其中 $\|\cdot\|$ 是 W 中的范数。我们记 $y_{s,\ t} := y_t - y_s$。

对于 $p \geq 1$，定义 $C^{p-\text{var}}(I,\ W) \subset C(I,\ W)$ 为具有有限p-变差的连续路径空间，即

$$|||y|||_{p-\text{var},I} := \left(\sup_{\Pi(I)} \sum_{i=1}^n \|y_{t_i,t_{i+1}}\|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

其中，上确界取遍所有有限划分 I。众所周知，映射$|||y|||_{p-\text{变差}\ I}^p$ 是一个控制，即它满足

$$|||y|||_{p-\text{var},[s,s]}^p = 0, \quad |||y|||_{p-\text{var},[s,u]}^p + |||y|||_{p-\text{var},[u,t]}^p \leq |||y|||_{p-\text{var},[s,t]}^p, \quad \forall s \leq u \leq t. \tag{2.3}$$

赋予范数$|||y|||_{p-\text{var},\ I} := |||y_{\min I}||| + |||y|||_{p-\text{var},\ I}$ 后，空间 $C^{p-\text{var}}(I,\ W)$ 是一个不可分巴拿赫空间；参见 [10, 定理 5.25，第 92] 页。对于 $0 < \alpha < 1$，令 $C^\alpha(I,\ W)$ 表示定义在 I 上的 α-H¨older 连续函数空间，其范数为

$$|||y|||_{\alpha,I} := |||y_{\min I}||| + |||y|||_{\alpha,I}, \quad \text{where } |||y|||_{\alpha,I} := \sup_{s,t\in I, s<t} \frac{|||y_{s,t}|||}{(t-s)^\alpha} < \infty. \tag{2.4}$$

现在固定 $\alpha \in (\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})$。三元组 $\mathbf{x} = (x,\ X^2,\ X^3)$，其中 $x \in C^\alpha(I,\ \mathbb{R}^m)$，并且

$$X^2 \in C^{2\alpha}(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) := \left\{X^2 \in C(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) : \sup_{s,t\in I, s<t} \frac{\|X_{s,t}^2\|}{(t-s)^{2\alpha}} < \infty\right\}, \tag{2.5}$$

$$X^3 \in C^{3\alpha}(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) := \left\{ X^3 \in C(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) : \sup_{s,t\in I, s<t} \frac{\|X^3_{s,t}\|}{(t-s)^{3\alpha}} < \infty \right\}, \tag{2.6}$$

如果满足陈关系，则称其为粗糙路径

$$X^2_{s,t} - X^2_{s,u} - X^2_{u,t} = x_{s,u} \otimes x_{u,t}, \tag{2.7}$$

$$X^3_{s,t} = X^3_{s,u} + X^3_{u,t} + X^2_{s,u} \otimes x_{u,t} + x_{s,u} \otimes X^2_{u,t}. \tag{2.8}$$

X^2 称为 x 的*L´évy* 面积，并视为对下列量的取值所作的假设

$$\int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r := X^2_{s,t}, \quad \int_s^t \int_s^r x_{s,u} \otimes dx_u \otimes dx_r = X^3_{s,t},$$

其中，右端被视为左端的定义。令 $\mathscr{C}^\alpha(I, \mathbb{R}^m \oplus(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)\oplus(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)) \subset C^\alpha(I, \mathbb{R}^m)\oplus C^{2\alpha}(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)\oplus C^{2\alpha}(I^2, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)$ 为 I 上的所有粗糙路径的集合（简记为 $\mathscr{C}^\alpha(I)$ ），则 $\mathscr{C}^\alpha(I)$ 是一个闭集（但不是线性空间），并配备粗糙路径半范数

$$|||\mathbf{x}|||_{\alpha,I} := |||x|||_{\alpha,I} + |||X^2|||_{2\alpha,I^2} + |||X^3|||_{3\alpha,I^2}, \tag{2.9}$$

其中

$$|||X^2|||_{2\alpha,I^2} := \sup_{s,t\in I, s<t} \frac{\|X^2_{s,t}\|}{(t-s)^{2\alpha}} < \infty,$$

$$|||X^3|||_{3\alpha,I^2} := \sup_{s,t\in I, s<t} \frac{\|X^3_{s,t}\|}{(t-s)^{3\alpha}} < \infty.$$

本文中，我们将固定参数 $\frac{1}{4} < \alpha < \nu < \frac{1}{2}$ 和 $p = \frac{1}{\alpha}$ ，使得$C^{\underline{\alpha}}(I, W) \subset C^{p-\mathrm{var}}(I, W)$。我们还考虑 p-变差半范数

$$|||\mathbf{x}|||_{p-\mathrm{var},I} := \left(|||x|||^p_{p-\mathrm{var},I} + |||X^2|||^{\frac{p}{2}}_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},I^2} + |||X^3|||^{\frac{p}{3}}_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},I^2} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.10}$$

其中

$$|||X^2|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},I^2} := \left(\sup_{\Pi(I^2)} \sum_{i=1}^n \|X^2_{t_i,t_{i+1}}\|^{\frac{p}{2}} \right)^{2/p}, \tag{2.11}$$

$$|||X^3|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},I^2} := \left(\sup_{\Pi(I^2)} \sum_{i=1}^n \|X^3_{t_i,t_{i+1}}\|^{\frac{p}{3}} \right)^{3/p}. \tag{2.12}$$

2.3 粗糙积分

若存在一个三元组 (y', y'', R^y)，满足 $y' \in C^\alpha(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, W))$、$y'' \in C^\alpha(I^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, W))$、$R^{y\sharp} \in C^{3\alpha}(I^2, W)$、$R^{y\sharp\sharp} \in C^{2\alpha}(I^2, W)$，且对所有 $s, t \in I$，以下分解均成立，则称连续路径 $y \in C^\alpha(I, W)$ 受 $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^m)$ 控制：

$$y_{s,t} = y'_s x_{s,t} + y''_s X^2_{s,t} + R^{y\sharp}_{s,t}, \tag{2.13}$$

$$y'_t - y'_s = y''_s x_{s,t} + R^{y\sharp\sharp}_{s,t}. \tag{2.14}$$

路径 y' 和 y'' 称为 y的 ***Gubinelli*** 导数。

令 $\mathscr{D}^{2\alpha}_x(I)$ 表示由 x控制的所有三元组 (y, y', y'') 所构成的空间。赋予范数

$$\|(y, y', y'')\|_{x,2\alpha,I} := \|y_{\min I}\| + \|y'_{\min I}\| + \|y''_{\min I}\| + |||(y, y', y'')|||_{\mathscr{D}^{2\alpha}_x(I),2\alpha,I}, \tag{2.15}$$

其中

$$|||(y, y', y'')|||_{\mathscr{D}^{2\alpha}_x(I),2\alpha,I} := |||y''|||_{\alpha,I} + |||R^{y\sharp}|||_{3\alpha,I^2} + \|R^{y\sharp\sharp}\|_{2\alpha,I^2}. \tag{2.16}$$

给定固定的粗糙路径 $\mathbf{x} = (x, X^2, X^3)$ 以及受控路径 $(y, y', y'') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_x(I)$，粗糙积分 $\int_s^t y_u dx_u$ 定义为黎曼–斯蒂尔杰斯型和的极限：

$$\int_s^t y_u dx_u := \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \Big(y_u \otimes x_{u,v} + y'_u X^2_{u,v} + y''_u X^3_{u,v} \Big), \tag{2.17}$$

其中，极限是对 I 的所有有限划分 Π 取的，且满足 $|\Pi| := \max_{[u,v]\in\Pi} |v-u|$。此外，存在常数 $C_\alpha = C_{\alpha,|I|} > 1$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_s^t y_u dx_u - y_s \otimes x_{s,t} - y'_s X^2_{s,t} - y''_s X^3_{s,t} \right\| \\
&\le C_\alpha |t-s|^{4\alpha} \Big(|||x|||_{\alpha,[s,t]} |||R^{y\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]^2} \\
&+ |||R^{y\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]^2} |||X^2|||_{2\alpha,[s,t]} + |||y''|||_{\alpha,[s,t]} |||X^3|||_{3\alpha,[s,t]^2} \Big).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

本文中，我们经常使用 p-变差范数。对于受控路径 $(y,\ y',\ y'')$，我们定义

$$\|(y, y', y'')\|_{x,p,I} := \|y_{\min I}\| + \|y'_{\min I}\| + \|(y, y', y'')\|_{x,p,I}, \tag{2.19}$$

其中

$$|||(y, y', y'')|||_{x,p,I} := |||y''|||_{p-\mathrm{var},I} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},I^2} + |||R^{y\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},I^2}. \tag{2.20}$$

在 p-变差情形下，相应的估计类似于（2.19），其形式为

$$\begin{aligned}&\left\| \int_s^t y_u dx_u - y_s \otimes x_{s,t} - y'_s X^2_{s,t} - y''_s X^3_{s,t} \right\| \\ &\leq C_p \Bigg(|||x|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{y\sharp}\|_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + |||X^2|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{y\sharp\sharp}\|_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\ &+ |||y''\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} \|X^3\|_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Bigg), \end{aligned} \tag{2.21}$$

其中常数 $C_p > 1$ 与粗糙路径$\mathbf{x}$ 以及受控路径(y, y', y'')无关。

2.4 停时贪婪序列

在本文中，我们将采用 [3, 4, 6]中引入的停时贪婪序列这一概念。给定指数 $\frac{1}{p} \in \left(\frac{1}{4}, \nu\right)$ 以及参数 $\nu \in (0,1)$，我们通过如下设定，构造关于 p-变差范数的贪心停时序列 $\{\tau_i(\gamma, I, p)\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\tau_0 = \min I, \quad \tau_{i+1} := \inf\left\{ t > \tau_i : |||\mathbf{x}|||_{p-\mathrm{var},[\tau_i,t]} = \gamma \right\} \wedge \max I. \tag{2.22}$$

令$N_{\gamma,I,p}(\mathbf{x}) := \sup\{i \in \mathbb{N} : \tau_i \leq \max I\}$ 表示由该过程生成的区间个数。则如下初等估计成立:

$$N_{\gamma,I,p}(\mathbf{x}) \leq 1 + \gamma^{-p} |||\mathbf{x}|||^p_{p-\mathrm{var},I}. \tag{2.23}$$

对于Hölder情形，给定 $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, \nu\right)$，我们通过如下方式构造关于 α-Hölder范数的另一贪心序列$\{\bar{\tau}_i(\gamma, I, \alpha)\}_{i\in\mathbb{N}}$

$$\bar{\tau}_0 = \min I, \quad \bar{\tau}_{i+1} := \inf\left\{ t > \bar{\tau}_i : (t - \bar{\tau}_i)^{1-2\alpha} + |||\mathbf{x}|||_{\alpha-\mathrm{Hol},[\bar{\tau}_i,t]} = \gamma \right\} \wedge \max I. \tag{2.24}$$

定义 $N_{\gamma,I,\alpha}(\mathbf{x}) := \sup\{i \in \mathbb{N} : \bar{\tau}_i \leq \max I\}$，我们得到如下界

$$N_{\gamma,I,\alpha}(\mathbf{x}) \leq 1 + |I| \gamma^{-\frac{1}{\nu-\alpha}} \left(1 + |||\mathbf{x}|||^{\frac{1}{\nu-\alpha}}_{\nu-\mathrm{Hol},I}\right). \tag{2.25}$$

3 TFBM 上的几何粗糙路径

在本节中，我们证明，在典范维纳空间上几乎处处，tempered分数布朗运动（TFBM）的样本路径都可以典范地提升至第三级，从而诱导出粗糙度为 $p \in (2, 4)$ 的几何粗糙路径。

不失一般性，以下我们将注意力限制在时间区间 $[0,1]$ 上。对于每个 $n \geq 1$ 和 $k = 0, 1, \ldots, 2^n$，定义 $[0,1]$ 的二进划分为 $t_k^n = \frac{k}{2^n}$。令 $B^{H,\lambda;n}$ 表示沿该划分对 $B^{H,\lambda}$ 的分段线性逼近。由于 $B^{H,\lambda;n}$ 的样本路径是光滑的（即具有有界变差），因此它们可以唯一地典范提升为几何粗糙路径：

$$\mathbf{B}_{s,t}^{H,\lambda;n} = (1, B_{s,t}^{H,\lambda;n,1}, B_{s,t}^{H,\lambda;n,2}, B_{s,t}^{H,\lambda;n,3}), \quad 0 \leq s < t \leq 1,$$

其中，高阶分量由迭代积分给出。该提升属于粗糙度为 p 的几何粗糙路径空间 $\mathbf{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$（事实上，对任意 $p \geq 1$ 均成立）。

现在我们旨在证明序列 $\{\mathbf{B}^{H,\lambda;n}_{s,t}\}_{n\geq 1}$ 在 p-变差度量 d_p 下几乎必然收敛。这一收敛意味着，几乎必然地，$B^{H,\lambda}$ 的样本路径可增强为粗糙度为 p 的第三层几何粗糙路径，该路径定义为 $\mathbf{B}^{H,\lambda;n}_{s,t}$ 在 d_p 下的极限。此类增强可解释为通过二进近似得到的 TFBM 典范提升。在证明这一收敛之前，我们先推导各层的以下关键估计。

引理 3.1. 对于任意 $m, n \geq 1$, $k = 1, 2, \cdots, 2^n$, $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\lambda > 0$ 以及 $p \in (2, 4)$，第一层路径满足以下估计：

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \begin{cases} c[C^2_{\frac{1}{2^n}}]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{nH}}, & n \leq m; \\ c[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{1}{2}} \frac{2^{m(1-H)}}{2^n}, & n > m, \end{cases}$$

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m+1,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n} - B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n}|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \begin{cases} 0, & n \leq m; \\ c[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{1}{2}} \frac{2^{m(1-H)}}{2^n}, & n > m, \end{cases}$$

其中，c 是不依赖于 m、n和 k的某个正数常数。

证明。对于 $n \leq m$，我们有

$$B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n} = B^{H,\lambda}_{t_k^n} - B^{H,\lambda}_{t_{k-1}^n}.$$

由于高斯随机变量的 L^2-范数与 L^p-范数等价，由(2.1)可得

$$\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n}|^p \leq c_p[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n}|^2]^{\frac{p}{2}} = c_p\left[C^2_{\frac{1}{2^n}} \frac{1}{2^{2nH}}\right]^{\frac{p}{2}}.$$

此外，注意到

$$B^{H,\lambda;m+1,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n} - B^{H,\lambda;m,1}_{t_{k-1}^n, t_k^n} = (B^{H,\lambda}_{t_k^n} - B^{H,\lambda}_{t_{k-1}^n}) - (B^{H,\lambda}_{t_k^n} - B^{H,\lambda}_{t_{k-1}^n}) = 0.$$

对于 $n > m$，有

$$B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k} = \frac{2^m}{2^n}(B^{H,\lambda}_{t^m_l} - B^{H,\lambda}_{t^m_{l-1}}), \tag{3.1}$$

其中， l 是满足 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^m_{l-1}, t^m_l]$的唯一整数。因此

$$\begin{aligned}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^p]^{\frac{1}{p}} &= \frac{2^m}{2^n}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda}_{t^m_l} - B^{H,\lambda}_{t^m_{l-1}}|^p]^{\frac{1}{p}} \\ &\le c_p\frac{2^m}{2^n}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda}_{t^m_l} - B^{H,\lambda}_{t^m_{l-1}}|^2]^{\frac{1}{2}} = c_p\frac{2^m}{2^n}\left[C^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{1}{2^{2mH}}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

对于 $n > m$，令 l 为满足 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^m_{l-1}, t^m_l]$的唯一整数。那么区间$[t^n_{k-1}, t^n_k]$必定包含于 $[t^{m+1}_{2l-2}, t^{m+1}_{2l-1}]$或 $[t^{m+1}_{2l-1}, t^{m+1}_{2l}]$。在 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-2}, t^{m+1}_{2l-1}]$的情形下，由（3.1）可得

$$B^{H,\lambda;m+1,1}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k} = \frac{2^m}{2^n}[(B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-1}} - B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-2}}) - (B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l}} - B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-1}})],$$

因此

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m+1,1}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^p \\ &\le c_p\left(\frac{2^m}{2^n}\right)^p[\mathbb{E}|(B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-1}} - B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-2}}) - (B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l}} - B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-1}})|^2]^{\frac{p}{2}} \\ &\le c_p\left(\frac{2^m}{2^n}\right)^p\left[2C^2_{\frac{1}{2^{m+1}}}\frac{1}{2^{2(m+1)H}}\right]^{\frac{p}{2}} \le c_p\left(\frac{2^m}{2^n}\right)^p\left[C^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{1}{2^{2mH}}\right]^{\frac{p}{2}},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了 $C^2_t t^{2H}$关于 t的单调递增性质。对于 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-1}, t^{m+1}_{2l}]$的情形，类似的论证可得相同的估计。

□

引理 3.2。对于任意 m、$n \ge 1$、$k = 1$、2、$\cdots$、2^n、$H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$、$\lambda > 0$以及 $p \in (2, 4)$，二阶路径满足以下估计：

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^{\frac{p}{2}}]^{\frac{2}{p}} \le \begin{cases}\frac{c}{2^{2Hn}}, & n \le m; \\ cC^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{2^{2m(1-H)}}{2^{2n}}, & n > m,\end{cases}$$

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m+1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^{\frac{p}{2}}]^{\frac{2}{p}} \le \begin{cases}\frac{c}{2^{\frac{(4H-1)m}{2}}2^{\frac{n}{2}}}, & n \le m; \\ cC^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{2^{2m(1-H)}}{2^{2n}}, & n > m,\end{cases}$$

其中， c 是一个与 m、n、k 无关的正数常数。

证明。条件 $p \in (2,4)$ 意味着 $\frac{p}{2} < 2$。因此，根据 H¨older 不等式，为了在 $L^{\frac{p}{2}}$-范数下获得二阶估计，只需在 L^2-范数下证明该估计即可。

对于 $n > m$，以下结论成立：

$$\begin{aligned} B^{H,\lambda;m,2;i,j}_{t^n_{k-1},t^n_k} &= \int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k} B^{H,\lambda;m,1;i}_{t^n_{k-1},v} dB^{H,\lambda;m;j}_v \\ &= \frac{\Delta^m_l B^{H,\lambda;i} \Delta^m_l B^{H,\lambda;j}}{(\Delta t^m)^2} \int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k} (v - t^n_{k-1}) dv \\ &= 2^{2(m-n)-1} \Delta^m_l B^{H,\lambda;i} \Delta^m_l B^{H,\lambda;j}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中，l 是满足 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^m_{l-1}, t^m_l]$ 的唯一整数。然后，利用张量积的记号可得

$$B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} = 2^{2(m-n)-1} (\Delta^m_l B^{H,\lambda})^{\otimes 2}. \tag{3.3}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &B^{H,\lambda;m+1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} \\ &= \begin{cases} 2^{2(m-n)+1} (\Delta^{m+1}_{2l-1} B^{H,\lambda})^{\otimes 2} - 2^{2(m-n)-1} (\Delta^m_l B^{H,\lambda})^{\otimes 2}, & [t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-2}, t^{m+1}_{2l-1}]; \\ 2^{2(m-n)+1} (\Delta^{m+1}_{2l} B^{H,\lambda})^{\otimes 2} - 2^{2(m-n)-1} (\Delta^m_l B^{H,\lambda})^{\otimes 2}, & [t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-1}, t^{m+1}_{2l}]. \end{cases} \end{aligned}$$

由于 TFBM 的各分量相互独立且同分布，根据闵可夫斯基不等式可知，对于情形 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-2}, t^{m+1}_{2l-1}]$,

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{E} \left(B^{H,\lambda;m+1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{2(m-n)} \left[\mathbb{E} \left(2(\Delta^{m+1}_{2l-1} B^{H,\lambda})^{\otimes 2} - \frac{1}{2} (\Delta^m_l B^{H,\lambda})^{\otimes 2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2^{2(m-n)} \sum_{i,j=1}^{d} \left[\mathbb{E} \left(2\Delta^{m+1}_{2l-1} B^{H,\lambda;i} \Delta^{m+1}_{2l-1} B^{H,\lambda;j} - \frac{1}{2} \Delta^m_l B^{H,\lambda;i} \Delta^m_l B^{H,\lambda;j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2^{2(m-n)} \left[\sum_{i,j=1}^{d} 2\mathbb{E} (\Delta^{m+1}_{2l-1} B^{H,\lambda;i})^2 + \sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{2} \mathbb{E} (\Delta^m_l B^{H,\lambda;i})^2 \right] \\ &\le c 2^{2(m-n)} C^2_{\frac{1}{2^m}} \left(\frac{1}{2^m} \right)^{2H} = c C^2_{\frac{1}{2^m}} \frac{2^{2m(1-H)}}{2^{2n}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si类似地，对于情形 $[t^n_{k-1}, t^n_k] \subset [t^{m+1}_{2l-1}, t^{m+1}_{2l}]$，可得到相同的估计 .

对于 $n \le m$，我们有

$$B^{H,\lambda;m,2;i,j}_{t^n_{k-1},t^n_k} = \int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k} B^{H,\lambda;m,1;i}_{t^n_{k-1},v} dB^{H,\lambda;m;j}_v$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \frac{\Delta_l^m B^{H,\lambda;j}}{\Delta t^m} \int_{t_{l-1}^m}^{t_l^m} \left(\frac{v - t_{l-1}^m}{\Delta t^m} B_{t_l^m}^{H,\lambda;i} + \frac{t_l^m - v}{\Delta t^m} B_{t_{l-1}^m}^{H,\lambda;i} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) dv \\
&= \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \left(\frac{B_{t_{l-1}^m}^{H,\lambda;i} + B_{t_l^m}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) \Delta_l^m B^{H,\lambda;j}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m+1,2;i,j} - B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m,2;i,j} \\
&= \sum_{l=2^{(m+1-n)}(k-1)+1}^{2^{(m+1-n)}k} \left(\frac{B_{t_{l-1}^{m+1}}^{H,\lambda;i} + B_{t_l^{m+1}}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) \Delta_l^{m+1} B^{H,\lambda;j} \\
&\quad - \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \left(\frac{B_{t_{l-1}^m}^{H,\lambda;i} + B_{t_l^m}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) \Delta_l^m B^{H,\lambda;j} \\
&= \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \Bigg[\left(\frac{B_{t_{2l-2}^{m+1}}^{H,\lambda;i} + B_{t_{2l-1}^{m+1}}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \\
&\quad + \left(\frac{B_{t_{2l-1}^{m+1}}^{H,\lambda;i} + B_{t_{2l}^{m+1}}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \\
&\quad - \left(\frac{B_{t_{2l-2}^{m+1}}^{H,\lambda;i} + B_{t_{2l}^{m+1}}^{H,\lambda;i}}{2} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda;i} \right) (\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} + \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;j}) \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \left[\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;j} - \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \right].
\end{aligned}
$$

采用张量积的记号，我们得到

$$
\begin{aligned}
&B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m+1,2} - B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m,2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \left[\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda} - \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \right],
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m+1,2} - B_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{H,\lambda;m,2} \right)^2 \\
&\leq c \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\ldots,d}} \sum_{r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \mathbb{E} \Big[(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;j} - \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j})
\end{aligned}
$$

$$\times (\Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda;j} - \Delta_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j}) \Big]$$

$$= c \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,d}} \sum_{r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \Big[[\mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i})]^2$$

$$- \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \Delta_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda;j}) \mathbb{E}(\Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i}) \Big]$$

$$= c \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,d}} \sum_{\substack{l>r \\ r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}}^{2^{(m-n)}k} \Big[[\mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i})]^2$$

$$- \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \Delta_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda;j}) \mathbb{E}(\Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i}) \Big]$$

$$+ c \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,d}} \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \Big[[\mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i})]^2$$

$$- \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;j}) \mathbb{E}(\Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i}) \Big] := I_1 + I_2, \tag{3.5}$$

其中，在第一个等式中，我们利用了 TFBM 各分量的独立同分布性质。

根据引理 A.1，我们得到

$$I_1 \leq \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,d}} \sum_{\substack{l>r \\ r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}}^{2^{(m-n)}k} \frac{c_{H,\lambda}}{2^{(4H+2)m}} \leq \frac{c_{H,\lambda}}{2^{4Hm} 2^{2n}}. \tag{3.6}$$

利用 H¨older 不等式，我们有

$$I_2 \leq \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1,\dots,d}} \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \Big[[\mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i})^2]^2$$

$$+ \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j})^2 \mathbb{E}(\Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda;i})^2 \Big]$$

$$\leq c \sum_{l=2^{(m-n)}(k-1)+1}^{2^{(m-n)}k} \Big[C^2_{\frac{1}{2^{m+1}}} \frac{1}{2^{2H(m+1)}} \Big]^2$$

$$\leq c \Big[C^2_{\frac{1}{2^m}} \Big]^2 \frac{1}{2^{(4H-1)m} 2^n}, \tag{3.7}$$

其中在 t 中 在最后一个不等式中，我们使用了 $C_t^2 t^{2H}$ 的单调递增性质

关于 t。将 (3.6)-(3.7) 代入 (3.5) 得到

$$\mathbb{E}\left(B^{H,\lambda;m+1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right)^2\leq\frac{c_{H,\lambda}}{2^{(4H-1)m}2^n}.$$

现在我们考虑项 $B^{H,}_{,\ t^n_{k-1}\ t^n_k}{}^{\lambda;m\ 2\ ,,\circ}$

F或者 $n\geq m$，根据 (3.3)，采用与 (3.4) 中类似的论证，我们有 e

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}\leq cC^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{2^{2m(1-H)}}{2^{2n}}.$$

对于 $n<m$，显然

$$B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}=\sum_{l=n+1}^{m}\left(B^{H,\lambda;l,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;l-1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right)+B^{H,\lambda;n,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}.$$

随后，应用闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}&\leq\sum_{l=n+1}^{m}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;l,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;l-1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}+[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;n,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}\\&\leq\sum_{l=n+1}^{m}\frac{c_{H,\lambda}}{2^{\frac{(4H-1)l}{2}}2^{\frac{n}{2}}}+cC^2_{\frac{1}{2^n}}\frac{1}{2^{2Hn}}\leq\frac{c_{H,\lambda}}{2^{2nH}}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

证明完毕。 □

引理 3.3. 对于任意 m、$n\geq 1$、$k=1$、2、$\cdots$、2^n、$H\in(14$、$\frac{1}{2}]$、$\lambda>0$和 $p\in($2、4)，以下估计在三阶路径上成立：

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^{\frac{p}{3}}]^{\frac{3}{p}}\leq\begin{cases}\frac{c}{2^{3Hn}},&n<m;\\c[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{3}{2}}\frac{2^{3m(1-H)}}{2^{3n}},&n\geq m,\end{cases}$$

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m+1,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^{\frac{p}{3}}]^{\frac{3}{p}}\leq\begin{cases}\frac{c}{2^{\frac{(6H-1)m}{2}}2^{\frac{n}{2}}},&n<m;\\c[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{3}{2}}\frac{2^{3m(1-H)}}{2^{3n}},&n\geq m,\end{cases}$$

其中，c是一个与 m、n和k无关的正数常数。

证明。考虑到$p\in$(2、4)，要推导三阶估计的$L^{\frac{p}{3}}$-范数，只需证明其对应的 L^2-范数。

与 (3.2) 中类似，我们推导得出，对于 $n\geq m$，

$$B^{H,\lambda;m,3;i,j,\xi}_{t^n_{k-1},t^n_k}=\int_{t^n_{k-1}}^{t^n_k}\int_{t^n_{k-1}}^{r}B^{H,\lambda;m,i}_{t^n_{k-1},v}dB^{H,\lambda;m,j}_v dB^{H,\lambda;m,\xi}_r$$

$$= \frac{\Delta_l^m B^{H,\lambda;i} \Delta_l^m B^{H,\lambda;j} \Delta_l^m B^{H,\lambda;\xi}}{(\Delta t^m)^3} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \int_{t_{k-1}^n}^{r} (v - t_{k-1}^n) dv dr$$
$$= \frac{1}{3} 2^{3(m-n)-1} \Delta_l^m B^{H,\lambda;i} \Delta_l^m B^{H,\lambda;j} \Delta_l^m B^{H,\lambda;\xi},$$

其中 l 是满足 $[t_{k-1}^n, t_k^n] \subset [t_{l-1}^m, t_l^m]$ 的唯一整数。由此可得

$$B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m,3} = \frac{1}{3} 2^{3(m-n)-1} (\Delta_l^m B^{H,\lambda})^{\otimes 3}.$$

因此,

$$B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m+1,3} - B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m,3}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{3} 2^{3(m+1-n)-1} (\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda})^{\otimes 3} - \frac{1}{3} 2^{3(m-n)-1} (\Delta_l^m B^{H,\lambda})^{\otimes 3}, & [t_{k-1}^n, t_k^n] \subset [t_{2l-2}^{m+1}, t_{2l-1}^{m+1}]; \\ \frac{1}{3} 2^{3(m+1-n)-1} (\Delta_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda})^{\otimes 3} - \frac{1}{3} 2^{3(m-n)-1} (\Delta_l^m B^{H,\lambda})^{\otimes 3}, & [t_{k-1}^n, t_k^n] \subset [t_{2l-1}^{m+1}, t_{2l}^{m+1}]. \end{cases}$$

对于情形 $[t_{k-1}^n, t_k^n] \subset [t_{2l-2}^{m+1}, t_{2l-1}^{m+1}]$, 基于 TFBM 的各分量独立同分布这一事实, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m+1,3} - B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m,3} \right)^2 \\
&= \frac{2^{6(m-n)-2}}{9} \sum_{i,j,\xi}^{d} \mathbb{E}\Big(2^3 \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j} \Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;\xi} \\
&\quad - \Delta_l^m B^{H,\lambda;i} \Delta_l^m B^{H,\lambda;j} \Delta_l^m B^{H,\lambda;\xi} \Big)^2 \\
&\le c 2^{6(m-n)-2} \sum_{i,j,\xi}^{d} \Big[\mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;i})^2 \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;j})^2 \mathbb{E}(\Delta_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda;\xi})^2 \\
&\quad + \mathbb{E}(\Delta_l^m B^{H,\lambda;i})^2 \mathbb{E}(\Delta_l^m B^{H,\lambda;j})^2 \mathbb{E}(\Delta_l^m B^{H,\lambda;\xi})^2 \Big] \\
&\le c [C_{\frac{1}{2^m}}^2]^3 \frac{2^{6m(1-H)}}{2^{6n}}.
\end{aligned}$$

对于情形 $[t_{k-1}^n, t_k^n] \subset [t_{2l-1}^{m+1}, t_{2l}^{m+1}]$, 可以采用类似的方法得出相同的结果。

对于 $n < m$, 根据 [5, 引理 11] ,

$$\begin{aligned}
&B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m+1,3} - B_{t_{k-1}^n, t_k^n}^{H,\lambda;m,3} \\
&= \frac{1}{2} \sum_l \big(B_{t_{2l-1}^{m+1}}^{H,\lambda} - B_{t_{k-1}^n}^{H,\lambda} \big) \otimes \big(\triangle_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \triangle_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda} - \triangle_{2l}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \triangle_{2l-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \big) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_l \big(\triangle_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \triangle_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda} - \triangle_{2r}^{m+1} B^{H,\lambda} \otimes \triangle_{2r-1}^{m+1} B^{H,\lambda} \big) \otimes \big(B_{t_k^n}^{H,\lambda} - B_{t_{2l+1}^{m+1}}^{H,\lambda} \big)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{l}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}+\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{l}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}+\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{l}\big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}+\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)\otimes\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda},\qquad(3.9)$$

其中所有求和均遍历 $2^{m-n}(k-1)+1\le l\le 2^{m-n}k$。我们首先估计该项

$$I_3\equiv\Bigg|\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}\Bigg\{\big(B^{H,\lambda}_{t^{m+1}_{2l-2}}-B^{H,\lambda}_{t^n_{k-1}}\big)$$
$$\otimes\big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}-\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)\Bigg\}\Bigg|^2,\qquad(3.10)$$

设 $A_l=B^{H,\ \lambda}_{\ t^{m+1}_{2l-1}}-B^{H,\ \lambda}_{\ t^n_{k-1}}$ 和 $A_l^i=B^{H,\ \lambda;i}_{\ t^{m+1}_{2l-1}}-B^{H,\ \lambda;i}_{\ t^n_{k-1}}$。则

$$I_3=\sum_{i\ne j,\xi}\Bigg(\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}A_l^\xi\Big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}-\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\Big)\Bigg)^2$$
$$=\sum_{i\ne j,\xi}\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}(A_l^\xi)^2\Big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}-\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\Big)^2$$
$$+2\sum_{i\ne j,\xi}\sum_{r<l}\Big\{A_r^\xi A_l^\xi\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}$$
$$-A_r^\xi A_l^\xi\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;j}$$
$$-A_r^\xi A_l^\xi\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;j}$$
$$+A_r^\xi A_l^\xi\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\Big\}.\qquad(3.11)$$

对于 $i\ne j$，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\Big|\mathbb{E}\Big(A_r^\xi A_l^\xi\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\Big)\Big|$$
$$=[\mathbb{E}(A_r^\xi)^2]^{\frac12}[\mathbb{E}(A_l^\xi)^2]^{\frac12}\Big|\mathbb{E}\Big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\Big)\Big|\Big|\mathbb{E}\Big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\Big)\Big|$$
$$\le c_{H,\lambda}\Big(\frac{2l-2-2^{m-n}(k-1)}{2^{m+1}}\Big)^H\Big(\frac{2r-2-2^{m-n}(k-1)}{2^{m+1}}\Big)^H$$
$$\times\Big(\frac{2l-2r}{2^{m+1}}\Big)^{4H-4}\Big(\frac{1}{2^{m+1}}\Big)^4$$

$$\leq c_{H,\lambda}\big(2^{m-n}\big)^{2H}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{6H}\frac{1}{(r-l)^{4-4H}}. \tag{3.12}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I_3 &\leq c_{H,\lambda}2^{m-n}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{4H}+c_{H,\lambda}\big(2^{m-n}\big)^{1+2H}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{6H}\\ &\leq c_{H,\lambda}\big(2^{m-n}\big)^{1+2H}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{6H}.\end{aligned}$$

同样，我们可以估计 (3.9) 右侧出现的第二个求和项，最终得到与上文相同的上界。

接下来，我们估计 (3.9) 中剩余的项。由对称性，不妨考虑下面这一项：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\right|^2\\ &=\sum_{i,j,\xi}\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}\mathbb{E}\big(\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\big)^2\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\big)^2\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;\xi}\big)^2\\ &+2\sum_{i,j,\xi}\sum_{\substack{l>r\\ r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}}^{2^{(m-n)}k}\mathbb{E}\big(\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\big)\\ &\times\mathbb{E}\big(\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;j}\big)\mathbb{E}\big(\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;\xi}\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;\xi}\big)\\ &+2\sum_{i}\sum_{\substack{l>r\\ r,l=2^{(m-n)}(k-1)+1}}^{2^{(m-n)}k}\mathbb{E}\Big[\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\big)^2\big(\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\big)^2\big(\triangle_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda;i}\big)\Big].\end{aligned}$$

根据引理 A.2 和 [5,引理 13],，我们推得

$$\mathbb{E}\left|\sum_{l=2+2^{m-n}(k-1)}^{2^{m-n}k}\triangle_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\otimes\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\right|^2\leq c_{H,\lambda}2^{m-n}\frac{1}{2^{6mH}}. \tag{3.13}$$

同样，我们可以估计 (3.9) 中出现的其他项，最终得到 th at

$$\mathbb{E}\left|B^{H,\lambda;m+1,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right|^2\leq c_{H,\lambda}\big(2^{m-n}\big)^{1+2H}\frac{1}{2^{6mH}}. \tag{3.14}$$

现在我们考虑项 B^{H}, $\lambda;m\ 3$, , 。
$t^n_{k-1}\ t^n_k$

对于 $n\geq m$，鉴于 (3.3)，通过采用与 (3.4) 中类似的论证，我们得到

$$[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}\leq c\left(C^2_{\frac{1}{2^m}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2^{3m(1-H)}}{2^{3n}}.$$

对于 $n<m$，显然有

$$B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}=\sum_{l=n+1}^{m}\left(B^{H,\lambda;l,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;l-1,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right)+B^{H,\lambda;n,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}.$$

由闵可夫斯基不等式可知，

$$\begin{aligned}[\mathbb{E}|B^{H,\lambda;m,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2]^{\frac{1}{2}}&\le\sum_{l=n+1}^{m}\left[\mathbb{E}\left|B^{H,\lambda;l,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;l-1,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\mathbb{E}\left|B^{H,\lambda;n,3}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\le\sum_{l=n+1}^{m}c_{H,\lambda}\big(2^{l-1-n}\big)^{1+2h}\frac{1}{2^{6H(l-1)}}+c\left(C^2_{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2^{3Hn}}\\&\le\frac{c}{2^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2^{\frac{(6H-1)n}{2}}}+c\left(C^2_{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2^{3Hn}}\le c\frac{1}{2^{3Hn}}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

证明完毕。

□

为了研究$\mathbf{B}^{H,\lambda;m}$在空间$\boldsymbol{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$中的行为，我们可能需要以适当的方式控制 p-变差距离 d_p。对于 $\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}\in\boldsymbol{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$，定义

$$\rho_j(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}):=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\sum_{k=1}^{2^n}|X^j_{t^n_{k-1},t^n_k}-\tilde{X}^j_{t^n_{k-1},t^n_k}|^{\frac{p}{j}}\right)^{\frac{j}{p}},\quad j=1,2,3,\tag{3.16}$$

其中 $\gamma>p-1$ 是某个固定的通用常数。为简化记号，我们用$\rho_j(\boldsymbol{X})$表示$\rho_j(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{X}=(1,0,0,0)$。

以下结果对我们很重要，其证明见 [15]。

命题 3.4. 存在某个正数常数 $R=R(p,\gamma)$，使得对于任意$\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}\in\boldsymbol{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$，

$$\begin{aligned}d_p(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})\le R\max\{&\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_2(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_3(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_1(\boldsymbol{X})+\rho_1(\tilde{\boldsymbol{X}})),\\&\rho_2(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_1(\boldsymbol{X})+\rho_1(\tilde{\boldsymbol{X}})),\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_2(\boldsymbol{X})+\rho_2(\tilde{\boldsymbol{X}}))\}.\end{aligned}$$

现在令

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}):=\max\{&\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_2(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_3(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}}),\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_1(\boldsymbol{X})+\rho_1(\tilde{\boldsymbol{X}})),\\&\rho_2(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_1(\boldsymbol{X})+\rho_1(\tilde{\boldsymbol{X}})),\rho_1(\boldsymbol{X},\tilde{\boldsymbol{X}})(\rho_2(\boldsymbol{X})+\rho_2(\tilde{\boldsymbol{X}}))\}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

并注意到

$$\{\omega:\mathbf{B}^{H,\lambda;m}\text{ is not Cauchy under }d_p\}$$

$$
\begin{aligned}
&\subset \{\omega : \sum_{m=1}^{\infty} d_p(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) = \infty\} \\
&\subset \limsup_{m\to\infty} \{\omega : d_p(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{R}{2^{m\beta}}\} \\
&\subset \limsup_{m\to\infty} \{\omega : I(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}}\}, \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

其中 β 是待选取的某个正数常数。注意，(3.18) 的右端是 $\mathcal{B}(\Omega)$-可测的，因此其容量是良定义的。因此，为了证明几乎必然地，$\mathbf{B}^{H,\lambda;m}$ 在 d_p 下构成柯西序列，只需证明 (3.18) 的右端具有零容量。这可以通过使用 Borel-Cantelli引理来证明。

根据 (3.17)，我们可能首先需要建立对

$$
P(\rho_j(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \eta),\ j = 1, 2, 3, \qquad (3.19)
$$

and

$$
P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta), \quad P(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta), \qquad (3.20)
$$

其中 $m \geq 1$ 与 $\eta > 0$ 的估计。它们包含在下面的引理中。

引理 3.5. 对于 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\lambda > 0$、$m \geq 1$和 $\eta > 0$，我们有如下估计：

(1)

$$
\begin{aligned}
P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta) &\leq c\eta^{-p}, \\
P(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta) &\leq c\eta^{-p}.
\end{aligned}
$$

(2) 设 $\theta \in (0, Hp - 1)$ 为某个常数，使得

$$
n^{\gamma+1} \leq c\frac{2^{n(p-1)}}{2^{n(p-\theta-1)}}, \quad \forall n \geq 1,
$$

于是我们得到

$$
P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \eta) \leq c\eta^{-p}[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}},
$$

$$
P(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \eta) \leq c\eta^{-\frac{p}{2}}[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}},
$$

$$
P(\rho_3(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \eta) \leq c\eta^{-\frac{p}{3}} \frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}}.
$$

证明。 首先考虑

$$P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta) = P\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \sum_{k=1}^{2^n} |B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^p > \eta^p\bigg).$$

定义

$$A_N := \bigg\{\omega : \sum_{n=1}^{N} n^{\gamma} \sum_{k=1}^{2^n} |B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^p > \eta^p\bigg\} \in \mathcal{B}(\Omega),$$

and

$$A := \bigg\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \sum_{k=1}^{2^n} |B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}|^p > \eta^p\bigg\} \in \mathcal{B}(\Omega).$$

显然， $A_N \uparrow A$。根据容量的性质 P，我们有

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} P(A_N).$$

另一方面，根据容量的切比雪夫不等式 P 和引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
P(A_N) &\le \eta^{-p} \sum_{n=1}^{N} n^{\gamma} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}\bigg[\bigg|B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}\bigg|^p\bigg] \\
&\le c\eta^{-p}\bigg[\sum_{n=1}^{m} n^{\gamma} 2^n \bigg(C^2_{\frac{1}{2^n}}\bigg(\frac{1}{2^n}\bigg)^{2H}\bigg)^{\frac{p}{2}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{\gamma} 2^n \bigg[\frac{2^m}{2^n}\bigg(C^2_{\frac{1}{2^m}}\bigg(\frac{1}{2^m}\bigg)^{2H}\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg]^p\bigg] \\
&\le c\eta^{-p}\bigg[\sum_{n=1}^{m} n^{\gamma} [C^2_{\frac{1}{2^n}}]^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2^{n(Hp-1)}} + 2^{mp}\bigg[C^2_{\frac{1}{2^m}}\bigg(\frac{1}{2^m}\bigg)^{2H}\bigg]^{\frac{p}{2}} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{\gamma} \frac{1}{2^{n(p-1)}}\bigg] \\
&\le c\eta^{-p}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta) = P(A) \le c\eta^{-p}.$$

同理,

$$P(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \eta) \le c\eta^{-p}.$$

现在考虑

$$P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \eta) = P\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \sum_{k=1}^{2^n} \bigg|B^{H,\lambda;m+1,1}_{t^n_{k-1},t^n_k} - B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}\bigg|^p > \eta^p\bigg).$$

基于类似的理由，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m},\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})>\eta)\\
&\le \eta^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left|B^{H,\lambda;m+1,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;m,1}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right|^p\right]\\
&\le c\eta^{-p}\sum_{n=m+1}^{\infty}n^{\gamma}2^n\frac{2^{mp}}{2^{np}}\left[C^2_{\frac{1}{2^m}}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2H}\right]^{\frac{p}{2}}\\
&= c\eta^{-p}2^{mp}\left[C^2_{\frac{1}{2^m}}\left(\frac{1}{2^m}\right)^{2H}\right]^{\frac{p}{2}}\sum_{n=m+1}^{\infty}n^{\gamma}\frac{1}{2^{n(p-1)}}.
\end{aligned}$$

由于 $\theta\in(0,Hp-1)$ 满足

$$n^{\gamma+1}\le c\frac{2^{n(p-1)}}{2^{n(p-\theta-1)}},\quad \forall n\ge 1,$$

我们得到

$$P(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m},\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})>\eta)\le c\eta^{-p}[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}}.$$

考虑第二层部分。同理，我们有

$$\begin{aligned}
&P(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m},\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})>\eta)\\
&\le \eta^{-\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left|B^{H,\lambda;m+1,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}-B^{H,\lambda;m,2}_{t^n_{k-1},t^n_k}\right|^{\frac{p}{2}}\right]\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{2}}\left[\sum_{n=1}^{m}n^{\gamma}2^n\left(C^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{1}{2^{\frac{(4H-1)m}{2}}2^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{p}{2}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}n^{\gamma}2^n\left(C^2_{\frac{1}{2^m}}\frac{2^{2m(1-H)}}{2^{2n}}\right)^{\frac{p}{2}}\right]\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{2}}\left[[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{\frac{(4H-1)mp}{4}}}\sum_{n=1}^{m}n^{\gamma}2^{n(1-\frac{p}{4})}+[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}2^{m(1-H)p}\sum_{n=m+1}^{\infty}n^{\gamma}2^{n(1-p)}\right]\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{2}}\left[[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{\frac{(4H-1)mp}{4}}}2^{m(1-\frac{p}{4})}m^{\gamma+1}+[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}2^{m(1-H)p}\frac{1}{2^{m(p-1-\theta)}}\right]\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{2}}\left[[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{\frac{(4H-1)mp}{4}}}2^{m(1-\frac{p}{4}+\theta)}+[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}}\right]\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{2}}[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}}.
\end{aligned}$$

最后，对于第三层部分，我们有

$$\begin{aligned}
&P(\rho_3(\mathbf{B}^{H,\lambda;m},\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})>\eta)\\
&\le c\eta^{-\frac{p}{3}}\left[\sum_{n=1}^{m}n^{\gamma}2^n\left(\frac{1}{2^{m(4H-1)}2^{n(1+2H)}}\right)^{\frac{p}{6}}+\sum_{n=m+1}^{\infty}n^{\gamma}2^n\left(C^2_{\frac{1}{2^m}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{2^{3m(1-H)}}{2^{3n}}\right)^{\frac{p}{3}}\right]
\end{aligned}$$

$$\leq c\eta^{-\frac{p}{3}}\frac{1}{2^{m(Hp-\theta-1)}}.$$

□

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 3.6. 除去一个容量为零的 $\mathcal{B}(\Omega)$-可测集外，$\mathbf{B}^{H,\lambda;m}$ 在 p-变差距离 d_p下是柯西序列。特别地，对于几乎所有情况，$B^{H,\lambda}_t$ 的样本路径都可以提升为几何粗糙路径

$$\mathbf{B}^{H,\lambda}_{s,t} = (1, B^{H,\lambda;1}_{s,t}, B^{H,\lambda;2}_{s,t}, B^{H,\lambda;3}_{s,t}), \quad 0 \leq s < t \leq 1,$$

其粗糙度为 p，定义为$\mathbf{B}^{H,\lambda;m}$ 在$\mathbf{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$ 下按 p-变差距离 d_p取样本（几何粗糙）路径的极限。

证明. 由引理 2.3，得

$$\begin{aligned}
&P\left(I(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{3} P\left(\rho_j(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\quad + P\left(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) + \rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\quad + P\left(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) + \rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\quad + P\left(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) + \rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1})) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\leq 3P\left(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{2m\beta}}\right)\\
&\quad + 2P\left(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{2m\beta}}\right)\\
&\quad + P\left(\rho_3(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}}\right)\\
&\quad + 2P\left(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \frac{2^{m\beta}}{2}\right) + 2P\left(\rho_1(\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{2^{m\beta}}{2}\right)\\
&\quad + P\left(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}) > \frac{2^{m\beta}}{2}\right) + P\left(\rho_2(\mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{2^{m\beta}}{2}\right)\\
&\leq c\left[[C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{m(Hp-1-\theta-2\beta p)}} + [C^2_{\frac{1}{2^m}}]^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2^{m(Hp-1-\theta-\frac{\beta p}{2})}} + \frac{1}{2^{m\beta p}}\right],
\end{aligned}$$

其中 $\theta \in (0, Hp-1)$ 是某个固定常数。

如果我们选择 β 使得

$$0 < \beta < \frac{Hp - \theta - 1}{2p},$$

then

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(I(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}} \right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli引理可得

$$P\left(\limsup_{m\to\infty} \left\{ \omega : I(\mathbf{B}^{H,\lambda;m}, \mathbf{B}^{H,\lambda;m+1}) > \frac{1}{2^{m\beta}} \right\} \right) = 0,$$

结论由包含关系 (3.18) 得出。

□

4 存在唯一性定理与解的范数估计

为证明 (1.1) 的解存在唯一性，我们首先引入如下纯粗微分方程

$$dy_t = g(y_t) dB_t^{H,\lambda}, \quad \forall t \in [a,b], y_a \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

特别地，我们首先验证 (4.1) 的解关于其初值的可微性，然后应用 Doss-Sussmann技术 [21] 将原系统 (1.1) 转化为常微分方程。

值得注意的是，通过类似于 [14] 中的论证，可以证明 (4.1) 的解的存在性、唯一性和连续性。因此，此处省略详细证明，重点验证 (4.1) 的解 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 关于初值 y_a 的可微性。为此，我们先给出以下先验估计。

命题4.1。 方程$(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 的解 y_t关于 y_a是一致连续的，也就是说，对于任意两个解 y $(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 和 $\bar{y}(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a)$ ，以下估计成立

$$\|\bar{y} - y\|_{\infty,[a,b]} \le \|\bar{y}_a - y_a\| e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})},$$

and

$$\begin{aligned} &|||\bar{y} - y, R^{(\bar{y}-y)\sharp}, R^{(\bar{y}-y)\sharp\sharp}|||_{p-var,[a,b]} \\ &\le \|\bar{y}_a - y_a\| \bar{N}_{[a,b]}^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})} - \|\bar{y}_a - y_a\|, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中， $|||y, R^{y\sharp}, R^{y\sharp\sharp}|||_{p-var,[s,t]} := |||y|||_{p-var,[s,t]} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-var,[s,t]^2} + |||R^{y\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-var,[s,t]^2}$, $\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})$ 是贪心序列中最大停止时间的最大指标

$$\tau_0 = a, \tau_{k+1} := \inf\left\{t > \tau_k : |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-var,[\tau_k,t]} = \min\left\{\frac{1}{12\Theta_3}, \left(\frac{1}{12\Theta_3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\right\} \wedge b, \quad (4.3)$$

它位于区间 $[a,b]$内，其中 Θ_3 由 (4.46)给出。

证明。 证明分两步进行。

步骤1： 回顾 (2.18)，可知

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_s^t g(y_u) db_u^{H,\lambda} - g(y_s) \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} - [g(y)]'_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} - [g(y)]''_s B_{s,t}^{H,\lambda;3} \right\| \\
&\leq C_\alpha |t-s|^{4\alpha} \Big(|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} |||R^{g(y)\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]^2} + |||R^{g(y)\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]^2} |||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]^2} \\
&\quad + |||[g(y)]''|||_{\alpha,[s,t]} |||B^{H,\lambda;3}|||_{3\alpha,[s,t]^2} \Big). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

由此可知， y 受 $b^{H,\lambda}$ 控制，其中 $y' = g(y)$。根据 (2.13)，我们有

$$\begin{aligned}
g(y_t) - g(y_s) &= \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) y_{s,t} d\eta \\
&= Dg(y_s) y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + Dg(y_s) y''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} \\
&+ \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&+ \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] y''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta \\
&+ \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) R_{s,t}^{y\sharp} d\eta \\
&= Dg(y_s) y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + Dg(y_s) y''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} + D^2 g(y_s)(y'_s)^2 B_{s,t}^{H,\lambda;2} \\
&+ \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] y''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta \\
&+ \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) R_{s,t}^{y\sharp} d\eta \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 D^3 g(y_s + \xi\eta\tau y_{s,t}) \xi\eta y_{s,t} d\tau \eta y_{s,t} d\xi y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&+ \frac{1}{2} D^2 g(y_s) y''_s y'_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) R_{s,t}^{y\sharp} y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1}, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$\int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta\xi y_{s,t}) \eta y_{s,t} d\xi y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [D^2 g(y_s + \xi\eta y_{s,t}) - D^2 g(y_s)] \eta y_{s,t} d\xi y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) y_{s,t} y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [D^2 g(y_s + \xi\eta y_{s,t}) - D^2 g(y_s)] \eta y_{s,t} d\xi y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta + D^2 g(y_s)(y'_s)^2 B_{s,t}^{H,\lambda;2} \\
&\quad + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) y''_s y'_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) R_{s,t}^{y\sharp} y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1}. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

由 (2.13) 可得

$$
\begin{aligned}
R_{s,t}^{g(y)\sharp} &= \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta\xi y_{s,t}) \eta y_{s,t} d\xi y''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) R_{s,t}^{y\sharp} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^1 [D^2 g(y_s + \xi\eta y_{s,t}) - D^2 g(y_s)] \eta y_{s,t} d\xi y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) y''_s y'_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + \frac{1}{2} D^2 g(y_s) R_{s,t}^{y\sharp} y'_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

利用 $y'_s = g(y_s)$ 和 $y''_s = [g(y)]'_s = Dg(y_s)g(y_s)$，我们估计

$$
\begin{aligned}
\|R_{s,t}^{g(y)\sharp}\| &\le C_g^3 \int_0^1 \int_0^1 \eta \|y_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| d\xi d\eta + C_g \int_0^1 \|R_{s,t}^{y\sharp}\| d\eta + \frac{1}{2} C_g^4 \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \\
&\quad + C_g^2 \|y_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + \frac{1}{2} C_g^2 \|R_{s,t}^{y\sharp}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \\
&\le \frac{1}{2} C_g^3 \|y_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + C_g \|R_{s,t}^{y\sharp}\| + \frac{1}{2} C_g^4 \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \\
&\quad + C_g^2 \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \|y_{s,t}\| + \frac{1}{2} C_g^2 |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \|R_{s,t}^{y\sharp}\|. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

结合 H¨older 不等式和闵可夫斯基不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&|||R^{g(y)\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&\le \frac{1}{2} C_g^3 |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + C_g |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ C_g^2 (t-s)^{\frac{2}{p}} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + \frac{1}{2} C_g^4 |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ \frac{1}{2} C_g^2 |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

$$
|||[g(y)]'|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \le 2C_g^2 |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}, \quad \|[g(y)]'\|_{\infty,[s,t]} \le C_g^2. \qquad (4.10)
$$

由于

$$
[g(y_s)]'' = [Dg(y_s)]^2 g(y_s) + D^2 g(y_s)[g(y_s)]^2, \qquad (4.11)
$$

根据闵可夫斯基不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
|||[g(y)]''|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} &\le \left(\sup_{\Pi([s,t])} \sum_{i=1}^{n} \|[Dg(y_{t_{i+1}})]^2 g(y_{t_{i+1}}) - [Dg(y_{t_i})]^2 g(y_{t_i})\|^p \right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\sup_{\Pi([s,t])} \sum_{i=1}^{n} \|D^2 g(y_{t_{i+1}})[g(y_{t_{i+1}})]^2 - D^2 g(y_{t_i})[g(y_{t_i})]^2\|^p \right)^{1/p} \\
&\le 6C_g^3 |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

由 (2.14) 可知

$$
\begin{aligned}
R_{s,t}^{g(y)\sharp\sharp} &= [g(y)]'_t - [g(y)]'_s - [g(y)]''_s B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= Dg(y_t)g(y_t) - Dg(y_s)g(y_s) - [D^2 g(y_s)g^2(y_s) + [Dg(y_s)]^2 g(y_s)] B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= [Dg(y_t) - Dg(y_s)]g(y_t) + Dg(y_s)[g(y_t) - g(y_s)] \\
&\quad - [D^2 g(y_s)g^2(y_s) + [Dg(y_s)]^2 g(y_s)] B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t}) y_{s,t} d\eta g(y_t) + Dg(y_s) \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) y_{s,t} d\eta \\
&\quad - [D^2 g(y_s)g^2(y_s) + [Dg(y_s)]^2 g(y_s)] B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t}) y'_s g(y_t) B_{s,t}^{H,\lambda;1} - D^2 g(y_s) g^2(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t}) (y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta g(y_t) \\
&\quad + \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] Dg(y_s) g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) (y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta Dg(y_s) \\
&= \int_0^1 [D^2 g(y_s + \eta y_{s,t}) - D^2 g(y_s)] g(y_t) g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 D^2 g(y_s) g(y_s) [g(y_t) - g(y_s)] B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t}) (y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta g(y_t) \\
&\quad + \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] Dg(y_s) g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&\quad + \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) (y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta Dg(y_s), \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\|R_{s,t}^{g(y)\sharp\sharp}\| \le 2C_g^3 \|y_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + 2C_g^4 \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + 2C_g^2 \|R_{s,t}^{y\sharp}\|, \qquad (4.14)
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|||R^{g(y)\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \le{}& 2C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ 2C_g^4|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + 2C_g^2|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

根据 (2.21)、(4.9)、(4.12) 和 (4.15)，我们得出如下估计

$$
\begin{aligned}
\|y_{s,t}\| &= \left\| \int_s^t g(y_u) db_u^{H,\lambda} \right\| \\
&\le \|g(y_s)\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + \|[g(y)]'_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + \|[g(y)]''_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;3}\| \\
&+ C_p\Big(|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||R^{g(y)\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||R^{g(y)\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ |||[g(y)]''|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Big) \\
&\le C_p\Big(\frac{1}{2}C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ C_g|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + C_g^2(t-s)^{\frac{2}{p}}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ \frac{1}{2}C_g^4|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2 + \frac{1}{2}C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 2C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 2C_g^4|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}^2 + 2C_g^2|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 6C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Big) \\
&+ C_g|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + 2C_g^3|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

因此，这得出 p-变差范数

$$
\begin{aligned}
&|||y|||_{p-\mathrm{var},\ [s,t]} \\
&\le C_p\Big(\frac{1}{2}C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ C_g|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + C_g^2(t-s)^{\frac{2}{p}}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ \frac{1}{2}C_g^4|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2 + \frac{1}{2}C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]^2}^2|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 2C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 2C_g^4|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}^2 + 2C_g^2|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ 6C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Big)
\end{aligned}
$$

$$+ C_g|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + 2C_g^3|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}. \tag{4.17}$$

结合式 (2.13) 和 (2.21)，可得对于 $R^{y\sharp}$ 的估计

$$\begin{aligned}
&\|R_{s,t}^{y\sharp}\| = \|y_{s,t} - y'_s B_{s,t}^{H,\lambda;1} - y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| \\
&= \left\| \int_s^t g(y_u) db_u^{H,\lambda} - g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} - [g(y)]'_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} \right\| \\
&\le C_p \Bigg(|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{g(y)\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} |||R^{g(y)\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&+ |||[g(y)]''_s|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Bigg) + \|[g(y)]''_s\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;3}\|.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

这意味着 $|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}\ [s,t]^2_<}$ 与 $|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}$ 具有相同的估计。根据（2.13）和（2.14），我们得到

$$\begin{aligned}
R_{s,t}^{y\sharp\sharp} &= g(y_t) - g(y_s) - Dg(y_s)g(y_s)B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) y_{s,t} d\eta - Dg(y_s)g(y_s)B_{s,t}^{H,\lambda;1} \\
&= \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&+ \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) y''_s B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta + \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) R_{s,t}^{y\sharp} d\eta \\
&= \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(y_s + \xi\eta y_{s,t}) \eta y_{s,t} d\xi g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&+ \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) Dg(y_s) g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta + \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t}) R_{s,t}^{y\sharp} d\eta,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

从而

$$\begin{aligned}
|||R^{y\sharp\sharp}\|_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} &\le \frac{1}{2} C_g^2 |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B_{s,t}^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&+ C_g^3 |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + C_g |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

最后，结合（4.17）和（4.20），我们得出

$$\begin{aligned}
&|||y, R^{y\sharp}, R^{y\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \\
&= |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + |||R^{y\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
&\le \Theta(1 + |||y, R^{y\sharp}, R^{y\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中

$$\Theta := \Theta_1(1 + |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \vee |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||^2_{p-\mathrm{var},[s,t]} \vee |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||^3_{p-\mathrm{var},[s,t]}),$$

and

$$\Theta_1 := C_p[2C_g + (5 + 2(b-a)^{\frac{2}{p}})C_g^2 + 17C_g^3 + 5C_g^4] + 2C_g + 3C_g^2 + 5C_g^3.$$

如果 $\Theta \leq \frac{1}{2}$ 或 $|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\text{var},[s,t]} \leq$ 最小值$\{\frac{1}{2\Theta_1} - 1, (\frac{1}{2\Theta_1} - 1)^{\frac{1}{3}}\}$，那么

$$|||y, R^{y^\sharp}, R^{y^{\sharp\sharp}}|||_{p-\text{var},[s,t]} \leq \frac{\Theta}{1-\Theta}. \tag{4.22}$$

通过采用与 [6, 定理 2.4] 中类似的论证，并构造停时贪婪序列 $\left\{\tau_i\left(\min\{\frac{1}{2\Theta_1} - 1, (\frac{1}{2\Theta_1} - 1)^{\frac{1}{3}}\}, \ [a,b], \ p\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$，我们得出

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\infty,[a,b]} &\leq \|y_a\| + \frac{\Theta}{1-\Theta} N_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) \\
&\leq \|y_a\| + \frac{\Theta}{1-\Theta}\left[1 + \left(\min\{\frac{1}{2\Theta_1} - 1, (\frac{1}{2\Theta_1} - 1)^{\frac{1}{3}}\}\right)^{-p} \|\mathbf{B}^{H,\lambda}\|^p_{p-\text{var},[a,b]}\right],
\end{aligned} \tag{4.23}$$

and

$$\begin{aligned}
&|||y, R^{y^\sharp}, R^{y^{\sharp\sharp}}|||_{p-\text{var},[s,t]} \\
&\leq N_{[a,b]}^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) \sum_{k=0}^{N_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})-1} |||y, R^{y^\sharp}, R^{y^{\sharp\sharp}}|||_{p-\text{var},[\tau_k,\tau_{k+1}]} \\
&\leq \frac{\Theta}{1-\Theta} N_{[a,b]}^{\frac{2p-1}{p}}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) \\
&\leq \frac{\Theta}{1-\Theta} 2^{\frac{p-1}{p}}\left[1 + \left(\min\{\frac{1}{2\Theta_1} - 1, (\frac{1}{2\Theta_1} - 1)^{\frac{1}{3}}\}\right)^{1-2p} |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||^{2p-1}_{p-\text{var},[a,b]}\right],
\end{aligned} \tag{4.24}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 (2.23)。

步骤 2： 考虑两个解，分别记为 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 和 $\bar{y}_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a)$，它们$_{2p-1}$均保持在有界范围 $\frac{\Theta}{1-\Theta} N_{[a,b]}^{p}(\mathbf{B}^{H,\lambda})$ 内。差值 $z_t = \bar{y}_t - y_t$ 因而满足粗积分方程

$$z_t = z_a + \int_a^t g(\bar{y}_s) - g(y_s) db_s^{H,\lambda}, \tag{4.25}$$

初值为 $z_a = \bar{y}_a - y_a$。应用 (4.7)，我们得到

$$\begin{aligned}
R_{s,t}^{(g(\bar{y})-g(y))^\sharp} &= \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(\bar{y}_s + \eta\xi\bar{y}_{s,t})\eta\bar{y}_{s,t} d\xi \bar{y}_s'' \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta\xi y_{s,t})\eta y_{s,t} d\xi y_s'' \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} d\eta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 Dg(\bar{y}_s+\eta\bar{y}_{s,t})R^{\bar{y}\sharp}_{s,t}d\eta-\int_0^1 Dg(y_s+\eta y_{s,t})R^{y\sharp}_{s,t}d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1[D^2g(\bar{y}_s+\xi\eta\bar{y}_{s,t})-D^2g(\bar{y}_s)]\eta\bar{y}_{s,t}d\xi\bar{y}'_s\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}d\eta\\
&-\int_0^1\int_0^1[D^2g(y_s+\xi\eta y_{s,t})-D^2g(y_s)]\eta y_{s,t}d\xi y'_s\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}d\eta\\
&+\frac{1}{2}D^2g(\bar{y}_s)\bar{y}''_s\bar{y}'_sB^{H,\lambda;2}_{s,t}\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}-\frac{1}{2}D^2g(y_s)y''_sy'_sB^{H,\lambda;2}_{s,t}\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}\\
&+\frac{1}{2}D^2g(\bar{y}_s)R^{\bar{y}\sharp}_{s,t}\bar{y}'_s\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}-\frac{1}{2}D^2g(y_s)R^{y\sharp}_{s,t}y'_s\otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t}\\
&:=II_1+II_2+II_3+II_4+II_5.
\end{aligned}\tag{4.26}
$$

由 $y'_s=g(y_s)$ 和 $y''_s=[g(y)]'_s=Dg(y_s)g(y_s)$，我们定义 $Q(y_s):=Dg(y_s)g(y_s)$。于是我们有 $\|Q(\bar{y}_s)-Q(y_s)\|\le 2C_g^2\|z_s\|$ 并且

$$
|||Q(\bar{y})-Q(y)|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\le 2C_g^2\left(|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}+||z||_{\infty,[s,t]}|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\right).\tag{4.27}
$$

不难验证，

$$
\begin{aligned}
II_1=&\int_0^1\int_0^1\Big(D^2g(\bar{y}_s+\eta\xi\bar{y}_{s,t})-D^2g(y_s+\eta\xi y_{s,t})\Big)\eta\bar{y}_{s,t}d\xi\bar{y}''_s\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1 D^2g(y_s+\eta\xi y_{s,t})\eta(\bar{y}_{s,t}-y_{s,t})d\xi\bar{y}''_s\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1 D^2g(y_s+\eta\xi y_{s,t})\eta y_{s,t}d\xi(\bar{y}''_s-y''_s)\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta\\
&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 D^3g\Big((y_s+\eta\xi y_{s,t})+\tau((\bar{y}_s+\eta\xi\bar{y}_{s,t})-(y_s+\eta\xi y_{s,t}))\Big)d\tau\\
&\times\Big((\bar{y}_s+\eta\xi\bar{y}_{s,t})-(y_s+\eta\xi y_{s,t})\Big)\eta\bar{y}_{s,t}d\xi Dg(\bar{y}_s)g(\bar{y}_s)\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1 D^2g(y_s+\eta\xi y_{s,t})\eta z_{s,t}d\xi Dg(\bar{y}_s)g(\bar{y}_s)\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta\\
&+\int_0^1\int_0^1 D^2g(y_s+\eta\xi y_{s,t})\eta y_{s,t}d\xi\Big(Dg(\bar{y}_s)g(\bar{y}_s)-Dg(y_s)g(y_s)\Big)\otimes B^{H,\lambda;2}_{s,t}d\eta,
\end{aligned}\tag{4.28}
$$

由此得到估计

$$
\begin{aligned}
II_1\le& C_g^3\left(\frac{1}{2}\|z_s\|+\frac{1}{6}\|z_{s,t}\|\right)\|\bar{y}_{s,t}\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|+\frac{1}{2}C_g^3\|z_{s,t}\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|\\
&+\frac{1}{2}C_g\|y_{s,t}\|\|Q(\bar{y}_s)-Q(y_s)\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|.
\end{aligned}\tag{4.29}
$$

同样地，我们推得

$$
II_2\le C_g\|z_s\|\|R^{\bar{y}\sharp}_{s,t}\|+\frac{1}{2}C_g\|z_{s,t}\|\|R^{\bar{y}\sharp}_{s,t}\|+C_g\|R^{z\sharp}_{s,t}\|,\tag{4.30}
$$

$$II_3 \le C_g^2\|\bar{y}_{s,t}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|z\|_\infty + C_g^2\|y_{s,t}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|z\|_\infty + C_g^2\|z_{s,t}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + \frac{1}{6}C_g^2\|\bar{y}_{s,t}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|z_{s,t}\|, \tag{4.31}$$

$$II_4 \le C_g^4\|z_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + \frac{1}{2}C_g^2\|Q(\bar{y}_s) - Q(y_s)\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|, \tag{4.32}$$

and

$$II_5 \le \frac{1}{2}C_g^2\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|R_{s,t}^{\bar{y}\sharp}\|\|z_s\| + \frac{1}{2}C_g^2\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|R_{s,t}^{z\sharp}\| + \frac{1}{2}C_g^2\|R_{s,t}^{y\sharp}\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\|z_s\|, \tag{4.33}$$

利用（4.26）和（4.29）—（4.33）可得

$$\begin{aligned}
&|||R^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \le C_g^3|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+ \frac{1}{2}C_g^3|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} + C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}||z||_\infty\\
&+ C_g\|z\|_\infty|||R^{\bar{y}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + \frac{1}{2}C_g|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||R^{\bar{y}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + C_g|||R^{z\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+ C_g^2(t-s)^{\frac{2}{p}}|||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}||z||_\infty|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&+ C_g^2(t-s)^{\frac{2}{p}}|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&+ C_g^2(t-s)^{\frac{2}{p}}||z||_\infty|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&+ \frac{1}{6}C_g^2|||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}^2|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&+ C_g^4\|z\|_\infty|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+ 2C_g^4|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}\|z\|_\infty\\
&+ \frac{1}{2}C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||R^{\bar{y}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}\|z\|_\infty\\
&+ \frac{1}{2}C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||R^{z\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+ \frac{C_g^2}{2}|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\|z\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

由（4.13）可知

$$\begin{aligned}
R_{s,t}^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp\sharp} &= \int_0^1 [D^2g(\bar{y}_s + \eta\bar{y}_{s,t}) - D^2g(\bar{y}_s)]g(\bar{y}_t)g(\bar{y}_s)B_{s,t}^{H,\lambda;1}d\eta\\
&\quad - \int_0^1 [D^2g(y_s + \eta y_{s,t}) - D^2g(y_s)]g(y_t)g(y_s)B_{s,t}^{H,\lambda;1}d\eta\\
&\quad + D^2g(\bar{y}_s)g(\bar{y}_s)[g(\bar{y}_t) - g(\bar{y}_s)]B_{s,t}^{H,\lambda;1} - D^2g(y_s)g(y_s)[g(y_t) - g(y_s)]B_{s,t}^{H,\lambda;1}\\
&\quad + \int_0^1 D^2g(\bar{y}_s + \eta\bar{y}_{s,t})(\bar{y}_s'B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{\bar{y}\sharp})d\eta g(\bar{y}_s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t})(y_s'' B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta g(y_s) \\
&+ \int_0^1 [Dg(\bar{y}_s + \eta \bar{y}_{s,t}) - Dg(\bar{y}_s)] Dg(\bar{y}_s) g(\bar{y}_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&- \int_0^1 [Dg(y_s + \eta y_{s,t}) - Dg(y_s)] Dg(y_s) g(y_s) B_{s,t}^{H,\lambda;1} d\eta \\
&+ \int_0^1 Dg(\bar{y}_s + \eta \bar{y}_{s,t})(\bar{y}_s'' B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{\bar{y}\sharp}) d\eta Dg(\bar{y}_s) \\
&- \int_0^1 Dg(y_s + \eta y_{s,t})(y_s'' B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{y\sharp}) d\eta Dg(y_s) \\
&:= II_6 + II_7 + II_8 + II_9 + II_{10}.
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

采用与（4.28）类似的方法，我们估计

$$
II_6 \le 4C_g^3 \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \|z_s\| + 2C_g^3 \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \|z_t\| + \frac{1}{2} C_g^3 \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \|z_{s,t}\| \tag{4.36}
$$

$$
II_7 \le 3C_g^3 \|z_s\| \|\bar{y}_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + C_g^3 \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| z_{s,t}\| (\frac{1}{2} \|\bar{y}_{s,t}\| + 1), \tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
II_8 + II_{10} \le\ & 2C_g^2 (\|z_s\| + \frac{1}{2} \|z_{s,t}\|)(C_g^2 \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + \|R_{s,t}^{\bar{y}\sharp}\|) \\
& + 2C_g^2 (2C_g^2 \|z_s\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + \|R_{s,t}^{(\bar{y}-y)\sharp}\|) + 2C_g^2 (C_g^2 \|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\| + \|R_{s,t}^{y\sharp}\|) \|z_s\|,
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

and

$$
\begin{aligned}
II_9 \le\ & C_g^3 \|\bar{y}_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| (\frac{1}{2} \|z\|_\infty + \frac{1}{6} \|z_{s,t}\|) \\
& + \frac{1}{2} C_g^3 \|z_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| + C_g^3 \|y_{s,t}\| \|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\| \|z\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

因此，我们得出结论：

$$
\begin{aligned}
& |||R^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
& \le 8C_g^3 |||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + 4C_g^3 |||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \|z\|_\infty \\
& + C_g^3 |||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} + 8C_g^4 \|z\|_\infty |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
& + 2C_g^2 \|z\|_\infty |||R^{\bar{y}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + C_g^4 |||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
& + C_g^2 |||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{\bar{y}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} + 2C_g^2 |||R^{z\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\
& + 2C_g^2 |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \|z\|_\infty + C_g^3 |||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} \|z\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

注意,

$$
\begin{aligned}
[g(\bar{y})-g(y)]''_{s,t} = &\Bigg[\bigg(Dg(\bar{y}_t)Dg(\bar{y}_t)g(\bar{y}_t)+D^2g(\bar{y}_t)g^2(\bar{y}_t)\bigg)\\
&-\bigg(Dg(y_t)Dg(y_t)g(y_t)+D^2g(y_t)g^2(y_t)\bigg)\Bigg]\\
&-\Bigg[\bigg(Dg(\bar{y}_s)Dg(\bar{y}_s)g(\bar{y}_s)+D^2g(\bar{y}_s)g^2(\bar{y}_s)\bigg)\\
&-\bigg(Dg(y_s)Dg(y_s)g(y_s)+D^2g(y_s)g^2(y_s)\bigg)\Bigg]. \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

沿用与 (4.28) 类似的论证，我们得到估计

$$
\begin{aligned}
&|||[g(\bar{y})-g(y)]''|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&\le 12C_g^3|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}+6C_g^3\|z\|_\infty(|||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}+|||y|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}). \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

回顾 (2.21)，我们注意到

$$
\begin{aligned}
\|z_{s,t}\| &= \left\|\int_s^t g(\bar{y}_u)-g(y_u)db_u^{H,\lambda}\right\|\\
&\le C_p\Bigg(|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||R^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}|||R^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2}\\
&+|||[g(\bar{y})-g(y)]''|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}|||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2}\Bigg)\\
&+\|g(\bar{y}_s)-g(y_s)\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;1}\|+\|[g(\bar{y})-g(y)]'_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\|+\|[g(\bar{y})-g(y)]''_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;3}\|. \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

将 (4.34)、(4.40) 和 (4.42) 代入 (4.43)，得到

$$
\begin{aligned}
|||z|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} &\le \Theta_2\Big[\|z\|_{\infty,[s,t]}+|||z,R^{z\sharp},R^{z\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\Big]\\
&\le 2\Theta_2\Big[\|z_s\|+|||z,R^{z\sharp},R^{z\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\Big], \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\Theta_2 := \Theta_3(|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\vee|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||^2_{p-\mathrm{var},[s,t]}\vee|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||^3_{p-\mathrm{var},[s,t]}), \qquad (4.45)
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta_3 := MC_p[&C_g+(1+(t-s)^{\frac{2}{p}})C_g^2+C_g^3+C_g^4]\Big[1+|||y,R^{y\sharp},R^{y\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\\
&+|||\bar{y},R^{\bar{y}\sharp},R^{\bar{y}\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}+|||\bar{y},R^{\bar{y}\sharp},R^{\bar{y}\sharp\sharp}|||^2_{p-\mathrm{var},[s,t]}\Big] \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

对于某个正整数 M，且

$$\begin{aligned}&\max\left\{|||y,R^{y\sharp},R^{y\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\vee|||\bar{y},R^{\bar{y}\sharp},R^{\bar{y}\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\right\}\\&\leq\frac{\Theta}{1-\Theta}2^{\frac{p-1}{p}}\left[1+\left(\min\{\frac{1}{2\Theta_1}-1,(\frac{1}{2\Theta_1}-1)^{\frac{1}{3}}\}\right)^{1-2p}|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]}^{2p-1}\right],\end{aligned}$$

由 (4.24) 得。由 (2.13) 和 (2.18) 可知，$\|R^{z\sharp}\|_{q-\mathrm{var},\ [s,t]}$ 满足与 $|||z|||_{p-\mathrm{var},\ [s,t]}$类似的估计。对于 $R^{z\sharp\sharp}$，我们有

$$\begin{aligned}R_{s,t}^{z\sharp\sharp}&=\|z'_{s,t}-z''_sB_{s,t}^{H,\lambda;1}\|=\|(\bar{y}-y)'_{s,t}-(\bar{y}-y)''_sB_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\\&=\|(g(\bar{y})-g(y))_{s,t}-(g(\bar{y})-g(y))'_sB_{s,t}^{H,\lambda;1}\|\\&=\|(g(\bar{y})-g(y))''_sB_{s,t}^{H,\lambda;2}+R_{s,t}^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp}\|\\&\leq\|(g(\bar{y})-g(y))''_s\|\|B_{s,t}^{H,\lambda;2}\|+\|R_{s,t}^{(g(\bar{y})-g(y))\sharp}\|.\end{aligned}\tag{4.47}$$

按照与 (4.41) 类似的论证，我们得到

$$\|(g(\bar{y})-g(y))''_s\|\leq 6C_g^3\|z_s\|,\tag{4.48}$$

结合 (4.34)，可得对 $|||R^{z\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}\ [s,t]^2}$ 的估计。因此，我们得出

$$|||z,R^{z\sharp},R^{z\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\leq 6\Theta_2\left[\|z_s\|+|||z,R^{z\sharp},R^{z\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\right].\tag{4.49}$$

当 $12\Theta_3(|||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||_{p-\mathrm{var},\ [s,t]}\vee|||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||_{p-\mathrm{var},\ [s,t]}^2\vee|||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||_{p-\mathrm{var},\ [s,t]}^3)\leq 1$ 时，则

$$|||z,R^{z\sharp},R^{z\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]}\leq\|z_s\|.\tag{4.50}$$

因此，(4.2) 直接由使用停止时刻 (4.3) 的贪心序列得到，这与 (4.23) 和 (4.24) 类似。特别地，N 可由以下估计

$$\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})\leq 1+\left[\min\left\{\frac{1}{12\Theta_3},\left(\frac{1}{12\Theta_3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}\right]^{-p}|||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]}^{p},\tag{4.51}$$

其中，Θ_3 由（4.46）给出。 □

定理 4.2. 方程 (4.1) 的解 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda},y_a)$ 关于初始条件y_a可微，并且其导数 $\frac{\partial y_t}{\partial y_a}(\mathbf{B}^{H,\lambda},y_a)$ 是线性化粗微分方程的矩阵解 —

$$d\xi_t=Dg(y_t)\xi_t dB^{H,\lambda}\tag{4.52}$$

证明。 证明分若干步进行。

步骤1： 对于 $[a,b]$ 上的一个固定解 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$，我们首先证明线性化粗糙微分方程 (4.52) 的解存在唯一性，其时变系数由 $\Sigma_t := Dg(y_t)$ 给出。为此，我们沿用 Gubinelli 的方法，分析解映射 $H_t = \xi_a + \int_a^t \Sigma_s \xi_s d\mathbf{B}^{H,\lambda}_s$ 在受控路径 ξ_t 的集合 $\mathcal{D}^{2\alpha}([a,b], \xi_a)$ 上的性质，其中初始条件 ξ_a 固定。注意， $\Sigma_t = Dg(y_t)$ 也由 $B^{H,\lambda}$ 控制，其

$$\begin{aligned}\Sigma_t - \Sigma_s &= Dg(y_t) - Dg(y_s)\\ &= \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta y_{s,t})(y'_s B^{H,\lambda;1}_{s,t} + y''_s B^{H,\lambda;2}_{s,t} + R^{y\sharp}_{s,t}) d\eta.\end{aligned}$$

由于

$$\Sigma'_s = D^2 g(y_s) g(y_s),$$

and

$$\Sigma''_s = D^3 g(y_s) g^2(y_s) + D^2 g(y_s) Dg(y_s) g(y_s),$$

根据 (2.13)，我们得到

$$\begin{aligned}\|R^{\Sigma\sharp}_{s,t}\| \le{}& \frac{1}{6} C_g^3 \|y_{s,t}\| \|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\| \|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\| + \frac{1}{4} C_g^4 \|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\| \|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|\\ &+ \frac{1}{2} C_g^2 \|R^{y\sharp}_{s,t}\| \|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\| + \frac{1}{2} C_g^3 \|y_{s,t}\| \|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| + C_g \|R^{y\sharp}_{s,t}\|.\end{aligned}$$

此外， $\Sigma_t \xi_t$ 也由 $B^{H,\lambda}$ 控制，其

$$[\Sigma.\xi.]'_s = \Sigma'_s \xi_s + \Sigma_s \xi'_s,$$

$$[\Sigma.\xi.]''_s = \Sigma''_s \xi_s + 2\Sigma'_s \xi'_s + \Sigma_s \xi''_s,$$

and

$$\begin{aligned}\|R^{(\Sigma\xi)\sharp}_{s,t}\| \le{}& \|\xi_s\| \|R^{\Sigma\sharp}_{s,t}\| + \|\Sigma_s\| \|R^{\xi\sharp}_{s,t}\| + \|R^{\Sigma\sharp}_{s,t}\| \|\xi_{s,t}\|\\ &+ C_g^2 \|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\| (\|\xi''_s\| \|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| + R^{\xi\sharp}_{s,t}) + 2C_g^3 \|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| \|\xi_{s,t}\|.\end{aligned}$$

由 (2.18) 可知，

$$\begin{aligned}&\|H_{s,t} - \Sigma_s \xi_s \otimes B^{H,\lambda;1}_{s,t} - [\Sigma.\xi.]'_s B^{H,\lambda;2}_{s,t} - [\Sigma.\xi.]''_s B^{H,\lambda;3}_{s,t}\|\\ &\le C_\alpha (t-s)^{4\alpha} \Big(|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} |||R^{(\Sigma\xi)\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} + |||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]} |||R^{(\Sigma\xi)\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]}\end{aligned}$$

$$+ |||[\Sigma.\xi.]''|||_{\alpha,[s,t]}|||B^{H,\lambda;3}|||_{3\alpha,[s,t]}\Big),$$

其中

$$\begin{aligned}|||[\Sigma.\xi.]'|||_{\alpha,[s,t]} &\le ||\Sigma'||_\infty|||\xi|||_{\alpha,[s,t]} + |||\Sigma'|||_{\alpha,[s,t]}||\xi||_\infty \\ &\quad + ||\Sigma||_\infty|||\xi'|||_{\alpha,[s,t]} + |||\Sigma|||_{\alpha,[s,t]}||\xi'||_\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||R^{(\Sigma\xi)\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} &\le ||\xi||_\infty|||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} + ||\Sigma||_\infty|||R^{\xi\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} \\ &\quad + C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]}(||\xi''||_\infty|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]} + (t-s)^\alpha|||R^{\xi\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]}) \\ &\quad + 2C_g^3|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]}|||\xi|||_{\alpha,[s,t]} + |||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]}|||\xi|||_{\alpha,[s,t]}(t-s)^\alpha,\end{aligned}$$

$$||\xi'||_\infty \le ||\Sigma||_\infty||\xi_a|| + (t-s)^\alpha|||\xi'|||_{\alpha,[s,t]},$$

$$|||\xi|||_{\alpha,\ [s,t]} \le ||\Sigma||_\infty||\xi_a||||B^{H,\ \lambda;1}|||_{\alpha,\ [s,t]} + \ (t-s)^{\ \alpha}\ (|||B^{H,\ \lambda;1}|||_{\alpha,\ [s,t]} \vee \ (t-s)^{\ \alpha})\ |||\ (\xi,\xi')\ |||_{2\alpha,\ [s,t]},$$

$$|||\xi'|||_{\alpha,[s,t]} \le |||\Sigma|||_{\alpha,[s,t]}||\xi||_\infty + ||\Sigma||_\infty|||\xi|||_{\alpha,[s,t]},$$

$$\begin{aligned}||\xi||_\infty &\le ||\xi_a|| + (t-s)^\alpha(||\Sigma||_\infty||\xi_a||||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} \\ &\quad + (t-s)^\alpha(|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} \vee (t-s)^\alpha)|||(\xi,\xi')|||_{2\alpha,[s,t]}),\end{aligned}$$

$$||\xi''||_\infty \le \|\Sigma'\|_\infty\|\xi\|_\infty + \|\Sigma\|_\infty\|\xi'\|_\infty,$$

and

$$|||\xi'|||_{\alpha,[s,t]} \le ||\xi''||_\infty|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} + |||R^{\xi\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]}(t-s)^\alpha.$$

从而，直接计算表明

$$\begin{aligned}|||R^{(\Sigma\xi)\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} &\le \Bigg[||\xi_a|| + (t-s)^\alpha\Bigg((t-s)^\alpha(|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} \vee (t-s)^\alpha)|||(\xi,\xi',\xi'')|||_{2\alpha,[s,t]} \\ &\quad + \|\Sigma\|_\infty||\xi_a||||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]}\Bigg)\Bigg]|||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} + \|\Sigma\|_\infty|||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} \\ &\quad + C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]}\Bigg[\|\Sigma'\|_\infty\Bigg(||\xi_a|| + (t-s)^\alpha\Bigg(\|\Sigma\|_\infty||\xi_a||||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} \\ &\quad + (t-s)^\alpha(|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} \vee (t-s)^\alpha)|||(\xi,\xi',\xi'')|||_{2\alpha,[s,t]}\Bigg)\Bigg) + \|\Sigma\|_\infty(\|\Sigma\|_\infty||\xi_a|| \\ &\quad + (t-s)^\alpha|||\xi'|||_{\alpha,[s,t]})\Bigg]|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]} + C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]}(t-s)^\alpha|||R^{\xi\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]}\end{aligned}$$

$$+ 2C_g^3|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]}|||\xi|||_{\alpha,[s,t]} + |||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]}|||\xi|||_{\alpha,[s,t]}(t-s)^{\alpha},$$

$$\begin{aligned}|||R^{(\Sigma\xi)\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]} &\le \|\Sigma'\|_\infty(\|\xi''\|_\infty|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]} + (t-s)^\alpha|||R^{\xi\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]})\\ &\quad + (\|\Sigma''\|_\infty|||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]} + |||R^{\Sigma\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]})\|\xi'\|_\infty\\ &\quad + |||\Sigma|||_{\alpha,[s,t]}(\|\xi''\|_\infty|||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]}\\ &\quad + (t-s)^\alpha|||R^{\xi\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]}) + \|\Sigma\|_\infty|||R^{\xi\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||(\Sigma\xi)''|||_{\alpha,[s,t]} &\le |||\Sigma''|||_{\alpha,[s,t]}\|\xi\|_\infty + ||\Sigma''||_\infty|||\xi|||_{\alpha,[s,t]}\\ &\quad + 2|||\Sigma'|||_{\alpha,[s,t]}\|\xi'\|_\infty + 2||\Sigma'||_\infty|||\xi|||_{\alpha,[s,t]}\\ &\quad + |||\Sigma|||_{\alpha,[s,t]}\|\xi''\|_\infty + ||\Sigma||_\infty|||\xi''|||_{\alpha,[s,t]} + ||\Sigma_s|||||\xi''|||_{\alpha,[s,t]},\end{aligned}$$

and

$$||(\Sigma\xi)''||_\infty \le ||\Sigma''||_\infty\|\xi\|_\infty + 2||\Sigma'||_\infty\|\xi'\|_\infty + ||\Sigma||_\infty\|\xi''\|_\infty.$$

因此,

$$||||H'|||_{\alpha,[s,t]} \le ||\Sigma||_\infty|||\xi|||_{\alpha,[s,t]} + ||\xi||_\infty|||\Sigma|||_{\alpha,[s,t]}.$$

注意到

$$R_{s,t}^{H\sharp\sharp} = \Sigma_t\xi_t - \Sigma_s\xi_s - (\Sigma_s'\xi_s + \Sigma_s\xi_s')B_{s,t}^{H,\lambda;1} = (\Sigma_s\xi_s)''B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{(\Sigma\xi)\sharp}.$$

因此，我们得出存在常数

$$M_1 = M_1(\Sigma, [a,b], C_g, B^{H,\lambda;1}, B^{H,\lambda;2}, B^{H,\lambda;3})$$

and

$$M_2 = M_2(\Sigma, [a,b], C_g, B^{H,\lambda;1}, B^{H,\lambda;2}, B^{H,\lambda;3}),$$

使得

$$\begin{aligned}&|||H''|||_{\alpha,[s,t]} + |||R^{H\sharp}|||_{3\alpha,[s,t]} + |||R^{H\sharp\sharp}|||_{2\alpha,[s,t]}\\ &\le M_2\|\xi_\alpha\| + M_1\Big[(t-a)^\alpha + |||B^{H,\lambda;1}|||_{\alpha,[s,t]} + |||B^{H,\lambda;2}|||_{2\alpha,[s,t]}\\ &+ |||B^{H,\lambda;3}|||_{3\alpha,[s,t]}\Big]|||(\xi,\xi',\xi'')|||_{2\alpha,[s,t]}.\end{aligned} \tag{4.53}$$

这意味着，在如（2.22）所示的停时贪婪序列 $[\bar\tau_i, \bar\tau_{i+1}]$ 的每个区间 $\{\bar\tau_i$（$\frac{1}{2M_1}$， I， α）$\}_{i\in\mathbb{N}}$上，解映射都是从该集合到其自身的压缩映射

$$\left\{\mathcal{D}^{2\alpha}([a,b],\xi_a) : |||(\xi,\xi',\xi'')|||_{2\alpha,[\bar\tau_i,\bar\tau_{i+1}]} \le 2M_2\|\xi_{\bar\tau_i}\|\right\}$$

因此，方程（4.52）在每个区间 $[\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_{i+1}]$ 上都存在一个解。由线性性，根据估计（4.53）及 $\|\xi_a - \xi_a\| = 0$ 可得 $\|(\xi - \xi, \xi' - \xi', \xi'' - \xi'')\|_{2\alpha} = 0$，从而证明了解的唯一性。最后，将各区间 $[\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_{i+1}]$ 上的解拼接起来，即可得到方程（4.52）在 $[a, b]$ 上的存在唯一性。

步骤 2： 令 $\Phi(t, B^{H,\lambda}, y_a)$ 表示线性化系统 (4.52) 的解矩阵。则 $\xi_t = \Phi(t, B^{H,\lambda}, y_a)(\bar{y}_a - y_a)$ 是满足初始条件 $\xi_a = \bar{y}_a - y_a$ 的 (4.52) 的解。定义 $r_t := \bar{y}_t - y_t - \xi_t$，则 $r_a = 0$ 且

$$\begin{aligned} r_t &= \int_a^t \int_0^1 \big[Dg(y_s + \eta(\bar{y}_s - y_s)) - Dg(y_s)\big](\bar{y}_s - y_s) d\eta dB_s^{H,\lambda} + \int_a^t Dg(y_s) r_s dB_s^{H,\lambda}, \\ &= e_{a,t} + \int_a^t Dg(y_s) r_s dB_s^{H,\lambda}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

其中

$$e_{a,t} = \int_a^t \int_0^1 \big[Dg(y_s + \eta(\bar{y}_s - y_s)) - Dg(y_s)\big](\bar{y}_s - y_s) d\eta dB_s^{H,\lambda},$$

且 e 也受 $B^{H,\lambda}$ 控制，其中 $e_{a,a} = 0$。我们将估计 $\|r\|_{\infty,[a,b]}$ 和 $\|r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}\|_{p-\mathrm{var},[a,b]}$。注意到

$$\begin{aligned} r_{s,t} &= e_{s,t} + \int_s^t Dg(y_u) r_u dB_u^{H,\lambda} \\ &= e'_s \otimes x_{s,t} + e''_s \otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2} + R_{s,t}^{e\sharp} + \int_s^t Dg(y_u) r_u dB_u^{H,\lambda}. \end{aligned}$$

注意到 $r'_s = e'_s + Dg(y_s) r_s$ 以及

$$\begin{aligned} r''_s = &\int_0^1 \int_0^1 D^3 g(y_s + \eta\xi(\bar{y}_s - y_s))[g(y_s) + \eta\xi(g(\bar{y}_s) - g(y_s))]\eta(\bar{y}_s - y_s)^2 d\xi d\eta \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 D^2 g(y_s + \eta\xi(\bar{y}_s - y_s))\eta(g(\bar{y}_s) - g(y_s))(\bar{y}_s - y_s) d\xi d\eta \\ &+ Dg(y_s) \int_0^1 [Dg(y_s + \eta(\bar{y}_s - y_s)) - Dg(y_s)](\bar{y}_s - y_s) d\eta \\ &+ D^2 g(y_s) g(y_s) r_s + Dg(y_s) g(y_s) r_s, \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} ||R_{s,t}^{r\sharp}|| \le &||R_{s,t}^{e\sharp}|| + \|[Dg(y_s r_s)]''\| |||B_{s,t}^{H,\lambda;3}\| \\ &+ C_p \Big(|||B^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{(Dg(y)r)\sharp}\|_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\ &+ |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]} |||R^{(Dg(y)r)\sharp\sharp}\|_{\frac{p}{2}-\mathrm{var},[s,t]^2} \\ &+ |||(Dg(y)r)''\|_{p-\mathrm{var},[s,t]} |||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var},[s,t]^2} \Big). \end{aligned}$$

容易看出

$$
\begin{aligned}
&\|Dg(y_t)r_t - Dg(y_s)r_s - [Dg(y)r]'_s B^{H,\lambda;1}_{s,t} - [Dg(y)r]''_s B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| \\
&\le \frac{1}{3}C_g^3\|y_{s,t}\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|\|r_s\| + \frac{1}{2}C_g^2(C_g^2\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| + \|R^{y\sharp}_{s,t}\|)\|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\|\|r_s\| \\
&+ \frac{1}{2}C_g^3\|y_{s,t}\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|\|r_s\| + C_g\|R^{y\sharp}_{s,t}\|\|r_s\| + C_g\|R^{r\sharp}_{s,t}\| \\
&+ C_g^2\|B^{H,\lambda;1}_{s,t}\|(\|r''_s\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| + \|R^{r\sharp}_{s,t}\|) + C_g(C_g^2\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\| + \|R^{y\sharp}_{s,t}\|)\|r_{s,t}\| \\
&+ C_g^2\|y_{s,t}\|\|B^{H,\lambda;2}_{s,t}\|\|r'_s\|.
\end{aligned}
$$

此外，我们推导出

$$
\begin{aligned}
&|||R^{(Dg(y)r)\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \\
&\le C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var}}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}}\|r\|_\infty + C_g|||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}\|r\|_\infty + C_g|||R^{r\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \\
&+ \frac{1}{2}C_g^2(C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}})|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}}\|r\|_\infty \\
&+ C_g^2|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}}(\|r'\|_\infty|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{r\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) \\
&+ C_g|||r|||_p(C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) + C_g^2|||y|||_{p-\mathrm{var}}|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}}\|r'\|_\infty,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&|||R^{(Dg(y)r)\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \\
&\le 2C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var}}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}}\|r\|_\infty \\
&+ 2C_g^2\|r\|_\infty(C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) \\
&+ \frac{1}{2}C_g^2|||y|||_{p-\mathrm{var}}|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}}\|r'\|_\infty + C_g^2\|r'\|_\infty(C_g^2|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) \\
&+ 2C_g^2|||y|||_{p-\mathrm{var}}|||r|||_{p-\mathrm{var}} + C_g^2(\|r''\|_\infty|||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{r\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) \\
&+ C_g|||r'|||_{p-\mathrm{var}}|||y|||_p + C_g|||R^{r\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}}.
\end{aligned}
$$

类似地，我们估计得到

$$
\|[Dg(y)r]''\|_\infty \le 2C_g^3\|r\|_\infty + 2C_g^2\|r'\|_\infty + C_g\|r''\|_\infty,
$$

and

$$
\begin{aligned}
|||[Dg(y)r]''|||_{p-\mathrm{var}} &\le 6C_g^3|||y|||_{p-\mathrm{var}}\|r\|_\infty + 2C_g^3|||r|||_{p-\mathrm{var}} + 4C_g^2|||y|||_{p-\mathrm{var}}\|r'\|_\infty \\
&\quad + 2C_g^2|||r'|||_{p-\mathrm{var}} + C_g|||y|||_{p-\mathrm{var}}\|r''\|_\infty + C_g|||r''|||_{p-\mathrm{var}}.
\end{aligned}
$$

结合　上述估计可知，存在一个常数 $M_1 > 1$ 使得　t

$|||R^{r\sharp}|||_{\frac{p}{3}-}$变量 $\le M_1(|||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||_{p-\mathrm{var}} \vee |||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||^2_{p-\mathrm{var}} \vee |||\mathbf{B}^{H,\ \lambda}|||^3_{p-\mathrm{var}})(||r_s|| + |||r,\ \ R^{r\sharp},\ \ R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var}})$

$$+ M_1(\|e'\|_{\infty,[a,b]} + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \|e''\|_{\infty,[a,b]}).$$

同理,

$$|||r|||_p \le \|e'\|_\infty |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} + \|e''\|_\infty |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + C_g\|r\|_\infty |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}},$$

and

$$\begin{aligned}
&|||R^{r\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \\
&\le |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + \|r\|_\infty \Bigg[2C_g^3 |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + \Bigg(\frac{1}{6} C_g^3 |||y|||_{p-\mathrm{var}} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}}^2 \\
&+ \frac{1}{2} C_g^4 |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} |||B^{H,\lambda;1} x|||_{p-\mathrm{var}} + \frac{1}{2} C_g^2 |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} \\
&+ \frac{1}{2} C_g^3 |||y|||_{p-\mathrm{var}} |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + C_g |||R^{y\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \Bigg) \Bigg] + C_g |||y|||_{p-\mathrm{var}} |||r|||_{p-\mathrm{var}} \\
&+ C_g |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} (\|e''\|_\infty + C_g^2\|r\|_\infty + C_g\|e'\|_\infty + C_g^2\|r\|_\infty + C_g |||R^{r\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}).
\end{aligned}$$

因此，我们得出存在一个常数 $M_2 > 1$，使得

$$\begin{aligned}
&|||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var}} \\
&\le M_2(C_g |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var}} \vee C_g^2 |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var}}^2 \vee C_g^3 |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var}}^3)(||r_s|| + |||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var}}) \\
&+ M_2(\|e'\|_\infty + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\text{方差}} + \|e''\|_\infty + |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\text{方差}})。
\end{aligned}$$

当 $M_2 C_g |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var}} \le \frac{1}{2}$ 时，我们有

$$|||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var}} \le ||r_s|| + 2M_2(\|e'\|_\infty + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \|e''\|_\infty + |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}}).$$

通过采用与 (4.23) 和 (4.24) 类似的估计，并利用停时贪婪序列 $\{\tau_k(\frac{1}{2M_2C_g})\}_{k\in N}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|r\|_{\infty,[a,b]} \vee |||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]} \\
&\le N_{\frac{1}{2M_2C_g},[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})^{\frac{p-1}{p}} e^{(\log 2) N_{\frac{1}{2M_2C_g},[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})} \\
&\times \left\{ \|r_a\| + M_2 \left(\|e'\|_{\infty,[a,b]} + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \|e''\|_{\infty,[a,b]} + |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \right) \right\} \\
&\le M_2 \left(\|e'\|_{\infty,[a,b]} + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \|e''\|_{\infty,[a,b]} + |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \right) \\
&\quad \times e^{(1+\log 2) N_{\frac{1}{2M_2C_g},[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})},
\end{aligned} \tag{4.55}$$

其中我们利用了 $r_a = 0$ 这一事实。

步骤 3： 令 $z_s = \bar{y}_s - y_s$，由 (4.54) 可得

$$\begin{aligned} e'_s &= \int_0^1 \big[Dg(y_s + \eta z_s) - Dg(y_s)\big] z_s d\eta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 D^2 g\big((1-\mu\eta)y_s + \mu\eta\bar{y}_s\big)[z_s, z_s]\eta d\mu d\eta = \bar{e}_s, \end{aligned}$$

这也由 $B^{H,\lambda}$控制。因此，$\|e'_s\| \le \frac{1}{2}C_g\|z_s\|^2$ 和

$$\|e'\|_{\infty,[a,b]} \le \frac{1}{2}C_g\|z\|^2_{\infty,[a,b]}, \tag{4.56}$$

$$\|e''\|_{\infty,[a,b]} \le 2C_g^2\|z\|^2_{\infty,[a,b]},$$

and

$$\begin{aligned} |||e'|||_{p-\mathrm{var}} \le C_g\big(|||y|||_{p-\mathrm{var}} \vee |||\bar{y}|||_{p-\mathrm{var}}\big)\|z\|^2_\infty \\ + 2C_g\|z\|_\infty |||z|||_{p-\mathrm{var}}. \end{aligned}$$

另一方面，我们估计

$$\begin{aligned} |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \le \|\bar{e}''\|_\infty |||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + C_g\Big(|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} |||R^{\bar{e}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \\ + |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} |||R^{\bar{e}\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||\bar{e}''|||_{p-\mathrm{var}} |||B^{H,\lambda;3}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \Big). \end{aligned} \tag{4.57}$$

直接计算可得

$$||\bar{e}''||_\infty \le C_g^3\|z\|^2_{\infty,[a,b]} + 6C_g^3\|z\|_{\infty,[a,b]} + 2C_g^3|||z|||_{p-\mathrm{var}},$$

and

$$\begin{aligned} |||R^{\bar{e}\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} \le |||R^{(D^2g)\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}\|z\|^2_{\infty,[a,b]} + \frac{C_g}{2}|||R^{z^2\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \frac{1}{2}C_g^2\Big(|||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} |||z|||^2_{p-\mathrm{var}} \\ + |||B^{H,\lambda;1}|||_{p-\mathrm{var}} |||z|||_{p-\mathrm{var}} (2C_g^2 |||B^{H,\lambda;2}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} + |||R^{z\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}) \Big). \end{aligned}$$

因此，存在一般常数 D，使得

$$\begin{aligned} &||\bar{e}'||_\infty \vee |||\bar{e}, R^{\bar{e}\sharp}, R^{\bar{e}\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]} \\ &\le D(||z||_\infty + ||z'||_\infty + |||z|||_{p-\mathrm{var}} + |||z'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{z\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + |||R^{z\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}})^2 \end{aligned} \tag{4.58}$$

将 (4.56)、(4.57)、(4.58) 代入 (4.55)，并利用 (4.2)，我们得出存在一般常数 $D = D(p, [a,b], |||\mathbf{B}^{H,\lambda}|||_{p-\mathrm{var}})$，使得

$$\|\bar{y}(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a) - y(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a) - \xi(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a - y_a)\|_{\infty,[a,b]} \le D\|\bar{y}_a - y_a\|^2. \tag{4.59}$$

这一点，结合 ξ 关于 $\bar{y}_a - y_a$的线性，表明了 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$关于 y_a的可微性。

□

推论 4.3. 考虑反向粗微分方程

$$h_b = h_t + \int_t^b g(h_u) dB_u^{H,\lambda}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4.60}$$

那么，方程 $(\mathbf{B}^{H,\lambda}, h_b)$ (4.60) 的解 h_t 关于初始条件h_b可微；此外，其导数 $\frac{\partial h_t}{\partial h_b}(\mathbf{B}^{H,\lambda}, h_b)$ 是线性化反向粗微分方程的矩阵解

$$\eta_b = \eta_t + \int_t^b Dg(h_u)\eta_u dB_u^{H,\lambda}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{4.61}$$

反向方程 (4.60)的解 h_t 也满足估计 (4.2) 。

推论 4.4。 记 $\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 为粗方程 (4.1)的解映射。那么，$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 关于 y_a 是全局 *Lipschitz* 连续的。

证明。 由 (4.2) 和 (4.59)，可得

$$\begin{aligned}\|\xi(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a - y_a)\|_{\infty,[a,b]} &\le \|\bar{y}(\mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a) - y(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)\| + D\|\bar{y}_a - y_a\|^2 \\ &\le \|\bar{y}_a - y_a\| e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})} + D\|\bar{y}_a - y_a\|^2.\end{aligned}$$

固定 y_a，将两边除以 $\|\bar{y}_a - y_a\|$，然后令 $\|\bar{y}_a - y_a\|$ 趋于零取极限，得到

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a) \right\|_{\infty,[a,b]} \le e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})},$$

and

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a) \right\|_{p-\mathrm{var},[a,b]} \le \bar{N}_{[a,b]}^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})}. \tag{4.62}$$

类似地，若固定 $\bar{y}_a$ ，则

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a) \right\|_{\infty,[a,b]} \le e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})},$$

and

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a) \right\|_{p-\mathrm{var},[a,b]} \le \bar{N}_{[a,b]}^{\frac{p-1}{p}}(\mathbf{B}^{H,\lambda}) e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})}. \tag{4.63}$$

接下来，对于 $\xi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)\xi_a$ 和 $\bar{\xi}_t = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, \mathbf{B}^{H,\lambda}, \bar{y}_a)\xi_a$，我们考虑它们的差 $r_t = \xi_t - \bar{\xi}_t$，它满足 $r_a = 0$ 且

$$r_{s,t} = \int_s^t \big(Dg(\bar{y}_u)\bar{\xi}_u - Dg(y_u)\xi_u \big) dB_u^{H,\lambda}$$

$$= \int_s^t \big(Dg(\bar{y}_u) - Dg(y_u)\big)\bar{\xi}_u dB_u^{H,\lambda} + \int_s^t Dg(y_u) r_u dB_u^{H,\lambda}$$
$$= e_{s,t} + \int_s^t Dg(y_u) r_u dB_u^{H,\lambda}. \tag{4.64}$$

方程（4.64）的结构与（4.54）相同。因此，运用定理 4.2 的步骤 2 中的论证，我们得到一个类似于（4.55）的估计。准确地说，存在一个常数 M 使得

$$\|r\|_{\infty,[a,b]} \vee |||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]} \le M e^{(1+\log 2)N_{\frac{1}{2MC_g},[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})}$$
$$\times \left(\|e'\|_{\infty,[a,b]} + |||e'|||_{p-\mathrm{var}} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}} + \|e''\|_{\infty,[a,b]} + |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \right), \tag{4.65}$$

这里我们利用了以下事实： $r_a = 0$。由 (4.64)，可得 (4.65) 右端各项的以下估计：

$$e'_s = \big(Dg(\bar{y}_s) - Dg(y_s)\big)\bar{\xi}_s = \int_0^1 D^2 g\big((1-\eta)y_s + \eta\bar{y}_s\big)[z_s, \bar{\xi}_s] d\eta.$$

由 (4.63) 以及定理 4.2 的步骤 3 中导出的估计可知，存在一般常数 $M = M(p,\ [a,b],\ \|\mathbf{B}^{H,\ \lambda}\|_{p-\mathrm{var},\ [a,b]}) > 1$ 使得

$$\|e'\|_{\infty,[a,b]} + \|e''\|_{\infty,[a,b]} + |||e'|||_{p-\mathrm{var},[a,b]} + |||R^{e\sharp}|||_{\frac{p}{3}-\mathrm{var}}$$
$$+ |||R^{e\sharp\sharp}|||_{\frac{p}{2}-\mathrm{var}} \le M(||z_a|| + |||z, R^{z\sharp}, R^{z\sharp\sharp}\|_{p-\mathrm{var},[a,b]}). \tag{4.66}$$

将 (4.66) 代入 (4.65)，可得存在一般常数 $M > 1$ 使得

$$\|r\|_\infty \vee |||r, R^{r\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]} \le M\big(\|z_a\| + |||z, R^{z\sharp}, R^{r\sharp\sharp}|||_{p-\mathrm{var},[a,b]}\big) \le M\|z_a\|, \tag{4.67}$$

其中，最后一个不等式由 (4.2) 得出。这证明了$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,\ \mathbf{B}^{H,\ \lambda},\ y_a)$ 关于 y_a 的全局 Lipschitz 连续性。

□

定理 4.5. 在区间 $[a,b]$ 上，方程 (1.1) 存在一个以y_a为初值的解。

证明. 我们对粗糙积分应用 Doss-Sussmann 变换 [21]，从而将问题归结为证明变换后的系统存在解。证明分为几个步骤：

步骤1. 设 $\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 与 $\psi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda}, h_b)$ 分别表示前向方程 (4.1) 与后向方程 (4.60) 的解映射。则 $\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda}) \circ \psi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda}) =$

$I^{d\times d}$，并且由定理 4.2 和推论 4.3，φ,ψ 分别关于 y_a 和 h_b 连续可微。此外，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},y_a)\frac{\partial\psi}{\partial h}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},y_b)=\frac{\partial\psi}{\partial h}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},y_b)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},y_a)=I^{d\times d}. \tag{4.68}$$

仿照 (4.62) 和 (4.63) 中的论证，我们得到

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial h}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},y_b)\right\|_{\infty,[a,b]}\le e^{(\log 2)\bar{N}_{[a,b]}(\mathbf{B}^{H,\lambda})}. \tag{4.69}$$

现在考虑常微分方程

$$\dot{z}_t=\frac{\partial\psi}{\partial h}\big(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},\varphi(t,B^{H,\lambda},z_t)\big)f\big(\varphi(t,B^{H,\lambda},z_t)\big)=F(t,z_t),\quad t\in[a,b]. \tag{4.70}$$

与推论 4.4 中一样，映射 $\frac{\partial\psi}{\partial h}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z)$ 关于 z 是全局 Lipschitz 连续的。此外，$\varphi(t,x,z)$ 关于 z 也全局 Lipschitz 连续。因此，复合映射 $\frac{\partial\psi}{\partial h}\big(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},\varphi(t,x,z_t)\big)$ 继承了关于 z 的这种全局 Lipschitz 连续性。鉴于 f 也全局 Lipschitz 连续且满足线性增长条件，可知出现在 (4.70) 右端的函数 $F(t,z)$ 局部 Lipschitz 连续，并满足线性增长条件。因此，方程 (4.70) 存在唯一解。

步骤 2。为此，考虑关于 $t\in[a,b]$ 的变换 $y_t=\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_t)$。接下来我们将证明 y_t 满足方程

$$dy_t=f(y_t)dt+g(y_t)dB_t^{H,\lambda}. \tag{4.71}$$

我们首先得到

$$\begin{aligned}y_{s,t}&=\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_t)-\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)+\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)-\varphi(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\\&=\big[\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_t)-\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big]+\int_s^t g\big(\varphi(u,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big)dB_u^{H,\lambda}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

根据 (4.59) 和定理 4.2，方括号中的项满足

$$\begin{aligned}&\big\|\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_t)-\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)-\frac{\partial\varphi}{\partial z}(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)z_{s,t}\big\|\\&\le\big\|\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_t)-\varphi(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)-\frac{\partial\varphi}{\partial z}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)z_{s,t}\big\|\\&\quad+\big\|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(t,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)-\frac{\partial\varphi}{\partial z}(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big\|\|z_{s,t}\|\\&\le D\|z_{s,t}\|^2+\big\|\int_s^t Dg\big(\varphi(u,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial z}(u,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)dx_u\big\|\|z_{s,t}\|\\&\le D(t-s)^{1+\alpha}\end{aligned} \tag{4.73}$$

其中某个常数为 D。另一方面，由 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_s^t g\big(\varphi(u,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big)dB_u^{H,\lambda}\\
&= g\big(\varphi(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big)\otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + [g\big(\varphi(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big]' B_{s,t}^{H,\lambda;2}\\
&+ [g\big(\varphi(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big]'' B_{s,t}^{H,\lambda;3} + D(t-s)^{4\alpha}\\
&= g(y_s)\otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + Dg(y_s)g(y_s)\otimes B_{s,t}^{H,\lambda;2}\\
&+ [D^2g(y_s)g^2(y_s) + Dg(y_s)Dg(y_s)g(y_s)]\otimes B_{s,t}^{H,\lambda;3} D(t-s)^{4\alpha}. \qquad (4.74)
\end{aligned}$$

结合 (4.72)-(4.74)，我们现在可以写出

$$\begin{aligned}
y_{s,t} &= f(y_s)(t-s) + g(y_s)\otimes B_{s,t}^{H,\lambda;1} + Dg(y_s)g(y_s)B_{s,t}^{H,\lambda;2}\\
&\quad + [D^2g(y_s)g^2(y_s) + Dg(y_s)Dg(y_s)g(y_s)]B_{s,t}^{H,\lambda;3} + \mathcal{O}\big((t-s)^{4\alpha}\big). \qquad (4.75)
\end{aligned}$$

方程 (4.75) 表明，y 由驱动路径 $B^{H,\lambda}$控制，其导数为$y'_s = g\big(\varphi(s,\mathbf{B}^{H,\lambda},z_s)\big) = g(y_s)$。因此，$g(y)$也由 $B^{H,\lambda}$控制，其导数对所有 $s\in[a,b]$ 均为 $[g(y)]'_s = Dg(y_s)y'_s = Dg(y_s)g(y_s)$。现在，考虑 $[s,t]$ 的任意有限划分 Π，使其网格大小满足 $|\Pi| = \max_{[u,v]\in\Pi}|v-u| \ll 1$。于是，由 (4.75) 可得

$$\begin{aligned}
y_{s,t} &= \sum_{[u,v]\in\Pi} y_{u,v}\\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi}\Big(g(y_u)\otimes B_{u,v}^{H,\lambda;1} + Dg(y_u)g(y_u)B_{u,v}^{H,\lambda;2} + [D^2g(y_u)g^2(y_u) + Dg(y_u)Dg(y_u)g(y_u)]B_{u,v}^{H,\lambda;3}\Big)\\
&+ \sum_{[u,v]\in\Pi} f(y_u)(v-u) + \sum_{[u,v]\in\Pi}\mathcal{O}\Big((v-u)^{4\alpha}\Big)\\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi}\big(g(y_u)\otimes B_{u,v}^{H,\lambda;1} + Dg(y_u)g(y_u)B_{u,v}^{H,\lambda;2} + [D^2g(y_u)g^2(y_u) + Dg(y_u)Dg(y_u)g(y_u)]B_{u,v}^{H,\lambda;3}\Big)\\
&+ \sum_{[u,v]\in\Pi} f(y_u)(v-u) + \mathcal{O}\big(|\Pi|^{4\alpha-1}\big). \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

令 $|\Pi|\to 0$，则 (4.76) 中的第一项收敛于 $\int_s^t f(y_u)du$，而第二项收敛于 Gubinelli粗积分 $\int_s^t g(y_u)dB^{H,\lambda}$。由此可得

$$y_{s,t} = \int_s^t f(y_u)du + \int_s^t g(y_u)dB_u^{H,\lambda},$$

这就证明了存在性部分。

□

现在我们给出该解的唯一性定理，其证明与 [7] 中的定理 3.9 类似，因此此处省略。

定理 4.6. 解 $y_t(\mathbf{B}^{H,\lambda}, y_a)$ 关于 y_a 一致连续。特别地，关于初始条件 y_a 存在唯一解。

A 附录

Lemma A.1. 假设引理 *2.1* 中的条件成立，则对于 $l > r$，有：

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbb{E}\left(\Delta_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\right)\right]^2 \\
&\quad - \mathbb{E}\left(\Delta_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\right)\mathbb{E}\left(\Delta_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\right) \\
&\leq \frac{c_{H,\lambda}}{2^{(2H+4)m}} + \frac{c_{H,\lambda}}{2^{(4H+2)m}}.
\end{aligned}$$

证明. 由 (2.2) 可知，

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbb{E}\left(\Delta_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\right)\right]^2 \\
&\quad - \mathbb{E}\left(\Delta_{2l-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\right)\mathbb{E}\left(\Delta_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\Delta_{2r-1}^{m+1}B^{H,\lambda}\right) \\
&= \left[C_{\frac{2l-2r+1}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r+1}{2^{m+1}}\right|^{2H} + C_{\frac{2l-2r-1}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r-1}{2^{m+1}}\right|^{2H} - 2C_{\frac{2l-2r}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r}{2^{m+1}}\right|^{2H}\right]^2 \\
&\quad - \left[C_{\frac{2l-2r}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r}{2^{m+1}}\right|^{2H} + C_{\frac{2l-2r-2}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r-2}{2^{m+1}}\right|^{2H} - 2C_{\frac{2l-2r-1}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r-1}{2^{m+1}}\right|^{2H}\right] \\
&\quad \times \left[C_{\frac{2l-2r+2}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r+2}{2^{m+1}}\right|^{2H} + C_{\frac{2l-2r}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r}{2^{m+1}}\right|^{2H} - 2C_{\frac{2l-2r+1}{2^{m+1}}}^2\left|\frac{2l-2r+1}{2^{m+1}}\right|^{2H}\right] \\
&= \left[C_{t+h}^2|t+h|^{2H} + C_{t-h}^2|t-h|^{2H} - 2C_t^2|t|^{2H}\right]^2 \\
&\quad - \left[C_t^2|t|^{2H} + C_{t-2h}^2|t-2h|^{2H} - 2C_{t-h}^2|t-h|^{2H}\right] \\
&\quad \times \left[C_{t+2h}^2|t+2h|^{2H} + C_t^2|t|^{2H} - 2C_{t+h}^2|t+h|^{2H}\right], \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

其中，为简化记号，我们记 $t := \frac{2l-2r}{2^{m+1}}$ 以及 $h := \frac{1}{2^{m+1}}$。利用泰勒展开，我们有

$$\left[C_{t+h}^2|t+h|^{2H} + C_{t-h}^2|t-h|^{2H} - 2C_t^2|t|^{2H}\right]^2$$

$$= \left([C_t^2|t|^{2H}]''\right)^2 h^4 + [C_t^2|t|^{2H}]''[C_t^2|t|^{2H}]^{(4)}\frac{h^6}{6} + \cdots,$$

and

$$\begin{aligned}
&\left[C_t^2|t|^{2H} + C_{t-2h}^2|t-2h|^{2H} - 2C_{t-h}^2|t-h|^{2H}\right] \\
&\quad\times\left[C_{t+2h}^2|t+2h|^{2H} + C_t^2|t|^{2H} - 2C_{t+h}^2|t+h|^{2H}\right] \\
&= \left([C_t^2|t|^{2H}]''\right)^2 h^4 + \left[(1+\frac{1}{6})[C_t^2|t|^{2H}]''[C_t^2|t|^{2H}]^{(4)} - \left([C_t^2|t|^{2H}]^{(3)}\right)^2\right]h^6 + \cdots.
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
&\left[C_{t+h}^2|t+h|^{2H} + C_{t-h}^2|t-h|^{2H} - 2C_t^2|t|^{2H}\right]^2 \\
&\quad - \left[C_t^2|t|^{2H} + C_{t-2h}^2|t-2h|^{2H} - 2C_{t-h}^2|t-h|^{2H}\right] \\
&\quad\times\left[C_{t+2h}^2|t+2h|^{2H} + C_t^2|t|^{2H} - 2C_{t+h}^2|t+h|^{2H}\right] \\
&= \left[\left([C_t^2|t|^{2H}]^{(3)}\right)^2 - [C_t^2|t|^{2H}]''[C_t^2|t|^{2H}]^{(4)}\right]h^6 + \cdots. \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

设 $A := \frac{2\Gamma}{(2H)(2\lambda)^{2H}}$ 且 $D := \frac{2\Gamma}{(H+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}(2\lambda)^H}$，则由 (2.2)，$C_t^2|t|^{2H} = A - Dt^H K_H(\lambda t)$。
令 $z := \lambda t$ 且 $g(z) := z^H K_H(z)$，由此可得

$$\begin{aligned}
&\left([C_t^2|t|^{2H}]^{(3)}\right)^2 - [C_t^2|t|^{2H}]''[C_t^2|t|^{2H}]^{(4)} \\
&= D^2\lambda^{6-2H}\left[[g^{(3)}(z)]^2 - g^{(2)}(z)g^{(4)}(z)\right]. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

根据关系 $\frac{d}{dx}(z^v K_v(z)) = -z^v K_{v-1}(z)$，对于所有 $v \in \mathbb{R}$ 均成立（例如参见 [12] 中的附录），我们可以立即推得

$$g'(z) = -z^H K_{H-1}(z),$$

$$g''(z) = -z^{H-1}K_{H-1}(z) + z^H K_{H-2}(z), \qquad \text{(A.4)}$$

$$g^{(3)}(z) = 3z^{H-1}K_{H-2}(z) - z^H K_{H-3}(z),$$

and

$$g^{(4)}(z) = 3z^{H-2}K_{H-2}(z) - 6z^{H-1}K_{H-3}(z) + z^H K_{H-4}(z).$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&[g^{(3)}(z)]^2 - g^{(2)}(z)g^{(4)}(z) \\
&= 3z^{2H-3}K_{H-1}(z)K_{H-2}(z) + z^{2H-2}(6K_{H-2}^2(z) - 6K_{H-1}(z)K_{H-3}(z)) \\
&\quad + z^{2H-1}K_{H-1}(z)K_{H-4}(z) + z^{2H}(K_{H-3}^2(z) - K_{H-2}(z)K_{H-4}(z)).
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

鉴于对 $v \in \mathbb{R}$ 有 $K_{v-1}(z) = K_{v+1}(z) - \frac{2v}{z}K_v(z)$, 可知

$$
K_{H-2}(z) = K_H(z) - \frac{2(H-1)}{z}K_{H-1}(z), \tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{H-3}(z) &= K_{H-1}(z) - \frac{2(H-2)}{z}K_{H-2}(z) \\
&= \left(1 + \frac{4(H-1)(H-2)}{z^2}\right)K_{H-1}(z) - \frac{2(H-2)}{z}K_H(z),
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{H-4}(z) &= K_{H-2}(z) - \frac{2(H-3)}{z}K_{H-3}(z) \\
&= \left(1 + \frac{4(H-2)(H-3)}{z^2}\right)K_H(z) \\
&\quad - \left(\frac{4H-8}{z} + \frac{8(H-1)(H-2)(H-3)}{z^3}\right)K_{H-1}(z).
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

将 (A.6)-(A.8) 代入 (A.5) 得到

$$
\begin{aligned}
&[g^{(3)}(z)]^2 - g^{(2)}(z)g^{(4)}(z) = \left[-z^{2H} + (4H-2)z^{2H-2}\right]K_H^2(z) \\
&+ \left[(2H-1)z^{2H-1} + (-12H^2+16H-5)z^{2H-3}\right]K_H(z)K_{H-1}(z) \\
&+ \left[z^{2H} + (2-4H)z^{2H-2} + 2(H-1)(2H-1)^2z^{2H-4}\right]K_{H-1}^2(z) \\
&\le \left[z^{2H} + (2-4H)z^{2H-2}\right]K_{H-1}^2(z),
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了条件 $H \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$。结合 (A.2)-(A.3)，可得

$$
\begin{aligned}
&\left[C_{t+h}^2|t+h|^{2H} + C_{t-h}^2|t-h|^{2H} - 2C_t^2|t|^{2H}\right]^2 \\
&- \left[C_t^2|t|^{2H} + C_{t-2h}^2|t-2h|^{2H} - 2C_{t-h}^2|t-h|^{2H}\right] \\
&\times \left[C_{t+2h}^2|t+2h|^{2H} + C_t^2|t|^{2H} - 2C_{t+h}^2|t+h|^{2H}\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq D^2\lambda^{6-2H}\left[z^{2H}+(2-4H)z^{2H-2}\right]K_{H-1}^2(z)h^6 \tag{A.9}$$

其中 $D=\frac{2\Gamma}{(H+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}(2\lambda)^H}$。根据 [22] 中的推论 3.4,

$$K_v(x)<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+1/x)^v}{\sqrt{x+1}}e^{-x},\quad v\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),x\in(0,\infty), \tag{A.10}$$

根据 $z=\lambda t$、$t=\frac{2l-2r}{2^{m+1}}$ 和 $h=\frac{1}{2^{m+1}}$，我们可以看到

$$\begin{aligned}
&D^2\lambda^{6-2H}\left[z^{2H}+(2-4H)z^{2H-2}\right]K_{H-1}^2(z)h^6\\
&\leq\left(\frac{c_{H,\lambda}}{2^{(2H-2)m}}+\frac{c_{H,\lambda}}{2^{(4H-4)m}}\right)\frac{1}{2^{6m}}\\
&=\frac{c_{H,\lambda}}{2^{(2H+4)m}}+\frac{c_{H,\lambda}}{2^{(4H+2)m}}.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

因此，将 (A.11) 代入 (A.9)，并考虑到 (A.1)，即可立即得到该结论。

□

引理 A.2. 假设引理 *2.1* 中的条件成立，则对任意 l、$r\in\left[2^{(m-n)}(k-1)+1,\ 2^{(m-n)}k\right]$,

$$\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)\leq\begin{cases}c_{H,\lambda}|l-r|^{2H-2}\frac{1}{2^{2mH}}, & l\neq r;\\ 2C_{\frac{1}{2^m}}^2\frac{1}{2^{2mH}}, & l=r.\end{cases}$$

证明. 当 $l\neq r$ 时，令 $t:=\frac{2l-2r}{2^{m+1}}$ 和 $h:=\frac{1}{2^{m+1}}$ 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\big)&=C_{t+h}^2|t+h|^{2H}+C_{t-h}^2|t-h|^{2H}-2C_t^2|t|^{2H}\\
&=\left[C_t^2|t|^{2H}\right]''h^2+\left[C_t^2|t|^{2H}\right]^{(4)}\frac{h^4}{12}+\dots.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

记 $D:=\frac{2\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ 2\lambda^{\ H}}$ ( ) 和 $z:=\lambda t$。根据 (A.4) 和 (A.6)，有

$$\begin{aligned}
\left[C_t^2|t|^{2H}\right]''&=D\lambda^{2-H}\left[-z^{H-1}K_{H-1}(z)+z^HK_{H-2}(z)\right]\\
&=D\lambda^{2-H}\left[(1-2H)z^{H-1}K_{H-1}(z)+z^HK_H(z)\right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

由（A.10），$z^{H-1}K_{H-1}(z)\leq cz^{2H-2}$。根据 [22] 中的推论 3.4,

$$K_v(x)<2^{v-1}\Gamma(v)\frac{(1+1/x)^v}{\sqrt{x+1}}e^{-x},\quad v\in\left(0,\tfrac{1}{2}\right),\ x\in(0,\infty), \tag{A.14}$$

则 $z^H K_H(z) \le c z^{H-\frac{1}{2}}$。于是

$$\begin{aligned}\left[C_t^2|t|^{2H}\right]'' h^2 &\le c_{H,\lambda}\left[\left(\frac{|l-r|}{2^{m+1}}\right)^{2H-2}+\left(\frac{|l-r|}{2^{m+1}}\right)^{H-\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{2^{2m}}\\ &\le c_{H,\lambda}|l-r|^{2H-2}\frac{1}{2^{2mH}},\end{aligned} \tag{A.15}$$

因此

$$\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\big) \le c_{H,\lambda}|l-r|^{2H-2}\frac{1}{2^{2mH}}. \tag{A.16}$$

当 $l=r$ 时，很容易看出

$$\mathbb{E}\big(\triangle_{2l}^{m+1}B^{H,\lambda}\triangle_{2r}^{m+1}B^{H,\lambda}\big) = 2C_h^2|h|^{2H} \le 2C_{\frac{1}{2^m}}^2\frac{1}{2^{2mH}}.$$

□

参考文献

[1] B. Boniece, F. Sabzikar, G. Didier，《tempered分数布朗运动：地球物理流中的小波估计与湍流建模》，IEEE统计信号处理研讨会，（2018年），174-178。

[2] Q. Cao, H. Gao，粗糙路径驱动且赫斯特指数为(1/3,1/2)的随机演化方程之随机吸引子的上半连续性，《微分方程杂志》，444（2025年），113552。

[3] T. Cass, C. Litterer, T. Lyons，高斯粗糙微分方程的可积性与尾部估计，《概率年刊》，14（2013年），3026-3050。

[4] N. Cong、L. Duc、P. Hong，重新审视杨微分方程，《动力系统与微分方程杂志》30（2018年），1921-1943。

[5] L. Coutin、Z. Qian，随机分析、粗糙路径分析与分数布朗运动，《概率论及相关领域》122（2002年），108-140。

[6] L. Duc、P. Hong，受控微分方程的渐近稳定性。第一部分：杨积分，arXiv 预印本 arXiv:1905.04945，2019年。

[7]L. Duc，受控微分方程作为粗糙积分，arXiv预印本 arXiv:2007.06295，2020年

[8] L. Due，带粗糙噪声的耗散系统的随机吸引子，《离散与连续动力系统》，42（2022），1873-1902。[9] L. Duc，随机系统的指数稳定性：一种路径方法，《随机动力学》，22（2022），2240012。[10] P. Friz，N. Victoir，作为粗糙路径的多维随机过程：理论与应用，剑桥大学出版社，2010年。[11] J. Gatheral，T. Jaisson，M. Rosenbaum，波动率是粗糙的，《定量金融》，18（2022），933-949。[12] R. Gaunt，修正贝塞尔函数及其积分的不等式，《数学分析与应用杂志》，420（2014），373-386。[13] M. Garrido-Atienza，B. Schmalfu，由赫尔德连续路径驱动的微分方程的局部稳定性，其赫尔德指数 H¨older 属于 (1/3,1/2)，《SIAM应用动力系统杂志》，17（2018），2352-2380。[14] M. Gubinelli，粗糙路径控制，《泛函分析杂志》，216（2004），86-140。[15] T. Lyons，Z. Qian。系统控制与粗糙路径，牛津大学出版社，2002年。[16] T. Lyons，粗糙信号驱动的微分方程，《伊比利亚美洲数学杂志》，14（1998），215-310。[17]T. Lyons，C. Michael，T. L´evy，粗糙路径驱动的微分方程，施普林格，2007年。[18] M. Meerschaert，F. Sabzikar，Tempered分数布朗运动，《统计与概率快报》，83（2013），2269-2275。[19] A. Neamtu，C. Kuehn，粗糙中心流形，《SIAM数学分析杂志》，53（2021），3912-3957。[20] S. Riedel，M. Scheutzow，带无界漂移项的粗糙微分方程，《微分方程杂志》，262（2017），283-312。[21] H. Sussmann，确定性与随机常微分方程之间的差异，《概率年刊》，6（1978），19-41。[22] Z. Yang，S. Zheng，第二类修正贝塞尔函数之比的单调性与凸性及其应用，《美国数学会会刊》，145（2017），2943-2958。

[23] Q. Yang、X.Lin、C.Zeng，粗糙随机偏微分方程的随机吸引子，《微分方程杂志》371（2023），50–82。