©ESO 2026年

arXiv:2603.07679v1 [astro-ph.SR] 8 Mar 2026

磁化介质中的氢光电离：重新审视刚性波函数方法

René D. Rohrmann

[1] 天文、地球与空间科学研究所（ICATE，CONICET-UNSJ），邮政信箱 467，5400，阿根廷圣胡安[2] 精确、物理与自然科学学院（FCEFN，UNSJ），伊格纳西奥·德拉罗萨大道 590（O），J5402DCS阿根廷圣胡安

2026年3月10日

摘要

对恒星光谱进行真实建模需要准确的辐射不透明度系数。由于严格量子力学计算所得现有数据具有零散性，基于刚性波函数近似的光电离系数仍是研究磁白矮星的唯一可行选择。尽管该方法的各种变体数十年来已广泛用于光谱分析，但此前尚未给出对简并能级分裂的完整而明确的处理。在本工作中，我们对该过程给出全面描述，其中包括单个束缚-自由跃迁的光电离概率作为磁场强度与辐射偏振函数的显式表达式。我们还评估了电离平衡条件下磁化气体中束缚态的占据数，从而能够计算绝对光电离不透明度。由于高激发原子态受到磁场的强烈扰动并最终溶解，即使在低于10兆高斯的磁场下，单色吸收也会发生显著改变——在这一范围内，完全严格的量子计算在数值上要求很高，且尚未得到应用。在很宽的磁场强度范围内，氢连续吸收中会出现显著的二向色特征。

关键词。 原子过程 — 磁场 — 不透明度 — 恒星：大气 — 白矮星

1。引言

M磁白矮星表面的磁场
(磁白矮星）的磁场强度据报道约为0^{-2}–10^{3} （1 兆高斯 = 10^{6} 高斯）。这类磁
l场会显著影响
t气体的物理性质，以及
s恒星大气中能量的传输——恒星大气通常由纯氢构成——并
t恒星发出的辐射分布。许多
s研究考察了原子在
t这种强度的磁场存在下。

氢光电离的近似处理在
m磁化光球中的处理最初由 Lamb 与
SSutherland（1972，1974）针对弱磁场提出，假设线性 Zee-
man理论。在20世纪80年代，对……进行了详细的理论评估
b束缚–自由跃迁是针对极高磁……开展的
fi磁场强度（上限 10^{3} 兆高斯），略微超出该范围
o目前已知磁白矮星的（Greene 1983；Bhattacharya & Chu 985）。随后，
l基于……的数量有限的研究
f 已有充分的量子力学方法被发表，报告了磁场强度高于 10 MG（Wang & Greene 1991）和 20 MG（Alijah 等人 1990；Delande 等人 1991；Merani 等人 1995；Meinhardt 等人 1999；Zhao & Stancil 2007；Zhao 2021）时的氢光电离截面。[1] 对于磁白矮星，在较低磁场强度下的严谨计算仍然缺乏，部分原因是相关技术难题比高磁场区域更为复杂（Mota-Furtado & O'Mahony 2007）。

图 1 显示了在 1–10^{3} MG 范围内，磁场强度高于给定值 B的已知磁白矮星所占的比例，该结果基于包含 804 个天体的样本——这是迄今为止已测得磁场的磁白矮星最大汇编（Amorim 等人 2023）。全量子力学的束缚–自由吸收计算主要针对高度磁化天体的典型条件，而这类天体仅占目前已知磁白矮星的一小部分（10%–20%）。鉴于采用此类方法研究的跃迁数量通常至多只有几十个，且覆盖的光子能量范围有限，这一情况更加严峻。对于光谱建模所需不透明度的定量描述而言，这远远不够。磁场会打破电子态的简并，并引入二向色性，即截面依赖于光子偏振。因此，使用模型大气计算合成光谱，需要数百到数千个跃迁的截面数据。迄今为止，利用严谨量子力学技术获得的稀疏数据，还无法完整分析任何一个磁场白矮星光谱。此外，由于预计恒星圆盘上的磁场并不均匀，因此还需要在较宽的光子频率范围内，并针对磁场强度的精细网格提供截面。

因此，Lamb & Sutherland（1972，1974）提出的方法仍是唯一能够为磁性白矮星模型大气提供光电离截面的方法。其理论依赖于一项关键近似：假定束缚态和自由态电子波函数在重叠的小区域内不受磁场影响，因此控制辐射跃迁的矩阵元也不受影响。这种方法称为刚性波函数近似（RWA）。光电离截面还取决于跃迁能量，而磁场会通过改变初态和末态电子本征能量，使跃迁能量发生变化

[1] 其他研究聚焦于中子星表面强磁场中的光吸收（例如，Gnedin 等人 1974；Schmidt 等人 1981；Potekhin & Pavlov 1997）。这些工作通常采用专门的波函数基组来表示能量本征函数，而这些基组并不十分适用于……所特有的磁场强度

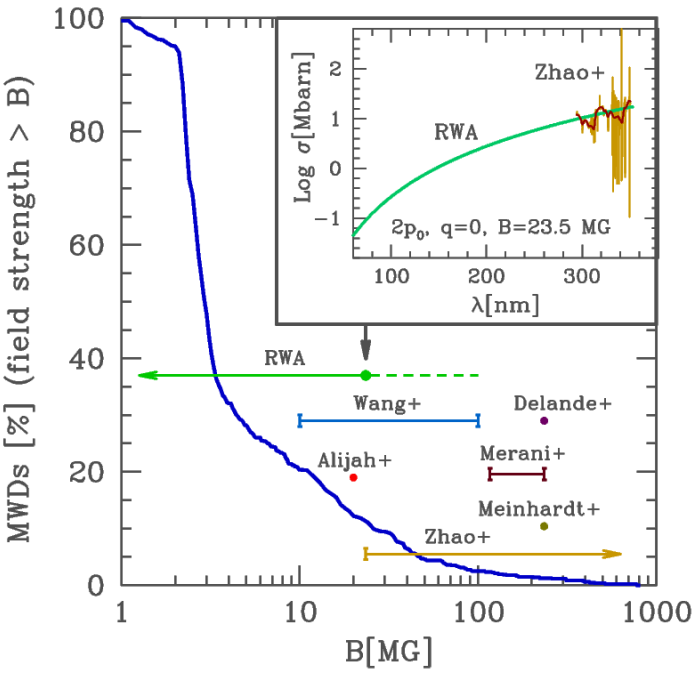

图 1. 已知平均磁场强度高于磁场 的磁白矮星累积分布（百分比）（粗蓝线）。图中标出了光电离研究所涉及的磁场强度范围。插图显示了采用完整量子力学方法计算的截面（Zhao & Stancil 2007）以及 RWA 方法所得结果（见正文）。深色曲线表示对 Zhao & Stancil 的计算结果进行高斯卷积后的结果，半高全宽为 3.5 nm（$\approx 10^{-3}$ Ry）。

具体而言，磁场会使初态和末态电子本征能量发生位移和分裂。在最初的表述中，Lamb & Sutherland 仅考虑了由线性塞曼理论描述的束缚能级位移。后来，Jordan（1989）指出，磁化氢的光吸收谱存在多个吸收边，它们分别对应不同的初态和连续态阈值。随着更精确的原子数据陆续问世，基于 RWA 的计算也纳入了更准确的束缚态能量。然而，尽管这一完整流程已用于多个旨在模拟磁白矮星大气的数值代码中（Martin & Wickramasinghe 1986；Jordan 1992；Putney & Jordan 1995；Wickramasinghe & Ferrario 2000；Euchner 等人 2002；Vera-Rueda & Rohrmann 2024），其具体步骤却从未得到明确阐述。

尽管 RWA 仅在零场极限下严格成立，但事实证明，它是一种可靠的经验方法，可用于求得中等磁场强度下的平均光电离截面（Rohrmann 2025）。图 1 的插图将 RWA 的预测与 Zhao & Stancil （2007）针对该研究所考虑的最低磁场强度下某一特定跃迁所做的详细计算进行了比较。两种结果的主要差异源于完整量子力学处理所显示的丰富共振结构。然而，在磁白矮星大气中，预计恒星表面各处的磁场变化会将这些共振抹平，使其形成平滑的连续谱（Wickramasinghe 1995）。如图 1 所示，对于由线偏振光子（$q = 0$）吸收所诱导的、从 $2p_0$ 态出发的跃迁，RWA 能够再现完整理论的平均行为；此时磁场 = 23.5 兆高斯，磁场强度远超线性塞曼区。

本文旨在全面评估使用 RWA 得到的氢原子光电离不透明度。此目标主要出于两方面的考虑：

首先，RWA 目前是唯一能够获得完整光电离截面集的方法，可用于模拟磁场强度范围广泛的磁白矮星光谱。其次，RWA 的完整实现——包括对部分截面进行加权求和，这些截面取决于光的偏振以及光致电离分支比（即电离至特定末态的相对概率）——从未得到过明确详述。此外，我们还确定了磁化氢气体的电离平衡，并计算了推导绝对光电离不透明度所需的束缚态占据数。

以下各节将介绍在电偶极近似下使用 RWA 光电离计算绝对不透明度所涉及的关键要素。第 2 节介绍如何将截面分解为多个分量，并利用维格纳-埃卡特定理简洁地表示其统计权重。第 3 节通过对束缚-束缚振子强度进行解析延拓，求得分支比。第 4 节说明如何计算部分电离氢气中电子的本征能量、连续阈位移以及初始态的占据数，并将它们表示为磁场强度的函数。第 5 节讨论结果，第 6 节总结全文。

2. 部分光致电离截面

在电偶极近似下，单电子体系的吸收截面与光子能量 $\mathcal{E}$ 以及跃迁矩阵元模的平方成正比，

$$\sigma^{q}_{nlm,kl'm'} = \mathrm{cte}\ \mathcal{E}|\langle nlm|\mathbf{r}.\mathbf{e}_q|kl'm'\rangle|^2. \quad (1)$$

这里，$|nlm\rangle$ 和 $|kl'm'\rangle$ 分别表示初始（束缚）和最终（电离）原子态，其由主量子数（n）、准主量子数（k）、轨道量子数（l、l'）和磁量子数（m、m'）表征。矢量$\mathbf{r}$ 为电子位置算符，$\mathbf{e}_q$ 为光子的单位偏振矢量，

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{e}_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y\right), \quad (2)$$

其中 $\hbar q$ 是光子所携带的角动量的z 分量，其中 $q = 0, \pm\kappa$ ($\kappa = 1$)。如式（2）所示，$q = 0$ 对应于线偏振辐射（平行于z轴），而 $q = \pm1$ 对应于xy平面内的右旋（+）或左旋（–）圆偏振辐射。这些跃迁通常分别称为 π、σ^+ 和 σ^-。

对于无场原子，式（1）中的矩阵元可以利用精确的非相对论波函数求得：$\langle\mathbf{r}|nlm\rangle = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ 和 $\langle\mathbf{r}|kl'm'\rangle = R_{kl'}(r)Y_{l'm'}(\theta,\phi)$，它们依赖于极坐标（$r$、$\theta$、$\phi$）（Stobbe 1930；Bethe & Salpeter 1957）。或者，也可以利用 Wigner-Eckart 定理来表示该矩阵元，

$$\left\langle nlm\left|\mathbf{r}.\mathbf{e}_q\right|kl'm'\right\rangle = (-1)^{l-m}\begin{pmatrix} l & \kappa & l' \\ -m & q & m' \end{pmatrix}\langle nl\,\|r\|\,kl'\rangle, \quad (3)$$

其中对角度自由度的积分已经完成。截面，

$$\sigma^{q}_{nlm,kl'm'} = \mathrm{cte}\ \mathcal{E}\mathcal{W}^{l,\kappa,l'}_{m,q,m'}|\langle nl\|r\|kl'\rangle|^2, \quad (4)$$

因此取决于约化矩阵元 $|\langle nl\|r\|kl'\rangle|$ 以及 Wigner 3j 系数的平方，

$$\mathcal{W}^{l,\kappa,l'}_{m,q,m'} \equiv \begin{pmatrix} l & \kappa & l' \\ m & q & -m' \end{pmatrix}^2. \quad (5)$$

当前跃迁所关注的数值如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l+1}_{m,\,-1,\,m-1} &= \frac{(l-m+2)(l-m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)},\\
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l+1}_{m,\,0,\,m} &= \frac{(l+1)^2-m^2}{(l+1)(2l+1)(2l+3)},\\
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l+1}_{m,\,1,\,m+1} &= \frac{(l+m+2)(l+m+1)}{2(l+1)(2l+1)(2l+3)},\\
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l-1}_{m,\,-1,\,m-1} &= \frac{(l+m)(l+m-1)}{2l(2l+1)(2l-1)},\\
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l-1}_{m,\,0,\,m} &= \frac{l^2-m^2}{l(2l+1)(2l-1)},\\
\mathcal{W}^{l,\,1,\,l-1}_{m,\,1,\,m+1} &= \frac{(l-m)(l-m-1)}{2l(2l+1)(2l-1)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

电偶极跃迁的选择定则可通过直接计算式 (1) 得出，也可根据 Wigner 3j 系数的性质推知，具体如下：

$$l'-l=\pm\kappa=\pm1,\qquad m'-m=q=0,\pm1. \tag{7}$$

非取向原子的截面通过对初态取向的简并（即对m 值）取平均，并对末态的简并（$-l'\le m'\le l'$）求和得到，

$$\sigma_{nl,kl'}=\frac{1}{2l+1}\sum_{mm'}\sigma^{q}_{nlm,kl'm'}=\mathrm{cte}\frac{\mathcal{E}}{3(2l+1)}|\langle nl\|\mathbf{r}\|kl'\rangle|^2, \tag{8}$$

where，最终等式由求和 pr 得出 operty

$$\sum_{m,m'}\mathcal{W}^{l,\,\kappa,\,l'}_{m,\,q,\,m'}=\frac{1}{2\kappa+1}=\frac{1}{3}. \tag{9}$$

将式（4）与式（8）相结合，可得

$$\sigma^{q}_{nlm,kl'm'}=3(2l+1)\mathcal{W}^{l,\,\kappa,\,l'}_{m,\,q,\,m'}\sigma_{nl,kl'}. \tag{10}$$

我们将$\xi_{nl,kl'}$ 定义为光电离跃迁$nl\ \to kl'$的分支比，即从给定束缚子能级（nl）跃迁至特定连续谱通道（kl'）的光电离数目与所有起始于能级n的光电离数目之比。用截面表示为，

$$\sigma_{nl,kl'}=\xi_{nl,kl'}\sigma_{n,k}, \tag{11}$$

with

$$\sigma_{n,k}=\frac{1}{n^2}\sum_{ll'}(2l+1)\sigma_{nl,kl'}. \tag{12}$$

方程（10）和（11）允许将初态nlm 的总截面表示为所有允许的电偶极跃迁（$l'=l\pm1$）以及特定光子偏振q（$m'=m+q$）下的形式：

$$\sigma^{q}_{nlm,k}=3(2l+1)\left[\mathcal{W}^{l,\,\kappa,\,l+1}_{m,\,q,\,m+q}\xi_{nl,k(l+1)}+\mathcal{W}^{l,\,\kappa,\,l-1}_{m,\,q,\,m+q}\xi_{nl,k(l-1)}\right]\sigma_{n,k}, \tag{13}$$

这是通过应用方程（7）中给出的选择定则，并对连续谱中所有可及子能级求和而得到的，

$$\sigma^{q}_{nlm,k}=\sum_{l'm'}\sigma^{q}_{nlm,kl'm'}. \tag{14}$$

表 1。跃迁权重$A^{q}{}_{lm}$[方程（16）]。负m 的数值由方程（19）中给出的对称关系得到。

q	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
				($l=0$)			
−1	1						
0	1						
+1	1						
				($l=1$)			
−1	9/10	3/10					
0	6/5	9/10					
+1	9/10	9/5					
				($l=2$)			
−1	6/7	3/7	1/7				
0	9/7	8/7	5/7				
+1	6/7	10/7	15/7				
				($l=3$)			
−1	5/6	1/2	1/4	1/12			
0	4/3	5/4	1	7/12			
+1	5/6	5/4	7/4	7/3			
				($l=4$)			
−1	9/11	6/11	18/55	9/55	3/55		
0	15/11	72/55	63/55	48/55	27/55		
+1	9/11	63/55	84/55	108/55	27/11		
				($l=5$)			
−1	21/26	15/26	5/13	3/13	3/26	1/26	
0	18/13	35/26	16/13	27/26	10/13	11/26	
+1	21/26	14/13	18/13	45/26	55/26	33/13	
				($l=6$)			
−1	4/5	3/5	3/7	2/7	6/35	3/35	1/35
0	7/5	48/35	9/7	8/7	33/35	24/35	13/35
+1	4/5	36/35	9/7	11/7	66/35	78/35	13/5

2.1. 几何因素和物理因素的规则

方程（13）可以改写为

$$\sigma^{q}_{nlm,k}=\left[A^{q}_{lm}\xi_{nl,k(l+1)}+B^{q}_{lm}\xi_{nl,k(l-1)}\right]\sigma_{n,k}, \tag{15}$$

表 2。跃迁权重 磁场$^{q}{}_{lm}$[方程（17）]。负m 的数值由方程（19）中给出的对称关系得到。注意，磁场$^{q}_{00}\equiv0\ \forall q$。

q	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
				($l=1$)			
−1	0	3					
0	3	0					
+1	0	0					
				($l=2$)			
−1	1/2	3/2	3				
0	2	3/2	0				
+1	1/2	0	0				
				($l=3$)			
−1	3/5	6/5	2	3			
0	9/5	8/5	1	0			
+1	3/5	1/5	0	0			
				($l=4$)			
−1	9/14	15/14	45/28	9/4	3		
0	12/7	45/28	9/7	3/4	0		
+1	9/14	9/28	3/28	0	0		
				($l=5$)			
−1	2/3	1	7/5	28/15	12/5	3	
0	5/3	8/5	7/5	16/15	3/5	0	
+1	2/3	2/5	1/5	1/15	0	0	
				($l=6$)			
−1	15/22	21/22	14/11	18/11	45/22	5/2	3
0	18/11	35/22	16/11	27/22	10/11	1/2	0
+1	15/22	5/11	3/11	3/22	1/22	0	0

with

$$A^{q}_{lm} \equiv 3(2l+1)\mathcal{W}^{\,l,\,\kappa,\,l+1}_{m,\,q,\,m+q}, \tag{16}$$

$$B^{q}_{lm} \equiv 3(2l+1)\mathcal{W}^{\,l,\,\kappa,\,l-1}_{m,\,q,\,m+q}. \tag{17}$$

方程（15）概括了维格纳–埃卡特定理引入的分离：几何贡献包含在系数 $A^{q}{}_{lm}$ 和磁场$^{q}{}_{lm}$中，而物理贡献则由分支比 $\xi_{nl,\ kl'}$ 和总截面$\sigma_{n,\ k}$表示。由于对称性

$$\mathcal{W}^{\,l,\,\kappa,\,l'}_{-m,\,-q,\,-m'} = \mathcal{W}^{\,l,\,\kappa,\,l'}_{m,\,q,\,m'}, \tag{18}$$

系数 A 和磁场在指标q和m同时变号时满足以下关系：

$$A^{-q}_{l,-m} = A^{+q}_{l,+m}, \qquad B^{-q}_{l,-m} = B^{+q}_{l,+m}. \tag{19}$$

根据 Wigner 3j 符号的性质，还可推出

$$\sum_{q} A^{q}_{lm} = \sum_{q} B^{q}_{lm} = 2\kappa + 1 = 3, \qquad \forall (l,m), \tag{20}$$

and

$$\sum_{m} A^{q}_{lm} = \sum_{m} B^{q}_{lm} = 2l + 1, \qquad \forall (l,q). \tag{21}$$

表 1 和表 2 分别列出了系数 $A^{q}{}_{lm}$ 和 磁场$^{q}{}_{lm}$ 的一些数值。跃迁权重 $A^{q}{}_{lm}$ 随m 增大而增加，对于$q = +1$ 则随之减小，而系数磁场$^{q}{}_{lm}$ 则表现出相反的变化。这反映了轨道角动量的新z分量的允许取值数量，即在跃迁过程中（$l \to l \pm 1$），$(m' = m + q)$发生变化时的情况。

另一方面，根据公式 (14) 以及公式 (7) 中给出的选择定则，公式 (11) 所定义的分支比满足

$$\frac{1}{n^2}\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)\left(\xi_{nl,n'l-1} + \xi_{nl,n'l+1}\right) = 1. \tag{22}$$

3. 分支比

为计算分支比 [式 (11)]，，部分截面 $\sigma_{nl,kl'}$ 可以方便地用振子强度表示（Bethe & Salpeter 1957；Burgess 1965），

$$\sigma_{nl,kl'} = 4\pi^2 \alpha a_0^2 \frac{df_{nl,kl'}}{d\mathcal{E}}, \tag{23}$$

其中，$\alpha = e^2/(\hbar c)$ 是精细结构常数，$a_0 = \hbar^2/(e^2 m_e)$ 是玻尔半径，而 $df_{nl,kl'}/d\mathcal{E}$ 是连续谱中的振子强度密度。这里，$\mathcal{E}$ 以里德伯为单位。Menzel 与 Pekeris（1935）提出的解析延拓方法为求得振子强度密度提供了一种便捷方法。该方法表明，离散态之间跃迁（从nl 到 $n'l'$）的振子强度$f_{nl,\ n'l'}$ 可以按下式延拓至连续谱

$$\frac{df_{nl,kl'}}{d\mathcal{E}} = \left[\frac{dn'}{d\mathcal{E}} f_{nl,n'l'}\right]_{n'=ik} = \left[\frac{n'^3}{2} f_{nl,n'l'}\right]_{n'=ik}, \tag{24}$$

表 3. 式 (31) 给出的多项式 $Q_{nl,kl'}(k)$，对应 $1 \le n \le 5$。

荷兰-克洛′	$Q_{nl,\ kl'}(k)$
1s-kp	1
2s-kp	$16\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)$
2p-kd	$128k^2\left(1+k^2\right)/9$
2p-ks	$4k^2\left(4+k^2\right)/9$
3s-kp	$9\left(1+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(27+7k^2\right)^2$
3p-kd	$432k^2\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)$
3d-kf	$7776k^4\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)/25$
3p-千秒复态另类	$24k^2\left(3+k^2\right)^2\left(9+k^2\right)$
3d-kp	$144千^4\left(1+千^2\right)\left(9+千^2\right)/25$
4s-kp	$256\left(1+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(768+288k^2+23k^4\right)^2/9$
4p-kd	$8192k^2\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(80+9k^2\right)^2/45$
4d-kf	$1048576k^4\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)/75$
4f-kg	$16777216k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)/2205$
4p-ks	$16k^2\left(16+k^2\right)\left(1280+608k^2+57k^4\right)^2/45$
4d-kp	$2048k^4\left(1+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(48+7k^2\right)^2/225$
4f-kd	$65536k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(16+k^2\right)/735$
5s-kp	$625\left(1+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(46875+20625k^2+2545k^4+91k^6\right)^2/9$
5p-kd	$10^4k^2\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(9375+1650k^2+67k^4\right)^2/81$
5d-kf	$10^5k^4\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(175+11k^2\right)^2/21$
5f-kg	$2\times10^8k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)/441$
5g-kh	$10^9k^8\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)/5103$
5p-ks	$200k^2\left(25+k^2\right)\left(46875+25875k^2+3725k^4+149k^6\right)^2/81$
5d-kp	$2000k^4\left(1+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(2625+590k^2+29k^4\right)^2/63$
5f-kd	$320000k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(25+2k^2\right)^2/147$
5g-kf	$8\times10^6k^8\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(25+k^2\right)/5103$

子能级 nl、$n'l'$ 和 kl' 的能量由下式给出

$$\mathcal{E}_n = -n^{-2}, \qquad \mathcal{E}_{n'} = -n'^{-2}, \qquad \mathcal{E}_k = k^{-2}. \tag{25}$$

公式（24）涉及将跃迁能量$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n'} - \mathcal{E}_n$ 外推至连续态区域（$\mathcal{E} > -\mathcal{E}_n$，即高于来自能级$n$的电离阈值），并作如下认定

$$n' = ik, \qquad n'^2 = -k^2. \tag{26}$$

Menzel-Pekeris 方法的形式证明由 Grant（1958）在自由-自由跃迁的背景下给出。

从下态 nl 到上态$n'l'$ 的振子强度由下式给出（Bethe & Salpeter 1957）

$$f_{nl,n'l'} = \frac{l_>}{3(2l+1)}\mathcal{E}_{nl,n'l'}\left[\int_0^\infty \frac{r^3}{a_0} R_{n'l'}(r) R_{nl}(r)\,dr\right]^2, \tag{27}$$

其中$l_>$ 表示l 和l'中的较大者，$\mathcal{E}_{nl,n'l'}$ 为跃迁能量，而$R_{nl}(r)$ 是nl 态的归一化径向波函数，

$$R_{nl}(r) = \frac{2}{n^2 a_0^{3/2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}\right)^{1/2}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) L^{2l+1}_{n-l-1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right), \tag{28}$$

表 4. 多项式 $Q_{nl,\,kl'}(k)$由方程（31）给出，其中 $n = 6$、7。

nl-kl'	$Q_{nl,\,kl'}(k)$
6*s*-*kp*	$36\left(1+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(50388480+24261120k^2+3654720k^4+211104k^6+4046k^8\right)^2/25$
6*p*-*kd*	$384k^2\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(4898880+1061424k^2+70092k^4+1425k^6\right)^2/35$
6*d*-*kf*	$2^{15}3^5k^4\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(9072+936k^2+23k^4\right)^2/175$
6*f*-千克	$2^{17}3^5k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(324+13k^2\right)^2/245$
6克-*kh*	$2^{21}3^5k^8\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(36+k^2\right)/35$
6小时-*ki*	$2^{24}3^8k^{10}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)/21175$
6*p*-*ks*	$12k^2\left(36+k^2\right)\left(19595520+11757312k^2+2057184k^4+132528k^6+2761k^8\right)^2/35$
6*d*-千电子伏	$2^{10}3^2k^4\left(1+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(326592+89424k^2+7092k^4+167k^6\right)^2/175$
6*f*-*kd*	$2^{13}3^6k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(1296+168k^2+5k^4\right)^2/245$
6*g*-*kf*	$2^{17}3^5k^8\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(20+k^2\right)^2/175$
6*h*-*kg*	$2^{19}3^5k^{10}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(36+k^2\right)/4235$
7	$7^4\left(1+\ ^2\right)\left(49+\ ^2\right)\left(12711386205+6485401125\ ^2+1097665170\ ^4+79704282\ ^6+2547265\ ^8+29233\ ^{10}\right)^2\ 2025\,s$-$kp\ k\ k\ k\ k\ k\ k\ k/p$-$kd\ k$
7	$2^57^6\ ^2\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(86472015+21176820k\ k\ k\ k^8\right)^2/\ ^2+1766450\ ^4+60116\ ^6+711$
7	$2025\ 2^6\,7^6\ ^2+40229\ ^4+527\ d$-$k\ f\ k^4\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(49+k\right.$
7	$2025\left.^2\right)\left(7411887+972405k\ k\ k^6\right)^2/7\ 2^9\,7^7\ ^2+121\ f$-$kg\ k^6\left(1+k^2\right)\left(4+k\right.$
	$\left.^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(108045+7350k\ k^4\right)^2/6075\ 7\ 29710g$-$kh\ k^8\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(539+15k^2\right)^2/40095\ 7$
	$213712h$-$ki\ k^{10}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(36+k^2\right)\left(49+k^2\right)/245025\ 7^2\ 2147\,13\ i$-$kk\ k^{12}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k\right.$
	$\left.^2\right)\left(36+k^2\right)/7\ 2^4\,7^2\ ^2+525218750\ ^4+42435274p$-$ks\ k$
7	$2^5\,7^4\ ^2\left(49+\ ^2\right)\left(4237128735+2680632465\ ^6+1471715\ ^8+18021\ ^{10}\right)^2\ 2025\,k\ k\ k\ k\ k\ k/d$-$kp\ k^4\left(1+k^2\right)\left(49+k\right.$
	$\left.^2\right)\left(155649627+47799108k\ k\ k\ k^8\right)^2/7\ 2^9\,7^5\ ^2+94\ f$-$kd\ k^6\left(1+k\right.$
	$\left.^2\right)\left(4+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(21+k^2\right)^2\left(36015+4165k\ k^4\right)^2/7\ 2^9\,7^6\ ^2+219\ g$-$k\ f\ k^8\left(1+k^2\right)\left(4+\right.$
	$\left.k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(132055+11074k\ k^4\right)^2/200475\ 7\ 21278h$-$kg\ k^{10}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(49+k^2\right)\left(147+5k^2\right)^2/147015\ 7\ 213710$
	$11293425\ i$-$kh\ k^{12}\left(1+k^2\right)\left(4+k^2\right)\left(9+k^2\right)\left(16+k^2\right)\left(25+k^2\right)\left(49+k^2\right)/$

表5. 多项式 $P_n(k)$，见公式（35）。

n	$P_n(k)$
1	1
2	$\left(4+3k^2\right)\left(4+5k^2\right)$
3	$\left(81+78k^2+13k^4\right)\left(81+126k^2+29k^4\right)$
4	$\left(12288+13056k^2+3152k^4+197k^6\right)\left(12288+20736k^2+6800k^4+539k^6\right)/9$
5	$\left(1171875+1312500k^2+372250k^4+36100k^6+1083k^8\right)\left(1171875+2062500k^2+786250k^4+95700k^6+3467k^8\right)/9$
6	$\left(302330880+349920000k^2+108708480k^4+12909024k^6+628260k^8+10471k^{10}\right)\times$ $\left(302330880+545875200k^2+226281600k^4+33480864k^6+1953540k^8+38081k^{10}\right)/25$
7	$\left(622857924045+737260399890k^2+242899890135k^4+32480603148k^6+1993432651k^8+55606082k^{10}+567409k^{12}\right)\times$ $\left(622857924045+1144024758450k^2+500240606775k^4+82901603148k^6+6067218955k^8+196890722k^{10}+2297425k^{12}\right)/2025$

其中，$L_a^b(z)$为伴随拉盖尔多项式，

$$L_a^b(z)=\sum_{k=0}^{a}(-1)^k\frac{[(a+b)!]^2}{(a-k)!(b+k)!k!}z^k. \tag{29}$$

公式（27）的解具有如下形式

$$f_{nl,n'l'}=\frac{256}{3}\,n^3n'^5\,\tilde{Q}_{nl,n'l'}\,\frac{(n'-n)^{2(n'-n-1)}}{(n'+n)^{2(n'+n+1)}}. \tag{30}$$

这里，$\tilde{Q}_{nl,n'l'}$是关于n'^2的二阶多项式（$2(n-1)$）。根据式 (7) 中给出的选择定则，只有满足$l'=l\pm1$的项才能使$Q_{nl,n'l'}$取非零值。应用式 (24) 后可得

$$\frac{df_{nl,kl'}}{d\epsilon}=\frac{128}{3}\,\frac{n^3k^8Q_{nl,kl'}}{(n^2+k^2)^{2n+2}}\,\frac{\exp\left[-4k\arctan(n/k)\right]}{1-\exp(-2\pi k)}, \tag{31}$$

with

$$Q_{nl,kl'}=\tilde{Q}_{nl,n'l'}|_{n'=ik}. \tag{32}$$

该方法用于推导所有$Q_{nl,kl'}$在$1\le n\le 7$时的系数。表3和表4列出了这些系数的显式表达式，并修正了文献中此前报道的若干错误形式，其中尤以 Hatanaka（1946）中的$n=7$情形为甚。

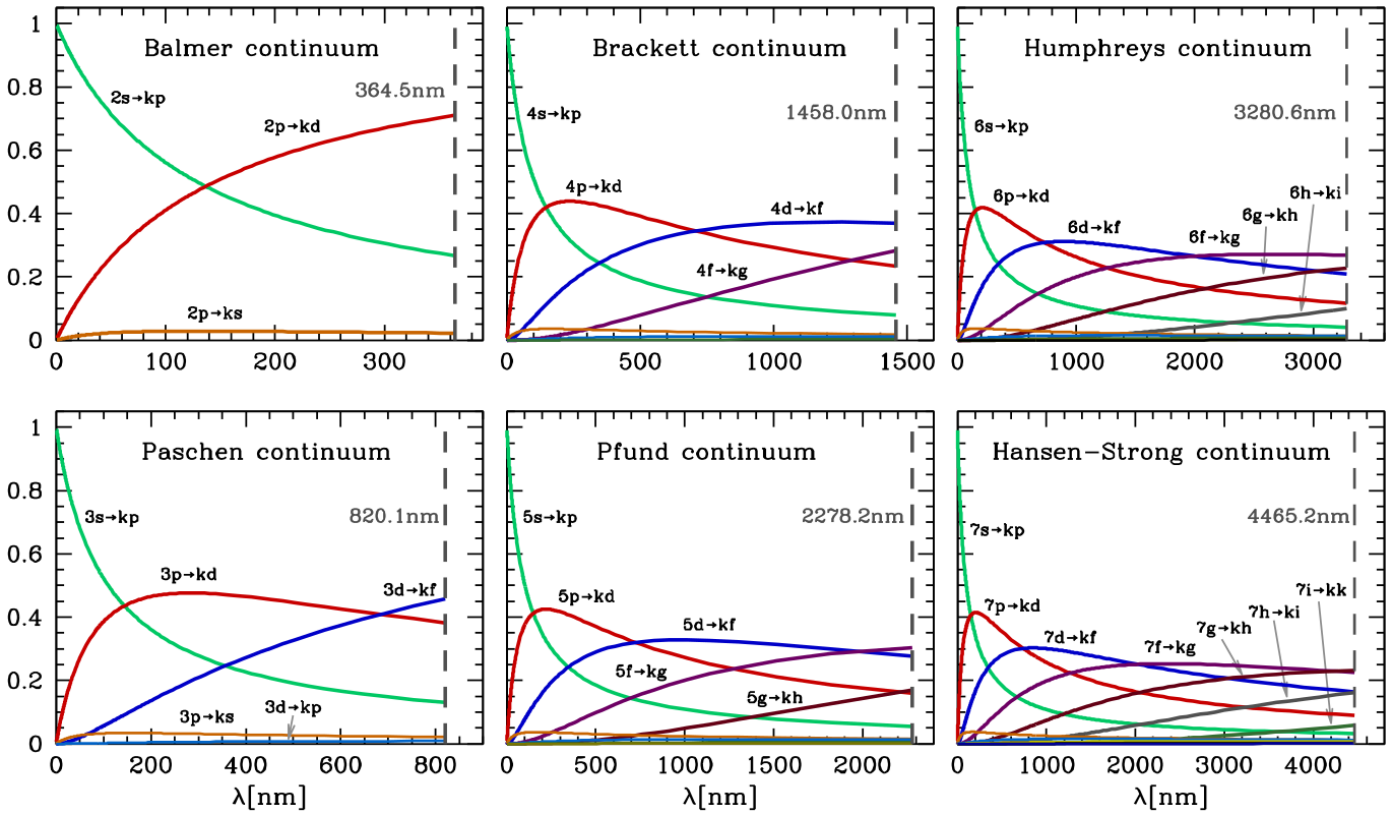

图2. 零磁场下，从巴耳末（$n = 2$）到 Hansen- Strong（$n = 7$）的连续谱所对应的分支比，表示为 $(2l + 1)n^{-2}Q_{nl,kl'}/P_{n,k}$ 随光波长变化的函数。竖直虚线表示光电离的极限波长。图中标出了最强的跃迁。

˜由于$Q_{nl,n'l'}$ 的系数在n'^2 的奇次幂项中为负、在偶次幂项中为正，因此所得函数$Q_{nl,kl'}$ 是关于k^2 的系数严格为正的多项式。

总截面 $\sigma_{n,k}$ 随后通过方程和 (23) 得到，

$$\sigma_{n,k} = 4\pi^2 \alpha a_0^2 \frac{df_{n,k}}{d\mathcal{E}}, \tag{33}$$

由此可得

$$\frac{df_{n,k}}{d\epsilon} = \frac{128}{3} \frac{n^3 k^8 P_{nk}}{(n^2 + k^2)^{2n+2}} \frac{\exp\left[-4k \arctan(n/k)\right]}{1 - \exp(-2\pi k)}, \tag{34}$$

with

$$P_{nk} = \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) \left(Q_{nl,kl-1} + Q_{nl,kl+1}\right). \tag{35}$$

前七个多项式 P_{nk} $(1 \le n \le 7)$列于表5中。每个多项式 P_{nk} 均满足关系

$$P_{n,k} = \tilde{P}_{n,n'} \qquad (n' = ik) \tag{36}$$

˜其中，多项式 $P_{n,n'}$ 与平均束缚态间振子强度 $f_{n,n'}$相关，

$$f_{n,n'} = \frac{256}{3} n^3 n'^5 \tilde{P}_{n,n'} \frac{(n' - n)^{2(n'-n-1)}}{(n' + n)^{2(n'+n+1)}}. \tag{37}$$

本文的结果（见式（36））修正了 Menzel 与 Pekeris（1935）报告中的两个小错误（参见其式 1.28），˜$P_{7,n'}$ 并给出了该文遗漏的$P_{6,n'}$的表达式。

最后，分支比的计算可简化为以下简单比值

$$\xi_{nl,kl'} \equiv \frac{Q_{nl,kl'}}{P_{nk}}. \tag{38}$$

图2展示了从 $2 \le n \le 7$亚态发生光电离的分支比的波长依赖性。

多项式$P_{n,k}$ 和$Q_{nl,kl'}$ 的复杂度在高主量子数下迅速增加，因此需要一种更高效的计算方案。如图2所示，$l \to l+1$ 的跃迁主导光电离强度，而$l \to l - 1$ 的跃迁则逐渐减弱，

$$\xi_{nl,k\,l+1} \gg \xi_{nl,k\,l-1}, \qquad n \gg 1. \tag{39}$$

另一方面，子能级nl 的截面可用近似方法计算

$$\sigma_{nl,k} = (\xi_{nl,k\,l+1} + \xi_{nl,k\,l-1})\,\sigma_{n,k} = \sigma_{n,k}^{\text{Kramers}} g_{nl}, \tag{40}$$

其中 $\sigma^{\text{Kramers}}{}_{n,k}$ 是跃迁$n \to k$的克拉默斯截面，g_{nl} 是与子能级（n,l）相关的束缚–自由盖特因子。类似地，平均截面$\sigma_{n,k}$ 可用盖特因子g_{nl}的l平均值来表示

$$\sigma_{n,k} = \sigma_{n,k}^{\text{Kramers}} g_n, \qquad g_n = \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) g_{nl}. \tag{41}$$

考虑到式（39）—（41），对于$n \ge 8$，我们采用以下近似

$$\xi_{nl,k\,l+1} \approx \frac{g_{nl}}{g_n}, \qquad \xi_{nl,k\,l-1} \approx 0. \tag{42}$$

束缚—自由盖特因子根据 Rozsnyai & Jacobs（1988）给出的解析表达式计算

$$g_{nl} = \begin{cases} a_1\omega(a_2+\omega)^{-a_3} & 1 \le \omega \le \omega_m, \\ a_4\omega(a_5+\omega)^{-l-3/2} & \omega_m < \omega < \infty, \end{cases} \tag{43}$$

其常数由该文指定。Kramers 截面 $\sigma^{\text{Kramers}}{}_{n,\ k}$ 由方程（33）给出，其中包含a_i 和 ω_m

$$\frac{df_{n,k}}{d\mathcal{E}} \approx \frac{16}{3\sqrt{3}\pi}\frac{1}{n^5}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{k^2}\right)^{-3}. \tag{44}$$

4. 磁场存在时的不透明度

磁白矮星大气中的磁场会解除每个能级n的简并，使其分裂为多个子能级ξ。因此，能量为$\mathcal{E}$、偏振为q 的光子的吸收系数 χ^q （单位为 cm^{-1}）由许多不同初始原子态的贡献组成，

$$\chi^q(\mathcal{E}) = \sum_{\xi}\sigma^q_{\xi}(\mathcal{E})n_{\xi}, \tag{45}$$

其中，$n_{\xi}[\text{cm}^{-3}]$ 是子能级 ξ的占据数。

假设原子附近的束缚电子和自由电子波函数不受磁场扰动，因此方程（1）中的跃迁矩阵元保持不变，则 RWA 框架内的截面可写为

$$\sigma^q_{\xi}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}-\Delta_{\xi}}\sigma^{q,0}_{\xi}(\mathcal{E}-\Delta_{\xi}), \tag{46}$$

其中 $\sigma^{q,\ 0}_{\xi}$ 为零场截面， Δ_{ξ} 为磁场引起的电离阈值位移，

$$\Delta_{\xi} \equiv \mathcal{E}_{\xi,*} - \mathcal{E}_{\xi,0}, \tag{47}$$

其中 $\mathcal{E}_{\xi,\ *}$ 和 $\mathcal{E}_{\xi,\ 0}$ 分别表示存在和不存在磁场时的电离阈值。实际上，式（46）对应于对截面振幅进行缩放，并修改计算式（13）时所采用的准主量子数 k 。如式（25）所示，k 取决于光子能量超过电离阈值的部分，因此

$$k = (\mathcal{E}-\mathcal{E}_{\xi,*})^{-1/2}. \tag{48}$$

4.1. 本征能量

磁化原子的哈密顿量本征态有几种不同的确定方式。在低磁场强度极限（塞曼近似）下，

$\beta \ll 1$ $\beta =$ $_0$, $_0 = 2$ ^2_e ^{3} $\hbar^3 \approx$ (磁场/ 4 70103 × 10^9 *BBmce*/ . 高斯)，原子态由自由原子的常用量子数 $\xi = \{n、l、m、m_s\}$标记（$m_s = \pm\frac{1}{2}$表示电子自旋的z分量）。对于静止在磁场中的氢原子，其束缚能 $\mathcal{E}_{\xi}$（包含线性和二次塞曼修正，即关于β精确到二阶；参见 Guth 1929；Van Vleck 1932；Schiff & Snyder 1939；Garstang 1977）为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\xi} &= -\frac{1}{n^2}+4\left(\frac{m}{2}+m_s\right)\beta \\ &\quad + \frac{n^2[5n^2+1-3l(l+1)](l^2+l-1+m^2)}{(2l-1)(2l+3)}\beta^2.\end{aligned} \tag{49}$$

在另一极端的强磁场下（$\beta \gg 1$），本征态已通过绝热近似进行研究（Schiff & Snyder 1939；Canuto & Kelly 1972），并按集合 $\xi = \{N、\nu、m、m_s\}$分类。这里，N（= 0、1、2、.....）表示电子垂直于磁场的运动量子化（朗道能级），而 ν 则指定沿磁场方向的波函数激发。

强磁场中的态与无场原子的态通过非交叉规则相联系（Simola & Virtamo 1978）；由于势能的对称性，量子数 m、m_s以及 z- 奇偶性 $\pi_z = \pm 1$ （沿磁场方向的反射对称性）守恒。其余量子数（n、l）和（N、ν）在束缚态情况下由保持能量递增次序的表达式联系起来，该次序在 $\beta \to 0$和 $\beta \to \infty$ 的极限下成立（Vera-Rueda & Rohrmann 2020）。因此，两组量子数 $\{n、l、m、m_s\}$和 $\{N、\nu、m、m_s\}$之间存在一一对应关系，两种标记方式均可使用。

静止氢原子在任意磁场强度下的精确结合能可以通过数值方法计算（Kravchenko 等，1996）。在本研究中，我们采用对精确数值计算结果的解析拟合（Vera-Rueda & Rohrmann，2020；Schimeczek & Wunner，2014）。这些拟合涵盖任意数量的原子态，并结合公式（49），以确保在弱磁场极限下具有高精度 $\beta \to 0$。能量计算包含由内部运动（Pavlov-Verevkin& Zhilinskii，1980）和整体运动（Vincke & Baye，1988）引起的质心修正。后者考虑了磁化原子的结合能与其垂直于磁场的运动之间的耦合。

对于本研究所考虑的磁场范围（$\beta \ll 1$），原子的总能量可写为

$$E = \mathcal{E}_{\xi} + \frac{k_{\perp}^2}{2M_{\perp,\xi}} + \frac{k_z^2}{2M_{\text{H}}}, \tag{50}$$

其中， $\mathcal{E}_{\xi}$ 是静止氢原子的能量；$k_{\perp}$ 和 k_z 是伪动量的分量，用于将质心运动与质子—电子相对运动分离（Gor'kov ˇ& Dzyaloshinskii 1968）；M_{H} 是氢原子的总质量，而 $M_{\perp,\xi}$ 是氢原子垂直于磁场运动时的有效质量（Pavlov & Meszaros 1993）。

在本研究中，我们忽略所谓的偏心原子态。这类束缚态的电子波函数从库仑势阱偏移至磁势阱（Burkova et al. 1976），因此无法在RWA框架内处理。这些态的形成需要较强的磁场强度和较大的横向伪动量。根据最初为中子星大气推导的表达式，并将其调整为磁白矮星条件（Vera-Rueda & Rohrmann 2020）所得的初步估算表明，偏心态可能出现在强磁白矮星的表面（磁场 ≈ 470 兆高斯）。因此，本文采用的两种近似——RWA以及式（50）中对应于中心态的有效横向质量——适用于较弱的磁场，在这种情况下可以安全地忽略偏心态。

任意束缚态的结合能 ξ 可表示为

$$\mathcal{E}_{\xi} = \mathcal{E}_{-|m|} + 2\beta\left(|m| + m + 2m_s + 1\right), \tag{51}$$

其中 $\mathcal{E}_{-|m|}$ 表示磁量子数等于 $-|m|$的自旋向下态的结合能。

对于束缚-自由跃迁 $\xi \to \xi'$，连续态的阈值能量为

$$\mathcal{E}_c = 2\beta\,(|m'| + m' + 2m'_s + 1), \tag{52}$$

这对应于一个没有径向激发、沿磁场方向动能为零的自由电子（Rohrmann 2025）。差值 $\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_\xi$ 定义了式（47）和（48）所需的电离阈值。考虑到电偶极跃迁中，磁量子数按 $m' = m + q$ 变化，且电子自旋保持不变（$m'_s = m_s$），可得

$$\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_\xi = \begin{cases} -\mathcal{E}_{-|m|} + 4\beta, & q = +1,\ m \geq 0, \\ -\mathcal{E}_{-|m|} - 4\beta, & q = -1,\ m \geq 1, \\ -\mathcal{E}_{-|m|}, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{53}$$

由于某些初始态 ξ 对于给定偏振 q 可能位于连续谱边缘之上（特别是对于 $q = -1$ 和 $m \geq 1$），光电离所需的最低能量为

$$\mathcal{E}_{\xi,*} = \max(0, \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_\xi). \tag{54}$$

在所有情况下，当 $\beta \to 0$ 时，$\mathcal{E}_{\xi,*} \to \mathcal{E}_{\xi,0} = n^{-2}$，正如预期的那样。

4.2. 占据数

原子（n_H）、质子（n_P）和自由电子（n_e）的丰度由化学势关系 $\mu_H = \mu_p + \mu_e$ 表示的电离平衡确定（详见 Vera-Rueda & Rohrmann 2020）。

$$\frac{n_H}{n_e n_p} = \frac{\lambda_e^3}{2} f(\eta) Z_H. \tag{55}$$

这里，λ_e 是电子热波长，Z_H 是原子配分函数，而 $f(\eta)$ 是一个用于考虑自由电荷过量化学势的因子。该因子取决于 $\eta = 2\beta/(k_B T)$，其中 k_B 是玻尔兹曼常数，T 是气体温度（热能 $k_B T$ 以里德伯为单位表示）。函数 $f(\eta)$ 源于带电粒子与磁场的相互作用，以及横向运动被冻结在朗道轨道中所导致的态密度变化。利用方程（50），原子配分函数可计算为

$$Z_H = \sum_\xi \frac{M_{\perp,\xi}}{M_H} w_\xi e^{-\mathcal{E}_\xi / k_B T}, \tag{56}$$

其中，有效原子质量（$M_{\perp,\xi}$）取决于内部状态和磁场强度，而 w_ξ 是一个占据概率，用于考虑密度效应对原子的影响。束缚态的占据数由下式确定

$$n_\xi = \frac{n_H}{Z_H} \frac{M_{\perp,\xi}}{M_H} w_\xi e^{-\mathcal{E}_\xi / k_B T}. \tag{57}$$

请注意，在电离平衡条件下，方程（57）适用于所有原子态，无论其能量位于光电离连续谱阈值之下还是之上；该阈值本身取决于光子偏振。能量相对较高的态（例如亚稳态）的丰度预计会非常低。

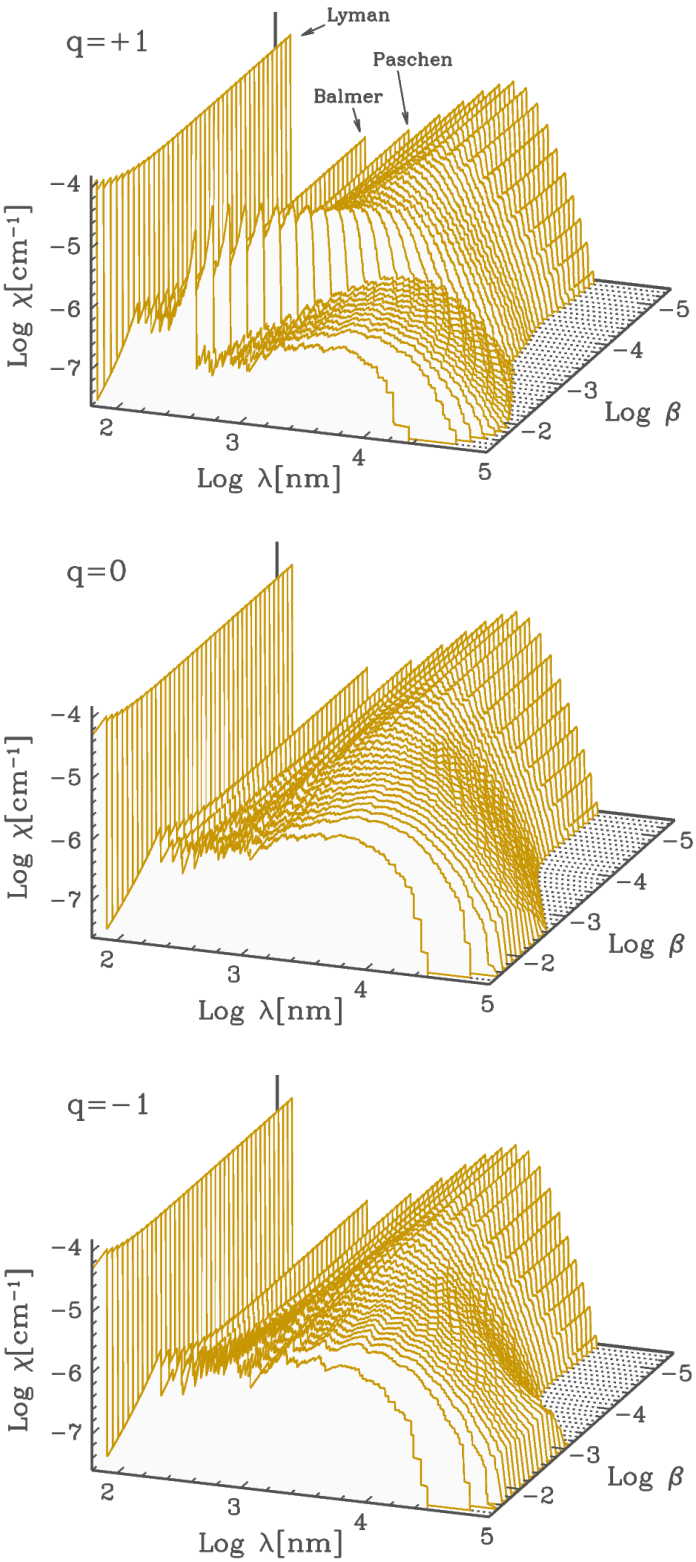

图3。 原子氢在 $T = 20000$ K和 $\log \rho = 10^{-8}$ g/cm^3，条件下，由不同光子偏振（$q = 0$、± 1）及不同磁场强度引起的光电离消光系数。

5. 结果与讨论

为说明 RWA 对磁化氢原子光电离不透明度的影响，我们考虑温度为 $T = 20000$ K、密度为 $\rho = 10^{-8}$ g cm^{-3} 的气体。图 3 显示了三种光子偏振

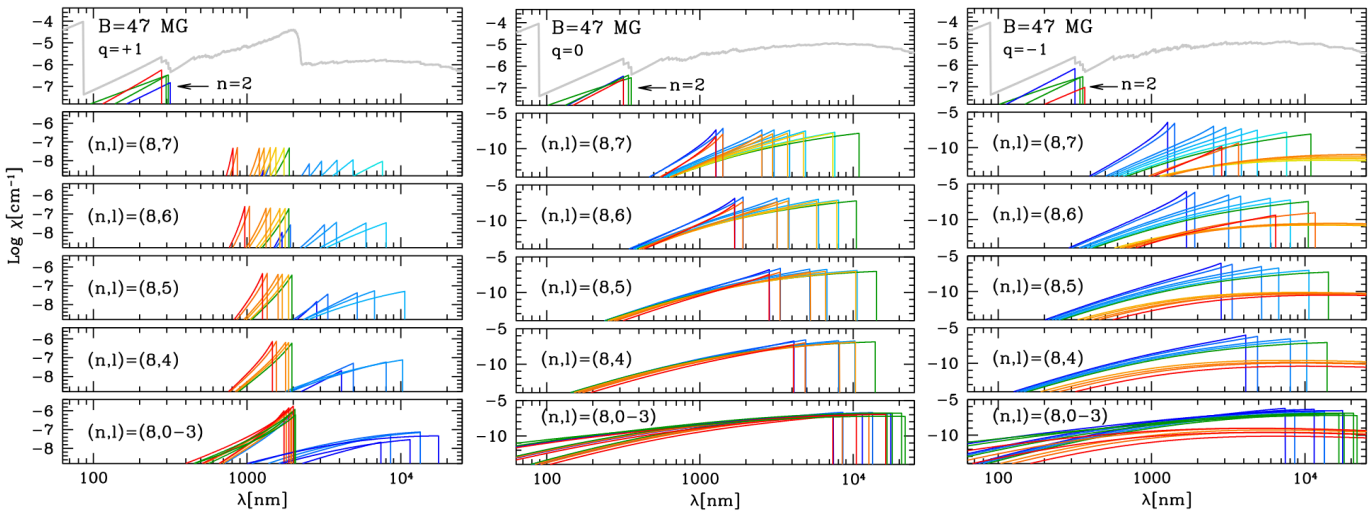

图4。 总光电离吸收χ^q（灰色粗线）以及$n\ell$能级簇中$n = 2$和$n = 8$能级簇的自旋向下子能级所产生的部分贡献，计算时取磁场 ≈ 47 兆高斯（$\log\beta = -2$），光子偏振为$q = 0, \pm 1$。不同颜色表示具有不同m值的状态所作的贡献：绿色对应$m = 0$，浅蓝色对应$m < 0$（蓝色对应$m = -l$），浅红色对应$m > 0$（红色对应$m = l$）。

态（$q = 0, \pm 1$）在磁场范围 $-5.4 \le \log\beta \le -1.3$（19 kG $\le$ 磁场 $\le$ 235 MG）内的吸收系数。

在最低磁场强度下，所有偏振的光吸收系数都相同，并呈现无磁场光谱的典型跃变序列（图3中从$n = 1$ 到17级）。随着磁场增强，源自较高n 能级的连续谱会在不同波长处出现多个较小的跃变，使吸收轮廓从低光子能量到高光子能量逐渐变得平滑。当磁场强度高于磁场 $\approx$ 0.5兆高斯（$\log\beta \gtrsim -4$）时，吸收延伸至更长波长。左旋圆偏振（$q = -1$）下这一效应最为显著，这是由于具有正m值的状态有所贡献，其电离阈值根据4β [式（53）]而降低。当磁场超过磁场 $\approx$ 10 兆高斯（$\log\beta \gtrsim -2.7$）时，右旋圆偏振光电离（$q = +1$）会在回旋共振（光子能量 $\epsilon = 4\beta$）对应波长的短波侧形成一个隆起；随着磁场进一步增强，该隆起演变为共振波长稍短处的突跃（Rohrmann2025）。相比之下，对于偏振$q = 0$和$q = -1$，吸收系数的主体略有下降，并向较长波长移动。

对于所有偏振，莱曼连续谱在本文考察的最高磁场范围内基本保持不变，但当 $\log\beta \approx -2$ (磁场 $\approx$ 47 兆高斯)时，其强度开始显著增加，并且 χ^+ 分量向更高的光子能量移动。在最强磁场下，长波长处的吸收系数降低。在此状态下，主要贡献来自具有正m和/或m_s的态；这些态趋近于连续谱，其占据数显著减少，从而解释了吸收的下降。

通过分析与特定零场n能级簇相关态的各自贡献，可以更好地理解上述行为。图 4 展示了 $\log\beta = -2$(磁场 $\approx$ 47 兆高斯)时，$n = 2$ 和$n = 8$ 能级簇产生的分量，以及三种光子偏振 $q = 0, \pm 1$对应的结果。如上方各图所示，总光电离系数（灰色曲线）仍呈现莱曼连续谱和残余的巴耳末连续谱。然而，巴耳末光谱显示出明显的电离边，其位置取决于初始原子态（即磁量子数）以及辐射的偏振，Jordan（1992）和 Merani 等人（1995）最先对此作了描述。

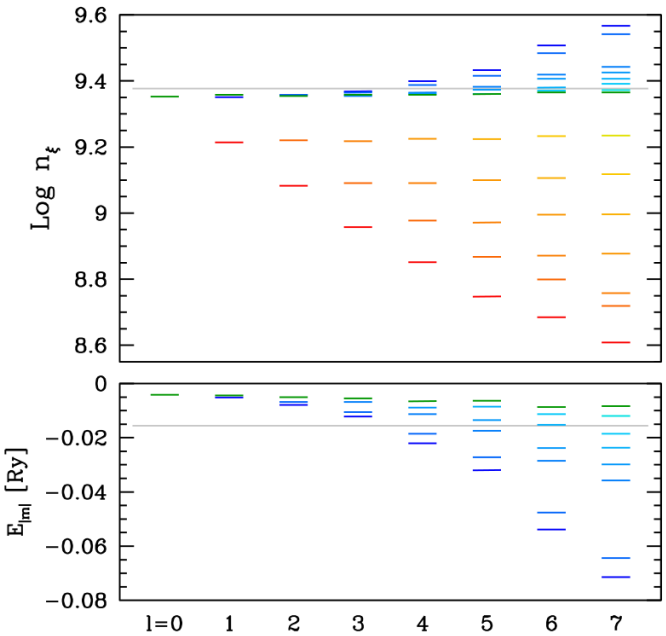

图5。 与$n = 8$ 能级簇相关的自旋向下原子子能级的丰度和束缚能，按量子数l排序。颜色区分m的取值：绿色表示$m = 0$，浅蓝色表示$m < 0$（蓝色表示$m = -l$），浅红色表示$m > 0$（红色表示$m = l$）。灰线表示零场下的对应值（与无磁场能级$n = 8$相关的所有子能级具有相同的值）。

所有其他激发态的贡献大多混合在一起。属于$n = 8$能级簇的态是这一行为的典型例子。图 5 展示了选定l 和m值的自旋向下态的丰度及其束缚能（$\mathcal{E}_{-|m|}$）。

吸收边在能谱中按照式（53）随磁场而移动。对于$q = 0$（线偏振辐射），具有 $\pm m$ 的态共享同一电离边（图4的中间图），其位置完全由 $\mathcal{E}_{-|m|}$的值决定。电离边在较大的 $|m|$ 时出现于更高能量，并呈现出更宽的分布

在与高l 能级簇相关的态所对应的能谱上，这一点可由图5所示的数值推断。相比之下，正m 态（浅红色曲线）的贡献对于$q = -1$ （+1）的辐射还会额外向更低（更高）能量偏移 4β，如图4所示。因此，左旋圆偏振辐射引起的光电离主要向更长波长延伸，而右旋圆偏振则导致贡献在短于回旋共振的波长处累积。回旋线附近的这种重叠随磁场强度增大而愈发显著，并越来越多地涉及源自更高n 能级簇的态。这种行为导致了上文所述的突然跃变。[2]

由于电离能增大，原子的总丰度随磁场增强而增加（在低磁场强度下增长缓慢）。该能量在磁场 $\approx$47 兆高斯时达到 $-E_{1s,\ m_s=-1/2} = 1.0191$ Ry。因此，基态的占据数（零磁场记号下的 $1s^{-1/2}$ ）增加，而激发态的粒子丰度大多下降。这些变化相对温和，但当磁场 $\sim$ 50超过兆高斯时，变化会更加显著。除$n = 1$能级簇外，在所采用的气体条件下，与零磁场$n = 8$ 能级簇对应的态是占据最多的，略高于$n = 2$能级簇的占据数。对于固定的n 和l，结合能——因此粒子丰度——随m 增大而减小（图4）。在（n，l） = (8,7)能级簇中，m 值最小和最大的态之间的占据数差异约达一个数量级。这意味着，虽然给定n 能级簇的总占据数可能与其零场值相差不大，但其各个子能级的占据数却可能有显著差异，如图5所示。

每个跃迁对总不透明度的贡献 $\sigma_\xi^q\, n_\xi$ 取决于跃迁概率和初态的占据数。它们各自对磁量子数的依赖性有助于解释图4所示的行为。截面 σ_ξ^q 主要由 $l \to l+1$ 跃迁决定，这类跃迁涉及式（15）]中的几何权重因子 $A^q{}_{lm}$[。对于左旋圆偏振光，这些因子随 m 增大而减小；对于右旋偏振则随之增大。对于给定的 n 和 l，左旋圆偏振光的吸收主要随 m 增大而减弱，因为占据数 n_ξ 和几何因子$A^q{}_{lm}$ 均会减小（图4右图中的曲线由蓝变红）。此外，对于从$m > 0$态出发的跃迁，相应的吸收轮廓会向较长波长方向移动。相反，对于右旋偏振辐射，n_ξ 随m增大而减小的趋势，在很大程度上被几何权重$A^q{}_{lm}$的增大所抵消。这解释了为何从占据稀少的状态（$m \geq 0$）发生的光电离会产生回旋线附近显著的χ^+ 特征（图4左图），这些状态的跃迁能量会向较高能量方向偏移。

[2] 可通过比较零场结合能的绝对值（$1/n^2$）与回旋能 4β，估算出某个磁场强度；在该强度下，给定n 能级簇中的正m 态会对 χ^+ 特征产生显著贡献，从而得到$n > (4\beta)^{-1/2}$。作为参考，这分别对应于B = 14.5、47 和 130 兆高斯时的$n > 9$、5 和 3（$\log\beta = -2.5, -2.0, -1.6$）。

6. 总结

我们详细介绍了一套计算磁白矮星（MWDs）氢大气光电离不透明度的流程，适用于磁场强度较低至中等的情况。本文分析的方法是对 Lamb & Sutherland（1974）最初提出的刚性波函数近似的更新版本，并结合了精确的原子能量，可适用于任意磁场强度下理论上不受数量限制的束缚态（Vera-Rueda & Rohrmann 2020）。计算吸收系数还需要自洽地评估初始束缚态的丰度。为此，我们计算了磁场中氢的电离平衡，并得到了绝对光电离不透明度。

由于磁场会打破原子能级的简并，在磁场范围 $1 \lesssim B \lesssim 100$兆高斯内，大量跃迁都会对光电离不透明度产生贡献。每种光电离过程都以两种截然不同的方式取决于光偏振：一是通过几何概率因子（由 Wigner 3j 系数给出），二是通过与特定朗道能级相关的电离阈值。二向色特征主要源于后一种效应，因为对于右旋或左旋圆偏振光，正m 态的连续谱阈值会分别因回旋能而进一步向上或向下移动。来自正m 态的光电离会使连续谱不透明度显著跃升（位于第一个回旋共振的蓝侧），这一现象出现在右旋圆偏振下；而在左旋圆偏振下，不透明度则会延伸至更长波长处。这种各向异性在数兆高斯的磁场强度下便已显现，并且在更强磁场下愈发显著（图 3）。

因此，总光电离不透明度在很大程度上取决于跃迁边缘的位置和初态的丰度；在本框架中，这两者均得到了连贯且准确的处理。RWA 方法的局限在于，它无法再现完全严格的计算所得截面随波长变化的非单调性，不过能够较好地再现其平滑后的平均行为。由于有大量跃迁对总不透明度作出贡献，预计在应用于磁性白矮星模型大气时，精确截面的细节——尤其是共振结构——会因各分量求和以及磁场分布而变得模糊。一旦能够获得所需大量跃迁的精确截面，便可检验这一预期，并确定 RWA 不再可靠时的磁场强度。

参考文献

Alijah, A., Hinze, J., & Broad, J. T. 1990, 《B辑物理学杂志：原子与分子物理》, 23, 45 Amorim, L. L., Kepler, S. O., Külebi, B., Jordan, S., & Romero, A. D. 2023, 《天体物理学杂志》, 944, 56 Bethe, H. A. & Salpeter, E. E. 1957, 单电子与双电子原子的量子力学 Bhattacharya, S. K. & Chu, S. I. 1985, 《 B 辑物理学杂志：原子与分子物理》 , 18, L275 Burgess, A. 1965, 《皇家天文学会会刊》, 69, 1 Burkova, L. A., Dzyaloshinskiĭ, I. E., Drukarev, G. F., & Monozon, B. S. 1976, 《苏联实验与理论物理学杂志》, 44, 276 Canuto, V. & Kelly, D. C. 1972, 《天体物理与空间科学》, 17, 277 Delande, D., Bommier, A., & Gay, J. C. 1991, 《物理评论快报》, 66, 141 Euchner, F., Jordan, S., Beuermann, K., Gänsicke, B. T., & Hessman, F. V. 2002, 《天文学与天体物理学》, 390, 633 Garstang, R. H. 1977, 《物理学进展报告》, 40, 105 Gnedin, Y. N., Pavlov, G. G., & Tsygan, A. I. 1974, 《苏联实验与理论物理学杂志》, 39, 201

Gor’kov, L. P. & Dzyaloshinskiĭ, I. E. 1968, 《苏联实验与理论物理学杂志》, 26, 449 Grant, I. P. 1958, 《皇家天文学会月刊》, 118, 241 Greene, C. H. 1983, 《物理评论A》, 28, 2209 Guth, E. 1929, 《物理学杂志》, 58, 368 Hatanaka, T. 1946, 《日本天文学与地球物理学杂志》, 21, 1 Jordan, S. 1989, 载于国际天文学联合会第114次座谈会：白矮星, G. Wegner编, 第328卷, 333 Jordan, S. 1992, 《天文学与天体物理学》, 265, 570 Kravchenko, Y. P., Liberman, M. A., & Johansson, B. 1996, 《物理评论A》, 54, 287 Lamb, F. K. & Sutherland, P. G. 1972, 载于磁场存在下的谱线形成, 183 Lamb, F. K. & Sutherland, P. G. 1974, 载于致密物质物理学, C. J. Hansen编, 第 53 卷 , 265 Martin, B. & Wickramasinghe, D. T. 1986, 《天体物理学杂志》, 301, 177 Meinhardt, G., Schweizer, W., Herold, H., & Wunner, G. 1999, 《欧洲物理学杂志D》, 5, 23 Menzel, D. H. & Pekeris, C. L. 1935, 《皇家天文学会月刊》, 96, 77 Merani, N., Main, J., & Wunner, G. 1995, 《天文学与天体物理学》, 298, 193 Mota-Furtado, F. & O’Mahony, P. F. 2007, 《物理评论A》, 76, 053405 Pavlov, G. G. & Meszaros, P. 1993, 《天体物理学杂志》, 416, 752 Pavlov-Verevkin, V. B. & Zhilinskii, B. I. 1980, 《物理学快报A》, 78, 244 Potekhin, A. Y. & Pavlov, G. G. 1997, 《天体物理学杂志》, 483, 414 Putney, A. & Jordan, S. 1995, 《天体物理学杂志》, 449, 863 Rohrmann, R. D. 2025, 《天文学与天体物理学》, 693, L5 Rozsnyai, B. F. & Jacobs, V. L. 1988, 《天体物理学杂志》, 327, 485 Schiff, L. I. & Snyder, H. 1939, 《物理评论》, 55, 59 Schimeczek, C. & Wunner, G. 2014, 《天体物理学杂志增刊》, 212, 26 Schmidt, W., Herold, H., Ruder, H., & Wunner, G. 1981, 《天文学与天体物理学》, 94, 194 Simola, J. & Virtamo, J. 1978, 《B辑物理学杂志：原子与分子物理》, 11, 3309 Stobbe, M. 1930, 《物理学年鉴》, 399, 661 Van Vleck, J. H. 1932, 电磁感受率理论 Vera-Rueda, M. & Rohrmann, R. D. 2020, 《天文学与天体物理学》, 635, A180 Vera-Rueda, M. & Rohrmann, R. D. 2024, 《天文学与天体物理学》, 687, A141 Vincke, M. & Baye, D. 1988, 《B辑物理学杂志：原子与分子物理》, 21, 2407 Wang, Q. & Greene, C. H. 1991, 《物理评论A》, 44, 7448 Wickramasinghe, D. T. 1995, 载于太平洋天文学会会议系列, 第78卷, 强大新型数据库的天体物理学应用, S. J. Adelman & W. L. Wiese编, 319 Wickramasinghe, D. T. & Ferrario, L. 2000, 《太平洋天文学会出版物》, 112, 873 Zhao, L. B. 2021, 《天体物理学杂志增刊》, 254, 21 Zhao, L. B. & Stancil, P. C. 2007, 《天体物理学杂志》, 667, 1119